Преподаватель:
Прутков Козьма Петрович

Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Лабораторная работа

Функции Бесселя, лаб.работа А

Студент: **Игреков Игрек Игрекович**

Екатеринбург
2019-2020

PrutkovKP@portal.portal

Указания к оформлению работы

Выполнение лабораторной работы следует выполнять в 3 этапа:
I) проведение вычислений в соответствии с заданием(для получения числовых значений можно использовать калькулятор или программы `Maxima`, `Excel` и др.) ;

Указания к оформлению работы

Выполнение лабораторной работы следует выполнять в 3 этапа:
I) проведение вычислений в соответствии с заданием;
II) для получения таблиц значений, построения графиков и других вариантов визуализации следует воспользоваться шаблоном программы (после необходимой корректировки)
`Имя_группы-Название_лабораторной_работы-Имя_студента.wxm`
или (для `Android`)
`Имя_группы-Название_лабораторной_работы-Имя_студента.mac`;

Указания к оформлению работы

Выполнение лабораторной работы следует выполнять в 3 этапа:
I) проведение вычислений в соответствии с заданием;
II) для получения таблиц значений, построения графиков и других вариантов визуализации следует воспользоваться шаблоном программы (после необходимой корректировки)
`Имя_группы-Название_лабораторной_работы-Имя_студента.wxm`
или (для `Android`)
`Имя_группы-Название_лабораторной_работы-Имя_студента.mac`;
III) при обнаружении ошибок (например, расхождений расчетов с результатами визуализации) вернуться к пунктам 2 или 1.

Указания к оформлению работы

Выполнение лабораторной работы следует выполнять в 3 этапа:
I) проведение вычислений в соответствии с заданием;
II) для получения таблиц значений, построения графиков и других вариантов визуализации следует воспользоваться шаблоном программы (после необходимой корректировки)
`Имя_группы-Название_лабораторной_работы-Имя_студента.wxm`
или (для `Android`)
`Имя_группы-Название_лабораторной_работы-Имя_студента.mac`;
III) при обнаружении ошибок (например, расхождений расчетов с результатами визуализации) вернуться к пунктам 2 или 1.

Выполненную лабораторную работу следует сохранить и выслать по `e-mail` `PrutkovKP@portal.portal`

Указания к оформлению работы

1) **При вводе формулы** в полях для ввода знак умножения * писать обязательно, деление обозначается как $/$.

Обозначения системы компьютерной алгебры `Maxima`								
$\sqrt{\ldots}$	`sqrt(...)`	$\sin\ldots$	`sin(...)`	$\arcsin\ldots$	`asin(...)`	$\ln\ldots$	`log(...)`
a^b	`a^b`	$\cos\ldots$	`cos(...)`	$\arccos\ldots$	`acos(...)`	π	`%pi`
e^x	`exp(x)`	$\mathrm{tg}\ldots$	`tan(...)`	$\mathrm{arctg}\ldots$	`atan(...)`	e	`%e`

Указания к оформлению работы

1) **При вводе формулы** в полях для ввода знак умножения * писать обязательно, деление обозначается как $/$.

Обозначения системы компьютерной алгебры `Maxima`							
$\sqrt{\ldots}$	`sqrt(...)`	$\sin\ldots$	`sin(...)`	$\arcsin\ldots$	`asin(...)`	$\ln\ldots$	`log(...)`
a^b	`a^b`	$\cos\ldots$	`cos(...)`	$\arccos\ldots$	`acos(...)`	π	`%pi`
e^x	`exp(x)`	$\mathrm{tg}\ldots$	`tan(...)`	$\mathrm{arctg}\ldots$	`atan(...)`	e	`%e`

Например, x^{5t-3} записывается как `x^(5*t-3)`;

$\ln x$ надо записать `log(x)`), $\lg\ldots$ как `log(...)/log(10)`;

e^{3-2x} можно записать как `exp(1-2x)` или как `e^(1-2x)`;

Указания к оформлению работы

1) **При вводе формулы** в полях для ввода знак умножения * писать обязательно, деление обозначается как /.

Обозначения системы компьютерной алгебры `Maxima`							
$\sqrt{\ldots}$	`sqrt(...)`	$\sin\ldots$	`sin(...)`	$\arcsin\ldots$	`asin(...)`	$\ln\ldots$	`log(...)`
a^b	`a^b`	$\cos\ldots$	`cos(...)`	$\arccos\ldots$	`acos(...)`	π	`%pi`
e^x	`exp(x)`	$\mathrm{tg}\ldots$	`tan(...)`	$\mathrm{arctg}\ldots$	`atan(...)`	e	`%e`

Понятно, что, например, $\sin^3 t$ надо представить выражением `((sin(t))^3)` или `(sin(t))^3`, или даже `sin(t)^3`, но не `sin^3(t)`.

Указания к оформлению работы

1) **При вводе формулы** в полях для ввода знак умножения * писать обязательно, деление обозначается как /.

Обозначения системы компьютерной алгебры `Maxima`							
$\sqrt{\ldots}$	`sqrt(...)`	$\sin\ldots$	`sin(...)`	$\arcsin\ldots$	`asin(...)`	$\ln\ldots$	`log(...)`
a^b	`a^b`	$\cos\ldots$	`cos(...)`	$\arccos\ldots$	`acos(...)`	π	`%pi`
e^x	`exp(x)`	$\mathrm{tg}\ldots$	`tan(...)`	$\mathrm{arctg}\ldots$	`atan(...)`	e	`%e`

2) Приоритетность операций можно изменить с помощью КРУГЛЫХ скобок, все скобки должны быть парными (каждой открывающейся скобке соответствует закрывающаяся). Использовать можно только круглые скобки.

Указания к оформлению работы

2) **При вводе формулы** в полях для ввода знак умножения * писать обязательно, деление обозначается как /.

Обозначения системы компьютерной алгебры `Maxima`							
$\sqrt{\ldots}$	`sqrt(...)`	$\sin\ldots$	`sin(...)`	$\arcsin\ldots$	`asin(...)`	$\ln\ldots$	`log(...)`
a^b	`a^b`	$\cos\ldots$	`cos(...)`	$\arccos\ldots$	`acos(...)`	π	`%pi`
e^x	`exp(x)`	$\mathrm{tg}\ldots$	`tan(...)`	$\mathrm{arctg}\ldots$	`atan(...)`	e	`%e`

2) Приоритетность операций можно изменить с помощью КРУГЛЫХ скобок, все скобки должны быть парными (каждой открывающейся скобке соответствует закрывающаяся). Использовать можно только круглые скобки.

Считаем, что сумма может состоять из одного слагаемого.

Оглавление

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Самосопряженный вид уравнения (1):

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Самосопряженный вид уравнения (1): $\frac{1}{x}(xy')' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) xy = 0.$

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Самосопряженный вид уравнения (1): $\frac{1}{x}(xy')' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)xy = 0.$

При $\alpha \notin \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ такими линейно независимыми решениями являются функции J_α и $J_{-\alpha}$, задаваемые выражением

$$J_\beta(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(\beta + k + 1)}, \text{ где } \begin{cases} \beta = \pm\alpha, \\ x \in \mathbb{C}, \\ |\arg(x)| < \pi, \end{cases} \tag{2}$$

где $\Gamma(x)$ — **гамма-функция**.

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Самосопряженный вид уравнения (1): $\frac{1}{x}(xy')' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)xy = 0.$

Функция Бесселя: $J_\beta(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(\beta+k+1)}$, где $\beta > 0$, — ограниченное в 0 решение уравнения Бесселя.

Функция Неймана:

при $\alpha \notin \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

$N_\alpha(x) = Y_\alpha(x) = \frac{1}{\sin(\alpha\pi)}\left(J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)\right)$,

а при $\alpha \in \mathbb{N} \quad Y_n(x) = N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x)$.

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Самосопряженный вид уравнения (1): $\frac{1}{x}(xy')' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)xy = 0.$

При решении задач математической физики важную роль играет легко проверяемый факт, что функция $J_\alpha(\sqrt{-\lambda}x)$ является решением ДУ $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{\alpha^2}{x^2}y = -\lambda y.$

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Самосопряженный вид уравнения (1): $\frac{1}{x}(xy')' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)xy = 0.$

Важные частные случаи:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) =$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) =$$

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Самосопряженный вид уравнения (1): $\frac{1}{x}(xy')' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)xy = 0.$

Важные частные случаи:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) =$$

Устные упражнения «функции Бесселя»

1) Уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Самосопряженный вид уравнения (1): $\frac{1}{x}(xy')' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)xy = 0.$

Важные частные случаи:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Устные упражнения «функции Бесселя»

Корни уравнения $J_\alpha(x) = 0$ *обозначают через* μ_k^α, $k = 0, 1, \ldots$.

1) $\int\limits_0^t x J_\alpha(px) J_\alpha(qx)\, dx = \dfrac{t}{p^2 - q^2} \big(p J_{\alpha+1}(pt) J_\alpha(qt) - q J_\alpha(pt) J_{\alpha+1}(qt)\big) =$

$= \dfrac{t}{p^2 - q^2} \big(q J_\alpha(pt) J_{\alpha-1}(qt) - p J_{\alpha-1}(pt) J_\alpha(qt)\big)$, при $p^2 \neq q^2$.

2) $\int\limits_0^t x J_\alpha^2(px)\, dx = \dfrac{t^2}{2} {J'}_\alpha^2(pt) + \dfrac{1}{2} \left(t^2 - \dfrac{\alpha^2}{p^2}\right) J_\alpha^2(pt)$ при $\alpha > -1$.

3) $\dfrac{d}{dx}(x^\alpha J_\alpha(x)) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$.

4) $\dfrac{d}{dx}(x^{-\alpha} J_\alpha(x)) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$.

5) $J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) = \dfrac{2\alpha}{x} J_\alpha(x)$.

6) $J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) = 2J'_\alpha(x)$.

7) $J_{-\alpha}(x) = \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha\pi}\left(J_\alpha(x) + i N_\alpha(x)\right)\right)$.

8) $J_\alpha(x) = \dfrac{(-1)^n}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cdot\cos(t)} \cos(\alpha t) dt = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(x \sin(\varphi) - n\varphi) d\varphi$.

1. Лабораторная работа A №1

Найдите первые 8 решений **задачи Штурма-Лиувилля** $xy'' + y' + \lambda xy = 0$, $|y(0)| < \infty, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Результаты представьте в файле `Maxima`: `Группа-BesseFunctA-Ваши_ФИО.wxm` или `Группа-BesseFunctA-Ваши_ФИО.mac`, где `X0(x),...,X7(x)` — искомые функции, `rho(x)` — вес ортогональности. Переменные `mu0`$<\ldots<$`mu7` обозначают корни функции Бесселя J_α, и $J_\alpha(x) =$`bessel_j(`α`,x)`. Измените функцию на $f(x) = \cos^4 3x$. Отредактируйте функции $X0(x), \ldots, X7(x)$ и строку `L:0$ R:%pi$ u:1.28$ v:-0.2$`, должно стать `L:0$ R:%pi/2$ u:1.5$ v:-1.4$` При необходимости откорректируйте значения `u` (максимальное отображаемое значение y) и `v` (минимальное отображаемое значение y). В завершение работы программы на вычисление будет представлен график функции $J_\alpha(x)$, и «ступенчатая» функция, у которой разрывы находятся в точках `mu0`$<\ldots<$`mu7`. (сначала в этом файле `Maxima` вычисляются данные корни, при необходимости надо откорректировать значение α, в файле вычисления проведены для $\alpha = 0$). Оцените результат аппроксимации последней функции частичными суммами решений данной **задачи Штурма-Лиувилля**.

Выполненную работу следует сохранить и выслать
по `e-mail` `PrutkovKP@portal.portal` 3 файла:
1) файл с заданием;
2) отредактированный файл `*.wxm`;
3) полученный файл `Имя_группы-SeriesFourierA-Ваше_ФИО.gif`