Министерство науки и высшего образования РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Алгебра и теория чисел. Алгебраические системы и конечные поля

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения занятия

e-mail:
yu.b.melnikov@yandex.ru
UriiMelnikov58@gmail.com

Екатеринбург
2021

I. Инструкция к пособию **14**

II. Основные определения **23**

II.1. Алгебраическая система 24

II.2. Универсальная алгебра и реляционная система 33

II.3. Конечные алгебраические системы 38

II.4. Частичная система 40

III. Изоморфизм, гомоморфизм **42**

III.1. Изоморфизм 60

III.2. Теорема об обратном изоморфизме 71

III.3. Индуцированное отношение 99

III.4. Гомоморфизм 122

III.5. Критерий изоморфизма 124

IV. Теоремы о гомоморфизмах **126**
IV.1. Конгруэнция 128
IV.2. Индуцированная операция 175
IV.3. Индуцированные отношения 176
IV.4. Фактор-система 177
IV.5. Теорема об описании гомоморфных образов 178
IV.6. Лемма о фактор-системе 180
IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом . 192
IV.8. Доказательство теоремы 3 203
IV.9. Теорема о фактор-системе фактор-системы 219

Пример 1 к определению алгебраической системы **220**

Пример 2 к определению изоморфизма и гомоморфизма **228**

Пример 3 к определению изоморфизма **240**

Пример 4 к определению гомоморфизма 339

Пример 5 к определению конгруэнции 355

Пример 6 к определению конгруэнции 383

Пример 7 к определению фактор-системы 405

Пример 8 построения фактор-системы по гомоморфизму 436

Пример 9 фактор-системы, построенной по гомоморфизму 536

Пример 10 построения фактор-групп группы Z_8 579

Примеры универсальных алгебр 593

Задача V.1 594

Задача V.2 595

Задача V.3 596

Задача V.4 597

Формулы из определения гомоморфизма 597

Задача VI.5 598

Задача VI.6 599

Изоморфизм и гомоморфизм 599

Задача VII.7 600

Задача VII.8 601

Задача VII.9 602

Задача VII.10 603

Задача VII.11 604

Задача VII.12 605

Определение конгруэнции 605

Задача VIII.13 606

Задача VIII.14 607

Задача VIII.15 608

Задача VIII.16 609

Проверка, что отношение является конгруэнцией 609

Задача IX.17 610

Задача IX.18 611

Задача IX.19 612

Нахождение фактор-системы 612

Задача X.20 613

Задача X.21 614

Задача X.22 615

Задача X.23 616

Задача X.24 617

Задача X.25 618

Нахождение всех фактор-систем алгебраической системы 618

Задача XI.26 619

Задача XI.27 620

Задача XI.28 621

Задача XI.29 622

XII. Определение группы 623

XIII. Определение поля 625

XIII.1. Примеры полей 629
XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле 662
XIII.3. Теорема о делителях нуля в поле 675
XIII.4. Характеристика поля 678
XIII.5. Критерий характеристики поля 689
XIII.6. Теорема о простоте ненулевой характеристики поля . 705
XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа 713

XIV. Расширения полей **724**
XIV.1. Теорема о надполе, как линейном пространстве 726
XIV.2. Алгебраические и трансцендентные расширения . . . 727
XIV.3. Критерий алгебраичности элемента 730
XIV.4. Теорема о степенях 742
XIV.5. Критерий конечности расширения поля 747

XIV.6. Следствие об алгебраичности конечного расширения поля . . . 748
XIV.7. Следствие о порядке простого конечного поля . . . 753
XIV.8. Следствие о порядке конечного поля . . . 756
XIV.9. Теорема о степени многочлена для конечного расширения . . . 760

XV. Поле частных целостного кольца 762
XV.1. Операции кольца частных . . . 763
XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных . . . 766
XV.3. Теорема о поле частных . . . 785
XV.4. Определение поля частных . . . 796

XVI. Расширение поля с помощью кольца многочленов 800
XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец . . . 801
XVI.2. Фактор-кольцо по идеалу . . . 847

XVI.3. Теорема о гомоморфизмах полей 848
XVI.4. Теорема об идеалах кольца многочленов 850
XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов 858

Пример 11 поля порядка 4 **868**

Пример 12 к критерию алгебраичности элемента **892**

Пример 13 расширения поля с помощью корня многочлена **915**

Пример 14 расширения поля с помощью корня многочлена **1032**

Пример 15 к доказательству *теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов* **1068**

Задание конечных полей таблицами Кели 1127

Задача XVII.30 1128

Нахождение расширения конечного поля с помощью корня полинома 1128

Задача XVIII.31 1129

Задача XVIII.32 1130

Задача XVIII.33 1131

Задача XVIII.34 1132

Задача XVIII.35 1133

Нахождение многочлена, корнем которого являет-

ся элемент расширения поля 1133

Задача XIX.36 1134

Задача XIX.37 1135

Нахождение расширения поля как фактор-кольца кольца многочленов по некоторому идеалу 1135

Задача XX.38 1136

Ответы и решения 1137

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

Кроме того, имеются гиперссылки на пособия **«Математический анализ»** и **«Элементарная математика».**

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения. Имеются гиперссылки на тесты для самообучения и самоконтроля.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В программе `Adobe Reader` и `Acrobat Reader` переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для того, чтобы ***вызвать панель навигации*** в `Acrobat Reader` надо, во-первых, выйти из полноэкранного режима (например, нажатием `Esc`), и, во-вторых, нажать клавишу `F4` и выбрать на левой вертикальной панели вертикальный флажок «Закладки» 🔖.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Основные определения

В этом разделе часто фактически отождествляется *предикат* (**предикат-функцию** и **предикат-высказывание**) и **соответствующее** ему **отношение**.

II.1. Алгебраическая система

Определение 1. Алгебраической системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебраической системы**, $\mathcal{F}$ — *множество* ***операций***, *заданных на множестве* Ω, $\mathcal{P}$ — *множество* ***предикатов*** *или* ***отношений*** *заданных на множестве* Ω.

II.1. Алгебраическая система

Определение 1. Алгебраической системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебраической системы**, $\mathcal{F}$ — *множество* ***операций***, *заданных на множестве* Ω, $\mathcal{P}$ — *множество* ***предикатов*** *или* ***отношений*** *заданных на множестве* Ω.

При этом множество $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ называется **сигнатурой алгебраической системы** A.

II.1. Алгебраическая система

Определение 1. Алгебраической системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебраической системы**, $\mathcal{F}$ — *множество* ***операций***, *заданных на множестве* Ω, $\mathcal{P}$ — *множество* ***предикатов*** *или* ***отношений*** *заданных на множестве* Ω.

При этом множество $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ называется **сигнатурой алгебраической системы** A.

Применяется и другая трактовка этого понятия.

II.1. Алгебраическая система

Определение 2. Сигнатурой *называется упорядоченная тройка* $\langle F, R, \mu \rangle$, *где* $F, R,$ — *множества, причем* $F \cap R = \emptyset$, *и* $\mu : F \cup R \to (\mathbb{N} \cup \{0\})$ — *однозначное отображение.*

II.1. Алгебраическая система

Определение 2. Сигнатурой *называется упорядоченная тройка* $\langle F, R, \mu \rangle$, *где* $F, R,$ — *множества, причем* $F \cap R = \emptyset$, *и* $\mu : F \cup R \to (\mathbb{N} \cup \{0\})$ — *однозначное отображение.*

Предполагается, что F — множество функциональных символов (их значениями могут быть алгебраические операции), R — множество предикатных символов (их значениями могут быть предикаты или отношения), μ каждому функциональному и предикатному символу ставит в соответствие местность (арность) соответствующей функции или предиката.

II.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1) Ω *— непустое множество;*

2) ν^{Σ} *— отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* Ω*;*

3) если $f \in F$*, то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* Ω*;*

4) если $r \in R$*, то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *— это* $\mu(r)$*-местный предикат на* Ω*;*

Предполагается, что F — множество функциональных символов (обозначают алгебраические операции), R — множество предикатных символов (обозначают отношения или предикаты), μ каждому функциональному и предикатному символу ставит в соответствие местность (арность) соответствующей функции или предиката.

II.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1) Ω *— непустое множество;*

2) ν^{Σ} *— отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* Ω*;*

3) если $f \in F$*, то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* Ω*;*

4) если $r \in R$*, то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *— это* $\mu(r)$*-местный предикат на* Ω*;*

При этом Ω называется **носителем** алгебраической системы $\mathcal{A}$, а ν^{Σ} — **интерпретацией сигнатуры** Σ в Ω.

II.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1) Ω *— непустое множество;*

2) ν^{Σ} *— отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* Ω*;*

3) если $f \in F$*, то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* Ω*;*

4) если $r \in R$*, то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *— это* $\mu(r)$*-местный предикат на* Ω*;*

Соглашение 1. *В дальнейшем мы иногда при задании алгебраической системы вместо* **отношения** *будем указывать соответствующий ему* **предикат**.

II.1. Алгебраическая система

Определение 3. *Упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \nu^{\Sigma} \rangle$ *называется* **алгебраической системой сигнатуры** Σ *если выполняются следующие условия:*

1) Ω *— непустое множество;*

2) ν^{Σ} *— отображение множества* $R \cup F$ *в множество отношений и операций на множестве* Ω*;*

3) если $f \in F$*, то* $\nu^{\Sigma}(f)$ *является* $\mu(f)$*-местной операцией на* Ω*;*

4) если $r \in R$*, то* $\nu^{\Sigma}(r)$ *— это* $\mu(r)$*-местный предикат на* Ω*;*

Рассмотреть пример?

II.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебры**, $\mathcal{F}$ — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Иными словами, универсальная алгебра есть алгебраическая система с пустым набором отношений (предикатов).

II.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебры**, $\mathcal{F}$ — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Примеры: **полугруппа** — это алгебра вида $\langle G, \{\cdot\} \rangle$;

II.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебры**, $\mathcal{F}$ — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Примеры: **полугруппа** — это алгебра вида $\langle G, \{\cdot\} \rangle$;
группа — $\langle G, \{\cdot, 1\} \rangle$;

II.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 4. Универсальной алгеброй *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$, *где* Ω — **носитель алгебры**, $\mathcal{F}$ — **сигнатура алгебры**, *то есть множество операций, определенных на этой алгебре.*

Примеры: **полугруппа** — это алгебра вида $\langle G, \{\cdot\} \rangle$;
группа — $\langle G, \{\cdot, 1\} \rangle$;
поле — алгебра вида $\langle P, \{+, \cdot, 0, 1\} \rangle$.

II.2. Универсальная алгебра и реляционная система

Определение 5. Реляционной системой *или* **системой отношений**, *или* **моделью** *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель реляционной системы**, $\mathcal{P}$ — *множество предикатов, определенных на этой реляционной системе.*

Иными словами, система отношений есть алгебраическая система с пустым набором алгебраических операций.

II.3. Конечные алгебраические системы

В исследованиях частым и очень важным случаем является ситуация, когда носитель алгебраической системы конечен. Алгебраическая система, носитель которой конечен, называется **конечной алгебраической системой**. В частности, можно говорить о **конечной универсальной алгебре**.

II.3. Конечные алгебраические системы

В исследованиях частым и очень важным случаем является ситуация, когда носитель алгебраической системы конечен. Алгебраическая система, носитель которой конечен, называется **конечной алгебраической системой**. В частности, можно говорить о **конечной универсальной алгебре**.

Порядком конечной алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ называется количество элементов ее носителя. Порядок алгебраической системы $\mathcal{A}$ обозначается через $|\mathcal{A}|$. В случае, когда вид сигнатуры универсальной алгебры ясен из контекста, в качестве идентификатора универсальной алгебры обычно берут идентификатор ее носителя, то есть говорят «универсальная алгебра Ω» вместо «универсальная алгебра $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$».

II.4. Частичная система

Определение 6. Частичной системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель частичной системы**, $\mathcal{F}$ — *множество частичных операций, заданных на множестве* Ω, $\mathcal{P}$ — *множество предикатов, заданных на множестве* Ω. *При этом множество* $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ *называется* **сигнатурой частичной системы** $\mathcal{A}$.

II.4. Частичная система

Определение 6. Частичной системой *называется тройка* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, *где* Ω — **носитель частичной системы**, $\mathcal{F}$ — *множество частичных операций, заданных на множестве* Ω, $\mathcal{P}$ — *множество предикатов, заданных на множестве* Ω. *При этом множество* $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ *называется* **сигнатурой частичной системы** $\mathcal{A}$.

Важные частные случаи алгебраических систем связаны с ситуацией, когда $\mathcal{P} = \emptyset$ (универсальные алгебры) и $\mathcal{F} = \emptyset$ (модели или реляционные алгебры).

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Одним из первых вопросов при изучении класса объектов является определение

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Одним из первых вопросов при изучении класса объектов является определение равенства объектов.

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Одним из первых вопросов при изучении класса объектов является определение равенства объектов.

Когда две алгебраические системы естественно считать «как бы равными»?

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Одним из первых вопросов при изучении класса объектов является определение равенства объектов.

Когда две алгебраические системы естественно считать «как бы равными»?

Уточним, что речь идет не о равенстве объектов в буквальном понимании, а об их «неразличимости» с точки зрения теории алгебраических систем.

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Одним из первых вопросов при изучении класса объектов является определение равенства объектов.

Когда две алгебраические системы естественно считать «как бы равными»?

«Как бы равенство» означает «одинаковость» взаимодействия элементов носителя, операций и отношений.

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Одним из первых вопросов при изучении класса объектов является определение равенства объектов.

Когда две алгебраические системы естественно считать «как бы равными»?

«Как бы равенство» означает «одинаковость» взаимодействия элементов носителя, операций и отношений.

Например, рассмотрим линейное пространство матриц размерности 2×2, линейное пространство многочленов степени не выше 3 и отображение $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + bx + cx^2 + dx^3$.

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Одним из первых вопросов при изучении класса объектов является определение равенства объектов.

Когда две алгебраические системы естественно считать «как бы равными»?

«Как бы равенство» означает «одинаковость» взаимодействия элементов носителя, операций и отношений.

Например, рассмотрим линейное пространство матриц размерности 2×2, линейное пространство многочленов степени не выше 3 и отображение $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + bx + cx^2 + dx^3$.

Тогда любая формула, использующая только операции сложения матриц, умножения матрицы на число, скобки и отношение равенства матриц, после замены матрицы на ее образ относительно φ остается истинной.

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Одним из первых вопросов при изучении класса объектов является определение равенства объектов.

Когда две алгебраические системы естественно считать «как бы равными»?

«Как бы равенство» означает «одинаковость» взаимодействия элементов носителя, операций и отношений.

Таким образом, «как бы равенство» алгебраических систем означает наличие такого соответствия между компонентами этих систем, которое устанавливает «одинаковость» взаимодействия элементов носителя, операций и отношений.

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Одним из первых вопросов при изучении класса объектов является определение равенства объектов.

Когда две алгебраические системы естественно считать «как бы равными»?

«Как бы равенство» означает «одинаковость» взаимодействия элементов носителя, операций и отношений.

Таким образом, «как бы равенство» алгебраических систем означает наличие такого соответствия между компонентами этих систем, которое устанавливает «одинаковость» взаимодействия элементов носителя, операций и отношений.

Мы сейчас определим некоторый тип функций, называемых *изоморфизмами* и *гомоморфизмами*, с помощью которых определяется «одинаковость» взаимодействия элементов носителя, операций и отношений.

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Для того чтобы при работе с гомоморфизмом (изоморфизмом) φ избежать громоздких формул типа $\varphi(f(x;y)) = \varphi(f)\,(\varphi(x);\varphi(y))$, мы будем образ элемента t под действием φ обозначать через t^{φ} вместо обычного обозначения $\varphi(t)$.

III. Изоморфизм, гомоморфизм

Для того чтобы при работе с гомоморфизмом (изоморфизмом) φ избежать громоздких формул типа $\varphi(f(x;y)) = \varphi(f)\,(\varphi(x);\varphi(y))$, мы будем образ элемента t под действием φ обозначать через t^{φ} вместо обычного обозначения $\varphi(t)$.

На остальные функции (в частности, на алгебраические операции) это соглашение распространять не будем.

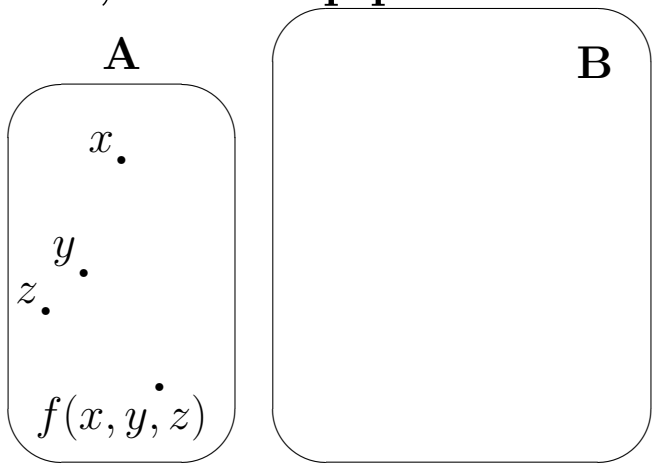
III. Изоморфизм, гомоморфизм

Для того чтобы при работе с гомоморфизмом (изоморфизмом) φ избежать громоздких формул типа $\varphi(f(x;y)) = \varphi(f)\,(\varphi(x);\varphi(y))$, мы будем образ элемента t под действием φ обозначать через t^φ вместо обычного обозначения $\varphi(t)$.

На остальные функции (в частности, на алгебраические операции) это соглашение распространять не будем.

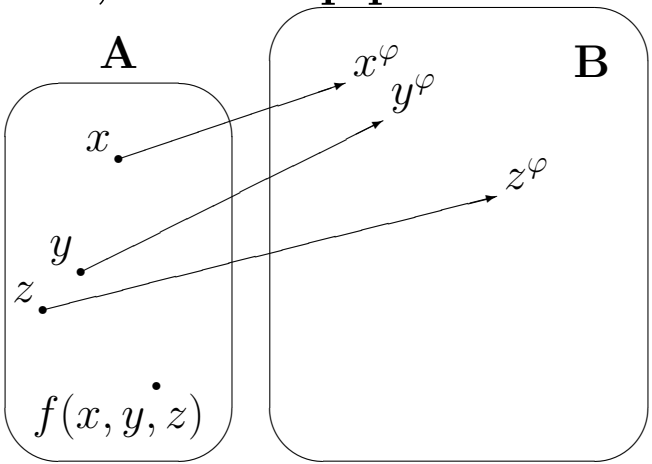
Таким образом, если, например, g — трехместная алгебраическая операция, то $g(x,y,z)$ — это результат применения g к элементам x, y, z, а вот образы элементов x, $g(x,y,z)$, q под действием *гомоморфизма* или *изоморфизма* будем обозначать через, соответственно, x^φ, $(g(x,y,z))^\varphi$, g^φ.

III. Изоморфизм, гомоморфизм



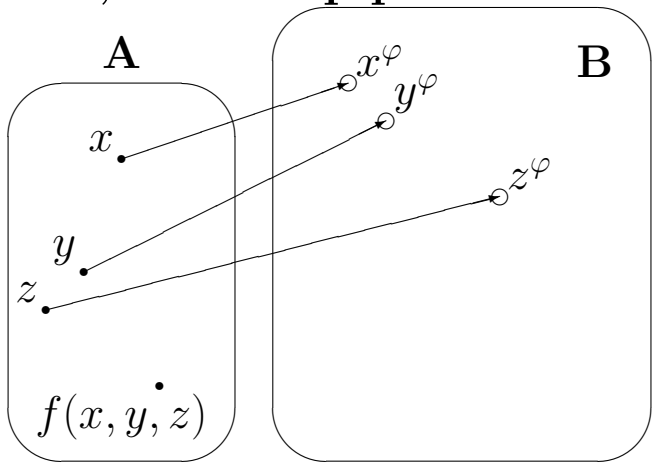
Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\} \rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P} \rangle$.

III. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\} \rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P} \rangle$.

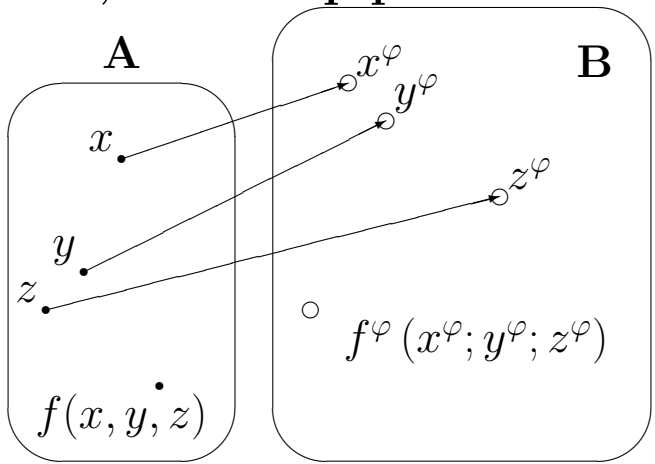
III. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\} \rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P} \rangle$.

Найдем результат применения операции f^φ к элементам $x^\varphi, y^\varphi, z^\varphi$.

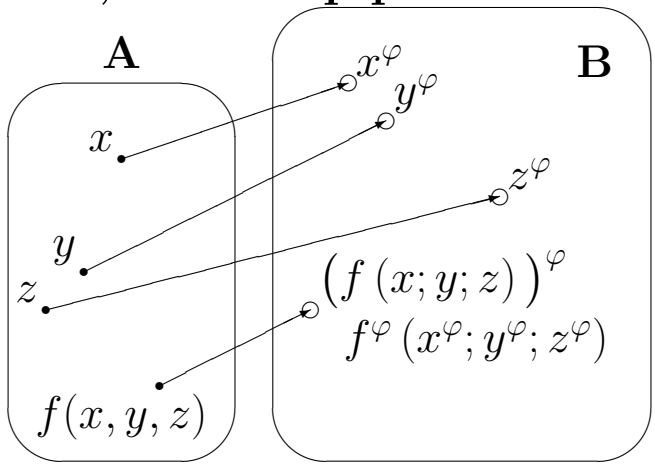
III. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f, \ldots\},\ \{P, \ldots\}\rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P}\rangle$.

Найдем результат применения операции f^φ к элементам $x^\varphi, y^\varphi, z^\varphi$.

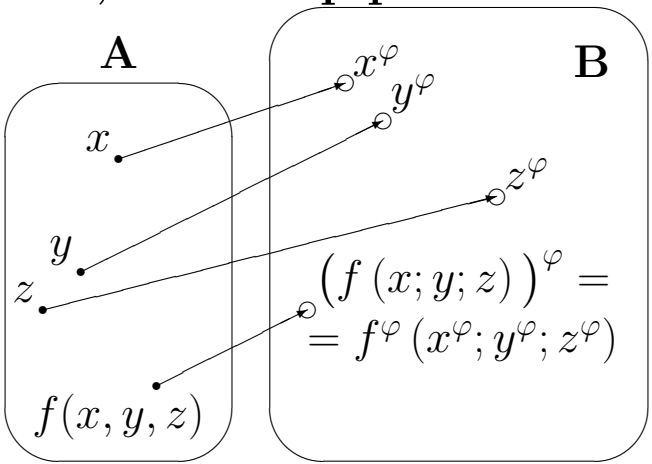
III. Изоморфизм, гомоморфизм



Рассмотрим трехместную операцию f, определенную на носителе $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \{f,\ldots\},\ \{P,\ldots\}\rangle$ и φ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{P}\rangle$.

Найдем результат применения операции f^φ к элементам $x^\varphi, y^\varphi, z^\varphi$.

III. Изоморфизм, гомоморфизм



Должно быть совпадение: $\big(f\,(x;y;z)\,\big)^\varphi = f^\varphi\,(x^\varphi;y^\varphi;z^\varphi)$.

Рассмотреть пример?

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi: \begin{cases} \Omega \to \Omega' \\ \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} \to \mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ *на* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *если,*

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi\colon \begin{cases} \Omega\to\Omega' \\ \mathcal{F}\to\mathcal{F}' \\ \mathcal{P}\to\mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A}=\langle\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\rangle$ *на* $\mathcal{A}'=\langle\Omega',\mathcal{F}',\mathcal{P}'\rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega\cup\mathcal{F}\cup\mathcal{P}$ ***на*** $\Omega'\cup\mathcal{F}'\cup\mathcal{P}'$;

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi: \begin{cases} \Omega \to \Omega' \\ \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} \to \mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ *на* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ ***на*** $\Omega' \cup \mathcal{F}' \cup \mathcal{P}'$;

во-вторых, $\forall f \in \mathcal{F} \quad \forall x_i \in \Omega$

$$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}\right); \qquad (1)$$

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi\colon \begin{cases} \Omega\to\Omega' \\ \mathcal{F}\to\mathcal{F}' \\ \mathcal{P}\to\mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A}=\langle\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\rangle$ *на* $\mathcal{A}'=\langle\Omega',\mathcal{F}',\mathcal{P}'\rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega\cup\mathcal{F}\cup\mathcal{P}$ ***на*** $\Omega'\cup\mathcal{F}'\cup\mathcal{P}'$;

во-вторых, $\forall f\in\mathcal{F}\quad\forall x_i\in\Omega$

$$(f(x_1,x_2,\ldots,x_n))^{\varphi}=f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi}\right); \tag{1}$$

в-третьих, *для любого предиката* $p\in\mathcal{P}$ *имеем*

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1\ \Leftrightarrow\ p^{\varphi}(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi})=1. \tag{2}$$

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi\colon \begin{cases} \Omega\to\Omega' \\ \mathcal{F}\to\mathcal{F}' \\ \mathcal{P}\to\mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A}=\langle\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\rangle$ *на* $\mathcal{A}'=\langle\Omega',\mathcal{F}',\mathcal{P}'\rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega\cup\mathcal{F}\cup\mathcal{P}$ ***на*** $\Omega'\cup\mathcal{F}'\cup\mathcal{P}'$;

во-вторых, $\forall f\in\mathcal{F}\quad\forall x_i\in\Omega$

$$(f(x_1,x_2,\ldots,x_n))^{\varphi}=f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi}\right); \tag{1}$$

в-третьих, *для любого предиката* $p\in\mathcal{P}$ *имеем*

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1\ \Leftrightarrow\ p^{\varphi}(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi})=1. \tag{2}$$

Переформулируем (2) на языке отношений:

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi\colon \begin{cases} \Omega\to\Omega' \\ \mathcal{F}\to\mathcal{F}' \\ \mathcal{P}\to\mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A}=\langle\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\rangle$ *на* $\mathcal{A}'=\langle\Omega',\mathcal{F}',\mathcal{P}'\rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega\cup\mathcal{F}\cup\mathcal{P}$ ***на*** $\Omega'\cup\mathcal{F}'\cup\mathcal{P}'$;

во-вторых, $\forall f\in\mathcal{F}\quad\forall x_i\in\Omega$

$$(f(x_1,x_2,\ldots,x_n))^{\varphi}=f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi}\right); \tag{1}$$

в-третьих, *для любого предиката* $p\in\mathcal{P}$ *имеем*

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1\ \Leftrightarrow\ p^{\varphi}(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi})=1. \tag{2}$$

Переформулируем (2) на языке отношений:

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi\colon \begin{cases} \Omega\to\Omega' \\ \mathcal{F}\to\mathcal{F}' \\ \mathcal{P}\to\mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A}=\langle\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\rangle$ *на* $\mathcal{A}'=\langle\Omega',\mathcal{F}',\mathcal{P}'\rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega\cup\mathcal{F}\cup\mathcal{P}$ ***на*** $\Omega'\cup\mathcal{F}'\cup\mathcal{P}'$;

во-вторых, $\forall f\in\mathcal{F}\quad\forall x_i\in\Omega$

$$(f(x_1,x_2,\ldots,x_n))^{\varphi}=f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi}\right); \tag{1}$$

в-третьих, *для любого предиката* $p\in\mathcal{P}$ *имеем*

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1 \;\Leftrightarrow\; p^{\varphi}(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi})=1. \tag{2}$$

Переформулируем (2) на языке отношений:

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi\colon \begin{cases} \Omega\to\Omega' \\ \mathcal{F}\to\mathcal{F}' \\ \mathcal{P}\to\mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A}=\langle\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\rangle$ *на* $\mathcal{A}'=\langle\Omega',\mathcal{F}',\mathcal{P}'\rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega\cup\mathcal{F}\cup\mathcal{P}$ ***на*** $\Omega'\cup\mathcal{F}'\cup\mathcal{P}'$;

во-вторых, $\forall f\in\mathcal{F}\quad\forall x_i\in\Omega$

$$(f(x_1,x_2,\ldots,x_n))^{\varphi}=f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi}\right); \tag{1}$$

в-третьих, *для любого предиката* $p\in\mathcal{P}$ *имеем*

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1 \;\Leftrightarrow\; p^{\varphi}(x_1^{\varphi},x_2^{\varphi},\ldots,x_n^{\varphi})=1. \tag{2}$$

Переформулируем (2) на языке отношений:

$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in P \quad\Leftrightarrow$

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi: \begin{cases} \Omega \to \Omega' \\ \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} \to \mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ *на* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ ***на*** $\Omega' \cup \mathcal{F}' \cup \mathcal{P}'$;

во-вторых, $\forall f \in \mathcal{F} \quad \forall x_i \in \Omega$

$$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}\right); \tag{1}$$

в-третьих, *для любого предиката* $p \in \mathcal{P}$ *имеем*

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \;\Leftrightarrow\; p^{\varphi}(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) = 1. \tag{2}$$

Переформулируем (2) на языке отношений:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P \quad \Leftrightarrow$

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi: \begin{cases} \Omega \to \Omega' \\ \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} \to \mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ *на* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ ***на*** $\Omega' \cup \mathcal{F}' \cup \mathcal{P}'$;

во-вторых, $\forall f \in \mathcal{F} \quad \forall x_i \in \Omega$

$$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}\right); \tag{1}$$

в-третьих, *для любого предиката* $p \in \mathcal{P}$ *имеем*

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \;\Leftrightarrow\; p^{\varphi}(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) = 1. \tag{2}$$

Переформулируем (2) на языке отношений:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P \quad \Leftrightarrow \quad (x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) \in P^{\varphi}$.

III.1. Изоморфизм

Определение 7. *Функция* $\varphi: \begin{cases} \Omega \to \Omega' \\ \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} \to \mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **изоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ *на* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *если,*

во-первых, φ *является* ***взаимно однозначной*** *функцией, отображающей* $\Omega \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ ***на*** $\Omega' \cup \mathcal{F}' \cup \mathcal{P}'$;

во-вторых, $\forall f \in \mathcal{F} \quad \forall x_i \in \Omega$

$$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}\left(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}\right); \tag{1}$$

в-третьих, *для любого предиката* $p \in \mathcal{P}$ *имеем*

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \;\Leftrightarrow\; p^{\varphi}(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) = 1. \tag{2}$$

Переформулируем (2) на языке отношений:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P \quad \Leftrightarrow \quad (x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) \in P^{\varphi}$.

Рассмотрим пример?

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство.

Сначала докажем утверждение **«во-первых»**.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство.

По **критерию существования обратной функции** функция φ^{-1} является **взаимно однозначной функцией.**

Утверждение **«во-первых»** доказано.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

Пусть $h \in \mathcal{F}'$. Надо:

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

Пусть $h \in \mathcal{F}'$. Надо: $(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

Пусть $h \in \mathcal{F}'$. Надо: $(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = h^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right)$.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**.

Пусть $h \in \mathcal{F}'$. Надо: $(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = h^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right)$.

Для φ утверждение **«во-первых»**. выполнено.

Поэтому существует такая операция $f \in \mathcal{F}$, что $h = f^{\varphi}$.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

Для φ утверждение **«во-первых»**. выполнено.

Поэтому у y_i существуют прообразы, т.е. элементы x_i из Ω такие, что

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

Для φ утверждение **«во-первых»**. выполнено.

Поэтому у y_i существуют прообразы, т.е. элементы x_i из Ω такие, что $y_i = x_i^{\varphi}$.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} =$$

Для φ утверждение **«во-первых»**. выполнено.

Поэтому у y_i существуют прообразы, т.е. элементы x_i из Ω такие, что $y_i = x_i^{\varphi}$.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} =$$

По условию φ является **изоморфизмом**...

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} = ((f(x_1, \ldots, x_n))^{\varphi})^{\varphi^{-1}} =$$

По условию φ является **изоморфизмом**...

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} = ((f(x_1, \ldots, x_n))^{\varphi})^{\varphi^{-1}} =$$

По определению **обратной функции**...

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} = ((f(x_1, \ldots, x_n))^{\varphi})^{\varphi^{-1}} = f(x_1, \ldots, x_n) =$$

По определению **обратной функции**...

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Докажем утверждение **«во-вторых»**. $h = f^{\varphi}$.

$$(h(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} = (f^{\varphi}(y_1, \ldots, y_n))^{\varphi^{-1}} =$$

$$= (f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}))^{\varphi^{-1}} = ((f(x_1, \ldots, x_n))^{\varphi})^{\varphi^{-1}} = f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= h^{\varphi^{-1}} \left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}} \right).$$

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**. Пусть $q \in \mathcal{P}'$ и пусть $q(y_1, \ldots, y_n) = 1$.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**. Пусть $q \in \mathcal{P}'$ и пусть $q(y_1, \ldots, y_n) = 1$.

Надо доказать, что

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathcal{P}'$ и пусть $q(y_1, \ldots, y_n) = 1$.

Надо доказать, что $q(y_1, \ldots, y_n) = 1 \Leftrightarrow$

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathcal{P}'$ и пусть $q(y_1, \ldots, y_n) = 1$.

Надо доказать, что $q(y_1, \ldots, y_n) = 1 \Leftrightarrow q^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right) = 1$.

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathcal{P}'$ и пусть $q(y_1, \ldots, y_n) = 1$.

Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q(y_1, \ldots, y_n) = 1 \Leftrightarrow$$

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathcal{P}'$ и пусть $q(y_1, \ldots, y_n) = 1$.

Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q(y_1, \ldots, y_n) = 1 \;\Leftrightarrow\; p^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) = 1 \;\Leftrightarrow$$

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathcal{P}'$ и пусть $q(y_1, \ldots, y_n) = 1$.

Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q(y_1, \ldots, y_n) = 1 \;\Leftrightarrow\; p^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) = 1 \;\Leftrightarrow\; p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \;\Leftrightarrow$$

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathcal{P}'$ и пусть $q(y_1, \ldots, y_n) = 1$.

Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q(y_1, \ldots, y_n) = 1 \Leftrightarrow p^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) = 1 \Leftrightarrow p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right) = 1.$$

III.2. Теорема об обратном изоморфизме

Теорема 1. *Если* φ — ***изоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ***на*** *алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то* ***обратная функция*** φ^{-1} *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Осталось доказать утверждение **«в-третьих»**.

Пусть $q \in \mathcal{P}'$ и пусть $q(y_1, \ldots, y_n) = 1$.

Согласно пункту **«во-первых»** существуют прообразы для q и y_i:

$$q(y_1, \ldots, y_n) = 1 \Leftrightarrow p^{\varphi}(x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) = 1 \Leftrightarrow p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^{\varphi^{-1}}\left(y_1^{\varphi^{-1}}, \ldots, y_n^{\varphi^{-1}}\right) = 1.$$

Теорема доказана.

III.3. Индуцированное отношение

Если $\varphi : \begin{cases} \Omega & \to & \Omega' \\ \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} & \to & \mathcal{P}' \end{cases}$ — функция, отображающая алгебраическую систему $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то естественно считать, что отношение $Q \in \mathrm{P}'$ **индуцировано** отношением $P \in \mathrm{P}$, если

III.3. Индуцированное отношение

Если $\varphi : \begin{cases} \Omega & \to & \Omega' \\ \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} & \to & \mathcal{P}' \end{cases}$ — функция, отображающая алгебраическую систему $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то естественно считать, что отношение $Q \in \mathrm{P}'$ **индуцировано** отношением $P \in \mathrm{P}$, если

$$Q =$$

III.3. Индуцированное отношение

Если $\varphi : \begin{cases} \Omega & \to & \Omega' \\ \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} & \to & \mathcal{P}' \end{cases}$ — функция, отображающая алгебраическую систему $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то естественно считать, что отношение $Q \in \mathrm{P}'$ **индуцировано** отношением $P \in \mathrm{P}$, если

$$Q = \left\{ (x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_n) \in P \right\}.$$

III.3. Индуцированное отношение

Если $\varphi : \begin{cases} \Omega & \to & \Omega' \\ \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} & \to & \mathcal{P}' \end{cases}$ — функция, отображающая алгебраическую систему $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$, то естественно считать, что отношение $Q \in \mathrm{P}'$ **индуцировано** отношением $P \in \mathrm{P}$, если

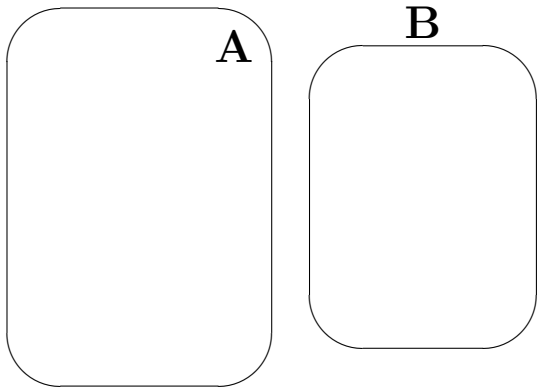
$$Q = \left\{ (x_1^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi}) \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_n) \in P \right\}.$$

Это определение позволяет строить индуцированное отношение Q по имеющемуся отношению P.

А как, зная Q, проверить, индуцируется ли оно отношением P?

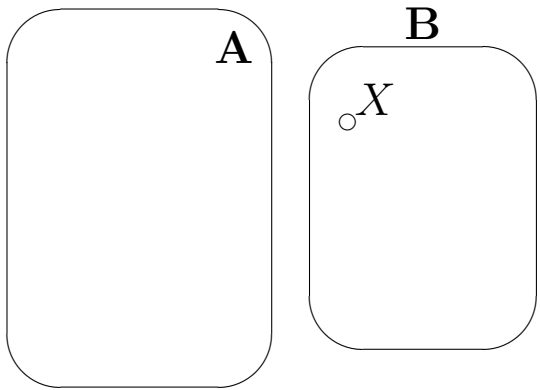
III.3. Индуцированное отношение

Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



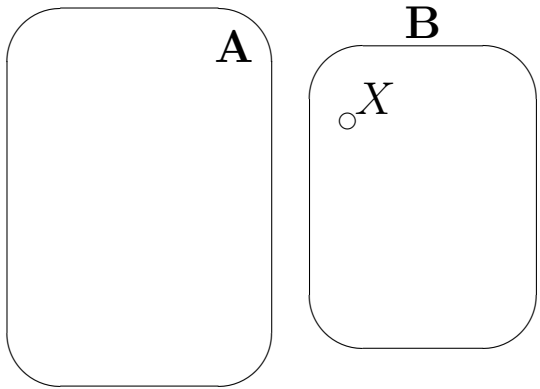
III.3. Индуцированное отношение

Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



III.3. Индуцированное отношение

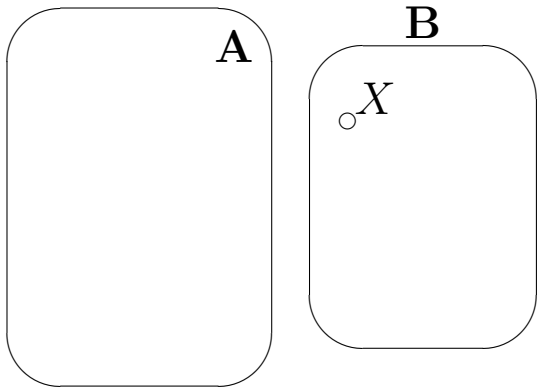
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда

III.3. Индуцированное отношение

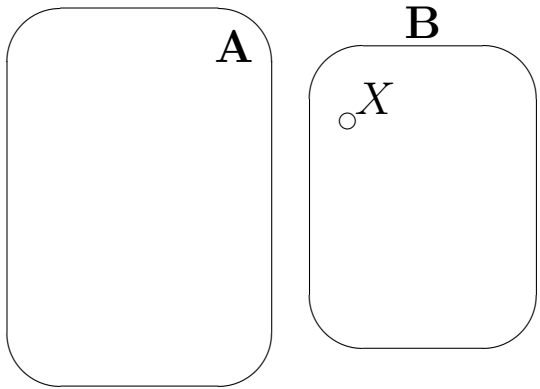
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ, т.е. во множестве

III.3. Индуцированное отношение

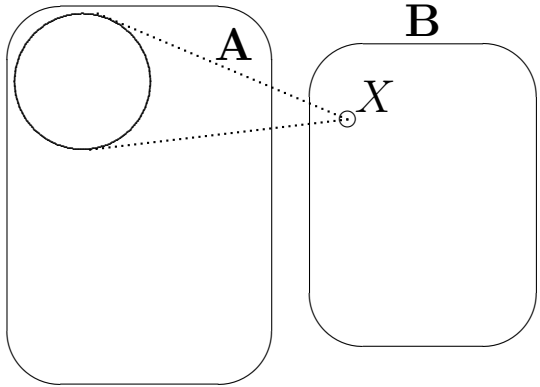
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ, т.е. во множестве $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$,

III.3. Индуцированное отношение

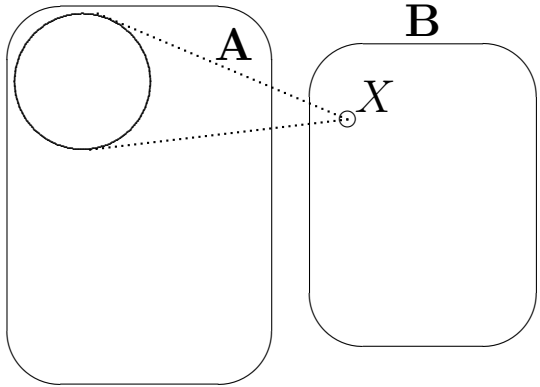
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ, т.е. во множестве $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$,

III.3. Индуцированное отношение

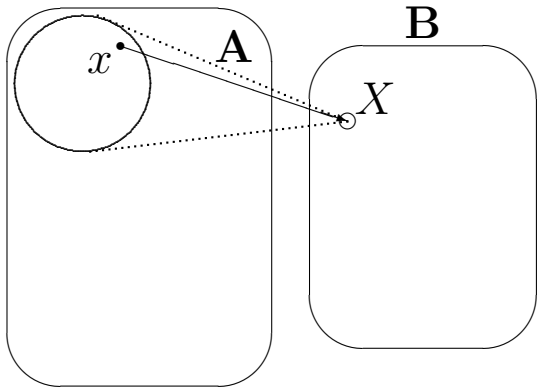
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ, т.е. во множестве $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$, найдется такой элемент x, что

III.3. Индуцированное отношение

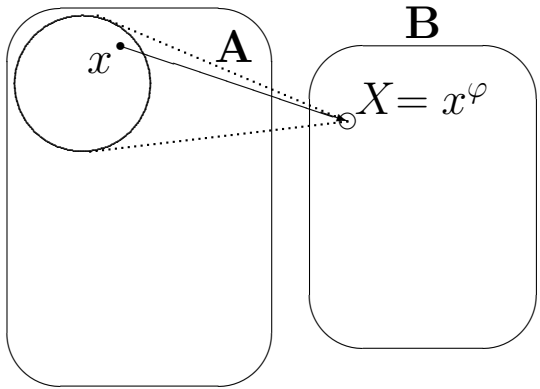
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ, т.е. во множестве $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$, найдется такой элемент x, что

III.3. Индуцированное отношение

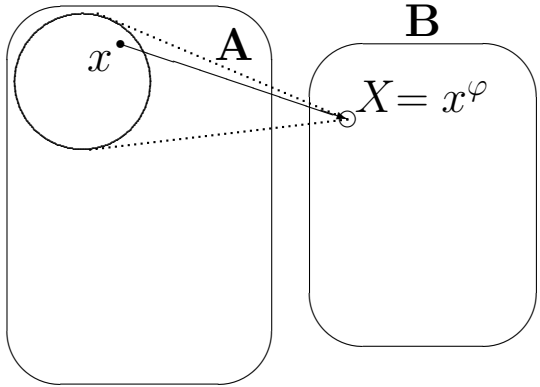
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ, т.е. во множестве $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$, найдется такой элемент x, что

III.3. Индуцированное отношение

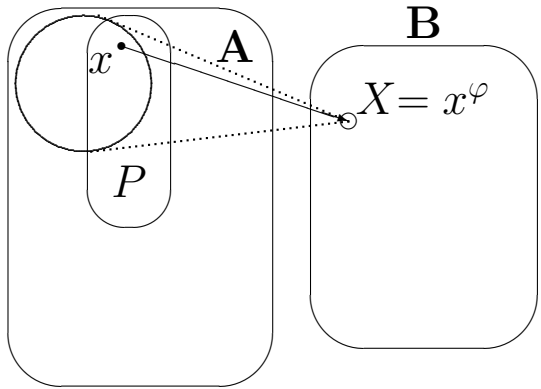
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ, т.е. во множестве $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$, найдется такой элемент x, что $x \in P$.

III.3. Индуцированное отношение

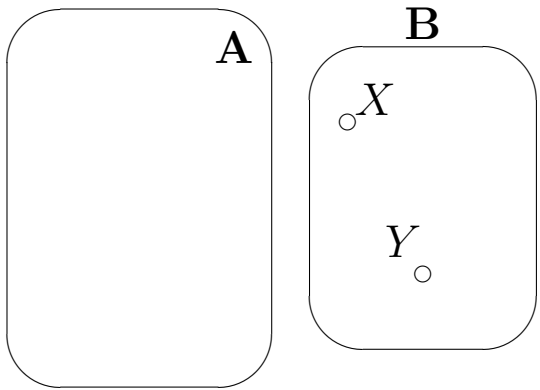
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{P, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и P — одноместное отношение.



Элемент $X \in \mathbf{B}$ принадлежит **индуцированному отношению** P', тогда и только тогда, когда в полном прообразе элемента X относительно отображения φ, т.е. во множестве $\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha^{\varphi} = X \right\}$, найдется такой элемент x, что $x \in P$.

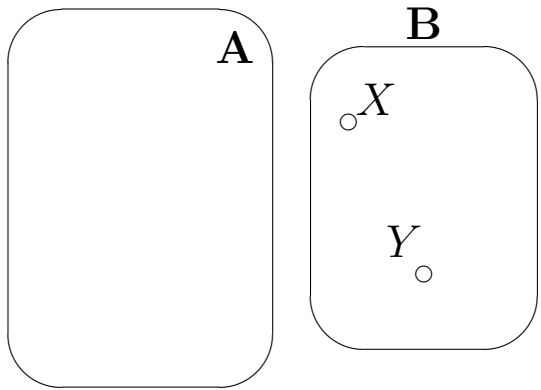
III.3. Индуцированное отношение

Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.



III.3. Индуцированное отношение

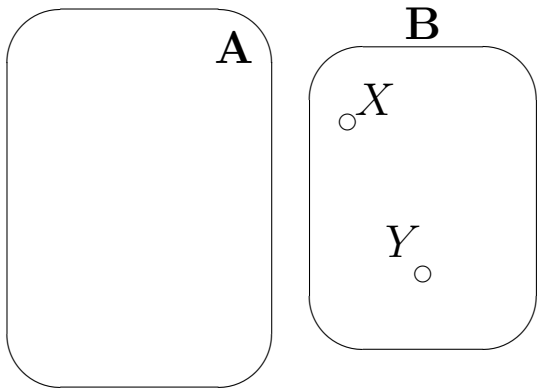
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.



Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда

III.3. Индуцированное отношение

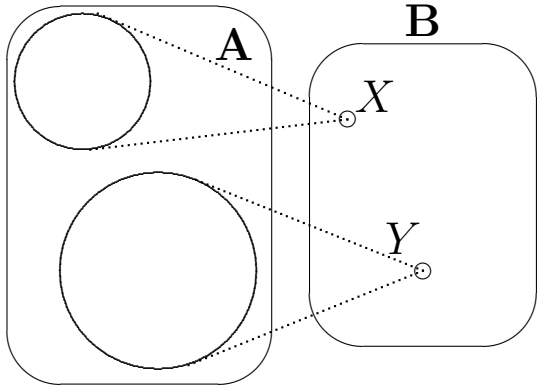
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.



Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y найдутся такие элементы x и y, что

III.3. Индуцированное отношение

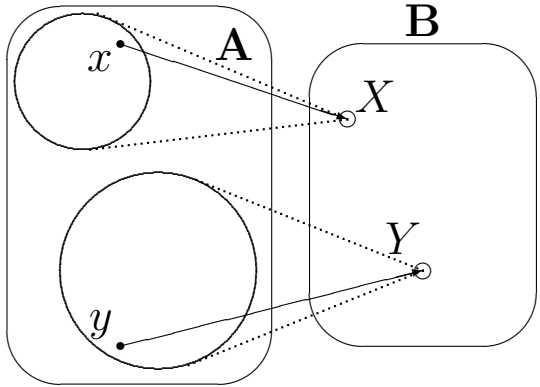
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.



Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y найдутся такие элементы x и y, что

III.3. Индуцированное отношение

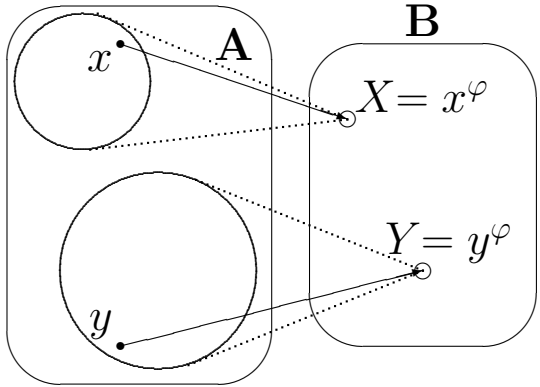
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.



Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y найдутся такие элементы x и y, что

III.3. Индуцированное отношение

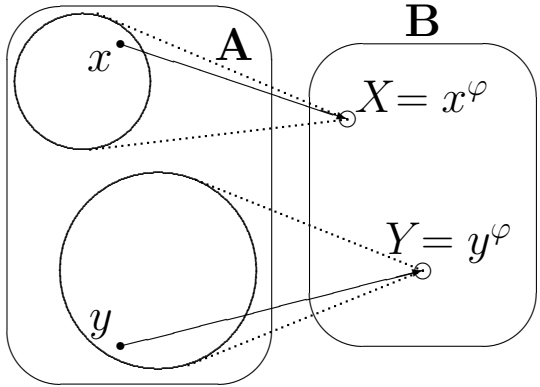
Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.



Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y найдутся такие элементы x и y, что

III.3. Индуцированное отношение

Пусть φ — функция, отображающая носитель $\mathbf{A}$ алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ \mathcal{F}_A,\ \{Q, \ldots\} \rangle$ в $\mathbf{B}$ и Q — двуместное отношение.



Упорядоченная пара $(X,\ Y)$ принадлежит **индуцированному отношению** Q' тогда и только тогда, когда в полном прообразе элементов X и Y найдутся такие элементы x и y, что $(x,\ y) \in Q$.

III.3. Индуцированное отношение

Определение 8. *Если* $\varphi : \begin{cases} \Omega & \to & \Omega' \\ \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} & \to & \mathcal{P}' \end{cases}$ *— функция, отображающая алгебраическую систему* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P} \rangle$ *в алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathrm{F}', \mathrm{P}' \rangle$*, то будем считать, что отношение* $Q \in \mathrm{P}'$ **индуцировано** *отношением* $P \in \mathrm{P}$*, если*

$$Q = \left\{ (x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_n) \in P \right\}, \text{ т.е.} \tag{3}$$

$$(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \in Q \ \Leftrightarrow\ \exists x_1, \ldots x_n \begin{cases} x_1^\varphi = y_1, \\ x_2^\varphi = y_2, \\ \ldots \\ x_n^\varphi = y_n, \\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in P. \end{cases} \tag{4}$$

III.4. Гомоморфизм

Определение 9. *Функция* $\varphi : \begin{cases} \Omega \to \Omega' \\ \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} \to \mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **гомоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ *в алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *если для любой операции* f *из* $\mathcal{F}$ *и любого набора* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из* Ω *имеем* ***равенство (1)***, *то есть* $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi})$ *(в частности, «арность» операций* f *и* f^{φ} *совпадает).*

Гомоморфизм φ *называется* **сильным гомоморфизмом**, *если* p^{φ} *совпадает с индуцированным отношением, т.е из* $p^{\varphi}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *следует, что в* Ω *найдутся такие элементы* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *что, во-первых,*

$$x_1^{\varphi} = y_1, \quad x_2^{\varphi} = y_2, \quad \ldots, \quad x_n^{\varphi} = y_n,$$

и, во-вторых, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— истинно. Иными словами,* p^{φ} *совпадает с отношением,* ***индуцированным отношением*** p.

Уберем лишние слова...

III.4. Гомоморфизм

Определение 9. *Функция* $\varphi : \begin{cases} \Omega & \to & \Omega' \\ \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}' \\ \mathcal{P} & \to & \mathcal{P}' \end{cases}$ *называется* **гомоморфизмом** *алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ *в алгебраическую систему* $\mathcal{A}' = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathrm{P}' \rangle$, *если для любой операции* f *из* $\mathcal{F}$ *и любого набора* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из* Ω *имеем* ***равенство (1)***, *то есть* $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^{\varphi} = f^{\varphi}(x_1^{\varphi}, x_2^{\varphi}, \ldots, x_n^{\varphi})$ *(в частности, «арность» операций* f *и* f^{φ} *совпадает).*

Гомоморфизм φ *называется* **сильным гомоморфизмом**, *если* p^{φ} *совпадает с отношением,* ***индуцированным отношением*** p.

Рассмотреть пример?

III.5. Критерий изоморфизма

Теорема 2. ***Взаимно однозначный гомоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A}$ *в алгебраическую систему* $\mathcal{B}$ *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он является* ***сильным гомоморфизмом***.

Доказательство.

III.5. Критерий изоморфизма

Теорема 2. ***Взаимно однозначный гомоморфизм*** *алгебраической системы* $\mathcal{A}$ *в алгебраическую систему* $\mathcal{B}$ *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он является* ***сильным гомоморфизмом***.

Доказательство. Это прямое следствие соответствующих определений.

IV. Теоремы о гомоморфизмах

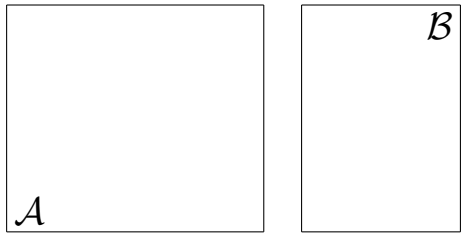
Оказывается, для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ можно построить такое множество M алгебраических систем, что любой гомоморфный образ алгебраической системы $\mathcal{A}$ относительно сильного гомоморфизма изоморфен некоторой алгебраической системе из M. В этом случае говорят, что *получено описание с точностью до изоморфизма всех гомоморфных (относительно сильных гомоморфизмов) образов алгебраической системы* $\mathcal{A}$.

IV. Теоремы о гомоморфизмах

Для построения носителей алгебраических систем из M используется только носитель исходной алгебраической системы $\mathcal{A}$. Точнее, носители алгебраических систем из M представляют собой множества, состоящие из подмножеств носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Говоря еще более точно, носитель любой алгебраической системы из M представляет собой *множество классов эквивалентных элементов* носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Однако в качестве соответствующего отношения эквивалентности можно брать только некоторые специальные отношения, так называемые *конгруэнции*, о которых пойдет речь ниже.

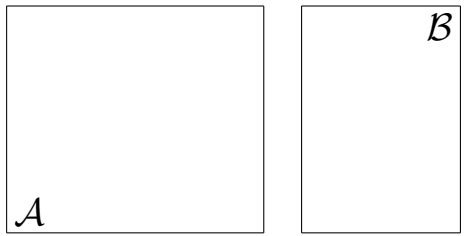
IV.1. Конгруэнция

IV.1. Конгруэнция



Надо найти все гомоморфные образы алгебраической системы $\mathcal{A}$, разумеется, «с точностью до изоморфизма».

IV.1. Конгруэнция

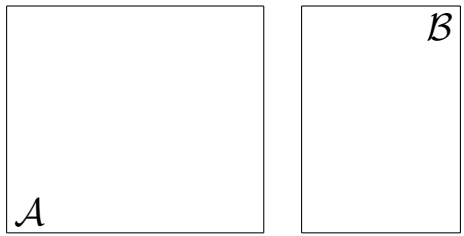


Надо найти все гомоморфные образы алгебраической системы $\mathcal{A}$, разумеется, «с точностью до изоморфизма».

Применим стратегию предвкушения.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.



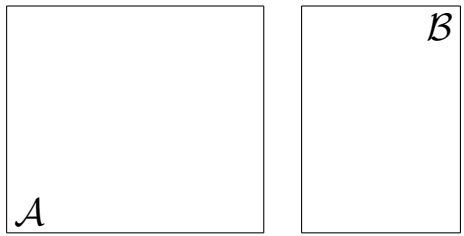
Надо найти все гомоморфные образы алгебраической системы $\mathcal{A}$, разумеется, «с точностью до изоморфизма».

Применим стратегию предвкушения.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



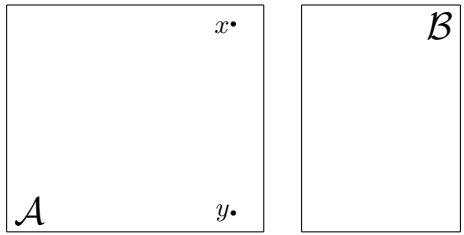
Надо найти все гомоморфные образы алгебраической системы $\mathcal{A}$, разумеется, «с точностью до изоморфизма».

Применим стратегию предвкушения.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



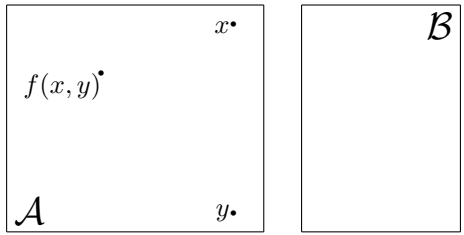
Надо найти все гомоморфные образы алгебраической системы $\mathcal{A}$, разумеется, «с точностью до изоморфизма».

Применим стратегию предвкушения.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



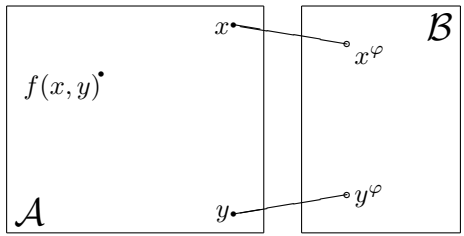
Надо найти все гомоморфные образы алгебраической системы $\mathcal{A}$, разумеется, «с точностью до изоморфизма».

Применим стратегию предвкушения.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



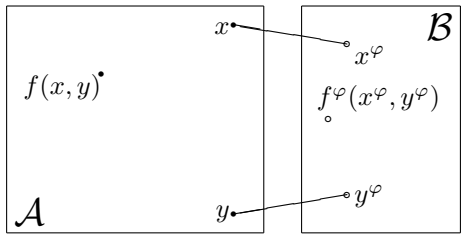
Надо найти все гомоморфные образы алгебраической системы $\mathcal{A}$, разумеется, «с точностью до изоморфизма».

Применим стратегию предвкушения.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



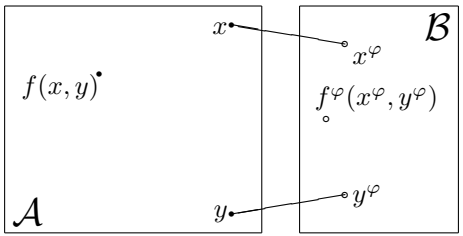
Надо найти все гомоморфные образы алгебраической системы $\mathcal{A}$, разумеется, «с точностью до изоморфизма».

Применим стратегию предвкушения.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.

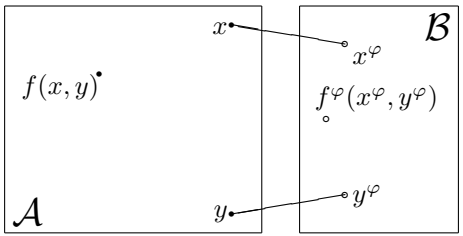


По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi =$

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.

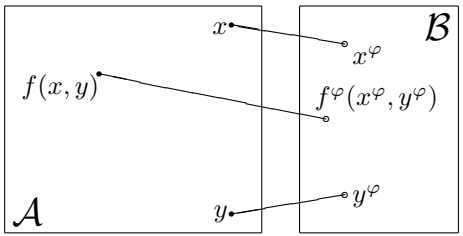


По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.

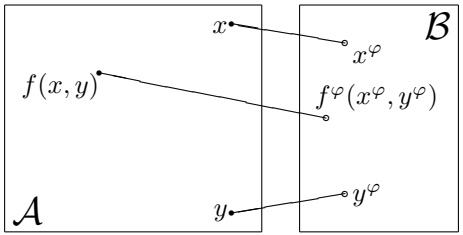


По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



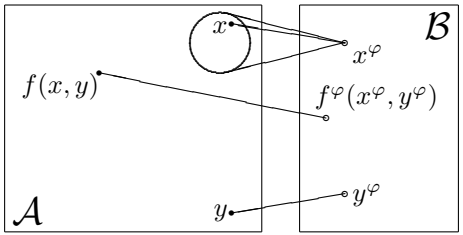
По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



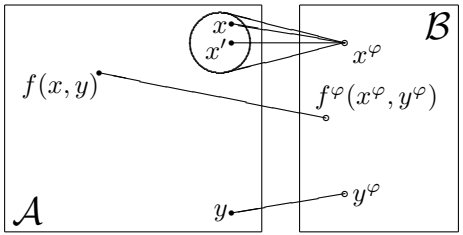
По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



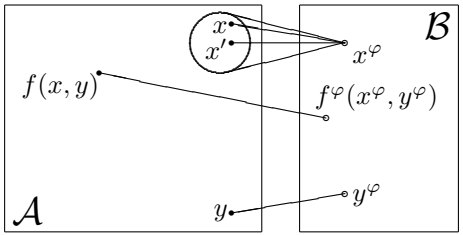
По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

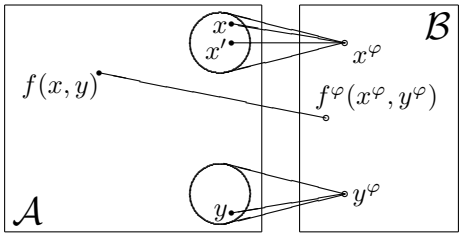
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Полный прообраз — это множество всех прообразов этого элемента.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

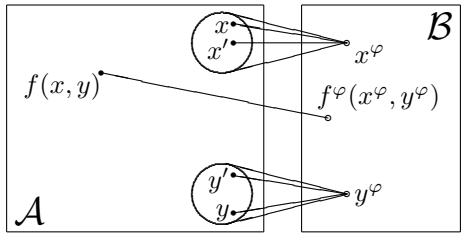
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Полный прообраз — это множество всех прообразов этого элемента.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

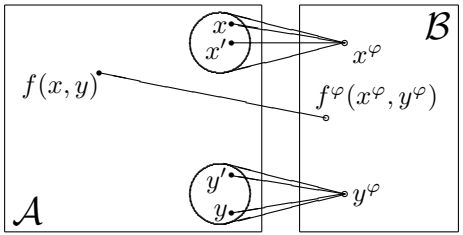
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Полный прообраз — это множество всех прообразов этого элемента.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

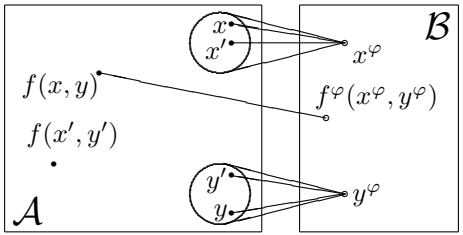
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Что интересного можно сказать о $f(x', y')$?

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

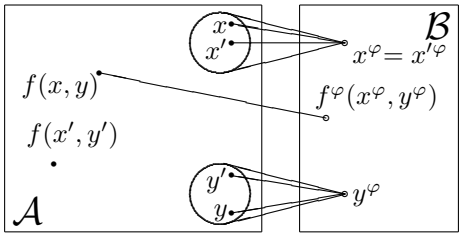
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Что интересного можно сказать о $f(x', y')$?

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

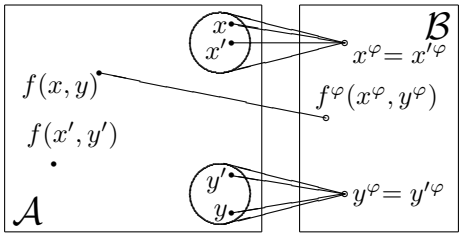
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Что интересного можно сказать о $f(x', y')$?

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

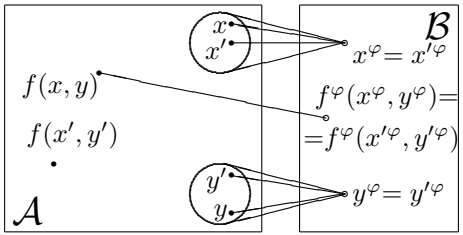
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Что интересного можно сказать о $f(x', y')$?

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

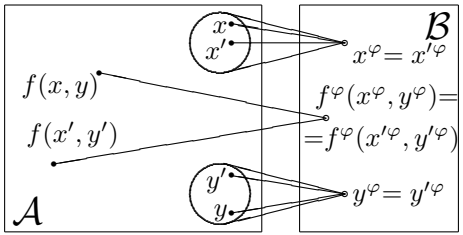
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Что интересного можно сказать о $f(x', y')$?

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

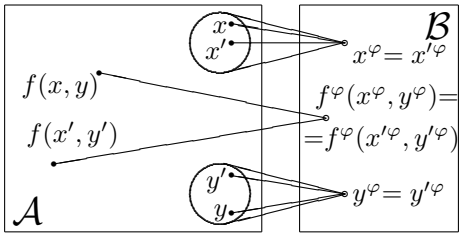
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Что интересного можно сказать о $f(x', y')$?

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

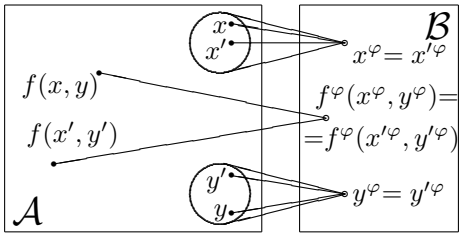
Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Значит, $\begin{cases} x^\varphi = x'^\varphi, \\ y^\varphi = y'^\varphi, \end{cases} \Rightarrow (f(x,y))^\varphi = (f(x',y'))^\varphi$.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

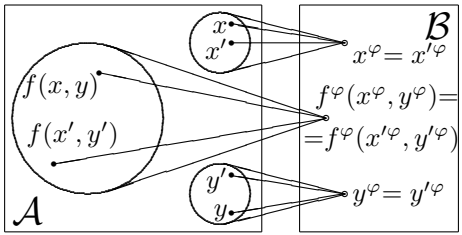
Значит, $\begin{cases} x^\varphi = x'^\varphi, \\ y^\varphi = y'^\varphi, \end{cases} \Rightarrow (f(x,y))^\varphi = (f(x',y'))^\varphi$.

Полный прообраз каждого элемента из носителя алгебраической системы $\mathcal{B}$ представляет собой класс элементов из носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

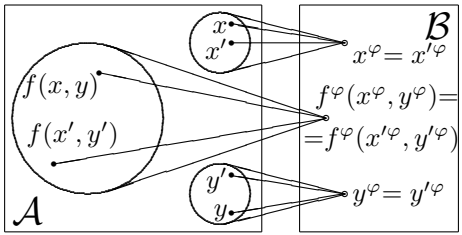
Значит, $\begin{cases} x^\varphi = x'^\varphi, \\ y^\varphi = y'^\varphi, \end{cases} \Rightarrow (f(x,y))^\varphi = (f(x',y'))^\varphi$.

Полный прообраз каждого элемента из носителя алгебраической системы $\mathcal{B}$ представляет собой класс элементов из носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

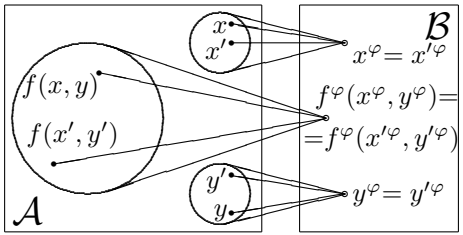
Значит, $\begin{cases} x^\varphi = x'^\varphi, \\ y^\varphi = y'^\varphi, \end{cases} \Rightarrow (f(x,y))^\varphi = (f(x',y'))^\varphi$.

Полный прообраз каждого элемента из носителя алгебраической системы $\mathcal{B}$ представляет собой класс элементов из носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Эта классы не пересекаются.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Значит, $\begin{cases} x^\varphi = x'^\varphi, \\ y^\varphi = y'^\varphi, \end{cases} \Rightarrow (f(x,y))^\varphi = (f(x',y'))^\varphi$.

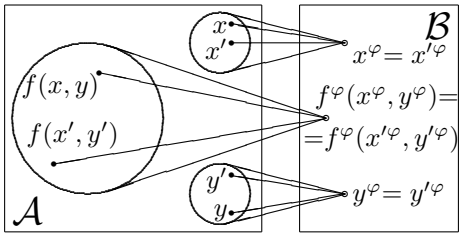
Полный прообраз каждого элемента из носителя алгебраической системы $\mathcal{B}$ представляет собой класс элементов из носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Эта классы не пересекаются.

Их объединение совпадает с носителем алгебраической системы $\mathcal{A}$.

IV.1. Конгруэнция

Пусть уже построена алгебраическая система $\mathcal{B}$ и гомоморфизм φ.

Пусть f — двухместная алгебраическая операция из $\mathcal{A}$.



По определению гомоморфизма $(f(x,y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Значит, $\begin{cases} x^\varphi = x'^\varphi, \\ y^\varphi = y'^\varphi, \end{cases} \Rightarrow (f(x,y))^\varphi = (f(x',y'))^\varphi$.

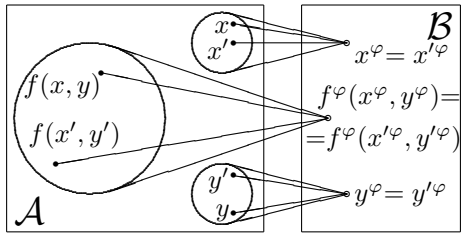
Полный прообраз каждого элемента из носителя алгебраической системы $\mathcal{B}$ представляет собой класс элементов из носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Эта классы не пересекаются.

Их объединение совпадает с носителем алгебраической системы $\mathcal{A}$.

Значит, имеем отношение эквивалентности!

IV.1. Конгруэнция

Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.



По определению гомоморфизма $(f(x, y))^\varphi = f^\varphi(x^\varphi, y^\varphi)$.

Возьмем другие прообразы x', y' элементов x^φ, y^φ.

Здесь «кружок» изображает полный прообраз элемента x^φ.

Значит, $\begin{cases} x^\varphi = x'^\varphi, \\ y^\varphi = y'^\varphi, \end{cases} \Rightarrow (f(x, y))^\varphi = (f(x', y'))^\varphi$.

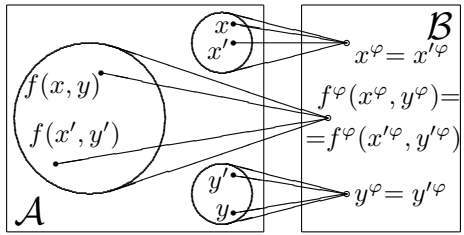
Полный прообраз каждого элемента из носителя алгебраической системы $\mathcal{B}$ представляет собой класс элементов из носителя алгебраической системы $\mathcal{A}$. Эта классы не пересекаются.

Их объединение совпадает с носителем алгебраической системы $\mathcal{A}$.

Значит, имеем отношение эквивалентности!

IV.1. Конгруэнция

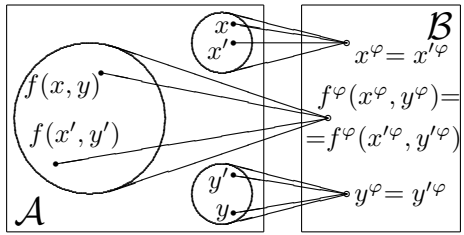
Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.



Главная особенность отношения эквивалентности T: если заменить операнды любой операции из $\mathcal{A}$ на эквивалентные им элементы, то

IV.1. Конгруэнция

Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.

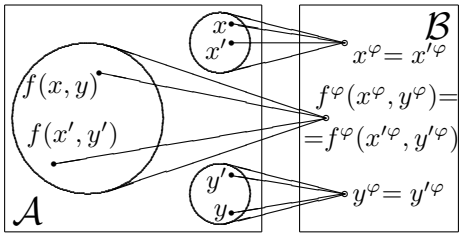


$$f(x, y), \quad f(\qquad)$$

Главная особенность отношения эквивалентности T: если заменить операнды любой операции из $\mathcal{A}$ на эквивалентные им элементы, то

IV.1. Конгруэнция

Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.

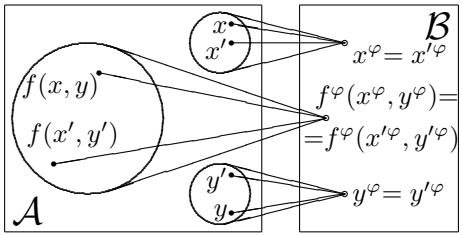


$$\begin{cases} (x, x') \in T, \\ \end{cases} \Rightarrow f(x, y), \quad f(\qquad)$$

Главная особенность отношения эквивалентности T: если заменить операнды любой операции из $\mathcal{A}$ на эквивалентные им элементы, то

IV.1. Конгруэнция

Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.

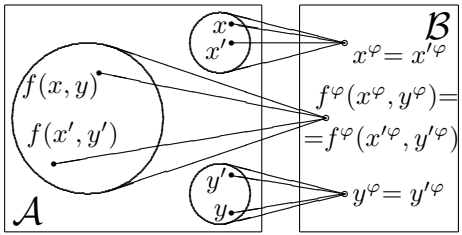


$$\begin{cases} (x, x') \in T, \\ \end{cases} \Rightarrow f(x, y), \quad f(x', \ \ )$$

Главная особенность отношения эквивалентности T: если заменить операнды любой операции из $\mathcal{A}$ на эквивалентные им элементы, то

IV.1. Конгруэнция

Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.

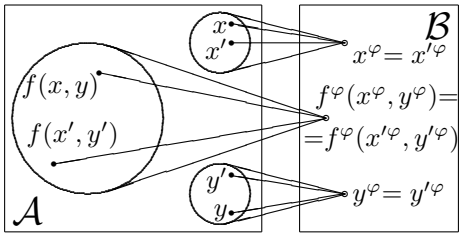


$$\begin{cases} (x, x') \in T, \\ (y, y') \in T \end{cases} \Rightarrow f(x, y), \quad f(x', \ \ )$$

Главная особенность отношения эквивалентности T: если заменить операнды любой операции из $\mathcal{A}$ на эквивалентные им элементы, то

IV.1. Конгруэнция

Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.

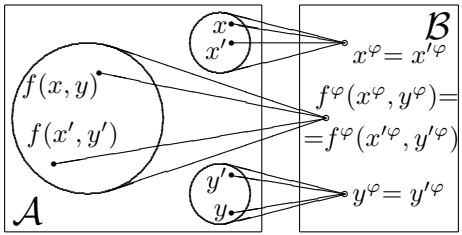


$$\begin{cases} (x, x') \in T, \\ (y, y') \in T \end{cases} \Rightarrow f(x, y), \quad f(x', y')$$

Главная особенность отношения эквивалентности T: если заменить операнды любой операции из $\mathcal{A}$ на эквивалентные им элементы, то

IV.1. Конгруэнция

Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.

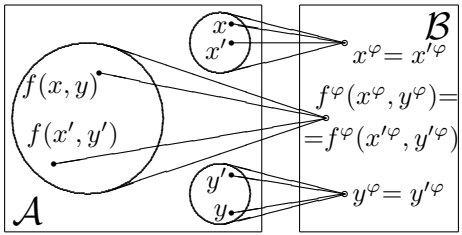


$$\begin{cases} (x, x') \in T, \\ (y, y') \in T \end{cases} \Rightarrow (f(x, y), \quad f(x', y')) \in T.$$

Главная особенность отношения эквивалентности T: если заменить операнды любой операции из $\mathcal{A}$ на эквивалентные им элементы, то результаты операции будут эквивалентны!

IV.1. Конгруэнция

Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.



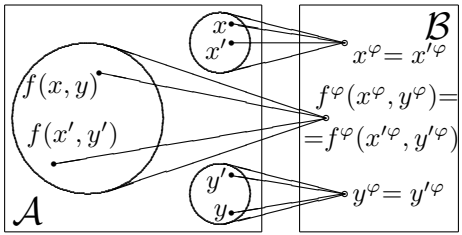
$$\begin{cases} (x, x') \in T, \\ (y, y') \in T \end{cases} \Rightarrow (f(x,y),\ \ f(x',y')) \in T.$$

Главная особенность отношения эквивалентности T: если заменить операнды любой операции из $\mathcal{A}$ на эквивалентные им элементы, то результаты операции будут эквивалентны!

Это позволит индуцировать операции алгебраической системы $\mathcal{A}$ на множество классов эквивалентных по T элементов.

IV.1. Конгруэнция

Отношение $(u, v) \in T \Leftrightarrow u^\varphi = v^\varphi$ является отношением эквивалентности.



$$\begin{cases} (x, x') \in T, \\ (y, y') \in T \end{cases} \Rightarrow (f(x,y),\ \ f(x',y')) \in T.$$

Главная особенность отношения эквивалентности T: если заменить операнды любой операции из $\mathcal{A}$ на эквивалентные им элементы, то результаты операции будут эквивалентны!

Это позволит индуцировать операции алгебраической системы $\mathcal{A}$ на множество классов эквивалентных по T элементов.

Такие отношения эквивалентности называются конгруэнциями.

IV.1. Конгруэнция

Отношение эквивалентности T называется конгруэнцией, если для любой операции $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $f(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

IV.1. Конгруэнция

$$\left\{ \qquad \right. \Rightarrow \; f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right);$$

Отношение эквивалентности T называется конгруэнцией, если для любой операции $f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$ и $f\left(y_1; y_2; \ldots; y_n\right)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

IV.1. Конгруэнция

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ \qquad\qquad \Rightarrow \;\; f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,; f\,(y_1, \qquad\qquad) \end{cases}$$

Отношение эквивалентности T называется конгруэнцией, если для любой операции $f\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $f\,(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

IV.1. Конгруэнция

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T, \end{cases} \Rightarrow \; f(x_1, x_2, \ldots, x_n); f(y_1, y_2, \qquad)$$

Отношение эквивалентности T называется конгруэнцией, если для любой операции $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $f(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

IV.1. Конгруэнция

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T, \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \; f(x_1, x_2, \dots, x_n); f(y_1, y_2, \dots, \quad)$$

Отношение эквивалентности T называется конгруэнцией, если для любой операции $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $f(y_1; y_2; \dots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Надо бы все это записать формулой...

IV.1. Конгруэнция

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T, \\ \dots \\ (x_n; y_n) \in T \end{cases} \Rightarrow \left(f(x_1, x_2, \dots, x_n); f(y_1, y_2, \dots, y_n)\right) \in T.$$

Отношение эквивалентности T называется конгруэнцией, если для любой операции $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $f(y_1; y_2; \dots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Вот теперь можно оформить определение...

IV.1. Конгруэнция

Определение 10. Конгруэнцией *алгебраической системы* $\mathcal{A}$ *называется* ***отношение эквивалентности*** T *такое, что для любой* n*-местной операции* f *из* $\mathcal{F}$

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T, \\ \dots \\ (x_n; y_n) \in T \end{cases} \Rightarrow \left(f(x_1, x_2, \dots, x_n); f(y_1, y_2, \dots, y_n)\right) \in T. \quad (5)$$

Отношение эквивалентности T называется конгруэнцией, если для любой операции $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ значения x_i заменить на эквивалентные по T элементы y_i, то значения $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $f(y_1; y_2; \dots; y_n)$ тоже будут эквивалентны по T.

Рассмотреть пример?

IV.2. Индуцированная операция

Определение 11. *Пусть T — **конгруэнция** на $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$. Положим $\forall x \in \Omega \quad x^{\psi_T} = \{y \mid y \in \Omega \ \& \ (x;\ y) \in T\}$, т.е. x^{ψ_T} — класс эквивалентных по T элементов, в котором содержится элемент x. Пусть Ω_T — множество классов эквивалентных по T элементов. В каждом классе C из Ω_T выберем по представителю x_C.*

Каждой n-местной операции f из $\mathbf{F}$ поставим в соответствие операцию на Ω_T, определенную правилом

$$f^{\psi_T}(C_1, C_2, \ldots, C_n) = (f(x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}))^{\psi_T}.$$

Говорят, что операция f^{ψ_T} **индуцирована операцией** *f.*

IV.3. Индуцированные отношения

Определение 12. *Пусть T — **конгруэнция** на $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$. Положим $\forall x \in \Omega \quad x^{\psi_T} = \{y \mid y \in \Omega \ \& \ (x;\ y) \in T\}$, т.е. x^{ψ_T} — класс эквивалентных по T элементов, в котором содержится элемент x. Пусть Ω_T — множество классов эквивалентных по T элементов. В каждом классе C из Ω_T выберем по представителю x_C.*

Каждому отношению P из $\mathbf{P}$ поставим в соответствие отношение P^{ψ_T}, для которого $(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in P^{\psi_T}$ тогда и только тогда, когда для каждого i найдутся такие элементы $y_i \in C_i$, что $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in P$. При этом говорят, что отношение P^{ψ_T} **индуцировано отношением** *P.*

IV.4. Фактор-система

Определение 13. *Пусть T — **конгруэнция** на $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$. Положим $\forall x \in \Omega \quad x^{\psi_T} = \{y \mid y \in \Omega \ \& \ (x;\ y) \in T\}$, т.е. x^{ψ_T} — класс эквивалентных по T элементов, в котором содержится элемент x. Пусть Ω_T — множество классов эквивалентных по T элементов. В каждом классе C из Ω_T выберем по представителю x_C.*

*Множество операций, **индуцированных операциями** из $\mathbf{F}$ обозначим через $\mathbf{F}_T$, а множество отношений, **индуцированных отношениями** из $\mathbf{P}$ — через $\mathbf{P}_T$. Таким образом, $\mathbf{F}_T = \{f^{\psi_T} \mid f \in \mathbf{F}\}$ и $\mathbf{P}_T = \{P^{\psi_T} \mid P \in \mathbf{P}\}$. Алгебраическая система $A/T = \langle \Omega_T, \mathbf{F}_T, \mathbf{P}_T \rangle$ называется* **фактор-системой** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ по **конгруэнции** T.*

Рассмотреть пример?

IV.5. Теорема об описании гомоморфных образов

Теорема 3. *Если* φ *— гомоморфизм* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle \to \mathcal{B} = \langle \Omega', \mathcal{F}', \mathcal{P}' \rangle$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) если $(x;\ y) \in T_\varphi \ \Leftrightarrow\ x^\varphi = y^\varphi$, *то* T_φ *является* ***конгруэнцией****;*

2) ***отображение*** ψ_{T_φ} *является* ***сильным гомоморфизмом*** *системы* $\mathcal{A}$ *на фактор-систему* $\mathcal{A}/T_\varphi$*;*

3) пусть $\mathcal{A}/T_\varphi = \langle \Omega_{T_\varphi}, \mathcal{F}_{T_\varphi}, \mathrm{P}_{T_\varphi} \rangle$ *и отображение* $\varepsilon : \begin{cases} \Omega_{T_\varphi} \to \Omega'; \\ \mathcal{F}_{T_\varphi} \to \mathcal{F}'; \\ \mathcal{P}_{T_\varphi} \to \mathcal{P}' \end{cases}$ *определим правилами:* $C_x^\varepsilon = x^\varphi$, *для* $f'' \in \mathcal{F}_{T_\varphi}$, *индуцированной операцией* $f \in \mathcal{F}$, *положим* $(f'')^\varepsilon = f^\varphi$, *для* $p'' \in \mathcal{P}_{T_\varphi}$, *индуцированного предикатом* $p \in \mathcal{P}$, *положим* $(p'')^\varepsilon = p^\varphi$. *Тогда* ε *является* ***взаимно однозначным гомоморфизмом****;*

4) если φ *—* ***сильный гомоморфизм****, то* ε *является* ***изоморфизмом****.*

Рассмотрим пример?

IV.5. Теорема об описании гомоморфных образов

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство.

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из $\mathcal{F}$. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруэнции**).

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из $\mathcal{F}$. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруэнции**). Для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из $\mathcal{F}$. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруэнции**). Для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\psi_T} = f^{\psi_T}\left(x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}\right)$$

следует из определения ψ_T.

Следовательно,

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из $\mathcal{F}$. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруэнции**). Для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\psi_T} = f^{\psi_T}\left(x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}\right)$$

следует из определения ψ_T.

Следовательно, ψ_T — **гомоморфизм**.

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть f — n-местная операция из $\mathcal{F}$. Очевидно, что операция f^{ψ_T} не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных по T элементов (это прямое следствие из **определения конгруэнции**). Для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **равенство (1)**

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\psi_T} = f^{\psi_T}\left(x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}\right)$$

следует из определения ψ_T.

Следовательно, ψ_T — **гомоморфизм**.

Докажем, что это **сильный гомоморфизм**.

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть P — n-местное отношение из $\mathcal{P}$. Тогда по определению фактор-системы

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть P — n-местное отношение из $\mathcal{P}$. Тогда по определению фактор-системы

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in P^{\psi_T} \Leftrightarrow$$

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть P — n-местное отношение из $\mathcal{P}$. Тогда по **определению фактор-системы**

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in P^{\psi_T} \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \begin{cases} x_i \in C_i, \\ (x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}) \in P, \end{cases}$$

т.е.

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть P — n-местное отношение из $\mathcal{P}$. Тогда по **определению фактор-системы**

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in P^{\psi_T} \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \begin{cases} x_i \in C_i, \\ (x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}) \in P, \end{cases}$$

т.е.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P \Leftrightarrow$$

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть P — n-местное отношение из $\mathcal{P}$. Тогда по определению фактор-системы

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in P^{\psi_T} \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \begin{cases} x_i \in C_i, \\ (x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}) \in P, \end{cases}$$

т.е.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P \Leftrightarrow (x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}) \in P^{\psi_T}.$$

IV.6. Лемма о фактор-системе

Лемма 1. *Если T — **конгруэнция** на алгебраической системе $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, то отображение ψ_T является **сильным гомоморфизмом**.*

Доказательство. Пусть P — n-местное отношение из $\mathcal{P}$. Тогда по **определению фактор-системы**

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n) \in P^{\psi_T} \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \begin{cases} x_i \in C_i, \\ (x_{C_1}, x_{C_2}, \ldots, x_{C_n}) \in P, \end{cases}$$

т.е.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P \Leftrightarrow (x_1^{\psi_T}, x_2^{\psi_T}, \ldots, x_n^{\psi_T}) \in P^{\psi_T}.$$

По **определению индуцированного отношения** получаем, что ψ_T — **сильный гомоморфизм**. Лемма доказана.

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если φ — **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{A}'$, то отношение T_φ, определенное правилом «$(x;\ y) \in T_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x^\varphi = y^\varphi$», является **конгруэнцией**.*

Слишком много слов...

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi.$$

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \dots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi.$$

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \dots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi =$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi.$$

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \dots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \dots, x_n^\varphi) =$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi.$$

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \dots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \dots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \dots, y_n^\varphi) =$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi.$$

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \dots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \dots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \dots, y_n^\varphi) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)^\varphi \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi.$$

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \dots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \dots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \dots, y_n^\varphi) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)^\varphi \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi = f(y_1, y_2, \dots, y_n)^\varphi \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi.$$

IV.7. Лемма о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом

Лемма 2. *Если* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — ***гомоморфизм***, *то отношение* $T_\varphi = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^\varphi = y^\varphi \right\} \subseteq \Omega \times \Omega$ — ***конгруэнция***.

Доказательство.

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in T_\varphi, \\ (x_2;\ y_2) \in T_\varphi, \\ \dots, \\ (x_n;\ y_n) \in T_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^\varphi = y_1^\varphi, \\ x_2^\varphi = y_2^\varphi, \\ \dots, \\ x_n^\varphi = y_n^\varphi \end{cases} \Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi =$$

$$= f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \dots, x_n^\varphi) = f^\varphi(y_1^\varphi, y_2^\varphi, \dots, y_n^\varphi) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)^\varphi \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)^\varphi = f(y_1, y_2, \dots, y_n)^\varphi \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow (f(x_1, x_2, \dots, x_n);\ f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \in T_\varphi$. Лемма доказана.

IV.8. Доказательство теоремы 3

Утверждение 1 следует из **леммы о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом**.

IV.8. Доказательство теоремы 3

Утверждение 1 следует из **леммы о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом**.

Утверждение 2 следует из **леммы о фактор-системе**.

IV.8. Доказательство теоремы 3

Утверждение 1 следует из **леммы о конгруэнции, порожденной гомоморфизмом**.

Утверждение 2 следует из **леммы о фактор-системе**.

Докажем оставшиеся утверждения теоремы.

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруэнции** T_φ,

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруэнции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруэнции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} =$$

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруэнции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} =$$

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруэнции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} = y^{\varphi} =$$

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруэнции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} = y^{\varphi} = C_y^{\varepsilon}.$$

Значит, ε — однозначное отображение.

IV.8. Доказательство теоремы 3

Убедимся сначала, что отображение ε однозначное, т.е.

$$\alpha = \beta \;\Rightarrow\; \alpha^{\varepsilon} = \beta^{\varepsilon}.$$

Если $C_x = C_y$, то $(x;\ y) \in T_\varphi$, и, по определению **конгруэнции** T_φ, $x^\varphi = y^\varphi$. Следовательно,

$$C_x^{\varepsilon} = x^{\varphi} = y^{\varphi} = C_y^{\varepsilon}.$$

Значит, ε — однозначное отображение.

Повторяя эти же аргументы в обратном порядке, получаем, что ε — **взаимно однозначное отображение**.

IV.8. Доказательство теоремы 3

Проверим, что ε — **гомоморфизм**.

IV.8. Доказательство теоремы 3

Проверим, что ε — **гомоморфизм**.

Если f'' — операция из $\mathcal{F}_{T_\varphi}$, индуцированная n-местной операцией f из $\mathcal{F}$, и $C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n}$ — классы эквивалентных по T_φ элементов, то $f''(C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n})^\varepsilon$, по определению ε, совпадает с $f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$, то есть ε — **взаимно однозначный гомоморфизм**.

IV.8. Доказательство теоремы 3

Проверим, что ε — **гомоморфизм**.

Если f'' — операция из $\mathcal{F}_{T_\varphi}$, индуцированная n-местной операцией f из $\mathcal{F}$, и $C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n}$ — классы эквивалентных по T_φ элементов, то $f''(C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n})^\varepsilon$, по определению ε, совпадает с $f^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$, то есть ε — **взаимно однозначный гомоморфизм**.

Наконец, если φ — **сильный гомоморфизм**, то для любого предиката p'' из $\mathcal{P}_{T_\varphi}$, индуцированного n-местным предикатом p из $\mathcal{P}$, утверждение

$p''(C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_n}) = 1$ тогда и только тогда, когда $p^\varphi(x_1^\varphi, x_2^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$

следует из определения предиката p'' и **определения сильного гомоморфизма**.

Рассмотреть пример?

IV.9. Теорема о фактор-системе фактор-системы

Теорема 4. *Если* $\mathcal{A} = \langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ *— алгебраическая система,* T *— ее* ***конгруэнция****,* T' *— некоторая* ***конгруэнция*** *фактор-системы* $\mathcal{A}/T$*, и*

$$T'' = \left\{ (x;y) \,\middle|\, \left(\left\{ x' \,\middle|\, (x;x') \in T \right\};\ \left\{ y' \,\middle|\, (y;y') \in T \right\} \right) \in T' \right\},$$

(иными словами, каждый класс эквивалентных по T'' *элементов представляет собой объединение элементов всех тех классов эквивалентности по* T*, которые эквивалентны между собой по* T''*) то фактор-система* $(\mathcal{A}/T)/T'$ *изоморфна фактор-системе* $\mathcal{A}/T''$*.*

Доказательство.

Рассмотрим пример?

Пример 1. *Приведите пример алгебраической системы сигнатуры* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей*

t	f	g	h	p
$\mu(t)$	2	2	1	2

Пример 1. *Приведите пример алгебраической системы сигнатуры* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей*

t	f	g	h	p
$\mu(t)$	2	2	1	2

В качестве Ω возьмём множество целых чисел и положим $\mathcal{F} = \{+, \cdot, -\bullet\}$, $\mathcal{P} = \{\leq\}$.

Пример 1. *Приведите пример алгебраической системы сигнатуры* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей*

t	f	g	h	p
$\mu(t)$	2	2	1	2

В качестве Ω возьмём множество целых чисел и положим $\mathcal{F} = \{+, \cdot, -\bullet\}, \quad \mathcal{P} = \{\leq\}$.

Можно предложить две интерпретирующие функции сигнатуры Σ:

Пример 1. *Приведите пример алгебраической системы сигнатуры* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей*

t	f	g	h	p
$\mu(t)$	2	2	1	2

В качестве Ω возьмём множество целых чисел и положим $\mathcal{F} = \{+, \cdot, -\bullet\}, \quad \mathcal{P} = \{\leq\}$.

Можно предложить две интерпретирующие функции сигнатуры Σ:

$$\begin{cases} \nu_1(f)(x, y) = \\ \nu_1(g)(x, y) = \\ \nu_1(h)(x) = \\ \nu_1(p_{\leq})(x, y) \sim \text{«}x \leq y\text{»} \end{cases}$$

Пример 1. *Приведите пример алгебраической системы сигнатуры* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей*

t	f	g	h	p
$\mu(t)$	2	2	1	2

В качестве Ω возьмём множество целых чисел и положим $\mathcal{F} = \{+, \cdot, -\bullet\}, \quad \mathcal{P} = \{\leq\}$.

Можно предложить две интерпретирующие функции сигнатуры Σ:

$$\begin{cases} \nu_1(f)(x, y) = x + y, \\ \nu_1(g)(x, y) = \\ \nu_1(h)(x) = \\ \nu_1(p_{\leq})(x, y) \sim \text{«}x \leq y\text{»} \end{cases}$$

Пример 1. *Приведите пример алгебраической системы сигнатуры* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей*

t	f	g	h	p
$\mu(t)$	2	2	1	2

В качестве Ω возьмём множество целых чисел и положим $\mathcal{F} = \{+, \cdot, -\bullet\}, \quad \mathcal{P} = \{\leq\}$.

Можно предложить две интерпретирующие функции сигнатуры Σ:

$$\begin{cases} \nu_1(f)(x, y) = x + y, \\ \nu_1(g)(x, y) = x \cdot y, \\ \nu_1(h)(x) = \\ \nu_1(p_{\leq})(x, y) \sim \text{«}x \leq y\text{»} \end{cases}$$

Пример 1. *Приведите пример алгебраической системы сигнатуры* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей*

t	f	g	h	p
$\mu(t)$	2	2	1	2

В качестве Ω возьмём множество целых чисел и положим $\mathcal{F} = \{+, \cdot, -\bullet\}, \quad \mathcal{P} = \{\leq\}$.

Можно предложить две интерпретирующие функции сигнатуры Σ:

$$\begin{cases} \nu_1(f)(x, y) = x + y, \\ \nu_1(g)(x, y) = x \cdot y, \\ \nu_1(h)(x) = -x, \\ \nu_1(p_{\leq})(x, y) \sim \text{«}x \leq y\text{»} \end{cases}$$

Пример 1. *Приведите пример алгебраической системы сигнатуры* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей*

t	f	g	h	p
$\mu(t)$	2	2	1	2

В качестве Ω возьмём множество целых чисел и положим $\mathcal{F} = \{+, \cdot, -\bullet\}, \quad \mathcal{P} = \{\leq\}$.

Можно предложить две интерпретирующие функции сигнатуры Σ:

$$\begin{cases} \nu_1(f)(x, y) = x + y, \\ \nu_1(g)(x, y) = x \cdot y, \\ \nu_1(h)(x) = -x, \\ \nu_1(p_{\leq})(x, y) \sim «x \leq y» \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu_2(f)(x, y) = x \cdot y, \\ \nu_2(g)(x, y) = x + y, \\ \nu_1(h)(x) = -x, \\ \nu_2(p)(x, y) \sim «x \leq y». \end{cases}$$

Вернёмся к лекции?

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\}\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\}\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\}\rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Если в верном высказывании $\max\{\min\{10, 40\}, \max\{10, 20\}\} = 20$ заменить элементы носителя и операции на их образы относительно φ, то вновь получим верное высказывание.

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\} \rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\} \rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

$$\max{}^{\varphi}\left\{\min{}^{\varphi}\{10^\varphi, 40^\varphi\}, \max{}^{\varphi}\{10^\varphi, 20^\varphi\}\right\} = 20^\varphi \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (\emptyset \cap \{\emptyset\}) \cup (\emptyset \cup \emptyset) = \emptyset,$$

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\} \rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\} \rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Если в верном высказывании $\max\{\min\{10, 40\}, \max\{10, 20\}\} = 20$ заменить элементы носителя и операции на их образы относительно ψ, то вновь получим верное высказывание.

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\} \rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\} \rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

$$\max{}^\psi \left\{ \min{}^\psi \{10^\psi, 40^\psi\}, \max{}^\psi \{10^\psi, 20^\psi\} \right\} = 20^\psi \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (\emptyset \cap \{\emptyset\}) \cup (\emptyset \cup \{\emptyset\}) = \{\emptyset\}.$$

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\} \rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\} \rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Можно проверить, что аналогичная ситуация получается с любым высказыванием такого типа (т.е. использующим лишь указанные элементы и операции и, быть может, скобки).

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\}\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\}\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\}\rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Можно проверить, что аналогичная ситуация получается с любым высказыванием такого типа. Но отображения φ и ψ не являются взаимно однозначными.

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\} \rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\} \rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Можно проверить, что аналогичная ситуация получается с любым высказыванием такого типа. Но отображения φ и ψ не являются взаимно однозначными.

Поэтому если в формуле, верной для алгебры $\mathcal{B}$, заменить элементы на их прообразы в $\mathcal{A}$, можем получить ложную формулу.

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\}\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\}\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\}\rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Функция ζ, являясь взаимно однозначной, тоже сохраняет значения истинности высказывания после замены элементов на их образы относительно ζ.

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \big\langle \{10, 20, 40\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\big\}\big\rangle$,
$\mathcal{B} = \big\langle \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}, \big\{\cap, \cup, \{\emptyset\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C} = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\cdot, +, 1\big\}\big\rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^{φ}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^{ψ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^{ζ}	0	1	$\cdot$	max	1

.

В самом деле, например, истинно высказывание $\Big(\{\emptyset\} \cap \emptyset\Big) \cup \emptyset = \emptyset$, и истинно также высказывание

$$\big(\{\emptyset\}^{\zeta} \cap^{\zeta} \emptyset^{\zeta}\big) \cup^{\zeta} \emptyset^{\zeta} = \emptyset^{\zeta}, \text{ т.е. } \max\{(1 \cdot 0), 0\} = 0.$$

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\} \rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\} \rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Таким образом, утверждения такого вида об алгебре $\langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \nu_2^\Sigma \rangle$ являются верными тогда и только тогда, когда их «перевод» в утверждения об алгебре $\langle \{0, 1\}, \nu_3^\Sigma \rangle$ также являются верными, то есть эти алгебры в этом смысле «как бы одинаковы».

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\}\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\}\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\}\rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Функции φ и ψ обеспечивают лишь «односторонний перевод», то есть с их помощью верные утверждения об алгебре $\langle \{10, 20, 40\}, \nu_1^\Sigma\rangle$ «переводятся» в верные утверждения для алгебр $\langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \nu_2^\Sigma\rangle$ и $\langle \{0, 1\}, \nu_3^\Sigma\rangle$.

Пример 2. *Для универсальных алгебр*
$\mathcal{A} = \langle \{10, 20, 40\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40\} \rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\cap, \cup, \{\emptyset\}\} \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{0, 1\}, \{\cdot, +, 1\} \rangle$ *рассмотрим отображения* φ, ψ, ζ, *заданные таблицами*

x	10	20	40	min	max	40
x^φ	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ψ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\{\emptyset\}$
x^ζ	0	1	$\cdot$	max	1

.

Функции φ и ψ обеспечивают лишь «односторонний перевод», то есть с их помощью верные утверждения об алгебре $\langle \{10, 20, 40\}, \nu_1^\Sigma \rangle$ «переводятся» в верные утверждения для алгебр $\langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \nu_2^\Sigma \rangle$ и $\langle \{0, 1\}, \nu_3^\Sigma \rangle$. **Вернёмся к лекции?**

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*
При определении операции $^{-}$ *предполагается, что дополнение берется до множества* $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Решение.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение. Проверить изоморфность естественно с помощью построения **изоморфизма**.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

Проверим, что **изоморфизмом** является, например, функция φ, заданная таблицей

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Проверим, что **изоморфизмом** является, например, функция φ, заданная таблицей

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых,

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е.

Формализовать однозначность на «языке равенств» проще всего с использованием стратегии смены ролей и приоритетов.

Например,

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е.

Формализовать однозначность на «языке равенств» проще всего с использованием стратегии смены ролей и приоритетов.

Например, рассмотрим противоположное утверждение: пусть φ не является однозначным отображением:

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е.

Формализовать однозначность на «языке равенств» проще всего с использованием стратегии смены ролей и приоритетов.

Например, рассмотрим противоположное утверждение: пусть φ не является однозначным отображением: $x = y$, но

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е.

Формализовать однозначность на «языке равенств» проще всего с использованием стратегии смены ролей и приоритетов.

Например, рассмотрим противоположное утверждение: пусть φ не является однозначным отображением: $x = y$, но $x^\varphi \neq y^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е. $x = y$

Формализовать однозначность на «языке равенств» проще всего с использованием стратегии смены ролей и приоритетов.

Например, рассмотрим противоположное утверждение: пусть φ не является однозначным отображением: $x = y$, но $x^\varphi \neq y^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е. $x = y \Rightarrow$

Формализовать однозначность на «языке равенств» проще всего с использованием стратегии смены ролей и приоритетов.

Например, рассмотрим противоположное утверждение: пусть φ не является однозначным отображением: $x = y$, но $x^\varphi \neq y^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е. $x = y \Rightarrow x^\varphi = y^\varphi$. Формализовать однозначность на «языке равенств» проще всего с использованием стратегии смены ролей и приоритетов.

Например, рассмотрим противоположное утверждение: пусть φ не является однозначным отображением: $x = y$, но $x^\varphi \neq y^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е. $x = y \Rightarrow x^\varphi = y^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е. $x = y \Rightarrow x^\varphi = y^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е. $x = y \Leftrightarrow x^\varphi = y^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е. $x = y \Leftrightarrow x^\varphi = y^\varphi$.

во-вторых, «сохранение операций»: $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$;

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е. $x = y \Leftrightarrow x^\varphi = y^\varphi$.

во-вторых, «сохранение операций»: $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$;

в-третьих, «сохранение отношений»: $p(x_1, \ldots, x_n){=}1 \ \Leftrightarrow\ p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi){=}1$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Надо проверить,

во-первых, взаимную однозначность, т.е. $x = y \Leftrightarrow x^\varphi = y^\varphi$.

во-вторых, «сохранение операций»: $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$;

в-третьих, «сохранение отношений»: $p(x_1, \ldots, x_n){=}1 \ \Leftrightarrow\ p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi){=}1$.

Взаимная однозначность очевидна из таблицы значений.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi =$

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi =$

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = \quad \cap$

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = \quad \cap$

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap$

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap$

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$,

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi, \quad (\neg x)^\varphi =$

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi, \quad (\neg x)^\varphi =$

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{}$,

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{}$,

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi, \quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi},$

Конкретизируем формулу $(f(x_1, \ldots, x_n))^\varphi = f^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi)$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi, \quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi},$

Конкретизируем формулу $p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = 1$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \ \Leftrightarrow$

Конкретизируем формулу $p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \ \Leftrightarrow\ p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = 1$ для нашего случая...

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \ \Leftrightarrow$

Конкретизируем формулу $p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \ \Leftrightarrow\ p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = 1$ для нашего случая...

(мы перешли с языка предикатов-функций на язык предикатов-высказываний)

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^-$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow$

Конкретизируем формулу $p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \ \Leftrightarrow\ p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = 1$ для нашего случая...

(мы перешли с языка предикатов-функций на язык предикатов-высказываний)

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^-$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$

Конкретизируем формулу $p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = 1$ для нашего случая...

(мы перешли с языка предикатов-функций на язык предикатов-высказываний)

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^-$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow \quad \subset$

Конкретизируем формулу $p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \ \Leftrightarrow\ p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = 1$ для нашего случая...

(мы перешли с языка предикатов-функций на язык предикатов-высказываний)

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^-$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi, \quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}, \qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset$

Конкретизируем формулу $p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \ \Leftrightarrow\ p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = 1$ для нашего случая...

(мы перешли с языка предикатов-функций на язык предикатов-высказываний)

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi, \quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}, \qquad x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset$

Конкретизируем формулу $p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = 1$ для нашего случая...

(мы перешли с языка предикатов-функций на язык предикатов-высказываний)

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Конкретизируем формулу $p(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow p^\varphi(x_1^\varphi, \ldots, x_n^\varphi) = 1$ для нашего случая...

(мы перешли с языка предикатов-функций на язык предикатов-высказываний)

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi =$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi =$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad\qquad \wedge^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad\qquad \wedge^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad\qquad = 0^\varphi \wedge^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad\qquad = 0^\varphi \wedge^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad\qquad = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad\qquad = 0^\varphi \ \wedge^\varphi \ 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad\qquad = 0^\varphi \ \wedge^\varphi \ 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \quad \cap \ = 0^\varphi \ \wedge^\varphi \ 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad \cap = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^-$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad \cap \ = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \quad = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi =$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = \qquad\qquad\qquad = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi \qquad = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi \quad \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi =$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = \qquad\qquad = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \qquad = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi \quad \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi =$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = \qquad\qquad\qquad\qquad = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\quad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi \quad \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^-$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi =$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = \quad = \neg^\varphi 0^\varphi,$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi = \neg^\varphi 0^\varphi$,

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi = \overline{\emptyset} = \neg^\varphi 0^\varphi$,

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi \quad \{\emptyset\} = \overline{\emptyset} = \neg^\varphi 0^\varphi$,

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \overline{\emptyset} = \neg^\varphi 0^\varphi$,

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \overline{\emptyset} = \neg^\varphi 0^\varphi$, $(\neg 1)^\varphi =$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^-$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \overline{\emptyset} = \neg^\varphi 0^\varphi$, $(\neg 1)^\varphi = \quad = \neg^\varphi 1^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \overline{\emptyset} = \neg^\varphi 0^\varphi$, $(\neg 1)^\varphi = 0^\varphi = \neg^\varphi 1^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \overline{\emptyset} = \neg^\varphi 0^\varphi$, $(\neg 1)^\varphi = 0^\varphi = \overline{\{\emptyset\}} = \neg^\varphi 1^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \overline{\emptyset} = \neg^\varphi 0^\varphi$, $(\neg 1)^\varphi = 0^\varphi$ $\emptyset = \overline{\{\emptyset\}} = \neg^\varphi 1^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $(\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $x < y \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$(0 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = 0^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(0 \wedge 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = 0^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(1 \wedge 0)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset = 1^\varphi \wedge^\varphi 0^\varphi$

$(1 \wedge 1)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = 1^\varphi \wedge^\varphi 1^\varphi$

$(\neg 0)^\varphi = 1^\varphi = \{\emptyset\} = \overline{\emptyset} = \neg^\varphi 0^\varphi$, $(\neg 1)^\varphi = 0^\varphi = \emptyset = \overline{\{\emptyset\}} = \neg^\varphi 1^\varphi$.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$x < y \ \Leftrightarrow$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^-$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$$x < y \ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases}$$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$$x < y \ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \ x^\varphi <^\varphi y^\varphi$$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$$x < y \ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \ x^\varphi \subset y^\varphi \Leftrightarrow \ x^\varphi <^\varphi y^\varphi$$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$$x < y \ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^\varphi = \emptyset, \\ y^\varphi = \{\emptyset\}, \end{cases} \Leftrightarrow\ x^\varphi \subset y^\varphi \Leftrightarrow\ x^\varphi <^\varphi y^\varphi$$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi$, $\quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}$, $\qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi$.

Данную формулу докажем полным перебором:

$$x < y \ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^\varphi = \emptyset, \\ y^\varphi = \{\emptyset\}, \end{cases} \Leftrightarrow\ x^\varphi \subset y^\varphi \Leftrightarrow\ x^\varphi <^\varphi y^\varphi$$

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi, \quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}, \qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi.$

Таким образом, φ является **изоморфизмом**, то есть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны, что и требовалось доказать.

Пример 3. *Пусть (воспользуемся* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1\},\ \{\wedge, \neg\},\ \{<\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, {}^{-}\},\ \{\subset\} \rangle\,.$$

Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *изоморфны.*

Решение.

x	0	1	$\wedge$	$\neg$	$<$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$^{-}$	$\subset$

.

$(x \wedge y)^\varphi = x^\varphi \cap y^\varphi, \quad (\neg x)^\varphi = \overline{x^\varphi}, \qquad x < y \ \Leftrightarrow x^\varphi \subset y^\varphi.$

Таким образом, φ является **изоморфизмом**, то есть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны, что и требовалось доказать.

Вернёмся к лекции?

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$; б) ψ является гомоморфизмом алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, но не является* ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение.

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом*** *алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$; б) ψ является гомоморфизмом алгебраической системы $\mathcal{A}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$, но не является* ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение. Выполнение *равенств* для функций φ и ψ проверьте самостоятельно. Можно это сделать перебором всех значений аргументов, то есть таким же образом, как при **решении примера 3**.

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение. Проверим, что φ — **сильный гомоморфизм**.
Предикат $X \subseteq Y$ истинен в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при

$$(X;Y) \in \{(\emptyset,\emptyset),\ (\emptyset,\{\emptyset\})\,,\ (\{\emptyset\},\{\emptyset\})\}\,.$$

Подберем нужные прообразы:

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение. Проверим, что φ — **сильный гомоморфизм**.
Предикат $X \subseteq Y$ истинен в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при

$$(X;Y) \in \{(\emptyset,\emptyset),\ (\emptyset,\{\emptyset\})\,,\ (\{\emptyset\},\{\emptyset\})\}\,.$$

Подберем нужные прообразы:

$$\underbrace{\emptyset}_{=0^\varphi} \subseteq \underbrace{\emptyset}_{=0^\varphi} \text{ и } 0 \leq 0.$$

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, \cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение. Проверим, что φ — **сильный гомоморфизм**.
Предикат $X \subseteq Y$ истинен в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при

$$(X;Y) \in \{(\emptyset,\emptyset)\,,\ (\emptyset,\{\emptyset\}),\ (\{\emptyset\},\{\emptyset\})\}\,.$$

Подберем нужные прообразы:

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение. Проверим, что φ — **сильный гомоморфизм**.
Предикат $X \subseteq Y$ истинен в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при

$$(X;Y) \in \{(\emptyset,\emptyset)\,,\ (\emptyset,\{\emptyset\}),\ (\{\emptyset\},\{\emptyset\})\}\,.$$

Подберем нужные прообразы:

$$\underbrace{\emptyset}_{=0^\varphi} \subseteq \underbrace{\{\emptyset\}}_{=1^\varphi} \text{ и } 0 \leq 1.$$

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение. Проверим, что φ — **сильный гомоморфизм**.
Предикат $X \subseteq Y$ истинен в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при

$$(X;Y) \in \{(\emptyset,\emptyset)\,,\ (\emptyset,\{\emptyset\})\,,\ (\{\emptyset\},\{\emptyset\})\}\,.$$

Подберем нужные прообразы:

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение. Проверим, что φ — **сильный гомоморфизм**.
Предикат $X \subseteq Y$ истинен в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при

$$(X;Y) \in \{(\emptyset,\emptyset)\,,\ (\emptyset,\{\emptyset\})\,,\ (\{\emptyset\},\{\emptyset\})\}\,.$$

Подберем нужные прообразы:

$$\underbrace{\{\emptyset\}}_{=1^\varphi} \subseteq \underbrace{\{\emptyset\}}_{=2^\varphi} \text{ и } 1 \leq 2.$$

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, \cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение. Проверим, что φ — **сильный гомоморфизм**.
Предикат $X \subseteq Y$ истинен в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при

$$(X;Y) \in \{(\emptyset,\emptyset)\,,\ (\emptyset,\{\emptyset\})\,,\ (\{\emptyset\},\{\emptyset\})\}\,.$$

Осталось заметить, что для любых прообразов x, y элементов, соответственно, $\{\emptyset\}$ и $\emptyset$ неравенство $x \leq y$ не выполняется.

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap, \cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что а) φ является ***сильным гомоморфизмом****.*

Решение. Проверим, что φ — **сильный гомоморфизм**.

Предикат $X \subseteq Y$ истинен в $\Omega' = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ только при

$$(X;Y) \in \{(\emptyset,\emptyset)\,,\ (\emptyset,\{\emptyset\})\,,\ (\{\emptyset\},\{\emptyset\})\}\,.$$

Осталось заметить, что для любых прообразов x, y элементов, соответственно, $\{\emptyset\}$ и $\emptyset$ неравенство $x \leq y$ не выполняется.

Значит, φ является **сильным гомоморфизмом**.

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что б) ψ является гомоморфизмом, но ***сильным****.*

Решение. Гомоморфизм ψ не является сильным, так как, например,

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle\,, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle\,,$$

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что б) ψ является гомоморфизмом, но ***сильным****.*

Решение. Гомоморфизм ψ не является сильным, так как, например, $0 < 2$, но

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что б) ψ является гомоморфизмом, но ***сильным****.*

Решение. Гомоморфизм ψ не является сильным, так как, например, $0 < 2$, но

$$0^{\psi} = \qquad\qquad = 2^{\psi},$$

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что б) ψ является гомоморфизмом, но ***сильным****.*

Решение. Гомоморфизм ψ не является сильным, так как, например, $0 < 2$, но

$$0^\psi = \{\emptyset\} \qquad = 2^\psi,$$

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что б) ψ является гомоморфизмом, но ***сильным****.*

Решение. Гомоморфизм ψ не является сильным, так как, например, $0 < 2$, но

$$0^\psi = \{\emptyset\} \quad \emptyset = 2^\psi,$$

Пример 4. *Пусть (воспользовались* ***соглашением****)*

$$\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\cap,\cup\},\ \{\subseteq\} \rangle,$$

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	$\min$	$\max$	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Показать, что б) ψ является гомоморфизмом, но ***сильным****.*

Решение. Гомоморфизм ψ не является сильным, так как, например, $0 < 2$, но

$$0^\psi = \{\emptyset\} \not\subseteq \emptyset = 2^\psi,$$

что и требовалось доказать.

Вернёмся к лекции?

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$P = \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\},$$

$$Q = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\},$$

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\},$$

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}.$$

В формулировке этого примера мы воспользовались **соглашением**.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$P = \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\},$$

$$Q = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\},$$

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\},$$

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}.$$

Решение. Прежде всего отметим тот очевидный факт, что все эти отношения являются **отношениями эквивалентности**.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$P = \{(0;0),\ (1;1),\ (2;2)\},$$

Решение. Разумеется, отношение P является **конгруэнцией**, поскольку на самом деле P — это

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$P = \{(0; 0),\ (1; 1),\ (2; 2)\},$$

Решение. Разумеется, отношение P является **конгруэнцией**, поскольку на самом деле P — это

отношение равенства!

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$Q = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по Q элементов: $\{0\}$ и $\{1,2\}$.

Попытаемся увидеть, что Q — конгруэнция, с помощью специального представления таблиц Кэли для операций этой алгебраической системы. В таблице Кэли самая верхняя компонента столбца представляет собой некоторый элемент x из $\{0,1,2\}$.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$Q = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по Q элементов: $\{0\}$ и $\{1,2\}$.

min	0	1 2
0		
1 2		

max	0	1 2
0		
1 2		

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$Q = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по Q элементов: $\{0\}$ и $\{1,2\}$.

min	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

max	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$Q = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по Q элементов: $\{0\}$ и $\{1,2\}$.

min	0_1	1_2	2_2
0_1	0	0	0
1_2	0	1	1
2_2	0	1	2

max	0_1	1_2	2_2
0_1	0	1	2
1_2	1	1	2
2_2	2	2	2

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$Q = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по Q элементов: $\{0\}$ и $\{1, 2\}$.

min	0_1	1_2	2_2
0_1	0_1	0_1	0_1
1_2	0_1	1_2	1_2
2_2	0_1	1_2	2_2

max	0_1	1_2	2_2
0_1	0_1	1_2	2_2
1_2	1_2	1_2	2_2
2_2	2_2	2_2	2_2

Видно, что в каждом «прямоугольном блоке» этих таблиц Кэли все элементы принадлежат одному и тому же классу **эквивалентных** элементов.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$Q = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по Q элементов: $\{0\}$ и $\{1, 2\}$.

min	0_1	1_2 2_2
0_1	0_1	0_1 0_1
1_2	0_1	1_2 1_2
2_2	0_1	1_2 2_2

max	0_1	1_2 2_2
0_1	0_1	1_2 2_2
1_2	1_2	1_2 2_2
2_2	2_2	2_2 2_2

Класс **эквивалентных** по Q элементов, в который попадает элемент $\min\{x, y\}$ (верно и для $\max\{x, y\}$), определяется только тем, *к какому классу* **эквивалентных** элементов принадлежат элементы x и y.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$Q = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по Q элементов: $\{0\}$ и $\{1, 2\}$.

min	0_1	1_2 2_2
0_1	0_1	0_1 0_1
1_2	0_1	1_2 1_2
2_2	0_1	1_2 2_2

max	0_1	1_2 2_2
0_1	0_1	1_2 2_2
1_2	1_2	1_2 2_2
2_2	2_2	2_2 2_2

(6)

Таким образом, Q — это **конгруэнция**.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по R элементов:

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по R элементов: $\{0, 2\}$ и $\{1\}$.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по R элементов: $\{0, 2\}$ и $\{1\}$.

min	0 2	1
0 2		
1		

max	0 2	1
0 2		
1		

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по R элементов: $\{0, 2\}$ и $\{1\}$.

min	0	2	1
0	0	0	0
2	0	2	1
1	0	1	1

max	0	2	1
0	0	2	1
2	2	2	2
1	1	2	1

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по R элементов: $\{0, 2\}$ и $\{1\}$.

min	0_1	2_1	1_2
0_1	0	0	0
2_1	0	2	1
1_2	0	1	1

max	0_1	2_1	1_2
0_1	0	2	1
2_1	2	2	2
1_2	1	2	1

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по R элементов: $\{0, 2\}$ и $\{1\}$.

min	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	0_1	0_1
2_1	0_1	2_1	1_2
1_2	0_1	1_2	1_2

max	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	2_1	1_2
2_1	2_1	2_1	2_1
1_2	1_2	2_1	1_2

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\},$$

Решение. Классы **эквивалентных** по R элементов: $\{0, 2\}$ и $\{1\}$.

min	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	0_1	0_1
2_1	0_1	2_1	1_2
1_2	0_1	1_2	1_2

max	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	2_1	1_2
2_1	2_1	2_1	2_1
1_2	1_2	2_1	1_2

Таким образом, отношение R, не является **конгруэнцией**, поскольку, например,

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$R = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,,$$

Решение. Классы **эквивалентных** по R элементов: $\{0,2\}$ и $\{1\}$.

min	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	0_1	0_1
2_1	0_1	2_1	1_2
1_2	0_1	1_2	1_2

max	0_1	2_1	1_2
0_1	0_1	2_1	1_2
2_1	2_1	2_1	2_1
1_2	1_2	2_1	1_2

Таким образом, отношение R, не является **конгруэнцией**, поскольку, например, $\begin{cases} (0;2) \in R \\ (1;1) \in R \end{cases}$, но $\overline{(\min\{0,1\};\ \min\{2,1\}) \in R}$.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,.$$

Решение. Классы **эквивалентных** по T элементов:

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,.$$

Решение. Классы **эквивалентных** по T элементов: $\{0, 1\}$ и $\{2\}$.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,.$$

Решение. Классы **эквивалентных** по T элементов: $\{0, 1\}$ и $\{2\}$.

min	0 1	2
0 1		
2		

max	0 1	2
0 1		
2		

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,.$$

Решение. Классы **эквивалентных** по T элементов: $\{0, 1\}$ и $\{2\}$.

min	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

max	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,.$$

Решение. Классы **эквивалентных** по T элементов: $\{0, 1\}$ и $\{2\}$.

min	0_1	1_1	2_2
0_1	0	0	0
1_1	0	1	1
2_2	0	1	2

max	0_1	1_1	2_2
0_1	0	1	2
1_1	1	1	2
2_2	2	2	2

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,.$$

Решение. Классы **эквивалентных** по T элементов: $\{0,1\}$ и $\{2\}$.

min	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	0_1	0_1
1_1	0_1	1_1	1_1
2_2	0_1	1_1	2_2

max	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	1_1	2_2
1_1	1_1	1_1	2_2
2_2	2_2	2_2	2_2

Таким образом, T является **конгруэнцией**, так как,
во-первых, класс **эквивалентных** по T элементов, в который попадает $\min\{x,y\}$, определяется только тем, из какого класса **эквивалентных** по T элементов взяты x, y;

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0,1,2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,.$$

Решение. Классы **эквивалентных** по T элементов: $\{0,1\}$ и $\{2\}$.

min	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	0_1	0_1
1_1	0_1	1_1	1_1
2_2	0_1	1_1	2_2

max	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	1_1	2_2
1_1	1_1	1_1	2_2
2_2	2_2	2_2	2_2

Таким образом, T является **конгруэнцией**, так как,
во-вторых, класс **эквивалентных** по T элементов, в который попадает $\max\{x,y\}$, определяется только тем, из какого класса **эквивалентных** по T элементов взяты x, y.

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,.$$

Решение. Классы **эквивалентных** по T элементов: $\{0, 1\}$ и $\{2\}$.

min	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	0_1	0_1
1_1	0_1	1_1	1_1
2_2	0_1	1_1	2_2

max	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	1_1	2_2
1_1	1_1	1_1	2_2
2_2	2_2	2_2	2_2

Таким образом, T является **конгруэнцией**.

Обратите внимание на тот факт, что предикат $\leq$ при проверке «на конгруентность» **отношения эквивалентности** никак не используется!

Пример 5. *Для алгебраической системы* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2\},\ \{\min, \max\},\ \{\leq\} \rangle$ *выяснить, какие из отношений являются* ***конгруэнциями****:*

$$T = \{(0;0),\ (0;1),\ (1;0),\ (1;1),\ (2;2)\}\,.$$

Решение. Классы **эквивалентных** по T элементов: $\{0, 1\}$ и $\{2\}$.

min	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	0_1	0_1
1_1	0_1	1_1	1_1
2_2	0_1	1_1	2_2

max	0_1	1_1	2_2
0_1	0_1	1_1	2_2
1_1	1_1	1_1	2_2
2_2	2_2	2_2	2_2

Таким образом, T является **конгруэнцией**.

Вернёмся к лекции или рассмотрим **другой пример**?

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая:

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\big(p_1(x) + p_2(x);\qquad\qquad\big)$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow \; \big(p_1(x) + p_2(x); \qquad\qquad \big)$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x) + p_2(x);\qquad\qquad\big)$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

если f — это произведение многочленов, то

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

если f — это произведение многочленов, то

$$\big(p_1(x)p_2(x);\qquad\qquad\big)$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

если f — это произведение многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ \qquad\qquad\qquad\quad \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x)p_2(x); \qquad\quad\big)$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

если f — это произведение многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x)p_2(x); \qquad\qquad\big)$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение. Конкретизируем формулы из **определения конгруэнции** для нашего случая: если f — это сумма многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

если f — это произведение многочленов, то

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p_1(1) + p_2(1) = q_1(1) + q_2(1) \Rightarrow\; \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p_1(1) + p_2(1) = q_1(1) + q_2(1) \Rightarrow\; \big(p_1(x) + p_2(x); q_1(x) + q_2(x)\big) \in P.$$

Для случая, когда f — сумма многочленов, **формула** выполняется.

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$*.*

Решение.

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p_1(1)p_2(1) = q_1(1)q_2(1) \Rightarrow\; \big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\big) \in P.$$

Пример 6. *Рассмотрим алгебраическую систему* $\mathbb{R}(x)$ *с носителем из многочленов от переменной* x *с действительными коэффициентами и операциями сложения и умножения многочленов. Доказать, что отношение* P*, заданное формулой:*

$$(p(x), q(x)) \in P \;\Leftrightarrow\; p(1) = q(1). \tag{7}$$

является ***конгруэнцией*** *алгебраической системы* $\mathbb{R}(x)$.

Решение.

$$\begin{cases} (p_1(x); q_1(x)) \in P \\ (p_2(x); q_2(x)) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = q_1(1), \\ p_2(1) = q_2(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p_1(1)p_2(1) = q_1(1)q_2(1) \Rightarrow\; \big(p_1(x)p_2(x); q_1(x)q_2(x)\big) \in P.$$

Следовательно, для случая, когда f — произведение многочленов, **формула** также выполняется. Задача решена.

Вернёмся к лекции?

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение.

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$.

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\{\{0\},\{1,2\}\}$. С помощью **таблиц (6)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\{\{0\},\{1,2\}\}$. С помощью **таблиц (6)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$		
$\{1,2\}$		

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\{\{0\},\{1,2\}\}$. С помощью **таблиц (6)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	
$\{1,2\}$		

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\{\{0\},\{1,2\}\}$. С помощью **таблиц (6)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$		

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\{\{0\},\{1,2\}\}$. С помощью **таблиц (6)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\{\{0\},\{1,2\}\}$. С помощью **таблиц (6)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\{\{0\},\{1,2\}\}$. С помощью **таблиц (6)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$		
$\{1,2\}$		

.

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носителем **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ является множество классов **эквивалентных** по Q элементов, то есть этот носитель равен $\{\{0\},\{1,2\}\}$. С помощью **таблиц (6)** нетрудно получить таблицы Кэли для образов операций:

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

Предикат $\leq^{\psi_Q}$ зададим с помощью отношения:

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle / \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

$$\Big\{ \qquad\qquad \Big\}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle / \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{ (x;y) \,\middle|\, \right\}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q =$
$= \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle \,/\, \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}.$

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{ (x;y) \;\middle|\; \left\{ \{x;y\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}, \right\}^{\psi_Q} = \right.$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \begin{cases}\{x;y\}\subseteq\{0;\ 1;\ 2\},\\ x\leq y\end{cases}\right\}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \left\{\begin{array}{l}\{x;y\}\subseteq\{0;\ 1;\ 2\},\\ x\leq y\end{array}\right.\right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q =$
$= \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle \,/\, \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}.$

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{ (x;y) \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \{x;y\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}, \\ x \leq y \end{array} \right. \right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \left\{\begin{array}{l}\{x;y\}\subseteq\{0;\ 1;\ 2\},\\ x\leq y\end{array}\right.\right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q =$
$= \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle \,/\, \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}.$

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{ (x;y) \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \{x;y\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}, \\ x \leq y \end{array} \right. \right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,, \qquad\qquad \}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \left\{\begin{array}{l}\{x;y\}\subseteq\{0;\ 1;\ 2\},\\ x\leq y\end{array}\right.\right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\qquad\qquad\}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q =$
$= \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle \,/\, \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}.$

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{ (x;y) \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \{x;y\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}, \\ x \leq y \end{array} \right. \right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\qquad \}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \left\{\begin{array}{l}\{x;y\}\subseteq\{0;\ 1;\ 2\},\\ x\leq y\end{array}\right.\right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\ (2;2)\}^{\psi_Q} =$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q =$
$= \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle \,/\, \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}.$

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{ (x;y) \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \{x;y\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}, \\ x \leq y \end{array} \right. \right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\ (2;2)\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(\{0\},\quad)\,,\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\}\,.$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q =$
$= \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle \,/\, \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}.$

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{ (x;y) \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \{x;y\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}, \\ x \leq y \end{array} \right. \right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\ (2;2)\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(\{0\},\{0\})\,, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}\,.$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \left\{\begin{array}{l}\{x;y\}\subseteq\{0;\ 1;\ 2\},\\ x\leq y\end{array}\right.\right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\ (2;2)\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(\{0\},\{0\})\,,\ (\{0\},\qquad)\,,\qquad\qquad\}\,.$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \left\{\begin{array}{l}\{x;y\}\subseteq\{0;\ 1;\ 2\},\\ x\leq y\end{array}\right.\right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\ (2;2)\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(\{0\},\{0\})\,,\ (\{0\},\{1,2\})\,,\qquad\qquad\}\,.$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q =$
$= \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle \,/\, \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}.$

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{ (x;y) \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \{x;y\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}, \\ x \leq y \end{array} \right. \right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\ (2;2)\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(\{0\},\{0\})\,,\ (\{0\},\{1,2\})\,,\ (\{1,2\},\qquad)\}\,.$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q =$
$= \langle \{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\} \rangle \,/\, \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}.$

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{ (x;y) \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \{x;y\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}, \\ x \leq y \end{array} \right. \right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\ (2;2)\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(\{0\},\{0\})\,,\ (\{0\},\{1,2\})\,,\ (\{1,2\},\{1,2\})\}\,.$$

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \left\{\begin{array}{l}\{x;y\}\subseteq\{0;\ 1;\ 2\},\\ x\leq y\end{array}\right.\right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\ (2;2)\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(\{0\},\{0\})\,,\ (\{0\},\{1,2\})\,,\ (\{1,2\},\{1,2\})\}\,.$$

Алгебраическая фактор-система $\mathcal{A}/T$ полностью описана.

Пример 7. *Для* ***примера 5*** *найти* ***фактор-систему*** $\mathcal{A}/Q = \langle\{0,1,2\},\ \{\min,\max\},\ \{\leq\}\rangle\ /\ \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.

Решение. Носитель **фактор-системы** $\mathcal{A}/Q$ — $\{\{0\},\{1,2\}\}$.

$\min^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

$\max^{\psi_Q}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

.

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \left\{\begin{array}{l}\{x;y\}\subseteq\{0;\ 1;\ 2\},\\ x\leq y\end{array}\right.\right\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(0;0)\,,\ (0;1)\,,\ (0;2)\,,\ (1;1)\,,\ (1;2)\,,\ (2;2)\}^{\psi_Q} =$$

$$= \{(\{0\},\{0\})\,,\ (\{0\},\{1,2\})\,,\ (\{1,2\},\{1,2\})\}\,.$$

Вернёмся к лекции?

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a; b; c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a; b\}$	$\{a; c\}$	$\{b; c\}$	$\{a; b; c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Решение.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a; b; c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a; b\}$	$\{a; c\}$	$\{b; c\}$	$\{a; b; c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi =$

$\}$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi =$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow$

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi =$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a; b; c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a; b\}$	$\{a; c\}$	$\{b; c\}$	$\{a; b; c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset; \emptyset),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X; Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a; b; c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset; \emptyset),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X; Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a; b; c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a; b\}$	$\{a; c\}$	$\{b; c\}$	$\{a; b; c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset; \emptyset),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X; Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),$$

$$\}.$$

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$$

$$\}.$$

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a; b; c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a; b\}$	$\{a; c\}$	$\{b; c\}$	$\{a; b; c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset; \emptyset), (\emptyset; \{b\}), (\{b\}; \emptyset), (\{b\}; \{b\}), (\{a\}, \{a\}), (\{a\}, \{a; b\}),$
$(\{a; b\}, \{a\}), (\{a; b\}, \{a; b\}), (\{c\}, \{c\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X; Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),$

$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),$
$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \Leftrightarrow X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),$ $\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),$ $\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),$ $\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),$ $\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),$ $\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),$ $\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),$ $\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,
$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

По определению конгруэнции, порожденной гомоморфизмом, $(X;Y) \in T_\varphi \;\Leftrightarrow\; X^\varphi = Y^\varphi$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi =$

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi$=

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi =$

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi$=

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению,

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi$=

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi$=

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi$=

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi$=

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi$=

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi = \Big\langle \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\rangle$.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \qquad \right\}, \quad \right\rangle$.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \qquad \right\}, \quad \right\rangle$.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \right\}, \right\rangle$.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \right\}, \right\rangle$.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset; \{b\}\right\}, \left\{\{a\}, \{a;b\}\right\}, \right\}, \right\rangle$.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset; \{b\}\right\}, \left\{\{a\}, \{a;b\}\right\}, \right\}, \right\rangle$.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \right\}, \right\rangle.$$

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \right\}, \right\rangle$.

$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$
$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$
$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}$.

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \right\rangle.$$

$$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$$
$$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$$
$$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}.$$

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$$T_\varphi = \{(\emptyset;\emptyset),(\emptyset;\{b\}),(\{b\};\emptyset),(\{b\};\{b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a;b\}),$$
$$(\{a;b\},\{a\}),(\{a;b\},\{a;b\}),(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{b;c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$$
$$(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}.$$

Надо найти фактор-систему, т.е. по определению, множество (носитель системы) и совокупность операций и отношений. Носитель искомой системы состоит из классов эквивалентных по T_φ элементов.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

Индуцированную операцию зададим

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

Индуцированную операцию зададим

Формулой?

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

Индуцированную операцию зададим

Формулой? Графиком?

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

Индуцированную операцию зададим

Формулой? Графиком? Таблицей значений?

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

Индуцированную операцию зададим таблицей значений.

Формулой? Графиком? Таблицей значений?

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$ $\{\{a\};\{a;b\}\}$ $\{\{c\};\{b;c\}\}$ $\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$				

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$			
$\{\{a\};\{a;b\}\}$				
$\{\{c\};\{b;c\}\}$				
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$				

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$		
$\{\{a\}; \{a;b\}\}$				
$\{\{c\}; \{b;c\}\}$				
$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$				

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	
$\{\{a\};\{a;b\}\}$				
$\{\{c\};\{b;c\}\}$				
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$				

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{a\}; \{a;b\}\}$				
$\{\{c\}; \{b;c\}\}$				
$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$				

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$ $\{\{a\};\{a;b\}\}$ $\{\{c\};\{b;c\}\}$ $\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$ $\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset; \{b\}\}$ $\{\{a\}; \{a;b\}\}$ $\{\{c\}; \{b;c\}\}$ $\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\emptyset; \{b\}\}$ $\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$ $\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	
$\{\{c\};\{b;c\}\}$				
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$				

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$				
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$				

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$ $\{\{a\};\{a;b\}\}$ $\{\{c\};\{b;c\}\}$ $\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$ $\{\{a\};\{a;b\}\}$ $\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$ $\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$ $\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$ $\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$		
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$				

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$				

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$			

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$		

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε				

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
D^ε				

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
D^ε				

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε				

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\emptyset; \{b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a\}; \{a;b\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{c\}; \{b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\}; \{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0			

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0			

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0			

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0			

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1		

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1		

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1		

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1		

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1	f_2	

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1	f_2	

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1	f_2	

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1	f_2	

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{ \emptyset; \{b\} \right\}, \left\{ \{a\}, \{a;b\} \right\}, \left\{ \{c\}, \{b;c\} \right\}, \left\{ \{a;c\}, \{a;b;c\} \right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1	f_2	f_3

Алгебра $\mathcal{A}/T_\varphi$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$.

Естественный изоморфизм зададим таблицей значений.

Пример 8. *Пусть* $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq \{a;b;c\} \right\}, \{\cup\} \right\rangle$,

$\mathcal{B} = \langle \{f_0, f_1, f_2, f_3\}, \{\max\} \rangle$, *гомоморфизм задан таблицей:*

x	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a;b\}$	$\{a;c\}$	$\{b;c\}$	$\{a;b;c\}$	$\cup$
x^φ	f_0	f_1	f_0	f_2	f_1	f_3	f_2	f_3	max

x	1	2
$f_0(x)$	-5	-5
$f_1(x)$	-5	5
$f_2(x)$	5	-5
$f_3(x)$	5	5

Найдите конгруэнцию T_φ *и* $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Решение.

$$\mathcal{A}/T_\varphi = \left\langle \left\{ \left\{\emptyset;\{b\}\right\}, \left\{\{a\},\{a;b\}\right\}, \left\{\{c\},\{b;c\}\right\}, \left\{\{a;c\},\{a;b;c\}\right\} \right\}, \{\circ\} \right\rangle.$$

$C \backslash D$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\emptyset;\{b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a\};\{a;b\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{c\};\{b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$	$\{\{a;c\};\{a;b;c\}\}$
D^ε	f_0	f_1	f_2	f_3

Вернемся к лекции?

Пример 9. *Для гомоморфизмов* φ *и* ψ ***примера 4****:*

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

,

построить соответствующие ***фактор-системы****.*

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;\ \ ),\qquad\qquad\qquad

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0), \qquad\qquad \}\,.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;\ ),\qquad\qquad\qquad\qquad\}\,.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\qquad\qquad\qquad\qquad\}\,.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;\ ),\qquad\qquad\}\,.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\qquad\qquad\}\,.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;\ ),\qquad\}\,.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\qquad\}.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;\ )\}\,.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,.$$

Получаем носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$:

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,.$$

Получаем носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$: $\{\{0$ $\}$.

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,.$$

Получаем носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$: $\{\{0\},\qquad\}\,.$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,.$$

Получаем носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$: $\{\{0\},\{1,\ \}\}\,.$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{φ} соответствует конгруэнция

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}\,.$$

Получаем носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$: $\quad \{\{0\},\{1,2\}\}\,.$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_\varphi$.
Зададим операции m и M

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_\varphi$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_\varphi$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$		
$\{1,2\}$		

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_\varphi$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	
$\{1,2\}$		

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_\varphi$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$		

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_\varphi$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_\varphi$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

M	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$		
$\{1,2\}$		

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

M	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	
$\{1,2\}$		

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_\varphi$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

M	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$		

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_\varphi$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_\varphi$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

M	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Носитель **фактор-алгебры** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$: $\{\{0\},\quad\}$.
Пусть m и M — операции, **индуцированные** min и max в $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$.
Зададим операции m и M таблицами Кэли:

m	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$

M	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$ имеет следующий носитель: $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$ имеет следующий носитель: $\{\{0\},\{1,2\}\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

$$\Big\{ (\{0\}, \quad), \qquad\qquad \Big\}.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$ имеет следующий носитель: $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

$$\Big\{ \big(\{0\},\{0\}\big), \qquad \Big\}.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$ имеет следующий носитель: $\{\{0\},\{1,2\}\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

$$\Big\{ (\{0\},\{0\}),\ (\{0\},\qquad),\qquad\qquad \Big\}.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$ имеет следующий носитель: $\{\{0\},\{1,2\}\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

$$\Big\{ (\{0\},\{0\}),\ (\{0\},\{1,2\}),\qquad\qquad \Big\}.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$ имеет следующий носитель: $\{\{0\},\{1,2\}\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

$$\Big\{\big(\{0\},\{0\}\big),\ \big(\{0\},\{1,2\}\big),\ \big(\{1,2\},\qquad\big)\Big\}.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$ имеет следующий носитель: $\{\{0\},\{1,2\}\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

$$\Big\{\big(\{0\},\{0\}\big),\ \big(\{0\},\{1,2\}\big),\ \big(\{1,2\},\{1,2\}\big)\Big\}.$$

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$ имеет следующий носитель: $\big\{\{0\},\{1,2\}\big\}$. Образ p предиката $\leq$ соответствует отношению

$$\Big\{\big(\{0\},\{0\}\big),\ \big(\{0\},\{1,2\}\big),\ \big(\{1,2\},\{1,2\}\big)\Big\}.$$

Фактор-алгебра $\mathcal{A}=\big\langle\big\{\{0\},\{1,2\}\big\},\{m,M\},\{p\}\big\rangle$ полностью определена.

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, в полном соответствии с **теоремой об описании гомоморфных образов**, отображение α, определенное таблицей

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^φ	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^ψ	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, в полном соответствии с **теоремой об описании гомоморфных образов**, отображение α, определенное таблицей

x	$\{0\}$	$\{1,2\}$	m_φ	M_φ	p
x^α	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

является взаимно однозначным **сильным гомоморфизмом**.

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. В силу **критерия изоморфизма** α является изоморфизмом алгебраической **фактор-системы** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi}$ на алгебраическую систему $\mathcal{B}$.

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{ψ} соответствует *та же самая конгруэнция*

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\},$$

что и ρ_{φ}, то есть эти предикаты совпадают! Значит,

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{ψ} соответствует *та же самая конгруэнция*

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\},$$

что и ρ_{φ}, то есть эти предикаты совпадают! Значит, и фактор-алгебры совпадают.

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{ψ} соответствует *та же самая конгруэнция*

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\},$$

что и ρ_{φ}, то есть эти предикаты совпадают! Однако теперь взаимно однозначный гомоморфизм β, определенный таблицей

x	$\{0\}$	$\{1,2\}$	m_{φ}	M_{φ}	p
x^{β}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

,

не является **сильным гомоморфизмом**. Таким образом,

Пример 9. *Построить* ***фактор-систему***

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$

,

x	0	1	2	min	max	$\leq$
x^{ψ}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

.

Решение. Предикату ρ_{ψ} соответствует *та же самая конгруэнция*

$$R = \{(0;0),\ (1;1),\ (1;2),\ (2;1),\ (2;2)\},$$

что и ρ_{φ}, то есть эти предикаты совпадают! Однако теперь взаимно однозначный гомоморфизм β, определенный таблицей

x	$\{0\}$	$\{1,2\}$	m_{φ}	M_{φ}	p
x^{β}	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\subseteq$

,

не является **сильным гомоморфизмом**. Таким образом, алгебраические **фактор-системы** $\mathcal{A}/\rho_{\varphi} = \mathcal{A}/\rho_{\psi}$ и $\mathcal{B}$ не изоморфны.

Вернёмся к лекции?

Пример 10. *Рассмотрим циклическую* ***группу*** Z_8 *порядка 8:*

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Рассмотрим ***конгруэнции***

$$T = \left\{ (x; y) \,\middle|\, |x - y| \in \{0;\ 4\} \right\},$$

$$T'' = \left\{ (x; y) \,\middle|\, |x - y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\} \right\}.$$

Найти ***фактор-системы*** $Z_8/T, \quad Z_8/T'', \quad (Z_8/T)/T'.$

Решение.

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T	
	$\{\quad\}$
$\{\quad\}$	

$$T = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T	
	$\{0;\ 4\}$
$\{0;\ 4\}$	

$$T = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T	
	$\{0;\ 4\}$ $\{1;\ 5\}$
$\{0;\ 4\}$ $\{1;\ 5\}$	

$$T = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T			
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$
$\{0;\ 4\}$			
$\{1;\ 5\}$			
$\{2;\ 6\}$			

$$T = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$				
$\{1;\ 5\}$				
$\{2;\ 6\}$				
$\{3;\ 7\}$				

$$T = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

$$T = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y) \,\middle|\, |x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''	

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''	
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$		
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$		

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$$T = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 4\}\right\},$$

$$T'' = \left\{(x;y)\,\middle|\,|x-y| \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}\right\}.$$

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$(Z_8/T)/T'$		
	$\left\{\quad\right\}$	$\left\{\quad\right\}$
$\left\{\quad\right\}$		

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$(Z_8/T)/T'$		
	$\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\}$	$\{$ $\}$
$\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\}$		
$\{$ $\}$		

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$(Z_8/T)/T'$		
	$\Big\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\Big\}$	$\Big\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\Big\}$
$\Big\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\Big\}$		
$\Big\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\Big\}$		

Решение. Операции в фактор-системах Z_8/T, Z_8/T'', $(Z_8/T)/T'$ можно задать следующими таблицами Кэли:

Z_8/T				
	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{0;\ 4\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$
$\{1;\ 5\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$
$\{2;\ 6\}$	$\{2;\ 6\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$
$\{3;\ 7\}$	$\{3;\ 7\}$	$\{0;\ 4\}$	$\{1;\ 5\}$	$\{2;\ 6\}$

Z_8/T''		
	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$
$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$	$\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

$(Z_8/T)/T'$		
	$\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\}$	$\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\}$
$\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\}$	$\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\}$	$\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\}$
$\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\}$	$\{\{1;\ 5\};\{3;\ 7\}\}$	$\{\{0;\ 4\};\{2;\ 6\}\}$

Вернёмся к лекции?

Задача V.1. (Ответ приведен на стр.1139.) Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$,
$\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$,
$\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$,
$\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\}\Big\rangle$,
$\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$,
$\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Задача V.2. (Ответ приведен на стр.1174.) Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Задача V.3. (Ответ приведен на стр.1185.) Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Задача V.4. (Ответ приведен на стр.1219.)

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Задача VI.5. (Ответ приведен на стр.1284.) Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x\cdot y\cdot z - z\cdot y\cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Задача VI.6. (Ответ приведен на стр.1294.) Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}}\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}}\rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x\rho y$.

Задача VII.7. (Ответ приведен на стр.1303.) Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Задача VII.8. (Ответ приведен на стр.1313.) Покажите, что **изоморфны** алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ i;\ -i;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$, где $*$ — операция умножения матриц.

Задача VII.9. (Ответ приведен на стр.1316.) Постройте **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ i;\ -i;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ на $\mathcal{C} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$, где $*$ — операция умножения матриц.

Задача VII.10. (Ответ приведен на стр.1319.) Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\} \right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^{φ}	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Задача VII.11. (Ответ приведен на стр.1332.) Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Задача VII.12. (Ответ приведен на стр.1346.) Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \;\middle|\; \{x, y, z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Задача VIII.13. (Ответ приведен на стр.1374.) Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Задача VIII.14. (Ответ приведен на стр.1397.) Запишите определение **класса элементов, эквивалентных элементу** m относительно **конгруэнции** T.

Задача VIII.15. (Ответ приведен на стр.1400.) Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Задача VIII.16. (Ответ приведен на стр.1410.) Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Задача IX.17. (Ответ приведен на стр.1423.) Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Задача IX.18. (Ответ приведен на стр.1438.) Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Задача IX.19. (Ответ приведен на стр.1449.) Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{\ }\}\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруэнциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если

$$T_1 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Задача X.20. (Ответ приведен на стр.1453.) Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\} \rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\} \rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Задача X.21. (Ответ приведен на стр.1487.)

$$\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\} \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \{a;b\},\{u;v\},\ \{Q\} \rangle,$$

где $(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases}$ $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Задача X.22. (Ответ приведен на стр.1500.) На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Задача X.23. (Ответ приведен на стр.1531.) Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Задача X.24. (Ответ приведен на стр.1545.) Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Задача X.25. (Ответ приведен на стр.1562.) Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Задача XI.26. (Ответ приведен на стр.1599.) Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Задача XI.27. (Ответ приведен на стр.1666.) Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Задача XI.28. (Ответ приведен на стр.1699.) Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Задача XI.29. (Ответ приведен на стр.1736.) Постройте конгруэнцию T для **гомоморфизма, созданного** при решении **задачи VII.9**, и фактор-систему $\mathcal{A}/T$.

XII. Определение группы

Определение 14. *Универсальная алгебра* $\langle G, \{*, e\}\rangle$ *называется* **группой**, *если двуместная операция* $*$ *и элемент* e *из* G *удовлетворяют следующим трем условиям (аксиомам группы):*

G1. $(x * y) * z = x * (y * z)$ *(ассоциативность);*

G2. *Для любого элемента* g *из* G *справедливо соотношение* $g * e = e * g = g$ *(наличие нейтрального элемента);*

G3. *Для любого элемента* g *из* G *найдется такой элемент* g', *что* $g * g' = e$ *(наличие обратного элемента).*

Элемент g' *называется* **обратным** *к* g.

XII. Определение группы

Определение 14. *Универсальная алгебра* $\langle G, \{*, e\}\rangle$ *называется* **группой**, *если двуместная операция* $*$ *и элемент* e *из* G *удовлетворяют следующим трем условиям (аксиомам группы):*

G1. $(x * y) * z = x * (y * z)$ *(ассоциативность);*

G2. *Для любого элемента* g *из* G *справедливо соотношение* $g * e = e * g = g$ *(наличие нейтрального элемента);*

G3. *Для любого элемента* g *из* G *найдется такой элемент* g', *что* $g * g' = e$ *(наличие обратного элемента).*

Элемент g' *называется* **обратным** *к* g.

Определение 15. *Группа* G *называется* **абелевой** *или* **коммутативной**, *если выполняется тождество* $x * y = y * x$ *для любых* $x, y \in G$.

XIII. Определение поля

Аксиомы группы: **G1)** $(x * y) * z = x * (y * z)$;
G2) $g * e = e * g = g$; **G3)** $g * g' = e$.

Определение 16. Полем *называется такая универсальная алгебра с носителем* P *и сигнатурой* $\{+, *, 0, 1\}$, *что выполняются следующие аксиомы:*

F1. $\langle P, \{+, 0\}\rangle$ — ***абелева группа*** *(**аддитивная** группа поля);*

F2. $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ — ***абелева группа*** *(**мультипликативная** группа поля);*

F3. *для любых* x, y, z *из* P *выполняется равенство* $x * (y + z) = x * y + x * z$ *(дистрибутивность).*

XIII. Определение поля

Аксиомы группы: **G1)** $(x * y) * z = x * (y * z)$;
G2) $g * e = e * g = g$; **G3)** $g * g' = e$.

Поле: **F1)** $\langle P, \{+, 0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x * (y + z) = x * y + x * z$ (дистрибутивность).

Как разобраться с тем, что такое поле?

XIII. Определение поля

Аксиомы группы: **G1)** $(x * y) * z = x * (y * z)$;
G2) $g * e = e * g = g$; **G3)** $g * g' = e$.

Поле: **F1)** $\langle P, \{+, 0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x * (y + z) = x * y + x * z$ (дистрибутивность).

Есть два стандартных способа: изучение определения (получение следствий) и

XIII. Определение поля

Аксиомы группы: **G1)** $(x * y) * z = x * (y * z)$;
G2) $g * e = e * g = g$; **G3)** $g * g' = e$.

Поле: **F1)** $\langle P, \{+, 0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x * (y + z) = x * y + x * z$ (дистрибутивность).

Есть два стандартных способа: изучение определения (получение следствий) и
рассмотрение достаточно большого числа примеров.

XIII.1. Примеры полей

Алгебра $\langle \mathbb{Q}, \{+, \cdot, 0, 1\} \rangle$ является полем и называется **полем рациональных чисел**.

Рациональным числом называется число, представимое в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число, то есть $m \in \mathbb{Z} = \{0; -1; 1; -2; 2; \ldots\}$, и n — натуральное число, то есть $n \in \mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$. Ниже будет приведена процедура, с помощью которой осуществляется формальное построение поля рациональных чисел, как поля частных кольца целых чисел.

XIII.1. Примеры полей

Алгебра $\langle \mathbb{Q}, \{+, \cdot, 0, 1\}\rangle$ является полем и называется **полем рациональных чисел**.

Рациональным числом называется число, представимое в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число, то есть $m \in \mathbb{Z} = \{0; -1; 1; -2; 2; \ldots\}$, и n — натуральное число, то есть $n \in \mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$. Ниже будет приведена процедура, с помощью которой осуществляется формальное построение поля рациональных чисел, как поля частных кольца целых чисел.

Алгебра $\langle \mathbb{R}, \{+, \cdot, 0, 1\}\rangle$ является полем и называется **полем действительных чисел**.

XIII.1. Примеры полей

Какие еще примеры полей следует рассмотреть в первую очередь?

Показать список базовых исследовательских стратегий?

XIII.1. Примеры полей

Какие еще примеры полей следует рассмотреть в первую очередь?

Показать список базовых исследовательских стратегий?

Естественно применить стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Какие характеристики можно сопоставить полю?

XIII.1. Примеры полей

Какие еще примеры полей следует рассмотреть в первую очередь?

Показать список базовых исследовательских стратегий?

Естественно применить стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Какие характеристики можно сопоставить полю?

В первую очередь, для конечного поля, — *количество элементов*.

XIII.1. Примеры полей

Какие еще примеры полей следует рассмотреть в первую очередь?

Показать список базовых исследовательских стратегий?

Естественно применить стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Какие характеристики можно сопоставить полю?

В первую очередь, для конечного поля, — *количество элементов*.

Ограничено ли сверху число элементов поля, нам пока неизвестно.

XIII.1. Примеры полей

Какие еще примеры полей следует рассмотреть в первую очередь?

Показать список базовых исследовательских стратегий?

Естественно применить стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Какие характеристики можно сопоставить полю?

В первую очередь, для конечного поля, — *количество элементов.*

Поэтому следует посмотреть устройство поля из минимального числа элементов. Каково это число?

Поле: F1) $\langle P, \{+, 0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x * (y + z) = x * y + x * z$ (дистрибутивность).

XIII.1. Примеры полей

Какие еще примеры полей следует рассмотреть в первую очередь?

Показать список базовых исследовательских стратегий?

Естественно применить стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Какие характеристики можно сопоставить полю?

В первую очередь, для конечного поля, — *количество элементов*.

Ясно, что в поле не меньше двух элементов, так как в мультипликативной группе есть хотя бы один элемент (единичный).

Поле: F1) $\langle P, \{+, 0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x * (y + z) = x * y + x * z$ (дистрибутивность).

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов. Обозначим через 0 нулевой элемент поля, и через 1 — единичный элемент, т.е. единичный элемент мультипликативной группы поля.

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Чему равно $1+1$?

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Чему равно $1+1$?

Так как относительно сложения поле есть группа, то у 1 должен быть обратный элемент. $1+(-1)=0$. Ура?

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Чему равно $1+1$?

Так как относительно сложения поле есть группа, то у 1 должен быть обратный элемент. $1+(-1)=0$. Но (-1) — это элемент поля, т.е. это либо 0, либо 1. Ясно, что это не 0, так как $1+0=$

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Чему равно $1+1$?

Так как относительно сложения поле есть группа, то у 1 должен быть обратный элемент. $1+(-1)=0$. Но (-1) — это элемент поля, т.е. это либо 0, либо 1. Ясно, что это не 0, так как $1+0=1\neq 0$.

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Чему равно $1+1$?

Так как относительно сложения поле есть группа, то у 1 должен быть обратный элемент. $1+(-1)=0$. Но (-1) — это элемент поля, т.е. это либо 0, либо 1. Значит, $(-1)=1$.

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Как-то не так было в первом классе :)

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 = 1 + 0$. Получили, что $1 + 1 = 0$.

Разберемся с умножением. Ясно, что $1 * 1 = 1$, так как

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Ясно, что $1*1=1$, так как 1 — нейтральный элемент e группы.

Аксиомы группы: G1) $(x*y)*z=x*(y*z)$;
G2) $g*e=e*g=g$; G3) $g*g'=e$.

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 = 1 + 0$. Получили, что $1 + 1 = 0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1 * 1 = 1$. Чему равно $1 * 0$?

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$. Чему равно $1*0$? Свойство 0 как нейтрального элемента группы, с умножением связывает только одно свойство.

Поле: F1) $\langle P, \{+,0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P\setminus\{0\}, \{*,1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x*(y+z)=x*y+x*z$ (дистрибутивность).

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$. Чему равно $1*0$? Свойство 0 как нейтрального элемента группы, с умножением связывает только одно свойство F3.

Поле: F1) $\langle P, \{+,0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P\setminus\{0\}, \{*,1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x*(y+z)=x*y+x*z$ (дистрибутивность).

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$. Чему равно $1*0$? Свойство 0 как нейтрального элемента группы, с умножением связывает только одно свойство F3.

Поле: F1) $\langle P, \{+,0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P\setminus\{0\}, \{*,1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x*(y+z)=x*y+x*z$ (дистрибутивность).

$$1*(1+0)=1*1+1*0$$

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$. Чему равно $1*0$? Свойство 0 как нейтрального элемента группы, с умножением связывает только одно свойство F3.

Поле: F1) $\langle P, \{+,0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P\setminus\{0\}, \{*,1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x*(y+z)=x*y+x*z$ (дистрибутивность).

$$1*1=1*(1+0)=1*1+1*0$$

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$. Чему равно $1*0$? Свойство 0 как нейтрального элемента группы, с умножением связывает только одно свойство F3.

Поле: F1) $\langle P, \{+,0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P\setminus\{0\}, \{*,1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x*(y+z)=x*y+x*z$ (дистрибутивность).

$1=1*1=1*(1+0)=1*1+1*0$.

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$. Чему равно $1*0$? Свойство 0 как нейтрального элемента группы, с умножением связывает только одно свойство F3.

Поле: F1) $\langle P, \{+,0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P\setminus\{0\}, \{*,1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x*(y+z)=x*y+x*z$ (дистрибутивность).

$1=1*1=1*(1+0)=1*1+1*0=1+1*0$. Значит, $1=1+1*0$.

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$. Чему равно $1*0$? Свойство 0 как нейтрального элемента группы, с умножением связывает только одно свойство F3.

Поле: F1) $\langle P, \{+,0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P\setminus\{0\}, \{*,1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x*(y+z)=x*y+x*z$ (дистрибутивность).

$1=1*1=1*(1+0)=1*1+1*0=1+1*0$. Значит, $1=1+1*0$.

По критерию нейтрального элемента $1*0=0$.

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$, $1*0=0=0*1$. Чему равно $0*0$?

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$, $1*0=0=0*1$. Чему равно $0*0$?

$0*0=0*(1+1)=0*1+0*1=0+0=0$.

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$, $1*0=0=0*1$. Чему равно $0*0$?

$0*0=0*(1+1)=0*1+0*1=0+0=0$. Значит, $0*0=0$.

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$, $1*0=0=0*1$, $0*0=0$.

Ура? :) :(

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$, $1*0=0=0*1$, $0*0=0$.

Ура?

Надо операции задать стандартным образом!

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$, $1*0=0=0*1$, $0*0=0$.

Ура?

Надо операции задать стандартным образом!

Операция — это функция. Стандартными являются следующие способы ее задания:

XIII.1. Примеры полей

Построим поле из двух элементов.

Сложение с 0 не меняет элементов, поэтому $0+0=0$, $0+1=1=1+0$. Получили, что $1+1=0$.

Разберемся с умножением. Имеем $1*1=1$, $1*0=0=0*1$, $0*0=0$.

Ура?

Надо операции задать стандартным образом!

Операция — это функция. Стандартными являются следующие способы ее задания:
формулой, графиком, таблицей.

Какой способ оптимален для нашего случая?

XIII.1. Примеры полей

Полем является алгебра $GF(2) = \langle \{0; 1\},\ \{+, \cdot, 0, 1\} \rangle$, где бинарные операции $+, \cdot$ заданы следующими таблицами Кэли:

$x + y$		
$y \backslash x$	0	1
0	0	1
1	1	0

,

$x \cdot y$		
$y \backslash x$	0	1
0	0	0
1	0	1

.

Это поле имеет наименьшее число элементов в носителе.

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Перейдем к другому способу изучения поля — получению следствий из аксиом (дедуктивный способ). Одну теорему мы уже доказали, когда строили поле $GF(2)$.

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство.

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 =$

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 =$

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 = x * (1 + 0) =$

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 = x * (1 + 0) = x * 1 =$

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 = x * (1 + 0) = x * 1 = x$.

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 = x * (1 + 0) = x * 1 = x$.

По критерию нейтрального элемента, примененному к аддитивной группе поля, получаем заключение теоремы: $x * 0 = 0$.

Можно иначе:

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 = x * (1 + 0) = x * 1 = x$.

Можно иначе: $x + x * 0 = x \ \Rightarrow$

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 = x * (1 + 0) = x * 1 = x$.

Можно иначе: $x + x * 0 = x \ \Rightarrow \ (-x) + x + x * 0 = (-x) + x$

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 = x * (1 + 0) = x * 1 = x$.

Можно иначе: $x + x * 0 = x \Rightarrow \underbrace{(-x) + x}_{0} + x * 0 = \underbrace{(-x) + x}_{0}$

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 = x * (1 + 0) = x * 1 = x.$

Можно иначе: $x + x * 0 = x \ \Rightarrow \ \underbrace{(-x) + x}_{0} + x * 0 = \underbrace{(-x) + x}_{0} \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ 0 + x * 0 = 0 \ \Rightarrow$

XIII.2. Теорема об умножении на нуль в поле

Теорема 5. *Для любого x из P имеет место равенство $x * 0 = 0$.*

Доказательство. $x + x * 0 = x * 1 + x * 0 = x * (1 + 0) = x * 1 = x.$

Можно иначе: $x + x * 0 = x \;\Rightarrow\; \underbrace{(-x) + x}_{0} + x * 0 = \underbrace{(-x) + x}_{0} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; 0 + x * 0 = 0 \;\Rightarrow\; x * 0 = 0,$ теорема доказана.

XIII.3. Теорема о делителях нуля в поле

Теорема 6. *Для любых элементов* $x, y \in P$ *имеем* $x * y = \mathbf{0}$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$ *или* $y = \mathbf{0}$.

Доказательство.

Поле: F1) $\langle P, \{+, 0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x * (y + z) = x * y + x * z$ (дистрибутивность).

XIII.3. Теорема о делителях нуля в поле

Теорема 6. *Для любых элементов* $x, y \in P$ *имеем* $x * y = \mathbf{0}$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$ *или* $y = \mathbf{0}$.

Доказательство необходимости. От противного. Если бы $x \neq \mathbf{0} \neq y$, то элемент $x * y$ принадлежал бы мультипликативной группе поля, носитель которой не содержит нуля поля, противоречие.

Поле: F1) $\langle P, \{+, 0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x * (y + z) = x * y + x * z$ (дистрибутивность).

XIII.3. Теорема о делителях нуля в поле

Теорема 6. *Для любых элементов* $x, y \in P$ *имеем* $x * y = \mathbf{0}$ *тогда и только тогда, когда* $x = \mathbf{0}$ *или* $y = \mathbf{0}$.

Достаточность следует из **теоремы об умножении на нуль в поле**.

Поле: F1) $\langle P, \{+, 0\}\rangle$ — (абелева) аддитивная группа поля;
F2) $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ — (абелева) мультипликативная группа поля;
F3) $x * (y + z) = x * y + x * z$ (дистрибутивность).

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными?

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными? Применим стратегию поиска аналогии. Наиболее изученными нами являются поле рациональных и поле действительных чисел. Начиналось все с натуральных чисел. Операция умножения вводилась как кратное сложение:

$$\underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ слагаемых}} = m \cdot n.$$

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными? Применим стратегию поиска аналогии. Наиболее изученными нами являются поле рациональных и поле действительных чисел. Начиналось все с натуральных чисел. Операция умножения вводилась как кратное сложение:

$$\underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ слагаемых}} = m \cdot n.$$

Если n — натуральное число и x — элемент поля, то через nx будем обозначать сумму n штук элементов x из P:

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ штук}}.$$

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными? Применим стратегию поиска аналогии. Наиболее изученными нами являются поле рациональных и поле действительных чисел. Начиналось все с натуральных чисел. Операция умножения вводилась как кратное сложение:

$$\underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ слагаемых}} = m \cdot n.$$

Если n — натуральное число и x — элемент поля, то через nx будем обозначать сумму n штук элементов x из P:

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ штук}}.$$

Внимание!!! nx — **это не умножение! Это кратное сложение!**

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными?

Если n — натуральное число и x — элемент поля, то через nx будем обозначать сумму n штук элементов x из P:

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ штук}}.$$

Внимание!!! nx — **это не умножение! Это кратное сложение!**

Если поле конечное, то среди элементов x, $2x$, $3x$,... есть одинаковые.

Ну, и что? :(

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными?

Если n — натуральное число и x — элемент поля, то через nx будем обозначать сумму n штук элементов x из P:

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ штук}}.$$

Внимание!!! nx — **это не умножение! Это кратное сложение!**

Если поле конечное, то среди элементов x, $2x$, $3x$,... есть одинаковые.

Значит, для некоторых натуральных $n > m$ имеем $nx = mx$.

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными?

Если n — натуральное число и x — элемент поля, то через nx будем обозначать сумму n штук элементов x из P:

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ штук}}.$$

Внимание!!! nx — **это не умножение! Это кратное сложение!**

Если поле конечное, то среди элементов x, $2x$, $3x$,... есть одинаковые.

Значит, для некоторых натуральных $n > m$ имеем $nx = mx$. Умножим обе части равенства на x^{-1} (**мультипликативный** обратный к x).

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными?

Если n — натуральное число и x — элемент поля, то через nx будем обозначать сумму n штук элементов x из P:

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ штук}}.$$

Внимание!!! nx — **это не умножение! Это кратное сложение!**

Если поле конечное, то среди элементов x, $2x$, $3x$,... есть одинаковые.

Значит, для некоторых натуральных $n > m$ имеем $nx = mx$. Умножим обе части равенства на x^{-1}. Получим $n1 = m1$.

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными?

Если n — натуральное число и x — элемент поля, то через nx будем обозначать сумму n штук элементов x из P:

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ штук}}.$$

Внимание!!! nx — **это не умножение! Это кратное сложение!**

Если поле конечное, то среди элементов x, $2x$, $3x$,... есть одинаковые.

Значит, для некоторых натуральных $n > m$ имеем $nx = mx$. Умножим обе части равенства на x^{-1}. Получим $n1 = m1$, откуда вычитая $m1$ из обеих частей равенства, получаем $(n - m)1 = 0$.

XIII.4. Характеристика поля

Какие ситуации в поле являются «экстремальными» и, значит, наиболее интересными?

Если n — натуральное число и x — элемент поля, то через nx будем обозначать сумму n штук элементов x из P:

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ штук}}.$$

Внимание!!! nx — **это не умножение! Это кратное сложение!**

Если поле конечное, то среди элементов x, $2x$, $3x$,... есть одинаковые.

Значит, для некоторых натуральных $n > m$ имеем $nx = mx$. Умножим обе части равенства на x^{-1}. Получим $n1 = m1$, откуда вычитая $m1$ из обеих частей равенства, получаем $(n - m)1 = 0$.

Наиболее интересен «экстремальный» случай, когда $(n - m)$ — минимальное с этим свойством.

XIII.4. Характеристика поля

Определение 17. *Если существует такое натуральное число n, что* $n1 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ слагаемых}} = 0$, *то наименьшее такое число n называется* **характеристикой поля** P. *Если такое n не существует, то есть для любого натурального числа n имеем* $n1 \neq 0$, *то* **характеристику поля** *считают равной 0. Характеристика поля P обозначается через* $\mathrm{char}(P)$.

Внимание!!! nx — **это не умножение! Это кратное сложение!**

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство.

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F.

$$n1 =$$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \qquad (8)$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F.

$$n1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ слагаемых}} =$$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F.

$$n1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow$$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F.

$$n1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n \text{ слагаемых}} \cdot x = 0 \cdot x \;\Rightarrow$$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F.

$$n1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n \text{ слагаемых}} \cdot x = 0 \cdot x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{n \text{ слагаемых}} = 0.$$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F.

$$n1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n \text{ слагаемых}} \cdot x = 0 \cdot x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{n \text{ слагаемых}} = 0.$$

Значит, $nx = \underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{n \text{ слагаемых}} = 0$.

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F. Тогда $nx = 0$. Пусть m — минимальное такое натуральное число, для которого в F существует ненулевой элемент x со свойством $mx = 0$.

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \qquad (8)$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F. Тогда $nx = 0$. Пусть m — минимальное такое натуральное число, для которого в F существует ненулевой элемент x со свойством $mx = 0$.

$$\underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{m \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow$$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \qquad (8)$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F. Тогда $nx = 0$. Пусть m — минимальное такое натуральное число, для которого в F существует ненулевой элемент x со свойством $mx = 0$.

$$\underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{m \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{m \text{ слагаемых}} \cdot x = 0 \;\Rightarrow$$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F. Тогда $nx = 0$. Пусть m — минимальное такое натуральное число, для которого в F существует ненулевой элемент x со свойством $mx = 0$.

$$\underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{m \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{m \text{ слагаемых}} \cdot x = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{m \text{ слагаемых}} \cdot x \cdot x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} \;\Rightarrow$$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F. Тогда $nx = 0$. Пусть m — минимальное такое натуральное число, для которого в F существует ненулевой элемент x со свойством $mx = 0$.

$$\underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{m \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{m \text{ слагаемых}} \cdot x = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{m \text{ слагаемых}} \cdot x \cdot x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} \;\Rightarrow\; \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m \text{ слагаемых}} = 0.$$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \qquad (8)$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0.$

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F. Тогда $nx = 0$. Пусть m — минимальное такое натуральное число, для которого в F существует ненулевой элемент x со свойством $mx = 0$.

$$\underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{m \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m \text{ слагаемых}} = 0.$$

Следовательно, $n \leq m \leq$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \qquad (8)$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0.$

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F. **Тогда** $nx = 0.$ Пусть m — минимальное такое натуральное число, для которого в F существует ненулевой элемент x со свойством $mx = 0$.

$$\underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{m \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m \text{ слагаемых}} = 0.$$

Следовательно, $n \leq m \leq$

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F. **Тогда** $nx = 0$. Пусть m — минимальное такое натуральное число, для которого в F существует ненулевой элемент x со свойством $mx = 0$.

$$\underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{m \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m \text{ слагаемых}} = 0.$$

Следовательно, $n \leq m \leq n$.

XIII.5. Критерий характеристики поля

Теорема 7. *Ненулевое число n является* ***характеристикой поля*** *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in F \quad \left(x \neq 0 \;\Rightarrow\; nx = \underbrace{x + x + \ldots + x + x}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \right), \tag{8}$$

причем $\forall m \quad 1 \leq m < n \;\Rightarrow\; mx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и n — **характеристика поля** F. Тогда $nx = 0$. Пусть m — минимальное такое натуральное число, для которого в F существует ненулевой элемент x со свойством $mx = 0$.

$$\underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{m \text{ слагаемых}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m \text{ слагаемых}} = 0.$$

Следовательно, $n \leq m \leq n$. Теорема доказана.

XIII.6. Теорема о простоте ненулевой характеристики поля

Теорема 8. *Характеристика поля является либо нулем, либо простым числом.*

Доказательство.

XIII.6. Теорема о простоте ненулевой характеристики поля

Теорема 8. *Характеристика поля является либо нулем, либо простым числом.*

Доказательство. Пусть n — ненулевая характеристика поля P и $n = p \cdot q$, где p — простое число. Докажем, что для любого x из P имеет место $px = 0$.

XIII.6. Теорема о простоте ненулевой характеристики поля

Теорема 8. *Характеристика поля является либо нулем, либо простым числом.*

Доказательство. Пусть n — ненулевая характеристика поля P и $n = p \cdot q$, где p — простое число. Докажем, что для любого x из P имеет место $px = 0$.

Пусть в $P \setminus \{0\}$ имеется такой элемент z, что $pz = 0$.

XIII.6. Теорема о простоте ненулевой характеристики поля

Теорема 8. *Характеристика поля является либо нулем, либо простым числом.*

Доказательство. Пусть n — ненулевая характеристика поля P и $n = p \cdot q$, где p — простое число. Докажем, что для любого x из P имеет место $px = 0$.

Пусть в $P \setminus \{0\}$ имеется такой элемент z, что $pz = 0$.

Умножим обе части последнего равенства на z^{-1}. Получим

XIII.6. Теорема о простоте ненулевой характеристики поля

Теорема 8. *Характеристика поля является либо нулем, либо простым числом.*

Доказательство. Пусть n — ненулевая характеристика поля P и $n = p \cdot q$, где p — простое число. Докажем, что для любого x из P имеет место $px = 0$.

Пусть в $P \setminus \{0\}$ имеется такой элемент z, что $pz = 0$.

Умножим обе части последнего равенства на z^{-1}. Получим $p1 = 0$, откуда $p = n$, так как

XIII.6. Теорема о простоте ненулевой характеристики поля

Теорема 8. *Характеристика поля является либо нулем, либо простым числом.*

Доказательство. Пусть n — ненулевая характеристика поля P и $n = p \cdot q$, где p — простое число. Докажем, что для любого x из P имеет место $px = 0$.

Пусть в $P \setminus \{0\}$ имеется такой элемент z, что $pz = 0$.

Умножим обе части последнего равенства на z^{-1}. Получим $p1 = 0$, откуда $p = n$, так как по определению характеристики поля n — минимальное число со свойством $n1 = 0$.

XIII.6. Теорема о простоте ненулевой характеристики поля

Теорема 8. *Характеристика поля является либо нулем, либо простым числом.*

Доказательство. Пусть n — ненулевая характеристика поля P и $n = p \cdot q$, где p — простое число. Докажем, что для любого x из P имеет место $px = 0$.

Значит, для любого z из $P \setminus \{0\}$ имеем $pz \neq 0$. Возьмем произвольный элемент x из $P \setminus \{0\}$. Тогда $0 = pqx = q(px)$. Введем обозначение: $y = px$. Тогда $qy = 0$. Умножим обе части этого равенства на y^{-1}, получим

XIII.6. Теорема о простоте ненулевой характеристики поля

Теорема 8. *Характеристика поля является либо нулем, либо простым числом.*

Доказательство. Пусть n — ненулевая характеристика поля P и $n = p \cdot q$, где p — простое число. Докажем, что для любого x из P имеет место $px = 0$.

Значит, для любого z из $P \setminus \{0\}$ имеем $pz \neq 0$. Возьмем произвольный элемент x из $P \setminus \{0\}$. Тогда $0 = pqx = q(px)$. Введем обозначение: $y = px$. Тогда $qy = 0$. Умножим обе части этого равенства на y^{-1}, получим $q1 = 0$. По условию $q < n$, что противоречит минимальности n.

Теорема доказана.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Мы в этом курсе будем рассматривать только **конечные поля**, то есть поля с конечным носителем. Такое поле называется **полем Галуа**.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической****, т.е. найдется элемент a такой, что всякий ненулевой элемент поля имеет вид a^k для некоторого неотрицательного целого числа k.*

Доказательство.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической****.*

Доказательство. Пусть порядок поля P равен $n+1$ (то есть в множестве P ровно $n+1$ элемент): $P = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Пусть в группе $\langle P \setminus \{0\}, \{*, 1\}\rangle$ a_1 — элемент наибольшего порядка m.

Покажем, что всякий элемент поля P является корнем многочлена $x^m - 1$.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической***.

Доказательство. $|P| = n + 1$, a_1 — элемент наибольшего порядка m.

Покажем, что всякий элемент поля P является корнем многочлена $x^m - 1$.

Пусть элемент y из $P \setminus \{0\}$ не является корнем этого многочлена. Тогда $y^m \neq 1$. Так как m не делится на $|y|$, то для некоторого простого числа q имеем $m = u * q^s$, $|y| = v * q^t$, $s < t$, числа u и q взаимно просты. Обозначим через z элемент y^v.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической***.

Доказательство. $|P| = n + 1$, a_1 — элемент наибольшего порядка m.

Покажем, что всякий элемент поля P является корнем многочлена $x^m - 1$. Пусть $y^m \neq 1$, q — такое простое число, что $m = u * q^s$, $|y| = v * q^t$, $s < t$, числа u и q взаимно просты, $z = y^v$. В силу леммы о делимости на порядок элемента $|z| = q^t$. Пусть $|a_1 * z| = k$. Тогда $a_1^k = (z^{(-1)})^k$. Следовательно, поскольку $|z| = |z^{(-1)}|$, то, по лемме о делимости на порядок элемента, порядок элемента $(z^{(-1)})^k$ равен q^r. Значит, k делится на u: $k = u * w$.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической***.

Доказательство. $|P| = n + 1$, a_1 — элемент наибольшего порядка m.

Покажем, что всякий элемент поля P является корнем многочлена $x^m - 1$. Пусть $y^m \neq 1$, q — такое простое число, что $m = u * q^s$, $|y| = v * q^t$, $s < t$, числа u и q взаимно просты, $z = y^v$, $|z| = q^t$.

Итак, если $|a_1 * z| = k$, то k делится на u: $k = u * w$. С другой стороны, по лемме о делимости на порядок элемента, $\left|(a_1 * z)^{(q^s)}\right| = u * q^{(t-s)}$, поэтому рассуждением «от противного» легко получить, что k делится и на q^t.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической***.

Доказательство. $|P| = n + 1$, a_1 — элемент наибольшего порядка m.

Покажем, что всякий элемент поля P является корнем многочлена $x^m - 1$. Пусть $y^m \neq 1$, q — такое простое число, что $m = u * q^s$, $|y| = v * q^t$, $s < t$, числа u и q взаимно просты, $z = y^v$, $|z| = q^t$.

Итак, если $|a_1 * z| = k$, то k делится на u: $k = u * w$. С другой стороны, по лемме о делимости на порядок элемента, $\left|(a_1 * z)^{(q^s)}\right| = u * q^{(t-s)}$, поэтому рассуждением «от противного» легко получить, что k делится и на q^t.

Таким образом, k делится на число $u * q^t$, большее m, что противоречит максимальности m.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической***.

Доказательство. $|P| = n + 1$, $P = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a_1 — элемент наибольшего порядка m. Доказано, что каждый ненулевой элемент поля P является корнем многочлена $x^m - 1$. С помощью математической индукции получаем, что $(x - a_1) * (x - a_2) * \ldots * (x - a_n)$ делится на $x^m - 1$.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической***.

Доказательство. $|P| = n + 1, \quad P = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad a_1$ — элемент наибольшего порядка m. Доказано, что каждый ненулевой элемент поля P является корнем многочлена $x^m - 1$.С помощью математической индукции получаем, что $(x - a_1) * (x - a_2) * \ldots * (x - a_n)$ делится на $x^m - 1$. С другой стороны, степень многочлена $(x - a_1) * (x - a_2) * \ldots * (x - a_n)$ равна n и не меньше m. Следовательно,

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической***.

Доказательство. $|P| = n+1$, $P = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a_1 — элемент наибольшего порядка m. Доказано, что каждый ненулевой элемент поля P является корнем многочлена $x^m - 1$. С помощью математической индукции получаем, что $(x-a_1)*(x-a_2)*\ldots*(x-a_n)$ делится на x^m-1. С другой стороны, степень многочлена $(x-a_1)*(x-a_2)*\ldots*(x-a_n)$ равна n и не меньше m. Следовательно, $m=n$ и $x^n - 1 = (x-a_1)*(x-a_2)*\ldots*(x-a_n)$.

XIII.7. Теорема о цикличности мультипликативной группы поля Галуа

Теорема 9. ***Мультипликативная группа*** *поля Галуа P является* ***циклической***.

Доказательство. $|P| = n+1$, $P = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a_1 — элемент наибольшего порядка m. Доказано, что каждый ненулевой элемент поля P является корнем многочлена $x^m - 1$. С помощью математической индукции получаем, что $(x-a_1) * (x-a_2) * \ldots * (x-a_n)$ делится на $x^m - 1$. С другой стороны, степень многочлена $(x-a_1) * (x-a_2) * \ldots * (x-a_n)$ равна n и не меньше m. Следовательно, $m = n$ и $x^n - 1 = (x-a_1) * (x-a_2) * \ldots * (x-a_n)$.

С другой стороны, для любого k элемент a_1^k является корнем многочлена $x^m - 1$. Значит, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{a_1, a_1^2, \ldots, a_1^n\}$.

Теорема доказана. **Рассмотрим пример?**

XIV. Расширения полей

Пусть P — подполе поля F. Тогда F называется **расширением поля** P. Говорят, что поле F получено **присоединением элементов** $s_1, s_2, \ldots, s_n$ к полю P (пишут $F = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$), если в F нет собственных подполей, содержащих одновременно все элементы поля P и элементы $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

XIV. Расширения полей

Пусть P — подполе поля F. Тогда F называется **расширением поля** P. Говорят, что поле F получено **присоединением элементов** $s_1, s_2, \ldots, s_n$ к полю P (пишут $F = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$), если в F нет собственных подполей, содержащих одновременно все элементы поля P и элементы $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Если поле F получено присоединением одного элемента к полю P, то поле F называется **простым расширением поля** P. Подполе P поля F называется **собственным**, если оно отлично от F. Поле P называется **простым**, если оно не содержит собственных подполей.

XIV.1. Теорема о надполе, как линейном пространстве

Теорема 10. *Пусть F — расширение поля P, полученное присоединением элементов $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то есть $F = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. В поле F определена операция сложения элементов, и операция умножения на элементы поля P. Относительно этих операций поле F является линейным пространством над полем P.*

Доказательство сводится к легкой проверке выполнения аксиом линейного пространства.

XIV.2. Алгебраические и трансцендентные расширения

Если расширение $F = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ поля P имеет конечную размерность d, как линейное пространство над P, то поле F называется **конечным расширением поля** P, и число d называется **степенью расширения** F поля P. В противном случае говорят, что F - расширение поля P **бесконечной степени**.

XIV.2. Алгебраические и трансцендентные расширения

Если расширение $F = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ поля P имеет конечную размерность d, как линейное пространство над P, то поле F называется **конечным расширением поля** P, и число d называется **степенью расширения** F поля P. В противном случае говорят, что F - расширение поля P **бесконечной степени**.

Пусть поле F является расширением поля P. Элемент f поля F называется **алгебраическим над полем** P, если степень поля $P(f)$ над полем P — конечная. В противном случае элемент f называется **трансцендентным над полем** P.

XIV.2. Алгебраические и трансцендентные расширения

Если расширение $F = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ поля P имеет конечную размерность d, как линейное пространство над P, то поле F называется **конечным расширением поля** P, и число d называется **степенью расширения** F поля P. В противном случае говорят, что F - расширение поля P **бесконечной степени**.

Пусть поле F является расширением поля P. Элемент f поля F называется **алгебраическим над полем** P, если степень поля $P(f)$ над полем P — конечная. В противном случае элемент f называется **трансцендентным над полем** P.

Если расширение F поля P называется **алгебраическим**, то все элементы поля F являются алгебраическими над P.

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Теорема 11. *Элемент s является алгебраическим над полем P тогда и только тогда, когда s является корнем некоторого ненулевого многочлена с коэффициентами из P, то есть тогда и только тогда, когда для некоторых $a_0, \dots a_m$ из P, не все из которых равны 0 имеем*

$$a_0\mathbf{1} + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m = \mathbf{0},$$

причем m — степень расширения поля $P(s)$ над полем P. Более того, система $\{s^0;\ s;\ \dots;\ s^{m-1}\}$ является базисом линейного пространства $P(s)$ над полем P.

Рассмотреть пример?

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Доказательство необходимости. Пусть s является алгебраическим над полем P. Обозначим через m размерность линейного пространства $P(s)$ над полем P. Тогда система векторов $\left\{1, s, s^2, \ldots, s^m\right\}$ является линейно зависимой, так как

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Доказательство необходимости. Пусть s является алгебраическим над полем P. Обозначим через m размерность линейного пространства $P(s)$ над полем P. Тогда система векторов $\left\{1, s, s^2, \ldots, s^m\right\}$ является линейно зависимой, так как в ней $m+1$ вектор. Следовательно, в P существуют такие элементы $a_0, \ldots a_m$, не все из которых равны 0, имеем

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Доказательство необходимости. Пусть s является алгебраическим над полем P. Обозначим через m размерность линейного пространства $P(s)$ над полем P. Тогда система векторов $\left\{1, s, s^2, \ldots, s^m\right\}$ является линейно зависимой, так как в ней $m+1$ вектор. Следовательно, в P существуют такие элементы $a_0, \ldots a_m$, не все из которых равны 0, имеем

$$a_0\mathbf{1} + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_m s^m = \mathbf{0}.$$

Необходимость доказана.

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Теорема 11. *Элемент s является алгебраическим над полем P тогда и только тогда, когда s является корнем некоторого ненулевого многочлена с коэффициентами из P, то есть тогда и только тогда, когда для некоторых $a_0, \dots a_m$ из P, не все из которых равны 0 имеем*

$$a_0\mathbf{1} + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m = \mathbf{0},$$

причем m — степень расширения поля $P(s)$ над полем P. Более того, система $\left\{s^0;\ s;\ \dots;\ s^{m-1}\right\}$ является базисом линейного пространства $P(s)$ над полем P.

Достаточность.

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Достаточность. Пусть s является корнем многочлена $q(x)$ степени m. Выберем такой многочлен $q(x)$, степень которого минимальна среди всех многочленов с коэффициентами из P, корнем которых является s. Тогда, выражая s^m из уравнения $q(s) = 0$, получаем, что s^m является линейной комбинацией элементов $1, s, s^2, \ldots, s^{m-1}$. Индукцией по $k \geq m$ легко показать, что s^k является линейной комбинацией элементов $1, s, s^2, \ldots, s^{m-1}$.

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Достаточность. Индукцией по $k \geq m$ легко показать, что s^k является линейной комбинацией элементов $1, s, s^2, \ldots, s^{m-1}$.

Заметим, что

$$P(s) = \left\{ a_1 + a_2 * s + \ldots + a_m * s^{m-1} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, a_i \in P \right\}.$$

Действительно, обозначим множество в правой части равенства через Q.

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Достаточность. Индукцией по $k \geq m$ легко показать, что s^k является линейной комбинацией элементов $1, s, s^2, \ldots, s^{m-1}$.

Заметим, что

$$P(s) = \left\{ a_1 + a_2 * s + \ldots + a_m * s^{m-1} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, a_i \in P \right\}.$$

Действительно, обозначим множество в правой части равенства через Q. Необходимо доказать равенство множеств: $P(s) = Q$. Включение множества Q в $P(s)$ очевидно, так как $P(s)$ — поле, и, следовательно, содержит и элементы вида $a_i * s^i$ для любого неотрицательного целого числа i, и сумму таких элементов. Осталось доказать обратное включение. Для этого необходимо только проверить, что Q — это поле, так как в этом случае $P(s)$ включается в Q в силу минимальности $P(s)$ среди всех полей, содержащих P и s (тот факт, что в P и $\{s\}$ являются подмножествами в Q, очевиден).

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Достаточность. Индукцией по $k \geq m$ легко показать, что s^k является линейной комбинацией элементов $1, s, s^2, \ldots, s^{m-1}$.

Заметим, что

$$P(s) = \left\{ a_1 + a_2 * s + \ldots + a_m * s^{m-1} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, a_i \in P \right\}.$$

Действительно, обозначим множество в правой части равенства через Q. Необходимо доказать равенство множеств: $P(s) = Q$.

Итак, осталось доказать, что Q — поле. Неочевидным является только то, что в Q содержится обратный к любому ненулевому элементу из Q. Пусть r — произвольный ненулевой элемент из Q. Докажем, что $\left\{ r, s * r, \ldots, s^{m-1} * r \right\}$ является линейно независимой системой векторов в линейном пространстве $P(s)$.

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Достаточность. Пусть r — произвольный ненулевой элемент из Q. Докажем, что $\{r, s * r, \ldots, s^{m-1} * r\}$ является линейно независимой системой векторов в линейном пространстве $P(s)$. Пусть это не так, тогда $b_1 * r + b_2 * s * r + \ldots + b_m * s^{m-1} * r = 0$, причем не все коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_m$ равны 0. Вынесем r за скобку, получим, что s является корнем многочлена $r * (b_1 + b_2 * x + \ldots + b_m * x^{m-1})$. Таким образом, s является корнем многочлена r или $b_1 + b_2 * x + \ldots + b_m * x^{m-1}$. Но степень этого многочлена меньше m, что противоречит минимальности m.

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Достаточность. Пусть r — произвольный ненулевой элемент из Q. Доказано, что $\left\{r, s * r, \ldots, s^{m-1} * r\right\}$ — линейно независимая система векторов. Как доказано выше, для любого $k \geq m$ элемент s^k является линейной комбинацией элементов $1, s, \ldots, s^{m-1}$. Поэтому каждый из $s^k * r$ представим в виде значения многочлена степени, меньшей m, на элементе s, то есть $s^k * r$ является элементом из Q. Размерность Q, как линейного пространства над P, равна m, следовательно, $\left\{r, s * r, \ldots, s^{m-1} * r\right\}$ является базисом линейного пространства Q. В частности, элемент 1 представим в виде

$$1 = c_0 * r + c_1 * s * r + \ldots + c_m * s^{m-1} * r =$$

$$= r * (c_0 + c_1 * s + \ldots + c_m * s^{m-1}).$$

XIV.3. Критерий алгебраичности элемента

Достаточность. Пусть r — произвольный ненулевой элемент из Q. Доказано, что $\left\{r, s * r, \ldots, s^{m-1} * r\right\}$ — линейно независимая система векторов, являющаяся базисом линейного пространства Q.

$$1 = c_0 * r + c_1 * s * r + \ldots + c_m * s^{m-1} * r =$$

$$= r * (c_0 + c_1 * s + \ldots + c_m * r^{m-1}).$$

Таким образом, $c_0 + c_1 * s + \ldots + c_m * r^{m-1}$ является обратным элементом к r относительно умножения. Следовательно, Q — это поле, поэтому $Q = P(s)$. Но размерность Q, как линейного пространства над P, равна m, то есть $P(s)$ — алгебраическое расширение.

XIV.4. Теорема о степенях

Теорема 12. *Если поле Q конечно над P, и поле T конечно над Q, то поле T конечно и над P, причем размерность линейного пространства T над полем P равна $n \cdot m$, где n — размерность линейного пространства Q над P, и m — размерность линейного пространства T над Q.*

XIV.4. Теорема о степенях

Теорема 12. *Если поле Q конечно над P, и поле T конечно над Q, то поле T конечно и над P, причем размерность линейного пространства T над полем P равна $n \cdot m$, где n — размерность линейного пространства Q над P, и m — размерность линейного пространства T над Q.*

Доказательство. Пусть $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — базис линейного пространства Q над полем P, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ - базис линейного пространства T над полем Q. Каждый элемент из T представим в виде $b_1 * v_1 + \ldots + b_m * v_m$, где $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — элементы из Q. По теореме о линейных комбинациях базисных векторов получаем (курс алгебры, первый и третий семестры), что

XIV.4. Теорема о степенях

Теорема 12. *Если поле Q конечно над P, и поле T конечно над Q, то поле T конечно и над P, причем размерность линейного пространства T над полем P равна $n \cdot m$, где n — размерность линейного пространства Q над P, и m — размерность линейного пространства T над Q.*

Доказательство. $b_1 * v_1 + \ldots + b_m * v_m$

$$\begin{cases} b_1 = a_{11} * u_1 + \ldots + a_{1n} * u_n \\ b_2 = a_{21} * u_1 + \ldots + a_{2n} * u_n \\ \ldots \\ b_m = a_{m1} * u_1 + \ldots + a_{mn} * u_n \end{cases}$$

Следовательно,

XIV.4. Теорема о степенях

Теорема 12. *Если поле Q конечно над P, и поле T конечно над Q, то поле T конечно и над P, причем размерность линейного пространства T над полем P равна $n \cdot m$, где n — размерность линейного пространства Q над P, и m — размерность линейного пространства T над Q.*

Доказательство.

$$b_1 * v_1 + \ldots + b_m * v_m =$$

$$= (a_{11} * u_1 + \ldots + a_{1n} * u_n) * v_1 + \ldots + (a_{m1} * u_1 + \ldots + a_{mn} * u_n) * v_m =$$

$$= a_{11} * u_1 * v_1 + \ldots + a_{1n} * u_n * v_1 + \ldots + a_{m1} * u_1 * v_m + \ldots + a_{mn} * u_n * v_m.$$

XIV.4. Теорема о степенях

Теорема 12. *Если поле Q конечно над P, и поле T конечно над Q, то поле T конечно и над P, причем размерность линейного пространства T над полем P равна $n \cdot m$, где n — размерность линейного пространства Q над P, и m — размерность линейного пространства T над Q.*

Доказательство. Таким образом, система векторов

$$\{u_1 * v_1, \ldots, u_n * v_1, \ldots, u_1 * v_m, \ldots, u_n * v_m\}$$

полна, то есть любой вектор представим в виде их линейной комбинации. Очевидно, что эта система линейно независима, иначе получили бы линейную зависимость системы $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Теорема доказана.

XIV.5. Критерий конечности расширения поля

Теорема 13. *Пусть поле F является расширением поля P с помощью элементов $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Тогда поле F является конечным расширением поля P тогда и только тогда, когда $s_1, s_2, \ldots, s_n$ являются корнями некоторых многочленов $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x)$ с коэффициентами из поля P.*

Доказательство. Это следствие из критерия алгебраичности элемента и теоремы о степенях.

XIV.6. Следствие об алгебраичности конечного расширения поля

Следствие 1. *Если F — **конечное расширение** поля P, то оно является **алгебраическим** над P.*

Доказательство.

XIV.6. Следствие об алгебраичности конечного расширения поля

Следствие 1. *Если F — **конечное расширение** поля P, то оно является **алгебраическим** над P.*

Доказательство. С чего начнем доказательство?

XIV.6. Следствие об алгебраичности конечного расширения поля

Следствие 1. *Если F — **конечное расширение** поля P, то оно является **алгебраическим** над P.*

Доказательство. Пусть F — **конечное расширение** поля P и $a \in F$.

XIV.6. Следствие об алгебраичности конечного расширения поля

Следствие 1. *Если F — **конечное расширение** поля P, то оно является **алгебраическим** над P.*

Доказательство. Пусть F — **конечное расширение** поля P и $a \in F$.

Тогда согласно **критерию конечности расширения поля** элемент a является корнем многочлена с коэффициентами из P, т.е. является алгебраическим над P.

XIV.6. Следствие об алгебраичности конечного расширения поля

Следствие 1. *Если F — **конечное расширение** поля P, то оно является **алгебраическим** над P.*

Доказательство. Пусть F — **конечное расширение** поля P и $a \in F$.

Тогда согласно **критерию конечности расширения поля** элемент a является корнем многочлена с коэффициентами из P, т.е. является алгебраическим над P.

Значит, расширение F является алгебраическим над P. Следствие доказано.

XIV.7. Следствие о порядке простого конечного поля

Следствие 2. *Конечное поле является простым тогда и только тогда, когда количество элементов поля P — простое число.*

Доказательство необходимости.

XIV.7. Следствие о порядке простого конечного поля

Следствие 2. *Конечное поле является простым тогда и только тогда, когда количество элементов поля P — простое число.*

Доказательство необходимости. Пусть P — простое конечное поле характеристики p. Тогда, очевидно, в силу теоремы о характеристике поля, $\langle 1, 1+1, \ldots, p*1\rangle$ — подполе в P, и, в силу простоты поля P имеем $P = \langle 1, 1+1, \ldots, p*1\rangle$, в частности, его порядок равен p. Необходимость доказана, так как, по теореме о простоте ненулевой характеристики поля, p — простое число

XIV.7. Следствие о порядке простого конечного поля

Следствие 2. *Конечное поле является простым тогда и только тогда, когда количество элементов поля P — простое число.*

Достаточность. Пусть $|P| = p$ — простое число. Аддитивная группа любого подполя Q поля P является подгруппой аддитивной группы поля P. По теореме Лагранжа ее порядок делится на $|P| = p$, но у простого числа нет неединичных собственных делителей. Следовательно, $|Q| = |P|$, откуда следует, что $P = Q$, что и требовалось доказать. Следствие доказано.

XIV.8. Следствие о порядке конечного поля

Следствие 3. *Конечное поле содержит p^t элементов, где p — простое число, t — неотрицательное целое число.*

Доказательство. Пусть характеристика поля P равна p (она, очевидно, не нулевая). Доказательство будем вести индукцией по порядку поля.

XIV.8. Следствие о порядке конечного поля

Следствие 3. *Конечное поле содержит p^t элементов, где p — простое число, t — неотрицательное целое число.*

Доказательство. *База индукции.* Если поле P — простое, то заключение теоремы вытекает из предыдущего следствия.

XIV.8. Следствие о порядке конечного поля

Следствие 3. *Конечное поле содержит p^t элементов, где p — простое число, t — неотрицательное целое число.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть конечное поле P — не простое. Выберем в нем максимальное собственное подполе Q. Возьмем элемент z из $P \backslash Q$. Тогда расширение $Q(z)$ поля Q с помощью элемента z совпадает с P, в силу максимальности подполя Q в P. Пусть m — максимальное такое число, что $\mathbf{Б} = \{1, z, \ldots, z^m\}$ — линейно независимая система векторов. Тогда, очевидно, $\mathbf{Б}$ — это базис P, как линейного пространства над Q.

XIV.8. Следствие о порядке конечного поля

Следствие 3. *Конечное поле содержит p^t элементов, где p — простое число, t — неотрицательное целое число.*

Доказательство. Q — максимальное собственное подполе поля P, $z \in P \backslash Q$, $\quad Q(z) = P$, $\quad \mathbf{Б} = \{1, z, \ldots, z^m\}$ — это базис P, как линейного пространства над Q.

Каждая координата любого вектора из P принимает ровно p значений $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, так $px = 0$ для любого x из P. Как доказывалось в линейной алгебре, линейное конечномерное пространство изоморфно линейному пространству матриц-столбцов размерности, в данном случае, $m+1$. Значит $|P| = |Q|^{m+1}$, но, по предположению индукции $|Q| = p^s$, следовательно, $|P| = p^t$, где $t = s * (m+1)$. Следствие доказано.

XIV.9. Теорема о степени многочлена для конечного расширения

Теорема 14. *Если поле F является конечным расширением поля P, и степень расширения F поля P равна n, то любой элемент поля F является корнем многочлена степени не большей n, с коэффициентами из поля P.*

Доказательство.

XIV.9. Теорема о степени многочлена для конечного расширения

Теорема 14. *Если поле F является конечным расширением поля P, и степень расширения F поля P равна n, то любой элемент поля F является корнем многочлена степени не большей n, с коэффициентами из поля P.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент a из поля F. По условию размерность F, как линейного пространства над P, равна n. Значит, система векторов $\left\{1, a, a * a, a^3, \ldots, a^n\right\}$ является линейно зависимой. Таким образом, для некоторых элементов $b_0, b_1, \ldots, b_n$ поля P имеет место равенство $b_0 * 1 + b_1 * a + \ldots + b_n * a^n = 0$, то есть a является корнем многочлена $b_0 * 1 + b_1 * x + \ldots + b_n * x^n$, что и требовалось доказать.

XV. Поле частных целостного кольца

Пусть K — коммутативное **целостное кольцо**. Рассмотрим множество «дробей»

$$K' = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in K, q \neq 0 \right\}.$$

XV.1. Операции кольца частных

Пусть K — коммутативное **целостное кольцо**. Рассмотрим множество «дробей»

$$K' = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in K, q \neq 0 \right\}.$$

На множестве K' определим операции сложения и умножения, аналогичные операциям для обычных дробей и для дробно-рациональных функций:

XV.1. Операции кольца частных

Пусть K — коммутативное **целостное кольцо**. Рассмотрим множество «дробей»

$$K' = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in K, q \neq 0 \right\}.$$

На множестве K' определим операции сложения и умножения, аналогичные операциям для обычных дробей и для дробно-рациональных функций:

$$\frac{p}{q} + \frac{u}{v} = \frac{p * v + q * u}{q * v}, \quad \text{и}$$

XV.1. Операции кольца частных

Пусть K — коммутативное **целостное кольцо**. Рассмотрим множество «дробей»

$$K' = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in K, q \neq 0 \right\}.$$

На множестве K' определим операции сложения и умножения, аналогичные операциям для обычных дробей и для дробно-рациональных функций:

$$\frac{p}{q} + \frac{u}{v} = \frac{p * v + q * u}{q * v}, \quad \text{и} \quad \frac{p}{q} * \frac{u}{v} = \frac{p * u}{q * v}.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Пусть* ***бинарное отношение*** T *определено на множестве* K' *правилом:* $\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right) \in T$ *тогда и только тогда, когда* $a * d = b * c$. *Тогда* T *является* ***конгруэнцией***.

Фу-у-у, какая громоздкая формулировка...

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right) \in T \;\Leftrightarrow\; a * d = b * c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией****.*

Доказательство. По **определению конгруэнции** надо проверить, что T является **отношением эквивалентности**, и что

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right) \in T \;\Leftrightarrow\; a * d = b * c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией****.*

Доказательство. По **определению конгруэнции** надо проверить, что T является **отношением эквивалентности**, и что

(подставим в **формулу** в качестве операции f операцию «сложение»)

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right) \in T \;\Leftrightarrow\; a * d = b * c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство. По **определению конгруэнции** надо проверить, что T является **отношением эквивалентности**, и что

$$\begin{cases} (x_1,\ y_1) \in T, \\ (x_2,\ y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство. По **определению конгруэнции** надо проверить, что T является **отношением эквивалентности**, и что

$$\begin{cases}(x_1,\ y_1)\in T,\\ (x_2,\ y_2)\in T\end{cases}\Rightarrow\ (x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in T,$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство. По **определению конгруэнции** надо проверить, что T является **отношением эквивалентности**, и что

$$\begin{cases}(x_1,\ y_1)\in T,\\ (x_2,\ y_2)\in T\end{cases}\Rightarrow\ (x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in T,$$

(теперь подставим в **формулу** в качестве операции f «операцию умножение»)

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство. По **определению конгруэнции** надо проверить, что T является **отношением эквивалентности**, и что

$$\begin{cases}(x_1,\ y_1)\in T,\\ (x_2,\ y_2)\in T\end{cases}\Rightarrow (x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in T,$$

$$\begin{cases}(x_1,\ y_1)\in T,\\ (x_2,\ y_2)\in T\end{cases}\Rightarrow$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство. По **определению конгруэнции** надо проверить, что T является **отношением эквивалентности**, и что

$$\begin{cases}(x_1,\ y_1)\in T,\\ (x_2,\ y_2)\in T\end{cases}\Rightarrow\ (x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in T,$$

$$\begin{cases}(x_1,\ y_1)\in T,\\ (x_2,\ y_2)\in T\end{cases}\Rightarrow\ (x_1*x_2,\ y_1*y_2)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T, \\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{u}{v};\ \frac{c}{d}+\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T, \\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a*v+u*b}{b*v};\ \frac{c*z+w*d}{d*z}\right)\in T \Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{u}{v};\ \frac{c}{d}+\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T, \\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (a*v+u*b)*d*z=(c*z+w*d)*b*v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{a*v+u*b}{b*v};\;\frac{c*z+w*d}{d*z}\right)\in T \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{b}+\frac{u}{v};\;\frac{c}{d}+\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T, \\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a*v*d*z+u*b*d*z=c*z*b*v+w*d*b*v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (a*v+u*b)*d*z=(c*z+w*d)*b*v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{a*v+u*b}{b*v};\;\frac{c*z+w*d}{d*z}\right)\in T \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{b}+\frac{u}{v};\;\frac{c}{d}+\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T,\\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a*d=b*c,\\ u*z=v*w\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a*v*d*z+u*b*d*z=c*z*b*v+w*d*b*v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (a*v+u*b)*d*z=(c*z+w*d)*b*v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{a*v+u*b}{b*v};\;\frac{c*z+w*d}{d*z}\right)\in T \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{b}+\frac{u}{v};\;\frac{c}{d}+\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T, \\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}*\frac{u}{v};\ \frac{c}{d}*\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T, \\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a*u}{b*v};\ \frac{c*w}{d*z}\right)\in T \Rightarrow \left(\frac{a}{b}*\frac{u}{v};\ \frac{c}{d}*\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T, \\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a*u*d*z=c*w*b*v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{a*u}{b*v};\;\frac{c*w}{d*z}\right)\in T \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{b}*\frac{u}{v};\;\frac{c}{d}*\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T,\\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a*d=b*c,\\ u*z=v*w\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a*u*d*z=c*w*b*v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{a*u}{b*v};\;\frac{c*w}{d*z}\right)\in T \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{b}*\frac{u}{v};\;\frac{c}{d}*\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T,\\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a*d=b*c,\\ u*z=v*w\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a*d*u*z=c*b*w*v \;\Rightarrow\; a*u*d*z=c*w*b*v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{a*u}{b*v};\;\frac{c*w}{d*z}\right)\in T \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{b}*\frac{u}{v};\;\frac{c}{d}*\frac{w}{z}\right)\in T.$$

XV.2. Лемма о конгруэнции кольца частных

Лемма 3. *Если*

$$\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T \;\Leftrightarrow\; a*d=b*c, \tag{9}$$

то T является ***конгруэнцией***.

Доказательство. Итак,

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T, \\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{u}{v};\ \frac{c}{d}+\frac{w}{z}\right)\in T.$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)\in T, \\ \left(\frac{u}{v};\frac{w}{z}\right)\in T \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}*\frac{u}{v};\ \frac{c}{d}*\frac{w}{z}\right)\in T.$$

Тот факт, что T — **отношение эквивалентности**, очевиден. Следовательно, T — **конгруэнция**. Лемма доказана.

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство.

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство. Докажем, что $\langle K', \{+, 0\}\rangle$ — абелева группа.

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство. Докажем, что $\langle K', \{+, 0\}\rangle$ — абелева группа.

Коммутативность и ассоциативность очевидны (проверяются непосредственным вычислением).

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство. Докажем, что $\langle K', \{+, 0\}\rangle$ — абелева группа.

Коммутативность и ассоциативность очевидны (проверяются непосредственным вычислением). Легко понять, что в качестве обратного относительно $+$ элемента к элементу $\frac{a}{b}$ можно взять $\frac{-a}{b}$.

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство. Докажем, что $\langle K', \{+, 0\}\rangle$ — абелева группа.

Коммутативность и ассоциативность очевидны (проверяются непосредственным вычислением). Легко понять, что в качестве обратного относительно $+$ элемента к элементу $\frac{a}{b}$ можно взять $\frac{-a}{b}$. Нулевым элементом является класс «дробей» вида $\frac{0}{b}$.

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство. Проверим, что

$$\left\langle (K'/T)\setminus \left\{ \frac{0}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\}, \left\{ *, \left\{ \frac{x}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\} \right\} \right\rangle$$

— абелева группа.

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство. Проверим, что

$$\left\langle (K'/T) \setminus \left\{ \frac{0}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\}, \left\{ *, \left\{ \frac{x}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\} \right\} \right\rangle$$

— абелева группа. Абелевость легко следует из коммутативности кольца K, ассоциативность очевидна.

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство. Проверим, что

$$\left\langle (K'/T)\setminus \left\{ \frac{0}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\}, \left\{ *, \left\{ \frac{x}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\} \right\} \right\rangle$$

— абелева группа. Обратным относительно операции $*$ элементом к ненулевому элементу $\left\{ \frac{x}{y} \,\middle|\, \left(\frac{x}{y};\ \frac{a}{b} \right) \in T \right\}$ для $a \neq 0$ является класс «дробей»

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство. Проверим, что

$$\left\langle (K'/T)\setminus \left\{ \frac{0}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\}, \left\{ *, \left\{ \frac{x}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\} \right\} \right\rangle$$

— абелева группа. Обратным относительно операции $*$ элементом к ненулевому элементу $\left\{ \frac{x}{y} \,\middle|\, \left(\frac{x}{y};\ \frac{a}{b}\right) \in T \right\}$ для $a \neq 0$ является класс «дробей» $\left\{ \frac{u}{v} \,\middle|\, \left(\frac{u}{v};\ \frac{b}{a}\right) \in T \right\}$.

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Доказательство. Проверим, что

$$\left\langle (K'/T)\setminus \left\{ \frac{0}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\}, \left\{ *, \left\{ \frac{x}{x} \,\middle|\, x \in K' \right\} \right\} \right\rangle$$

— абелева группа.

Проверка дистрибутивности также не вызывает затруднений, мы опустим соответствующие выкладки.

XV.3. Теорема о поле частных

Теорема 15. *Если K — коммутативное* ***целостное кольцо****, то алгебра $K'/\mathbf{T}$ является* ***полем****.*

Теорема доказана.

XV.4. Определение поля частных

Определение 18. *Поле* K'/T *из формулировки* ***теоремы о поле частных*** *называется* **полем частных кольца** K.

XV.4. Определение поля частных

Определение 18. *Поле K'/T из формулировки* ***теоремы о поле частных*** *называется* **полем частных кольца** K.

Отметим, что нами допущена некорректность: символом $*$ (как и символом $+$) обозначены одновременно три операции: в K, в множестве «дробей» K' и в фактор-алгебре K'/T. Это, однако, не вызывает затруднений, поскольку каждый раз из контекста понятно, какая из конкретных операций имеется в виду.

XV.4. Определение поля частных

Определение 18. *Поле K'/T из формулировки* ***теоремы о поле частных*** *называется* **полем частных кольца** K.

Отметим еще два факта.

Во-первых, поле Q рациональных функций является полем частных кольца целых чисел.

XV.4. Определение поля частных

Определение 18. *Поле K'/T из формулировки* ***теоремы о поле частных*** *называется* **полем частных кольца** K.

Отметим еще два факта.

Во-первых, поле Q рациональных функций является полем частных кольца целых чисел.

Во-вторых, кольцо K изоморфно вкладывается в K'/T с помощью правила: элементу a из K поставим в соответствие класс, содержащий $\frac{a}{1}$. Легко проверить (сделайте это самостоятельно), что это отображение является изоморфизмом.

XVI. Расширение поля с помощью кольца многочленов

Пусть P — **поле**. Через $P[x]$ обозначим алгебру **многочленов** с коэффициентами из P, с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочленов. Очевидно, что относительно этих операций $P[x]$ является **кольцом**.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Докажем, что $T \subseteq F$. По **определению конгруэнции**, если $(a,b) \in T$, то

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Докажем, что $T \subseteq F$. По **определению конгруэнции**, если $(a,b) \in T$, то

$$\begin{cases} (a;b) \in T, \\ (-a,-a) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Докажем, что $T \subseteq F$. По **определению конгруэнции**, если $(a,b) \in T$, то

$$\begin{cases} (a;b) \in T, \\ (-a,-a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a-a, b-a) \in T \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Докажем, что $T \subseteq F$. По **определению конгруэнции**, если $(a,b) \in T$, то

$$\begin{cases} (a;b) \in T, \\ (-a,-a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a-a, b-a) \in T \Rightarrow (b-a, 0) \in T \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Докажем, что $T \subseteq F$. По **определению конгруэнции**, если $(a,b) \in T$, то

$$\begin{cases} (a;b) \in T, \\ (-a,-a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a-a, b-a) \in T \Rightarrow (b-a, 0) \in T \Rightarrow (b-a) \in I.$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Докажем, что $T \subseteq F$. По **определению конгруэнции**, если $(a,b) \in T$, то

$$\begin{cases} (a;b) \in T, \\ (-a,-a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a-a, b-a) \in T \Rightarrow (b-a, 0) \in T \Rightarrow (b-a) \in I.$$

Итак, если $b - a = x$, то $(b - a) = x \in I$.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Докажем, что $T \subseteq F$. По **определению конгруэнции**, если $(a,b) \in T$, то

$$\begin{cases} (a;b) \in T, \\ (-a,-a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a-a, b-a) \in T \Rightarrow (b-a, 0) \in T \Rightarrow (b-a) \in I.$$

Итак, если $b - a = x$, то $(b-a) = x \in I$.
Поэтому $b = a + x$, т.е. $(a,b) \in F$.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Теперь докажем, что $F \subseteq T$.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Теперь докажем, что $F \subseteq T$.

Пусть $(a,b) \in F$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} b = a + x, \\ x \in I \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Теперь докажем, что $F \subseteq T$.

Пусть $(a,b) \in F$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} b = a + x, \\ x \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + x, \\ (x,0) \in T, \\ (-x,-x) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Теперь докажем, что $F \subseteq T$.

Пусть $(a,b) \in F$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} b = a + x, \\ x \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + x, \\ (x,0) \in T, \\ (-x,-x) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + x, \\ (x - x, 0 - x) \in T, \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Теперь докажем, что $F \subseteq T$.

Пусть $(a,b) \in F$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} b = a + x, \\ x \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + x, \\ (x,0) \in T, \\ (-x,-x) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + x, \\ (0,-x) \in T, \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Теперь докажем, что $F \subseteq T$.

Пусть $(a,b) \in F$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} b = a + x, \\ x \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + x, \\ (0,-x) \in T, \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Теперь докажем, что $F \subseteq T$.

Пусть $(a,b) \in F$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} b = a + x, \\ x \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + x, \\ (0,-x) \in T, \end{cases} \Rightarrow (b + 0, a + x - x) \in T \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть T — **конгруэнция**. Перейдем это утверждение на язык подмножеств. Пусть F — **отношение**, определенное формулой $F = \{(a,b) \,|\, a + I = b + I\}$. Теперь докажем, что $F \subseteq T$.

Пусть $(a,b) \in F$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} b = a + x, \\ x \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + x, \\ (0,-x) \in T, \end{cases} \Rightarrow (b,a) \in T.$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Осталось доказать, что I — идеал.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Осталось доказать, что I — идеал.

Докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $y \in I$. По **определению конгруэнции** и **теореме об умножении на 0 в кольце с 1**

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (y;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $y \in I$. По **определению конгруэнции** и **теореме об умножении на 0 в кольце с 1**

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (y;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x+y, 0+0) \in T\ \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $y \in I$. По **определению конгруэнции** и **теореме об умножении на 0 в кольце с 1**

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (y;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x+y, 0+0) \in T\ \Rightarrow\ (x+y, 0) \in T\ \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $y \in I$. По **определению конгруэнции** и **теореме об умножении на 0 в кольце с 1**

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (y;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x+y, 0+0) \in T \ \Rightarrow\ (x+y, 0) \in T \ \Rightarrow\ (x+y) \in I.$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$, надо доказать, что $(-x) \in I$. По определению конгруэнции

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$, надо доказать, что $(-x) \in I$. По определению конгруэнции

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (-x;\ -x) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$, надо доказать, что $(-x) \in I$. По определению конгруэнции

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (-x;\ -x) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x-x, 0-x) \in T\ \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$, надо доказать, что $(-x) \in I$. По определению конгруэнции

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (-x;\ -x) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x-x, 0-x) \in T\ \Rightarrow\ (0, -x) \in T\ \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$, надо доказать, что $(-x) \in I$. По определению конгруэнции

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (-x;\ -x) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x-x, 0-x) \in T\ \Rightarrow\ (0, -x) \in T\ \Rightarrow\ (-x) \in I.$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Осталось показать устойчивость множества I относительно умножения на элементы из K, т.е. что для любого $a \in K$ выполняется $a * I \subseteq I$.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $a \in K$. По **определению конгруэнции** и **теореме об умножении на 0 в кольце с 1**

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $a \in K$. По определению конгруэнции и теореме об умножении на 0 в кольце с 1

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a * x, a * 0) \in T \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $a \in K$. По определению конгруэнции и теореме об умножении на 0 в кольце с 1

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a * x, a * 0) \in T \Rightarrow (a * x, 0) \in T \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $a \in K$. По определению конгруэнции и теореме об умножении на 0 в кольце с 1

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a * x, a * 0) \in T \Rightarrow (a * x, 0) \in T \Rightarrow a * x \in I.$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $a \in K$. По **определению конгруэнции** и **теореме об умножении на 0 в кольце с 1**

$$\begin{cases} (x;\ 0) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a * x, a * 0) \in T \Rightarrow (a * x, 0) \in T \Rightarrow a * x \in I.$$

Необходимость доказана.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Докажем достаточность.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

Очевидно, что T — отношение эквивалентности.

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

Очевидно, что T — отношение эквивалентности. Осталось проверить, что

$$\begin{cases} (a;\ b) \in T, \\ (c;\ d) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a * c, b * d) \in T, \\ (a + c, b + d) \in T. \end{cases}$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

$$\begin{cases} (a;\ b) \in T, \\ (c;\ d) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

$$\begin{cases} (a;\ b) \in T, \\ (c;\ d) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\exists x)\ (x,0) \in T, \\ a + x = b, \\ (\exists y)\ (y,0) \in T, \\ c + y = d. \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

$$\begin{cases} (a;\ b) \in T, \\ (c;\ d) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\exists x)\ (x,0) \in T, \\ a + x = b, \\ (\exists y)\ (y,0) \in T, \\ c + y = d. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\exists x)\ x \in I, \\ (\exists y)\ y \in I, \\ a + x + c + y = b + d, \\ (a + x) * (c + y) = b * d. \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

$$\begin{cases} (a;\ b) \in T, \\ (c;\ d) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\exists x)\ x \in I, \\ (\exists y)\ y \in I, \\ a + x + c + y = b + d, \\ (a + x) * (c + y) = b * d. \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

$$\left\{\begin{array}{l}(a;\ b) \in T,\\ (c;\ d) \in T\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(\exists x)\ x \in I,\\ (\exists y)\ y \in I,\\ \hline a + x + c + y = b + d,\\ (a + c) + (x + y) = b + d,\\ \hline (a + x) * (c + y) = b * d,\\ a * c + a * y + x * c + x + y = b * d.\end{array}\right. \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

$$\begin{cases} (a;\ b) \in T, \\ (c;\ d) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\exists x)\ x \in I, \\ (\exists y)\ y \in I, \\ (a+c) + \underbrace{(x+y)}_{I} = b + d, \\ a * c + \underbrace{a * y + x * c + x * y}_{I} = b * d. \end{cases} \Rightarrow$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

$$\begin{cases} (a;\ b) \in T, \\ (c;\ d) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a * c, b * d) \in T, \\ (a + c, b + d) \in T. \end{cases}$$

XVI.1. Теорема о конгруэнциях колец

Теорема 16. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеет место равенство $a + x = b$.*

Доказательство. Пусть теперь I — идеал, и отношение T определено правилом: $(a;b) \in T$ тогда и только тогда, когда $a + x = b$ для некоторого x из I. Надо доказать, что T — конгруэнция.

$$\begin{cases} (a;\ b) \in T, \\ (c;\ d) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a * c, b * d) \in T, \\ (a + c, b + d) \in T. \end{cases}$$

Следовательно, T — конгруэнция, теорема доказана.

XVI.2. Фактор-кольцо по идеалу

Теорема 17. *Отношение T является* ***конгруэнцией*** *кольца K тогда и только тогда, когда множество $I = \{x \,|\, (x;0) \in T\}$ является* ***идеалом*** *и $(a;b) \in T$ в том и только том случае, когда для некоторого x из I имеем место равенство $a + x = b$.*

Фактор-кольцо K/T называется **фактор-кольцом** кольца K по идеалу I (идеал I однозначно определяет **конгруэнцию** T).

XVI.3. Теорема о гомоморфизмах полей

Теорема 18. *Всякий* ***гомоморфизм*** *поля* P *в поле* Q *является* ***изоморфизмом***.

Доказательство.

XVI.3. Теорема о гомоморфизмах полей

Теорема 18. *Всякий* ***гомоморфизм*** *поля P в поле Q является* ***изоморфизмом***.

Доказательство. Достаточно заметить, что в поле нет отличных от 0 и P идеалов. Применение **теоремы о конгруэнциях колец** заканчивает доказательство.

XVI.4. Теорема об идеалах кольца многочленов

Теорема 19. *Если P — **поле**, то **кольцо** $P[x]$ многочленов над полем P является **кольцом главных идеалов**.*

XVI.4. Теорема об идеалах кольца многочленов

Теорема 19. *Если P — **поле**, то **кольцо** $P[x]$ многочленов над полем P является **кольцом главных идеалов**.*

Иными словами, для любого идеала I кольца многочленов $P[x]$ найдется такой многочлен $f(x)$, что многочлен $g(x)$ принадлежит I тогда и только тогда, когда он делится нацело на $f(x)$.

XVI.4. Теорема об идеалах кольца многочленов

Теорема 19. *Если P — **поле**, то **кольцо** $P[x]$ многочленов над полем P является **кольцом главных идеалов**.*

Доказательство. Выберем в I ненулевой многочлен $f(x)$ минимальной степени. Пусть $g(x)$ — произвольный многочлен из I.

XVI.4. Теорема об идеалах кольца многочленов

Теорема 19. *Если P — **поле**, то **кольцо** $P[x]$ многочленов над полем P является **кольцом главных идеалов**.*

Доказательство. Выберем в I ненулевой многочлен $f(x)$ минимальной степени. Пусть $g(x)$ — произвольный многочлен из I.

Разделим $g(x)$ на $f(x)$ с остатком: $g(x) = f(x) * h(x) + r(x)$.

XVI.4. Теорема об идеалах кольца многочленов

Теорема 19. *Если P — **поле**, то **кольцо** $P[x]$ многочленов над полем P является **кольцом главных идеалов**.*

Доказательство. Выберем в I ненулевой многочлен $f(x)$ минимальной степени. Пусть $g(x)$ — произвольный многочлен из I.

Разделим $g(x)$ на $f(x)$ с остатком: $g(x) = f(x) * h(x) + r(x)$. Так как I — **идеал**, то $f(x) * h(x)$ — элемент из I.

XVI.4. Теорема об идеалах кольца многочленов

Теорема 19. *Если P — **поле**, то **кольцо** $P[x]$ многочленов над полем P является **кольцом главных идеалов**.*

Доказательство. Выберем в I ненулевой многочлен $f(x)$ минимальной степени. Пусть $g(x)$ — произвольный многочлен из I.

Разделим $g(x)$ на $f(x)$ с остатком: $g(x) = f(x) * h(x) + r(x)$. Так как I — **идеал**, то $f(x) * h(x)$ — элемент из I.

Следовательно, $r(x) = g(x) + \big(- f(x) * h(x)\big)$ — элемент из I (ведь I — аддитивная подгруппа). Но

XVI.4. Теорема об идеалах кольца многочленов

Теорема 19. *Если P — **поле**, то **кольцо** $P[x]$ многочленов над полем P является **кольцом главных идеалов**.*

Доказательство. Выберем в I ненулевой многочлен $f(x)$ минимальной степени. Пусть $g(x)$ — произвольный многочлен из I.

Разделим $g(x)$ на $f(x)$ с остатком: $g(x) = f(x) * h(x) + r(x)$. Так как I — **идеал**, то $f(x) * h(x)$ — элемент из I.

Следовательно, $r(x) = g(x) + \big(- f(x) * h(x)\big)$ — элемент из I (ведь I — аддитивная подгруппа). Но степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$, поэтому $r(x) = 0$ (степень многочлена $f(x)$ — минимальная среди всех ненулевых многочленов из I).

XVI.4. Теорема об идеалах кольца многочленов

Теорема 19. *Если P — **поле**, то **кольцо** $P[x]$ многочленов над полем P является **кольцом главных идеалов**.*

Доказательство. Выберем в I ненулевой многочлен $f(x)$ минимальной степени. Пусть $g(x)$ — произвольный многочлен из I.

Разделим $g(x)$ на $f(x)$ с остатком: $g(x) = f(x) * h(x) + r(x)$. Так как I — **идеал**, то $f(x) * h(x)$ — элемент из I.

Следовательно, $r(x) = g(x) + \big(- f(x) * h(x)\big)$ — элемент из I (ведь I — аддитивная подгруппа). Но степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$, поэтому $r(x) = 0$ (степень многочлена $f(x)$ — минимальная среди всех ненулевых многочленов из I).

Теорема доказана.

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Теорема 20. *Пусть P — поле, $f(x)$ — неприводимый над P многочлен с коэффициентами из P, $I = \left\{ g(x) * f(x) \,\middle|\, g(x) \in P[x] \right\}$ — идеал кольца многочленов, порожденный многочленом $f(x)$, a — корень многочлена $f(x)$ в некотором расширении поля P. Тогда фактор-кольцо $P[x]/I$ изоморфно полю $P[a]$.*

Доказательство.

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Теорема 20. *Пусть P — поле, $f(x)$ — неприводимый над P многочлен с коэффициентами из P, $I = \left\{ g(x) * f(x) \,\middle|\, g(x) \in P[x] \right\}$ — идеал кольца многочленов, порожденный многочленом $f(x)$, a — корень многочлена $f(x)$ в некотором расширении поля P. Тогда фактор-кольцо $P[x]/I$ изоморфно полю $P[a]$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение F кольца $P[x]$ в поле $P[a]$, определенное формулой:

$$F\left(h(x)\right) = h(a) \in P[a].$$

Легко проверить, что отображение F является **гомоморфизмом**.

Рассмотреть пример?

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Теорема 20. *Пусть P — поле, $f(x)$ — неприводимый над P многочлен с коэффициентами из P, $I = \left\{ g(x) * f(x) \,\middle|\, g(x) \in P[x] \right\}$ — идеал кольца многочленов, порожденный многочленом $f(x)$, a — корень многочлена $f(x)$ в некотором расширении поля P. Тогда фактор-кольцо $P[x]/I$ изоморфно полю $P[a]$.*

Доказательство. $F : P[x] \to P[a]$, где $F\left(h(x)\right) = h(a)$.

Следовательно, по теореме об описании **гомоморфных образов** универсальных алгебр и **теореме о конгруэнциях колец** получаем, что $P[a]$ изоморфно $P[x]/J$, где $J = \left\{ h(x) \,\middle|\, F\left(h(x)\right) = 0 \right\} = \{ h(x) \,|\, h(a) = 0 \}$.

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Доказательство. $F : P[x] \to P[a]$, где $F\left(h(x)\right) = h(a)$.

Следовательно, по теореме об описании **гомоморфных образов** универсальных алгебр и **теореме о конгруэнциях колец** получаем, что $P[a]$ изоморфно $P[x]/J$, где $J = \left\{h(x) \,\middle|\, F\left(h(x)\right) = 0\right\} = \{h(x) \,|\, h(a) = 0\}$.

Осталось доказать, что если $h(a) = 0$, то $h(x)$ делится на $f(x)$.

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Доказательство. $F : P[x] \to P[a]$, где $F\left(h(x)\right) = h(a)$.

Следовательно, по теореме об описании **гомоморфных образов** универсальных алгебр и **теореме о конгруэнциях колец** получаем, что $P[a]$ изоморфно $P[x]/J$, где $J = \left\{h(x) \middle| F\left(h(x)\right) = 0\right\} = \{h(x) \,|\, h(a) = 0\}$.

По **теореме о делении многочленов с остатком**, получаем, что существуют такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$ с коэффициентами из P, что степень многочлена $v(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$ и $h(x) = u(x) * f(x) + v(x)$.

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Доказательство. $F : P[x] \to P[a]$, где $F\left(h(x)\right) = h(a)$.

Следовательно, по теореме об описании **гомоморфных образов** универсальных алгебр и **теореме о конгруэнциях колец** получаем, что $P[a]$ изоморфно $P[x]/J$, где $J = \left\{h(x) \middle| F\left(h(x)\right) = 0\right\} = \{h(x) \,|\, h(a) = 0\}$.

По **теореме о делении многочленов с остатком**, получаем, что существуют такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$ с коэффициентами из P, что степень многочлена $v(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$ и $h(x) = u(x) * f(x) + v(x)$. Остается заметить, что

$$0 = h(a) = u(a) * f(a) + v(a) = u(a) * 0 + v(a) = v(a).$$

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Доказательство. $F : P[x] \to P[a]$, где $F\big(h(x)\big) = h(a)$.

Следовательно, по теореме об описании **гомоморфных образов** универсальных алгебр и **теореме о конгруэнциях колец** получаем, что $P[a]$ изоморфно $P[x]/J$, где $J = \big\{h(x) \,\big|\, F\big(h(x)\big) = 0\big\} = \{h(x) \,|\, h(a) = 0\}$.

Итак, степень многочлена $v(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$, $h(x) = u(x) * f(x) + v(x)$ и $v(a) = 0$. Но $f(x)$ — ненулевой многочлен минимальной степени такой, что $f(a) = 0$. Значит $v(x)$ — нулевой многочлен.

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Доказательство. $F : P[x] \to P[a]$, где $F\left(h(x)\right) = h(a)$.

Следовательно, по теореме об описании **гомоморфных образов** универсальных алгебр и **теореме о конгруэнциях колец** получаем, что $P[a]$ изоморфно $P[x]/J$, где $J = \left\{h(x) \middle| F\left(h(x)\right) = 0\right\} = \{h(x) \,|\, h(a) = 0\}$.

Итак, степень многочлена $v(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$, $h(x) = u(x) * f(x) + v(x)$ и $v(a) = 0$. Но $f(x)$ — ненулевой многочлен минимальной степени такой, что $f(a) = 0$. Значит $v(x)$ — нулевой многочлен.

Следовательно, $J = I$.

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Теорема 20. *Пусть P — поле, $f(x)$ — неприводимый над P многочлен с коэффициентами из P, $I = \left\{ g(x) * f(x) \,\middle|\, g(x) \in P[x] \right\}$ — идеал кольца многочленов, порожденный многочленом $f(x)$, a — корень многочлена $f(x)$ в некотором расширении поля P. Тогда фактор-кольцо $P[x]/I$ изоморфно полю $P[a]$.*

Доказательство. $F : P[x] \to P[a]$, где $F\left(h(x)\right) = h(a)$.

По теореме об описании **гомоморфных образов** универсальных алгебр и **теореме о конгруэнциях колец** получаем, что $P[a]$ изоморфно $P[x]/J$, где $J = \left\{ h(x) \,\middle|\, F\left(h(x)\right) = 0 \right\} = \left\{ h(x) \,\middle|\, h(a) = 0 \right\}$, причем мы доказали, что $J = I$.

XVI.5. Теорема о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов

Теорема 20. *Пусть P — поле, $f(x)$ — неприводимый над P многочлен с коэффициентами из P, $I = \left\{ g(x) * f(x) \,\middle|\, g(x) \in P[x] \right\}$ — идеал кольца многочленов, порожденный многочленом $f(x)$, a — корень многочлена $f(x)$ в некотором расширении поля P. Тогда фактор-кольцо $P[x]/I$ изоморфно полю $P[a]$.*

Теорема доказана.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x + y$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

$x * y$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

Так как 0 — нейтральный элемент **аддитивной группы поля**...

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x + y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1			
2	2			
3	3			

$x * y$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

Так как 0 — нейтральный элемент **аддитивной группы поля**...

По **теореме об умножении на нуль в поле**...

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1			
2	2			
3	3			

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0			
2	0			
3	0			

Так как 0 — нейтральный элемент **аддитивной группы поля**...

По **теореме об умножении на нуль в поле**...

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x + y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1			
2	2			
3	3			

$x * y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0			
2	0			
3	0			

1 — нейтральный элемент **мультипликативной группы поля**...

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1			
2	2			
3	3			

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

1 — нейтральный элемент **мультипликативной группы поля**...

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1			
2	2			
3	3			

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

По **следствию о порядке конечного поля** искомое поле имеет **характеристику** 2.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0		
2	2		0	
3	3			0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

По **следствию о порядке конечного поля** искомое поле имеет **характеристику** 2.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0		
2	2		0	
3	3			0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Положим $1 + 2 = 3$.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	
2	2		0	
3	3			0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Положим $1 + 2 = 3$.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	
2	2	3	0	
3	3			0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Положим $1 + 2 = 3$.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	
2	2	3	0	
3	3			0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Положим $1 + 2 = 3$.

Тогда $1 + 3 =$

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	
2	2	3	0	
3	3			0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Положим $1 + 2 = 3$.

Тогда $1 + 3 = 1 + (1 + 2) =$

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	
2	2	3	0	
3	3			0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Положим $1 + 2 = 3$.

Тогда $1 + 3 = (1 + 1) + 2 =$

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	
2	2	3	0	
3	3			0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Положим $1 + 2 = 3$.

Тогда $1 + 3 = (1 + 1) + 2 = 2$.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	
3	3	2		0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Положим $1 + 2 = 3$.

Тогда $1 + 3 = (1 + 1) + 2 = 2$.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	
3	3	2		0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Тогда $2 + 3 =$

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	
3	3	2		0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Тогда $2 + 3 = 2 + (1 + 2) =$

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	
3	3	2		0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Тогда $2+3 = 2+1+2 = 1+(2+2) =$

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	
3	3	2		0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Тогда $2 + 3 = 2 + 1 + 2 = 1 + (2 + 2) = 1$.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Тогда $2+3 = 2+1+2 = 1+(2+2) = 1$.

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

По **теореме о цикличности мультипликативной группы поля Галуа**...

Пример 11. *Постройте поле порядка 4, т.е. поле с носителем из 4 элементов.*

Решение. Пусть $GF(4) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

По **теореме о цикличности мультипликативной группы поля Галуа**...

Вернуться к лекции?

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение.

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. Имеем $2^2 = 2 * 2 =$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. Имеем $2^2 = 2 * 2 = 3 =$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. Имеем $2^2 = 2 * 2 = 3 = 1 + 2 =$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. Имеем $2^2 = 2 * 2 = 3 = 1 + 2 = 1 * 1 + 1 * 2$.

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. Имеем $2^2 = 2 * 2 = 3 = 1 + 2 = 1 * 1 + 1 * 2$.
Значит, $2^2 + 1 * 2 + 1 * 1 = 0$.

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. Имеем $2^2 = 2 * 2 = 3 = 1 + 2 = 1 * 1 + 1 * 2$.

Значит, $2^2 + 1 * 2 + 1 * 1 = 0$.

Таким образом, 2 является корнем многочлена $x^2 + x + 1$.

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. Осталось проверить утверждение о **базисе**.

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. Осталось проверить утверждение о **базисе**.

Воспользуемся **теоремой о линейных комбинациях базисных векторов**.

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. **Линейная независимость** очевидна:

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. **Линейная независимость** очевидна:

$0 * 1 + 1 * 2 = 2 \neq 0,$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. **Линейная независимость** очевидна:

$0 * 1 + 1 * 2 = 2 \neq 0,$

$1 * 1 + 0 * 2 = 1 \neq 0,$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. **Линейная независимость** очевидна:

$0 * 1 + 1 * 2 = 2 \neq 0,$

$1 * 1 + 0 * 2 = 1 \neq 0,$

$1 * 1 + 1 * 2 = 3 \neq 0.$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. **Линейная независимость** очевидна:

$0 * 1 + 1 * 2 = 2 \neq 0,$

$1 * 1 + 0 * 2 = 1 \neq 0,$

$1 * 1 + 1 * 2 = 3 \neq 0.$

Значит, $\alpha * 1 + \beta * 2 = 0$ только при $\alpha = \beta = 0$.

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение. Согласно **теореме о линейных комбинациях базисных векторов** осталось проверить, что $\{1;\ 2\}$ является **системой порождающих** для F.

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение.

$0 = ? * 1 + ? * 2,$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение.

$0 = 0 * 1 + 0 * 2,$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение.

$0 = 0 * 1 + 0 * 2,$

$1 = ? * 1 + ? * 2,$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение.

$0 = 0 * 1 + 0 * 2,$

$1 = 1 * 1 + 0 * 2,$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение.

$0 = 0 * 1 + 0 * 2,$

$1 = 1 * 1 + 0 * 2,$

$2 = ? * 1 + ? * 2,$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение.

$0 = 0 * 1 + 0 * 2,$

$1 = 1 * 1 + 0 * 2,$

$2 = 0 * 1 + 1 * 2,$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение.

$0 = 0 * 1 + 0 * 2,$

$1 = 1 * 1 + 0 * 2,$

$2 = 0 * 1 + 1 * 2,$

$3 = ? * 1 + ? * 2.$

Пример 12. *В поле F операции заданы таблицами Кели.*

$x+y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$x*y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Найдите многочлен минимальной степени над подполем $P = \{0;\ 1\}$, корнем которого является элемент 2.

Проверьте, что $\{2^0;\ 2\} = \{1;\ 2\}$ является базисом F, рассматриваемого как линейное пространство над P.

Решение.

$0 = 0 * 1 + 0 * 2,$

$1 = 1 * 1 + 0 * 2,$

$2 = 0 * 1 + 1 * 2,$

$3 = 1 * 1 + 1 * 2.$

Вернуться к лекции?

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$. ***б)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* s *многочлена* $x^3 + 2x^2 + x + 1$. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(s - 1)$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b + 1)$.

Решение.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. Что значит «построить поле»?

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. Что значит «построить поле»? Мы должны представить искомое поле в *стандартном виде*. В данном случае это означает, что мы должны указать

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. Что значит «построить поле»? Мы должны представить искомое поле в *стандартном виде*. В данном случае это означает, что мы должны указать носитель этого поля и каким-то образом задать операции. По критерию алгебраичности элемента система векторов $\left\{t^0;\ t;\ t^2\right\}$ является базисом искомого поля как линейного пространства над исходным полем.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. По критерию алгебраичности элемента система векторов $\left\{t^0;\ t;\ t^2\right\}$ является базисом искомого поля как линейного пространства над исходным полем. Значит, для случая **а)** носитель искомого поля имеет вид

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. По критерию алгебраичности элемента система векторов $\left\{t^0;\ t;\ t^2\right\}$ является базисом искомого поля как линейного пространства над исходным полем. Значит, для случая **а)** носитель искомого поля имеет вид

$$\left\{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \,\middle|\, \{\alpha_0;\ \alpha_1;\ \alpha_2\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}\right\} =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. По критерию алгебраичности элемента система векторов $\left\{t^0;\ t;\ t^2\right\}$ является базисом искомого поля как линейного пространства над исходным полем. Значит, для случая **а)** носитель искомого поля имеет вид

$$\left\{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \,\middle|\, \{\alpha_0;\ \alpha_1;\ \alpha_2\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}\right\} =$$

$$= \left\{0;\ 1;\ 2;\ t;\ t+1;\ t+2;\ 2t;\ 2t+1;\ 2t+2;\ t^2;\ \ldots;\ 2t^2+2t+2\right\}$$

(всего ??? элементов).

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. По критерию алгебраичности элемента система векторов $\left\{t^0;\ t;\ t^2\right\}$ является базисом искомого поля как линейного пространства над исходным полем. Значит, для случая **а)** носитель искомого поля имеет вид

$$\left\{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \,\middle|\, \{\alpha_0;\ \alpha_1;\ \alpha_2\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\}\right\} =$$

$$= \left\{0;\ 1;\ 2;\ t;\ t+1;\ t+2;\ 2t;\ 2t+1;\ 2t+2;\ t^2;\ \ldots;\ 2t^2+2t+2\right\}$$

(всего 27 элементов).

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***б)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* s *многочлена* $x^3 + 2x^2 + x + 1$. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(s - 1)$.

Решение. Аналогично выглядит носитель искомого поля для случая **б)**:

$$\left\{ \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 \,\middle|\, \{\alpha_0;\ \alpha_1;\ \alpha_2\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\} \right\},$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b + 1)$.

Решение. Аналогично выглядит носитель искомого поля для случая **в)**:

$$\left\{ \alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 \,\middle|\, \{\alpha_0;\ \alpha_1;\ \alpha_2\} \subseteq \{0;\ 1;\ 2\} \right\}.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. Операцию «сложение» проще всего задать

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. Операцию «сложение» проще всего задать формулой, например, для случая **а)** имеем:

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right) + \left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right) + \left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) = \\ &= (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\, t + (\alpha_2 + \beta_2)\, t^2.\end{aligned}$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. Для задания операции «умножение» можно с успехом применить два подхода.

Во-первых, можно

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. Для задания операции «умножение» можно с успехом применить два подхода.

Во-первых, можно задать эту операцию формулой.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. Для задания операции «умножение» можно с успехом применить два подхода.

Во-первых, можно задать эту операцию формулой.

Во-вторых, можно воспользоваться цикличностью мультипликативной группы поля Галуа.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Решение. Сначала зададим операцию «умножение» в искомом расширении поля формулой.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + (\qquad\qquad)\, t + (\qquad\qquad\qquad)\, t^2 +$$

$$+ (\qquad\qquad)\, t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\, t + (\qquad\qquad\qquad)\, t^2 +$$

$$+ (\qquad\qquad)\, t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ (\qquad\qquad\qquad) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)$.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена $x^3 + x^2 + 2$, поэтому

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена $x^3 + x^2 + 2$, поэтому
$t^3 + t^2 + 2 = 0 \ \Rightarrow$???

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена $x^3 + x^2 + 2$, поэтому
$t^3 + t^2 + 2 = 0 \ \Rightarrow$???

$1 + 1 + 1 = 0 \ \Rightarrow$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена $x^3 + x^2 + 2$, поэтому
$t^3 + t^2 + 2 = 0 \ \Rightarrow$???

$1 + 1 + 1 = 0 \ \Rightarrow \ 1 + 2 = 2 + 1 = 0 \ \Rightarrow$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена $x^3 + x^2 + 2$, поэтому
$t^3 + t^2 + 2 = 0 \ \Rightarrow$???
$1 + 1 + 1 = 0 \ \Rightarrow\ 1 + 2 = 2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} -1 = \\ -2 = \end{cases}$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена $x^3 + x^2 + 2$, поэтому
$t^3 + t^2 + 2 = 0 \ \Rightarrow$???

$1 + 1 + 1 = 0 \ \Rightarrow \ 1 + 2 = 2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} -1 = 2, \\ -2 = 1. \end{cases}$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* x^3+x^2+2. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t+2)$.

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2\right)=$$
$$=\alpha_0\beta_0+\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)t+\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)t^2+$$
$$+\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)t^3+\alpha_2\beta_2 t^4=$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0+\gamma_1 t+\gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена x^3+x^2+2, поэтому
$t^3+t^2+2=0\ \Rightarrow\ t^3=2t^2+1\ \Rightarrow$
$1+1+1=0\ \Rightarrow\ 1+2=2+1=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}-1=2,\\ -2=1.\end{cases}$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена $x^3 + x^2 + 2$, поэтому
$t^3 + t^2 + 2 = 0 \ \Rightarrow\ t^3 = 2t^2 + 1 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ t^4 = 2t^3 + t =$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена $x^3 + x^2 + 2$, поэтому
$t^3 + t^2 + 2 = 0 \ \Rightarrow\ t^3 = 2t^2 + 1 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ t^4 = 2t^3 + t = 2\left(2t^2 + 1\right) + t =$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* x^3+x^2+2. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t+2)$.

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2\right)=$$
$$=\alpha_0\beta_0+\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)t+\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)t^2+$$
$$+\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)t^3+\alpha_2\beta_2 t^4=$$

Надо выразить t^3 и t^4 в виде $\left(\gamma_0+\gamma_1 t+\gamma_2 t^2\right)$.
t — корень многочлена x^3+x^2+2, поэтому
$t^3+t^2+2=0\ \Rightarrow\ t^3=2t^2+1\ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ t^4=2t^3+t=2\left(2t^2+1\right)+t=t^2+t+2.$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* x^3+x^2+2. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t+2)$.

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2\right)=$$

$$=\alpha_0\beta_0+\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)t+\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)t^2+$$

$$+\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)t^3+\alpha_2\beta_2 t^4=$$

$\boxed{t^3=2t^2+1\ \Rightarrow\ t^4=t^2+t+2}$

$$=\alpha_0\beta_0+\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)t+\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)t^2+$$

$$+\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)\underbrace{(\qquad)}_{t^3}+\alpha_2\beta_2\underbrace{(\qquad)}_{t^4}=$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* x^3+x^2+2. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t+2)$.

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2\right)=$$

$$=\alpha_0\beta_0+\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)t+\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)t^2+$$

$$+\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)t^3+\alpha_2\beta_2 t^4=$$

$\boxed{t^3=2t^2+1\ \Rightarrow\ t^4=t^2+t+2}$

$$=\alpha_0\beta_0+\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)t+\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)t^2+$$

$$+\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)\underbrace{\left(2t^2+1\right)}_{t^3}+\alpha_2\beta_2\underbrace{\left(t^2+t+2\right)}_{t^4}=$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$

$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$

$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right)\left(2t^2 + 1\right) + \alpha_2\beta_2\left(t^2 + t + 2\right) =$$

$$= (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) + (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\, t +$$

$$+ (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\, t^2.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$

$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$

$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right)\left(2t^2 + 1\right) + \alpha_2\beta_2\left(t^2 + t + 2\right) =$$

$$= \left(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2\right) + (\qquad\qquad) t +$$

$$+ (\qquad\qquad) t^2.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$

$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$

$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right)\left(2t^2 + 1\right) + \alpha_2\beta_2\left(t^2 + t + 2\right) =$$

$$= \left(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2\right) + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_2\right) t +$$

$$+ \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right) t^2.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right) t^3 + \alpha_2\beta_2 t^4 =$$
$$= \alpha_0\beta_0 + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) t + \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) t^2 +$$
$$+ \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1\right)\left(2t^2 + 1\right) + \alpha_2\beta_2\left(t^2 + t + 2\right) =$$
$$= \left(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2\right) + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_2\right) t +$$
$$+ \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0 + 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2\right) t^2.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) =$$
$$= \left(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2\right) + \left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_2\right) t +$$
$$+ \left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0 + 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2\right) t^2.$$

Итак, произведение задано формулой.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Теперь реализуем второй подход к заданию операции «умножение», т.е. воспользуемся цикличностью поля. Если u — порождающий элемент мультипликативной группы искомого поля, то операцию «умножение» можно задать формулой

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Теперь реализуем второй подход к заданию операции «умножение», т.е. воспользуемся цикличностью поля. Если u — порождающий элемент мультипликативной группы искомого поля, то операцию «умножение» можно задать формулой $\begin{cases} u^k \cdot u^m = u^n; \\ 0 \cdot u^m = 0; \\ u^k \cdot 0 = 0, \end{cases}$ где n — остаток от деления числа $(k + m)$ на 26 (напомним, что порядок мультипликативной группы равен $27 - 1$, где 27 — порядок[1] искомого поля).

[1] Т.е. число элементов в носителе.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Следовательно, для использования этой формулы во всех рассматриваемых случаях нам необходимо найти порождающий элемент циклической группы и представить все степени этого элемента в виде, соответственно, $\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)$, $\left(\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2\right)$ или $\left(\alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2\right)$.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) =$ и $(-1) =$.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$, для случая **б)** получаем

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$, для случая **б)** получаем $s^3 = s^2 + 2s + 2$, для случая **в)** —

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$, для случая **б)** получаем $s^3 = s^2 + 2s + 2$, для случая **в)** — $b^3 = s^2 + s + 1$.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 = t \cdot \left(2t^2 + 1\right) =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 = t \cdot \left(2t^2 + 1\right) = 2\left(2t^2 + 1\right) + t =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 = t \cdot \left(2t^2 + 1\right) = 2\left(2t^2 + 1\right) + t = t^2 + t + 2,$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 = t \cdot \left(2t^2 + 1\right) = 2\left(2t^2 + 1\right) + t = t^2 + t + 2,$$

$$t^5 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 = t \cdot \left(2t^2 + 1\right) = 2\left(2t^2 + 1\right) + t = t^2 + t + 2,$$

$$t^5 = t \cdot t^4 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 = t \cdot \left(2t^2 + 1\right) = 2\left(2t^2 + 1\right) + t = t^2 + t + 2,$$

$$t^5 = t \cdot t^4 = t \cdot \left(t^2 + t + 2\right) =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 = t \cdot \left(2t^2 + 1\right) = 2\left(2t^2 + 1\right) + t = t^2 + t + 2,$$

$$t^5 = t \cdot t^4 = t \cdot \left(t^2 + t + 2\right) = \left(2t^2 + 1\right) + t^2 + 2t =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 = t \cdot \left(2t^2 + 1\right) = 2\left(2t^2 + 1\right) + t = t^2 + t + 2,$$

$$t^5 = t \cdot t^4 = t \cdot \left(t^2 + t + 2\right) = \left(2t^2 + 1\right) + t^2 + 2t = 2t + 1 \ldots$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

В исходном поле из равенства $1 + 1 + 1 = 0$ следует $(-2) = 1$ и $(-1) = 2$. Поэтому для случая **а)** из уравнения $t^3 + t^2 + 2 = 0$ получаем $t^3 = 2t^2 + 1$. Следовательно, (учитывая, что в исходном поле, например, $2 \cdot 2 = 1, \quad 2 + 2 = 1$)

$$t^4 = t \cdot t^3 = t \cdot \left(2t^2 + 1\right) = 2\left(2t^2 + 1\right) + t = t^2 + t + 2,$$

$$t^5 = t \cdot t^4 = t \cdot \left(t^2 + t + 2\right) = \left(2t^2 + 1\right) + t^2 + 2t = 2t + 1 \ldots$$

Продолжив эти вычисления, получаем результаты, представленные в таблице 1

Таблица 1.

n	t^n
1	t
2	t^2
3	$2t^2+1$
4	t^2+t+2
5	$2t+1$
6	$2t^2+t$
7	$2t^2+2$
8	t^2+2t+2
9	t^2+2t+1
10	t^2+t+1
11	$t+1$
12	t^2+t
13	1

n	s^n
1	s
2	s^2
3	s^2+2s+2
4	$s+2$
5	s^2+2s
6	$2s+2$
7	$2s^2+2s$
8	s^2+s+1
9	$2s^2+2$
10	$2s^2+1$
11	$2s^2+2s+1$
12	s^2+2s+1
13	2

n	s^n
14	$2s$
15	$2s^2$
16	$2s^2+s+1$
17	$2s+1$
18	$2s^2+s$
19	$s+1$
20	s^2+s
21	$2s^2+2s+2$
22	s^2+1
23	s^2+2
24	s^2+s+2
25	$2s^2+s+2$
26	1

n	b^n
1	b
2	b^2
3	b^2+b+1
4	$2b^2+2b+1$
5	b^2+2
6	b^2+1
7	b^2+2b+1
8	$2b+1$
9	$2b^2+b$
10	$2b+2$
11	$2b^2+2b$
12	b^2+2b+2
13	1

Описание поля в случае **б)** завершено. Но в случаях **а)** и **в)** все обстоит менее благополучно, поскольку элементы t и b не являются порождающими для мультипликативных групп искомых полей.

Описание поля в случае **б)** завершено. Но в случаях **а)** и **в)** все обстоит менее благополучно, поскольку элементы t и b не являются порождающими для мультипликативных групп искомых полей. В рассматриваемом случае найти требуемые порождающие несложно. В самом деле, порядок элемента делит порядок группы. Значит, в мультипликативной группе искомого поля всякий элемент имеет порядок

Описание поля в случае **б)** завершено. Но в случаях **а)** и **в)** все обстоит менее благополучно, поскольку элементы t и b не являются порождающими для мультипликативных групп искомых полей. В рассматриваемом случае найти требуемые порождающие несложно. В самом деле, порядок элемента делит порядок группы. Значит, в мультипликативной группе искомого поля всякий элемент имеет порядок 1, 2,

Описание поля в случае **б)** завершено. Но в случаях **а)** и **в)** все обстоит менее благополучно, поскольку элементы t и b не являются порождающими для мультипликативных групп искомых полей. В рассматриваемом случае найти требуемые порождающие несложно. В самом деле, порядок элемента делит порядок группы. Значит, в мультипликативной группе искомого поля всякий элемент имеет порядок 1, 2, 13 или

Описание поля в случае **б)** завершено. Но в случаях **а)** и **в)** все обстоит менее благополучно, поскольку элементы t и b не являются порождающими для мультипликативных групп искомых полей. В рассматриваемом случае найти требуемые порождающие несложно. В самом деле, порядок элемента делит порядок группы. Значит, в мультипликативной группе искомого поля всякий элемент имеет порядок 1, 2, 13 или 26.

Описание поля в случае **б)** завершено. Но в случаях **а)** и **в)** все обстоит менее благополучно, поскольку элементы t и b не являются порождающими для мультипликативных групп искомых полей. В рассматриваемом случае найти требуемые порождающие несложно. В самом деле, порядок элемента делит порядок группы. Значит, в мультипликативной группе искомого поля всякий элемент имеет порядок 1, 2, 13 или 26.

Порядок 1 и 2 имеют только элементы исходного поля.

Описание поля в случае **б)** завершено. Но в случаях **а)** и **в)** все обстоит менее благополучно, поскольку элементы t и b не являются порождающими для мультипликативных групп искомых полей. В рассматриваемом случае найти требуемые порождающие несложно. В самом деле, порядок элемента делит порядок группы. Значит, в мультипликативной группе искомого поля всякий элемент имеет порядок 1, 2, 13 или 26.

Порядок 1 и 2 имеют только элементы исходного поля. Все элементы порядка 13 перечислены выше, они являются степенями элемента t и, соответственно, элемента b.

Описание поля в случае **б)** завершено. Но в случаях **а)** и **в)** все обстоит менее благополучно, поскольку элементы t и b не являются порождающими для мультипликативных групп искомых полей. В рассматриваемом случае найти требуемые порождающие несложно. В самом деле, порядок элемента делит порядок группы. Значит, в мультипликативной группе искомого поля всякий элемент имеет порядок 1, 2, 13 или 26.

Порядок 1 и 2 имеют только элементы исходного поля. Все элементы порядка 13 перечислены выше, они являются степенями элемента t и, соответственно, элемента b. Следовательно, для нахождения элемента, порождающего мультипликативную группу поля в случаях **а)** и **в)** нам достаточно выбрать элементы, не являющиеся степенями элементов t и, соответственно, b, и не лежащие в исходном поле.

Описание поля в случае **б)** завершено. Но в случаях **а)** и **в)** все обстоит менее благополучно, поскольку элементы t и b не являются порождающими для мультипликативных групп искомых полей. В рассматриваемом случае найти требуемые порождающие несложно. В самом деле, порядок элемента делит порядок группы. Значит, в мультипликативной группе искомого поля всякий элемент имеет порядок 1, 2, 13 или 26.

Порядок 1 и 2 имеют только элементы исходного поля. Все элементы порядка 13 перечислены выше, они являются степенями элемента t и, соответственно, элемента b. Следовательно, для нахождения элемента, порождающего мультипликативную группу поля в случаях **а)** и **в)** нам достаточно выбрать элементы, не являющиеся степенями элементов t и, соответственно, b, и не лежащие в исходном поле. Таковы, например, элементы $(t+2)$ и $(b+1)$.

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Имеем (учитывая, что в рассматриваемом поле $2 + 2 = 1$, $2 + 1 = 0$)

$$(t + 2)^2 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Имеем (учитывая, что в рассматриваемом поле $2 + 2 = 1$, $2 + 1 = 0$)

$$(t + 2)^2 = (t + 2)(t + 2) =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Имеем (учитывая, что в рассматриваемом поле $2 + 2 = 1$, $2 + 1 = 0$)

$$(t + 2)^2 = (t + 2)(t + 2) = t^2 + t + 1,$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Имеем (учитывая, что в рассматриваемом поле $2 + 2 = 1$, $2 + 1 = 0$)

$$(t + 2)^2 = (t + 2)(t + 2) = t^2 + t + 1,$$

$$(t + 2)^3 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Имеем (учитывая, что в рассматриваемом поле $2 + 2 = 1$, $2 + 1 = 0$)

$$(t + 2)^2 = (t + 2)(t + 2) = t^2 + t + 1,$$

$$(t + 2)^3 = (t + 2) \cdot \left(t^2 + t + 1\right) =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Имеем (учитывая, что в рассматриваемом поле $2 + 2 = 1$, $2 + 1 = 0$)

$$(t+2)^2 = (t+2)(t+2) = t^2 + t + 1,$$

$$(t+2)^3 = (t+2) \cdot \left(t^2 + t + 1\right) = t^3 + 2 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Имеем (учитывая, что в рассматриваемом поле $2 + 2 = 1$, $2 + 1 = 0$)

$$(t+2)^2 = (t+2)(t+2) = t^2 + t + 1,$$

$$(t+2)^3 = (t+2) \cdot \left(t^2 + t + 1\right) = t^3 + 2 = \left(2t^2 + 1\right) + 2 =$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Имеем (учитывая, что в рассматриваемом поле $2 + 2 = 1$, $2 + 1 = 0$)

$$(t+2)^2 = (t+2)(t+2) = t^2 + t + 1,$$

$$(t+2)^3 = (t+2) \cdot \left(t^2 + t + 1\right) = t^3 + 2 = \left(2t^2 + 1\right) + 2 = 2t^2 \ldots$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***а)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* t *многочлена* $x^3 + x^2 + 2$. *Найти все степени элемента* t. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(t + 2)$.

Имеем (учитывая, что в рассматриваемом поле $2 + 2 = 1$, $2 + 1 = 0$)

$$(t+2)^2 = (t+2)(t+2) = t^2 + t + 1,$$

$$(t+2)^3 = (t+2) \cdot \left(t^2 + t + 1\right) = t^3 + 2 = \left(2t^2 + 1\right) + 2 = 2t^2 \ldots$$

Продолжая таким же образом, получаем результат, представленный в таблице 2.

Таблица 2.

n	$(t+2)^n$	n	$(t+2)^n$
1	$t+2$	14	$2t+1$
2	t^2+t+1	15	$2t^2+2t+2$
3	$2t^2$	16	t^2
4	$2t^2+2$	17	t^2+1
5	$2t^2+2t$	18	t^2+t
6	t^2+t+2	19	$2t^2+2t+1$
7	$2t^2+t+2$	20	t^2+2t+1
8	t	21	$2t$
9	t^2+2t	22	$2t^2+t$
10	$t+1$	23	$2t+2$
11	t^2+2	24	$2t^2+1$
12	t^2+2t+2	25	$2t^2+t+1$
13	2	26	1

n	$(b+1)^n$	n	$(b+1)^n$
1	$b+1$	14	$2b+2$
2	b^2+2b+1	15	$2b^2+b+2$
3	b^2+b+2	16	$2b^2+2b+1$
4	b	17	$2b$
5	b^2+b	18	$2b^2+2b$
6	$2b+1$	19	$b+2$
7	$2b^2+1$	20	b^2+2
8	b^2	21	$2s^2+2s+2$
9	$2b^2+b+1$	22	$2b^2$
10	$2b^2+b$	23	b^2+2b
11	$2b^2+b$	24	b^2+1
12	b^2+b+1	25	$2b^2+2b+2$
13	2	26	1

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Естественно применить **стратегию составления уравнений**.

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти?

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ?

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Введем переменные.

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты искомого уравнения и введем переменную x.

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты искомого уравнения и введем переменную x.

Искомый многочлен имеет вид $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$.

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты искомого уравнения и введем переменную x.

Искомый многочлен имеет вид $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты искомого уравнения и введем переменную x.

Искомый многочлен имеет вид $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Переведем на язык равенств утверждение о том, что $(t+2)$ является корнем:

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты искомого уравнения и введем переменную x.

Искомый многочлен имеет вид $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Переведем на язык равенств утверждение о том, что $(t+2)$ является корнем:

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(t+2)^2 + (t+2)^3 = 0.$$

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты искомого уравнения и введем переменную x.

Искомый многочлен имеет вид $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Переведем на язык равенств утверждение о том, что $(t+2)$ является корнем:

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(\mathbf{t+2})^{\mathbf{2}} + (\mathbf{t+2})^{\mathbf{3}} = 0.$$

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты искомого уравнения и введем переменную x.

Искомый многочлен имеет вид $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Переведем на язык равенств утверждение о том, что $(t+2)$ является корнем:

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(\mathbf{t+2})^{\mathbf{2}} + (\mathbf{t+2})^{\mathbf{3}} = 0.$$

Используя **таблицу 2,** (см. **вверху страницы**) получаем

Найдем минимальный многочлен, корнем которого является элемент $(t+2)$.

Что надо найти? Многочлен.

В каком виде представим ответ? В виде выражения от некоторой переменной.

Введем переменные. Обозначим буквами коэффициенты искомого уравнения и введем переменную x.

Искомый многочлен имеет вид $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Переведем на язык равенств утверждение о том, что $(t+2)$ является корнем:

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(\mathbf{t+2})^2 + (\mathbf{t+2})^3 = 0.$$

Используя **таблицу 2,** (см. **вверху страницы**) получаем

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2 \underbrace{(\mathbf{t^2+t+1})}_{(t+2)^2} + \underbrace{\mathbf{2t^2}}_{(t+2)^3} = 0.$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(t^2+t+1) + 2t^2 = 0.$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_{\mathbf{0}} + \alpha_{\mathbf{1}}(t + \mathbf{2}) + \alpha_{\mathbf{2}}(t^2 + t + \mathbf{1}) + 2t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t^0 в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases}
\end{cases}$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_{\mathbf{0}} + \alpha_{\mathbf{1}}(t + \mathbf{2}) + \alpha_{\mathbf{2}}(t^2 + t + \mathbf{1}) + 2t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t^0 в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases} \alpha_{\mathbf{0}} + \mathbf{2}\alpha_{\mathbf{1}} + \alpha_{\mathbf{2}} = 0; \\ \\ \end{cases}$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1(1t + 2) + \alpha_2(t^2 + 1t + 1) + 2t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases} \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \\ \end{cases}$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_0 + \alpha_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}t + 2) + \alpha_{\mathbf{2}}(t^2 + \mathbf{1}t + 1) + 2t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases} \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_{\mathbf{1}} + \alpha_{\mathbf{2}} = 0; \end{cases}$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(\mathbf{1}t^2 + t + 1) + \mathbf{2}t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t^2 в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases} \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0; \end{cases}$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_{\mathbf{2}}(\mathbf{1}t^2 + t + 1) + \mathbf{2}t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t^2 в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases} \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_{\mathbf{2}} + \mathbf{2} = 0, \end{cases}$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(\mathbf{1}t^2 + t + 1) + \mathbf{2}t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t^2 в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases} \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_2 + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \\ \alpha_1 = \\ \alpha_2 = \end{cases}$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(t^2+t+1) + 2t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t^k в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_2 + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1; \\ \alpha_1 = 2; \\ \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(t^2+t+1) + 2t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t^k в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_2 + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1; \\ \alpha_1 = 2; \\ \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, элемент $(t+2)$ является корнем многочлена

Для многочлена $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3$ получили тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1(t+2) + \alpha_2(t^2+t+1) + 2t^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты перед t^k в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ \alpha_2 + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1; \\ \alpha_1 = 2; \\ \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, элемент $(t+2)$ является корнем многочлена

$$1 + 2x + x^2 + x^3.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b + 1)$.

Решение. Пусть элемент $(b + 1)$ является корнем многочлена

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b + 1)$.

Решение. Пусть элемент $(b + 1)$ является корнем многочлена $\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + x^3$:

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b + 1)$.

Решение. Пусть элемент $(b + 1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + x^3 : \quad \beta_0 + \beta_1(b + 1) + \beta_2(b + 1)^2 + (b + 1)^3 = 0.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b + 1)$.

Решение. Пусть элемент $(b + 1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + x^3 : \quad \beta_0 + \beta_1(b + 1) + \beta_2(b + 1)^2 + (b + 1)^3 = 0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1, \quad (b + 1)^3 = b^2 + b + 2$:

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* x^3+2x^2+2x+2. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b+1)$.

Решение. Пусть элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3: \quad \beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2(b+1)^2+(b+1)^3=0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b+1)^2=b^2+2b+1$, $(b+1)^3=b^2+b+2$:

$$\beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2\underbrace{(b^2+2b+1)}_{(b+1)^2}+\underbrace{(b^2+b+2)}_{(b+1)^3}=0$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* x^3+2x^2+2x+2. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b+1)$.

Решение. Пусть элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3: \quad \beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2(b+1)^2+(b+1)^3=0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b+1)^2=b^2+2b+1, \quad (b+1)^3=b^2+b+2$:

$$\beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2\left(b^2+2b+1\right)+\left(b^2+b+2\right)=0 \ \Rightarrow \ \Big\{$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* x^3+2x^2+2x+2. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b+1)$.

Решение. Пусть элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3: \quad \beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2(b+1)^2+(b+1)^3=0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b+1)^2=b^2+2b+1, \quad (b+1)^3=b^2+b+2$:

$$\beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2\left(b^2+2b+1\right)+\left(b^2+b+2\right)=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \beta_0+\beta_1+\beta_2+2=0, \end{cases}$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* x^3+2x^2+2x+2. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b+1)$.

Решение. Пусть элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3: \quad \beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2(b+1)^2+(b+1)^3=0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b+1)^2=b^2+2b+1,\quad (b+1)^3=b^2+b+2$:

$$\beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2\left(b^2+2b+1\right)+\left(b^2+b+2\right)=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \beta_0+\beta_1+\beta_2+2=0, \\ \beta_1+2\beta_2+1=0, \end{cases}$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* x^3+2x^2+2x+2. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b+1)$.

Решение. Пусть элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3: \quad \beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2(b+1)^2+(b+1)^3=0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b+1)^2=b^2+2b+1$, $(b+1)^3=b^2+b+2$:

$$\beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2\left(b^2+2b+1\right)+\left(b^2+b+2\right)=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \beta_0+\beta_1+\beta_2+2=0, \\ \beta_1+2\beta_2+1=0, \\ \beta_2+1=0, \end{cases}$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* x^3+2x^2+2x+2. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b+1)$.

Решение. Пусть элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3: \quad \beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2(b+1)^2+(b+1)^3=0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b+1)^2=b^2+2b+1, \quad (b+1)^3=b^2+b+2$:

$$\beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2\left(b^2+2b+1\right)+\left(b^2+b+2\right)=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \beta_0+\beta_1+\beta_2+2=0, \\ \beta_1+2\beta_2+1=0, \\ \beta_2+1=0, \end{cases}$$

Следовательно, элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* x^3+2x^2+2x+2. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b+1)$.

Решение. Пусть элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3: \quad \beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2(b+1)^2+(b+1)^3=0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b+1)^2=b^2+2b+1, \quad (b+1)^3=b^2+b+2$:

$$\beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2\left(b^2+2b+1\right)+\left(b^2+b+2\right)=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \beta_0+\beta_1+\beta_2+2=0, \\ \beta_1+2\beta_2+1=0, \\ \beta_2+1=0, \end{cases}$$

Следовательно, элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+2x^2+x^3.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* x^3+2x^2+2x+2. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b+1)$.

Решение. Пусть элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3: \quad \beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2(b+1)^2+(b+1)^3=0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b+1)^2=b^2+2b+1, \quad (b+1)^3=b^2+b+2$:

$$\beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2\left(b^2+2b+1\right)+\left(b^2+b+2\right)=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \beta_0+\beta_1+\beta_2+2=0, \\ \beta_1+2\beta_2+1=0, \\ \beta_2+1=0, \end{cases}$$

Следовательно, элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+x+2x^2+x^3.$$

Пример 13. *Рассмотрим поле с носителем* $\{0;\ 1;\ 2\}$. ***в)*** *Построить расширение этого поля с помощью корня* b *многочлена* x^3+2x^2+2x+2. *Найти неприводимый многочлен минимальной степени, корнем которого является* $(b+1)$.

Решение. Пусть элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+x^3: \quad \beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2(b+1)^2+(b+1)^3=0.$$

Используем равенства из **таблицы 2**
$(b+1)^2=b^2+2b+1, \quad (b+1)^3=b^2+b+2$:

$$\beta_0+\beta_1(b+1)+\beta_2\left(b^2+2b+1\right)+\left(b^2+b+2\right)=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \beta_0+\beta_1+\beta_2+2=0, \\ \beta_1+2\beta_2+1=0, \\ \beta_2+1=0, \end{cases}$$

Следовательно, элемент $(b+1)$ является корнем многочлена

$$1+x+2x^2+x^3.$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «и» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(и+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение.

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «и» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Операцию «сложение» зададим формулой

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Операцию «сложение» зададим формулой

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right) + \left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) =$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Операцию «сложение» зададим формулой

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right) + \left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) =$$

$$= (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\, u + (\alpha_2 + \beta_2)\, u^2 + (\alpha_3 + \beta_3)\, u^3 + (\alpha_4 + \beta_4)\, u^4.$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

вычислим u^5, u^6, u^7 и u^8.

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$1 + u^2 + u^5 = 0 \ \Rightarrow$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$1 + u^2 + u^5 = 0 \ \Rightarrow\ u^5 =$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$1 + u^2 + u^5 = 0 \ \Rightarrow\ u^5 = u^2 + 1.$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 =$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 =$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 = u^4 + u^2 \ \Rightarrow$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 = u^4 + u^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ u^8 =$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 = u^4 + u^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ u^8 = u^5 + u^3 =$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Как и в решении **примера 13**, носитель представим в виде множества выражений вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$$

Для получения формулы, с помощью которой можно задать произведение в поле Q:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) = \ldots$$

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 = u^4 + u^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ u^8 = u^5 + u^3 = u^2 + 1 + u^3.$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Q : $\quad \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4$.

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 = u^4 + u^2 \ \Rightarrow\ u^8 = u^3 + u^2 + 1.$$

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + u\left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) + u^2\left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) +$$

$$+ u^3\left(\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0\right) + u^4\left(\alpha_0\beta_4 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_0\right) +$$

$$+ u^5\left(\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1\right) + u^6\left(\alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_2\right) +$$

$$+ u^7\left(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3\right) + \alpha_4\beta_4 u^8.$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Q : $\quad \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4$.

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 = u^4 + u^2 \ \Rightarrow\ u^8 = u^3 + u^2 + 1.$$

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + u\left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) + u^2\left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) +$$

$$+ u^3\left(\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0\right) + u^4\left(\alpha_0\beta_4 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_0\right) +$$

$$+ \left(u^2 + 1\right)\left(\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1\right) + u^6\left(\alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_2\right) +$$

$$+ u^7\left(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3\right) + \alpha_4\beta_4 u^8.$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. $Q:\quad \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 = u^4 + u^2 \ \Rightarrow\ u^8 = u^3 + u^2 + 1.$$

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + u\left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) + u^2\left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) +$$

$$+ u^3\left(\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0\right) + u^4\left(\alpha_0\beta_4 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_0\right) +$$

$$+ \left(u^2 + 1\right)\left(\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1\right) + \left(u^3 + u\right)\left(\alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_2\right) +$$

$$+ u^7\left(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3\right) + \alpha_4\beta_4 u^8.$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. $Q:\quad \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4.$

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 = u^4 + u^2 \ \Rightarrow\ u^8 = u^3 + u^2 + 1.$$

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + u\left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) + u^2\left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) +$$

$$+ u^3\left(\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0\right) + u^4\left(\alpha_0\beta_4 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_0\right) +$$

$$+ \left(u^2 + 1\right)\left(\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1\right) + \left(u^3 + u\right)\left(\alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_2\right) +$$

$$+ \left(u^4 + u^2\right)\left(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3\right) + \alpha_4\beta_4 u^8.$$

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «u» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(u+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Q : $\quad \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4$.

$$u^5 = u^2 + 1 \ \Rightarrow\ u^6 = u^3 + u \ \Rightarrow\ u^7 = u^4 + u^2 \ \Rightarrow\ u^8 = u^3 + u^2 + 1.$$

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4\right) =$$

$$= \alpha_0\beta_0 + u\left(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0\right) + u^2\left(\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0\right) +$$

$$+ u^3\left(\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0\right) + u^4\left(\alpha_0\beta_4 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_0\right) +$$

$$+ \left(u^2 + 1\right)\left(\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1\right) + \left(u^3 + u\right)\left(\alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_2\right) +$$

$$+ \left(u^4 + u^2\right)\left(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3\right) + \alpha_4\beta_4\left(u^3 + u^2 + 1\right).$$

Получим формулу для умножения в поле Q:

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 u+\alpha_2 u^2+\alpha_3 u^3+\alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0+\beta_1 u+\beta_2 u^2+\beta_3 u^3+\beta_4 u^4\right)=$$

$$=\alpha_0\beta_0+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)+u^2\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)+$$

$$+u^3\left(\alpha_0\beta_3+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_0\right)+u^4\left(\alpha_0\beta_4+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_0\right)+$$

$$+\left(u^2+1\right)\left(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1\right)+\left(u^3+u\right)\left(\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+\left(u^4+u^2\right)\left(\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3\right)+\alpha_4\beta_4\left(u^3+u^2+1\right)=$$

Получим формулу для умножения в поле Q:

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 u+\alpha_2 u^2+\alpha_3 u^3+\alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0+\beta_1 u+\beta_2 u^2+\beta_3 u^3+\beta_4 u^4\right)=$$

$$=\alpha_0\beta_0+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)+u^2\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)+$$

$$+u^3\left(\alpha_0\beta_3+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_0\right)+u^4\left(\alpha_0\beta_4+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_0\right)+$$

$$+\left(u^2+1\right)\left(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1\right)+\left(u^3+u\right)\left(\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+\left(u^4+u^2\right)\left(\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3\right)+\alpha_4\beta_4\left(u^3+u^2+1\right)=$$

$$=\left(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1+\alpha_4\beta_4\right)+$$

$$+u\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)+$$

$$+u^2\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)+$$

$$+u^3\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)+$$

$$+u^4\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,.$$

Получим формулу для умножения в поле Q:

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 u+\alpha_2 u^2+\alpha_3 u^3+\alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0+\beta_1 u+\beta_2 u^2+\beta_3 u^3+\beta_4 u^4\right)=$$

$$=\alpha_0\beta_0+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)+u^2\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)+$$

$$+u^3\left(\alpha_0\beta_3+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_0\right)+u^4\left(\alpha_0\beta_4+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_0\right)+$$

$$+\left(u^2+1\right)\left(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1\right)+\left(u^3+u\right)\left(\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+\left(u^4+u^2\right)\left(\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3\right)+\alpha_4\beta_4\left(u^3+u^2+1\right)=$$

$$=\left(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1+\alpha_4\beta_4\right)+$$

$$+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+u^2\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)+$$

$$+u^3\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)+$$

$$+u^4\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right).$$

Получим формулу для умножения в поле Q:

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 u+\alpha_2 u^2+\alpha_3 u^3+\alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0+\beta_1 u+\beta_2 u^2+\beta_3 u^3+\beta_4 u^4\right)=$$

$$=\alpha_0\beta_0+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)+u^2\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)+$$

$$+u^3\left(\alpha_0\beta_3+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_0\right)+u^4\left(\alpha_0\beta_4+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_0\right)+$$

$$+\left(u^2+1\right)\left(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1\right)+\left(u^3+u\right)\left(\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+\left(u^4+u^2\right)\left(\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3\right)+\alpha_4\beta_4\left(u^3+u^2+1\right)=$$

$$=\left(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1+\alpha_4\beta_4\right)+$$

$$+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+u^2\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3+\alpha_4\beta_4\right)+$$

$$+u^3\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)+$$

$$+u^4\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right).$$

Получим формулу для умножения в поле Q:

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 u+\alpha_2 u^2+\alpha_3 u^3+\alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0+\beta_1 u+\beta_2 u^2+\beta_3 u^3+\beta_4 u^4\right)=$$

$$=\alpha_0\beta_0+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)+u^2\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)+$$

$$+u^3\left(\alpha_0\beta_3+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_0\right)+u^4\left(\alpha_0\beta_4+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_0\right)+$$

$$+\left(u^2+1\right)\left(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1\right)+\left(u^3+u\right)\left(\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+\left(u^4+u^2\right)\left(\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3\right)+\alpha_4\beta_4\left(u^3+u^2+1\right)=$$

$$=\left(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1+\alpha_4\beta_4\right)+$$

$$+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+u^2\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3+\alpha_4\beta_4\right)+$$

$$+u^3\left(\alpha_0\beta_3+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_0+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+u^4\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right).$$

Получим формулу для умножения в поле Q:

$$\left(\alpha_0+\alpha_1 u+\alpha_2 u^2+\alpha_3 u^3+\alpha_4 u^4\right)\left(\beta_0+\beta_1 u+\beta_2 u^2+\beta_3 u^3+\beta_4 u^4\right)=$$

$$=\alpha_0\beta_0+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)+u^2\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)+$$

$$+u^3\left(\alpha_0\beta_3+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_0\right)+u^4\left(\alpha_0\beta_4+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_0\right)+$$

$$+\left(u^2+1\right)\left(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1\right)+\left(u^3+u\right)\left(\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+\left(u^4+u^2\right)\left(\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3\right)+\alpha_4\beta_4\left(u^3+u^2+1\right)=$$

$$=\left(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1+\alpha_4\beta_4\right)+$$

$$+u\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+u^2\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3+\alpha_4\beta_4\right)+$$

$$+u^3\left(\alpha_0\beta_3+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_0+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2\right)+$$

$$+u^4\left(\alpha_0\beta_4+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_0+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3+\alpha_4\beta_4\right).$$

Найдем все различные степени элемента u:

$$u^5 = u^2 + 1; \quad u^6 = u^3 + u; \quad u^7 = u^4 + u^2; \quad u^8 = u^3 + u^2 + 1;$$

$$u^9 = u^4+u^3+u; \quad u^{10} = u^4+1; \quad u^{11} = u^2+u+1; \quad u^{12} = u^3+u^2+u;$$

$$u^{13} = u^4+u^3+u^2; \quad u^{14} = u^4+u^3+u^2+1; \quad u^{15} = u^4+u^3+u^2+u+1;$$

$$u^{16} = u^4+u^3+u+1; \quad u^{17} = u^4+u+1; \quad u^{18} = u+1; \quad u^{19} = u^2+u;$$

$$u^{20} = u^3+u^2; \quad u^{21} = u^4+u^3; \quad u^{22} = u^4+u^2+1; \quad u^{23} = u^3+u^2+u+1;$$

$$u^{24} = u^4 + u^3 + u^2 + u; \quad u^{25} = u^4 + u^3 + 1; \quad u^{26} = u^4 + u^2 + u + 1;$$

$$u^{27} = u^3 + u + 1; \quad u^{28} = u^4 + u^2 + u; \quad u^{29} = u^3 + 1;$$

$$u^{30} = u^4 + u; \quad u^{31} = 1.$$

Для проверки, что элемент $(u + 1)$ также порождающий элемент мультипликативной группы, найдем все степени этого элемента.

Таблица 3.

n	$(u+1)^n$	n	$(u+1)^n$	n	$(u+1)^n$
2	u^2+1	12	u^4+u	22	$u^4+u^3+u^2+u$
3	u^3+u^2+u+1	13	u^4+u+1	23	u^2+u+1
4	u^4+1	14	u^2+u	24	u^3+1
5	u^4+u^2+1	15	u^2+u	25	u^4+u^3+u+1
6	$u^4+u^3+u^2+u+1$	16	u^3+u	26	u^3
7	u^2	17	u^3+u+1	27	u^4+u^3
8	u^3+u^2	18	$u^4+u^3+u^2+1$	28	u^3+u^2+1
9	u^4+u^2	19	u	29	u^4+u^2+u+1
10	u^4+u^2+u	20	u^2+u	30	$u^4+u^3+u^2$
11	u^3+u^2+u	21	u^3+u	31	1

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «и» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(и{+}1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Найдем все подполя этого поля.

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «и» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(и{+}1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Найдем все подполя этого поля. Его мультипликативная группа имеет порядок 31.

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «и» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(и+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Найдем все подполя этого поля. Его мультипликативная группа имеет порядок 31. Мультипликативная группа подполя является подгруппой мультипликативной группы этого поля.

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «и» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(и+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Найдем все подполя этого поля. Его мультипликативная группа имеет порядок 31. Мультипликативная группа подполя является подгруппой мультипликативной группы этого поля. Значит, по **теореме Лагранжа** порядок мультипликативной группы подполя делит нацело порядок мультипликативной группы исходного поля.

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «и» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(и+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Найдем все подполя этого поля. Его мультипликативная группа имеет порядок 31. Мультипликативная группа подполя является подгруппой мультипликативной группы этого поля. Значит, по **теореме Лагранжа** порядок мультипликативной группы подполя делит нацело порядок мультипликативной группы исходного поля. Но 31 — простое число. У него имеется только два делителя: 1 и 31.

Пример 14. *Постройте расширение Q поля*

$$GF(2) = \langle \{0;\ 1\};\ \{+;\ \cdot;\ 0;\ 1\} \rangle$$

с помощью корня «и» многочлена $1 + x^2 + x^5$. Проверьте, что элемент $(и+1)$ является порождающим элементом мультипликативной группы этого поля. Найдите все подполя поля Q.

Решение. Найдем все подполя этого поля. Его мультипликативная группа имеет порядок 31. Мультипликативная группа подполя является подгруппой мультипликативной группы этого поля. Значит, по **теореме Лагранжа** порядок мультипликативной группы подполя делит нацело порядок мультипликативной группы исходного поля. Но 31 — простое число. У него имеется только два делителя: 1 и 31. Следовательно, поле $GF(32) = GF\left(2^5\right)$ имеет только два подполя: поле $GF(2)$ и само $GF(32)$.

Пример 15. *Рассмотрим поле Q из* ***задачи XVIII.34****, то есть поле, операции в котором заданы следующими таблицами Кэли:*

$*$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	b	e
b	0	b	e	a

$+$	0	e	a	b
0	0	e	a	b
e	e	0	b	a
a	a	b	0	e
b	b	a	e	0

Построить фактор-алгебру $P[x]/\big(P[x]*(e*x^2+e*x+e)\big)$.

Решение.

Пример 15. *Рассмотрим поле Q из* ***задачи XVIII.34****, то есть поле, операции в котором заданы следующими таблицами Кэли:*

$*$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	b	e
b	0	b	e	a

$+$	0	e	a	b
0	0	e	a	b
e	e	0	b	a
a	a	b	0	e
b	b	a	e	0

Построить фактор-алгебру $P[x]/\big(P[x]*(e*x^2+e*x+e)\big)$.

Решение. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x)=e*x^2+e*x+e$ из $P[x]$.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e \right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = 0 + I = \left\{ \underbrace{0}_{g(x)=0}, \underbrace{\qquad}_{g(x)=e}, \underbrace{\qquad}_{g(x)=x}, \dots \right\},$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении задачи XVIII.34, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = 0 + I = \left\{ \underbrace{0}_{g(x)=0}, \underbrace{e * x^2 + e * x + e}_{g(x)=e}, \underbrace{\qquad\qquad}_{g(x)=x}, \ldots \right\},$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e \right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = 0 + I = \left\{ \underbrace{0}_{g(x)=0}, \underbrace{e * x^2 + e * x + e}_{g(x)=e}, \underbrace{e * x^3 + e * x^2 + e * x}_{g(x)=x}, \ldots \right\},$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\},$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении задачи XVIII.34, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\},$$

$$C_1 = e + I =$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении задачи XVIII.34, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\},$$

$$C_1 = e + I = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении задачи XVIII.34, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$

$$C_2 = e * x + I =$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении задачи XVIII.34, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$

$$C_2 = e * x + I = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\},$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\},$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении задачи XVIII.34, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\},$$

$$C_3 = (e * x + e) + I =$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении задачи XVIII.34, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\},$$

$$C_3 = (e * x + e) + I = \left\{e * x + e, e * x^2, \ldots\right\},$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F(0) =$

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F(0) = 0$.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F(0) = 0$.

Поэтому

t	0
$F(t)$	0

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x^0\right) =$

Поэтому

t	$0 \quad x^0$
$F(t)$	0

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x^0\right) = e$.

Поэтому

t	$0 \quad x^0$
$F(t)$	0

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x^0\right) = e$.

Поэтому

t	0	x^0
$F(t)$	0	e

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F(x) =$

Поэтому

t	0	x^0	x
$F(t)$	0	e	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F(x) = a$.

Поэтому

t	0	x^0	x
$F(t)$	0	e	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F(x) = a$.

Поэтому

t	0	x^0	x
$F(t)$	0	e	a

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x\right) =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$
$F(t)$	0	e	a	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x\right) = e + a.$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$
$F(t)$	0	e	a	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F(e + x) = e + a$.

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x^2\right) =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x^2\right) = a^2 =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x^2\right) = a^2 = e + a.$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x^2\right) = a^2 = e + a.$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e+x$	x^2
$F(t)$	0	e	a	$e+a$	$e+a$

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x^2\right) =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x^2\right) = e + e + a =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x^2\right) = e + e + a = a$.

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x^2\right) = e + e + a = a$.

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x + x^2\right) =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x + x^2\right) = a + a^2 =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x + x^2\right) = a + a^2 = a + e + a =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$		a

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x + x^2\right) = a + a^2 = a + e + a = e.$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(x + x^2\right) = a + a^2 = a + e + a = e.$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a	e

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x) \left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x + x^2\right) =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$e + x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a	e	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x + x^2\right) = e + a + a^2 =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$e + x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a	e	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x + x^2\right) = e + a + a^2 = e + a + e + a =$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$e + x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a		e

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x + x^2\right) = e + a + a^2 = e + a + e + a = 0.$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$e + x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a	e	

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x + x^2\right) = e + a + a^2 = e + a + e + a = 0.$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$e + x + x^2$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a	e	0

.

Решение примера 15. Как отмечено в решении **задачи XVIII.34**, элемент a является корнем многочлена $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ из $P[x]$.

Следовательно, $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

Из **таблиц Кэли** следует, что для функции F из доказательства **теоремы о расширении поля как фактор-кольце кольца многочленов**

$F\left(e + x + x^2\right) = e + a + a^2 = e + a + e + a = 0.$

Поэтому

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$e + x + x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	e	a	$e + a$	$e + a$	a	e	0	$\ldots$

.

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$e + x + x^2$	$\ldots$
$F(t)$	**0**	e	a	$e + a$	$e + a$	a	e	**0**	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	$\mathbf{0}$	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$\mathbf{e + x + x^2}$	$\ldots$
$F(t)$	$\mathbf{0}$	e	a	$e + a$	$e + a$	a	e	$\mathbf{0}$	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{ \mathbf{0}, \mathbf{e * x^2 + e * x + e}, \ldots \right\}, \quad C_1 = \left\{ e, e * x^2 + e * x, \ldots \right\},$$
$$C_2 = \left\{ e * x, e * x^2 + e, \ldots \right\}, \quad C_3 = \left\{ e * x^2, e * x + e, \ldots \right\}.$$

t	$\mathbf{0}$	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$\mathbf{e + x + x^2}$	$\ldots$
$F(t)$	$\mathbf{0}$	e	a	$e + a$	$e + a$	a	e	$\mathbf{0}$	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	0	x^0	x	$e+x$	x^2	$e+x^2$	$x+x^2$	$e+x+x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	$\mathbf{e}$	a	$e+a$	$e+a$	a	$\mathbf{e}$	0	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	0	$\mathbf{x^0}$	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$\mathbf{x + x^2}$	$e + x + x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	$\mathbf{e}$	a	$e + a$	$e + a$	a	$\mathbf{e}$	0	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{\mathbf{e}, \mathbf{e} * \mathbf{x^2} + \mathbf{e} * \mathbf{x}, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	0	$\mathbf{x^0}$	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$\mathbf{x + x^2}$	$e + x + x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	$\mathbf{e}$	a	$e + a$	$e + a$	a	$\mathbf{e}$	0	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	0	x^0	x	$e+x$	x^2	$e+x^2$	$x+x^2$	$e+x+x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	e	**a**	$e+a$	$e+a$	**a**	e	0	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	0	x^0	$\mathbf{x}$	$e + x$	x^2	$\mathbf{e + x^2}$	$x + x^2$	$e + x + x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	e	$\mathbf{a}$	$e + a$	$e + a$	$\mathbf{a}$	e	0	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{\mathbf{e * x}, \mathbf{e * x^2 + e}, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	0	x^0	$\mathbf{x}$	$e + x$	x^2	$\mathbf{e + x^2}$	$x + x^2$	$e + x + x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	e	$\mathbf{a}$	$e + a$	$e + a$	$\mathbf{a}$	e	0	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	0	x^0	x	$e + x$	x^2	$e + x^2$	$x + x^2$	$e + x + x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	e	a	$\mathbf{e + a}$	$\mathbf{e + a}$	a	e	0	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{e * x^2, e * x + e, \ldots\right\}.$$

t	0	x^0	x	$\mathbf{e+x}$	$\mathbf{x^2}$	$e+x^2$	$x+x^2$	$e+x+x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	e	a	$\mathbf{e+a}$	$\mathbf{e+a}$	a	e	0	$\ldots$

Имеем $I = \left\{ g(x)\left(e * x^2 + e * x + e\right) \;\middle|\; g(x) \in P[x] \right\}$,

$$C_0 = \left\{0, e * x^2 + e * x + e, \ldots\right\}, \quad C_1 = \left\{e, e * x^2 + e * x, \ldots\right\},$$
$$C_2 = \left\{e * x, e * x^2 + e, \ldots\right\}, \quad C_3 = \left\{\mathbf{e * x^2}, \mathbf{e * x + e}, \ldots\right\}.$$

t	0	x^0	x	$\mathbf{e + x}$	$\mathbf{x^2}$	$e + x^2$	$x + x^2$	$e + x + x^2$	$\ldots$
$F(t)$	0	e	a	$\mathbf{e + a}$	$\mathbf{e + a}$	a	e	0	$\ldots$

Вернёмся к лекции?

Задача XVII.30. (Ответ приведен на стр.1739.) Найти таблицы Кэли операций $*$ и $+$ для простого поля $\{0, e, a\}$ характеристики 3.

Задача XVIII.31. (Ответ приведен на стр.1743.) Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Задача XVIII.32. (Ответ приведен на стр.1759.) Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Задача XVIII.33. (Ответ приведен на стр.1767.) Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Задача XVIII.34. (Ответ приведен на стр.1774.) Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ неприводим над полем $P = \{0, e\}$. Найти простое расширение Q поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Задача XVIII.35. (Ответ приведен на стр.1782.) Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Задача XIX.36. (Ответ приведен на стр.1800.) В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b + e)$, элемент, обратный к $(b + e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Задача XIX.37. (Ответ приведен на стр.1830.) Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Задача XX.38. (Ответ приведен на стр.1857.) Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\middle|\; f(x) \in P[x] \right\}$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$			

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$		

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$ $\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$		

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \langle \{10, 20, 30\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\} \rangle$, $\mathcal{A}_2 = \langle \{10, 20, 30\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\} \rangle$, $\mathcal{A}_3 = \langle \{10, 20, 30\}, \{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\} \rangle$, $\mathcal{B}_1 = \left\langle \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \right\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \left\langle \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \right\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \rangle$, $\mathcal{C}_2 = \langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30

,

Алгебры $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $40 - \bullet$:

x	10	20	30

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30

,

Алгебры $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $40 - \bullet$:

x	10	20	30
$40 - x$			

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \langle \{10, 20, 30\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\} \rangle$, $\mathcal{A}_2 = \langle \{10, 20, 30\}, \{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\} \rangle$, $\mathcal{A}_3 = \langle \{10, 20, 30\}, \{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\} \rangle$, $\mathcal{B}_1 = \left\langle \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \right\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \left\langle \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \right\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \rangle$, $\mathcal{C}_2 = \langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30

,

Алгебры $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $40 - \bullet$:

x	10	20	30
$40 - x$	30	20	10

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30

,

$\mathcal{B}_1$ тоже другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $\overline{\bullet}$:

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30

,

$\mathcal{B}_1$ тоже другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $\overline{\bullet}$:

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\overline{x}$		

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30

,

$\mathcal{B}_1$ тоже другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $\overline{\bullet}$:

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\overline{x}$	$\{\emptyset\}$	

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30

,

$\mathcal{B}_1$ тоже другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $\overline{\bullet}$:

x	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\overline{x}$	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$			

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$		

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$			

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$		

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$			

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$		

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x, y\}$	

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x, y\}$	1

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x, y\}$	1
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$			

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x, y\}$	1
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$		

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x, y\}$	1
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$x \cdot y$	

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\overline{\bullet}, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \big\{\emptyset, \cap, \cup\big\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \big\{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\big\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x, y\}$	1
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$x \cdot y$	1

,

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x, y\}$	1
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$x \cdot y$	1

,

$\mathcal{C}_2$ тоже другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $1 - \bullet$:

x	0	1

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\} \big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\} \Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \ \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\} \big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x, y\}$	1
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$x \cdot y$	1

,

$\mathcal{C}_2$ тоже другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $1 - \bullet$:

x	0	1
$1 - x$		

Задача 1. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = \langle \emptyset, \{f, g, h\}, \mu \rangle$, где

x	f	g	h
$\mu(x)$	2	2	0

. Укажите, какие из алгебр можно рассматривать как алгебры сигнатуры Σ: $\mathcal{A}_1 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 30\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{\bullet, \bullet\}, \max\{\bullet, \bullet\}, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \big\langle \{10, 20, 30\}, \big\{\min\{x, y\}, 30, 40 - \bullet\big\}\big\rangle$, $\mathcal{B}_1 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\overline{\bullet}, \cap, \cup\}\Big\rangle$, $\mathcal{B}_2 = \Big\langle \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}, \{\emptyset, \cap, \cup\}\Big\rangle$, $\mathcal{C}_1 = \big\langle \{0, 1\}, \{1, \bullet \cdot \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\}\big\rangle$, $\mathcal{C}_2 = \big\langle \{0, 1\}, \{\bullet \cdot \bullet, 1 - \bullet, \max\{\bullet, \bullet\}\}\big\rangle$. Для ситуаций утвердительного ответа укажите интерпретирующую функцию.

Ответ.

α	$f(x, y)$	$g(x, y)$	h
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\min\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$	30
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{A}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$\min\{x, y\}$	30
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$\{\emptyset\}$
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{B}_2}(\alpha)$	$X \cup Y$	$X \cap Y$	$\{\emptyset\}$
$\nu^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$x \cdot y$	$\max\{x, y\}$	1
$\acute{\nu}^{\Sigma}_{\mathcal{C}_1}(\alpha)$	$\max\{x, y\}$	$x \cdot y$	1

,

$\mathcal{C}_2$ тоже другой сигнатуры, поскольку имеется одноместная операция $1 - \bullet$:

x	0	1
$1 - x$	1	0

Решение задачи 2.

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1; 2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1; 2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Получаем группу с групповой операцией, заданной таблицей

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Получаем группу с групповой операцией, заданной таблицей

$x\backslash y$	1	2	
1			
2			

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Получаем группу с групповой операцией, заданной таблицей

$x\backslash y$	1	2	
1	1	2	
2	2		

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Получаем группу с групповой операцией, заданной таблицей

$x\backslash y$	1	2	
1	1	2	
2	2		

У элемента 2 должен быть обратный.

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Получаем группу с групповой операцией, заданной таблицей

$x\backslash y$	1	2	
1	1	2	
2	2		

У элемента 2 должен быть обратный.
Им может быть только

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Получаем группу с групповой операцией, заданной таблицей

$x\backslash y$	1	2	
1	1	2	
2	2		

У элемента 2 должен быть обратный.
Им может быть только 2.

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Получаем группу с групповой операцией, заданной таблицей

$x\backslash y$	1	2	
1	1	2	
2	2	1	

У элемента 2 должен быть обратный.
Им может быть только 2.

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Если это не группа, то получаем группоид с операцией, заданной таблицей

$x\backslash y$	1	2	
1	1	2	
2	2	1	

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Если это не группа, то получаем группоид с операцией, заданной таблицей

$x\backslash y$	1	2	1	2
1	1	2	1	2
2	2	1	2	

Задача 2. Найти все группоиды с носителем $\{1;2\}$ и нейтральным элементом 1. Указать, какие из них являются группами.

Ответ. Если это не группа, то получаем группоид с операцией, заданной таблицей

$x\backslash y$	1	2	1	2
1	1	2	1	2
2	2	1	2	2

Решение задачи 3.

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами.

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами.

Элементы **носителя** являются **функциями**. Функции обычно задаются:

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами.

Элементы **носителя** являются **функциями**. Функции обычно задаются:

— формулой;

— таблицей;

— графиком.

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами.

Элементы **носителя** являются **функциями**. Функции обычно задаются:

— формулой;

— таблицей;

— графиком.

В данном случае естественно задать функции из **носителя** системы $\mathcal{A}$ с помощью таблиц.

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	
$f_2(x)$	0	1	
$f_3(x)$	1	0	
$f_4(x)$	1	1	

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	
$f_3(x)$	1	0	
$f_4(x)$	1	1	

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	
$f_4(x)$	1	1	

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2				
f_3				
f_4				

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2				
f_3				
f_4				

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2				
f_3				
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2				
f_3				
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0,$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1			
f_3	f_1			
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0,$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1			
f_3	f_1			
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1			f_4
f_3	f_1			f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1			f_4
f_3	f_1			f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$
$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(x) = x \equiv f_2(x),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2		f_4
f_3	f_1			f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$
$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(x) = x \equiv f_2(x),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2		f_4
f_3	f_1			f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$
$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(x) = x \equiv f_2(x), \quad (f_2 \circ f_3)(x) = f_3(f_2(x)) \equiv f_3(x),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1			f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$
$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(x) = x \equiv f_2(x), \quad (f_2 \circ f_3)(x) = f_3(f_2(x)) \equiv f_3(x),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1			f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$
$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(x) = x \equiv f_2(x), \quad (f_2 \circ f_3)(x) = f_3(f_2(x)) \equiv f_3(x),$$
$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_2(f_3(x)) \equiv f_3(x),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3		f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$
$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(x) = x \equiv f_2(x), \quad (f_2 \circ f_3)(x) = f_3(f_2(x)) \equiv f_3(x),$$
$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_2(f_3(x)) \equiv f_3(x),$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3		f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$
$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(x) = x \equiv f_2(x), \quad (f_2 \circ f_3)(x) = f_3(f_2(x)) \equiv f_3(x),$$
$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_2(f_3(x)) \equiv f_3(x),$$
$$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3(f_3(x)) = 1 - f_3(x) = 1 - (1 - x) = x \equiv f_2(x).$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

$$(f_1 \circ g)(x) = g(f_1(x)) \equiv g(0), \quad (f_4 \circ g)(x) = g(f_4(x)) \equiv g(1),$$
$$(g \circ f_1)(x) = f_1(g(x)) \equiv 0, \quad (g \circ f_4)(1) = f_4(g(1)) \equiv 1,$$
$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(x) = x \equiv f_2(x), \quad (f_2 \circ f_3)(x) = f_3(f_2(x)) \equiv f_3(x),$$
$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_2(f_3(x)) \equiv f_3(x),$$
$$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3(f_3(x)) = 1 - f_3(x) = 1 - (1 - x) = x \equiv f_2(x).$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

f	f_1	f_2	f_3	f_4
$\overline{f}$				

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

f	f_1	f_2	f_3	f_4
$\overline{f}$	f_4	f_3	f_2	f_1

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

f	f_1	f_2	f_3	f_4
$\overline{f}$	f_4	f_3	f_2	f_1

$\left\{ (f, g) \,\middle|\, f < g \right\} =$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

f	f_1	f_2	f_3	f_4
$\overline{f}$	f_4	f_3	f_2	f_1

$$\left\{ (f, g) \,\middle|\, f < g \right\} =$$
$$= \left\{ (f_1, f_2),\ (f_1, f_3),\ (f_1, f_4),\ (f_2, f_4),\ (f_3, f_4) \right\}.$$

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

f	f_1	f_2	f_3	f_4
$\overline{f}$	f_4	f_3	f_2	f_1

$$\left\{ (f,g) \,\middle|\, f < g \right\} =$$
$$= \left\{ (f_1, f_2),\ (f_1, f_3),\ (f_1, f_4),\ (f_2, f_4),\ (f_3, f_4) \right\}.$$

В алгебраической системе $\mathcal{A}$ две **операции** и одно отношение, т.е. сигнатуру системы $\mathcal{A}$ можно представить в виде $\Sigma = \langle \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\}, \mu \rangle$, причем

α	$\circ$	$\overline{}$	$<$
$\mu(\alpha)$			

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

f	f_1	f_2	f_3	f_4
$\overline{f}$	f_4	f_3	f_2	f_1

$$\left\{ (f,g) \,\middle|\, f < g \right\} = \left\{ (f_1, f_2),\ (f_1, f_3),\ (f_1, f_4),\ (f_2, f_4),\ (f_3, f_4) \right\}.$$

В алгебраической системе $\mathcal{A}$ две **операции** и одно отношение, т.е. сигнатуру системы $\mathcal{A}$ можно представить в виде $\Sigma = \langle \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\}, \mu \rangle$, причем

α	$\circ$	$\overline{}$	$<$
$\mu(\alpha)$	2	1	2

Задача 3. Задайте таблицей операции **алгебраической системы** $\mathcal{A} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, f : \{0;\ 1\} \to \{0;\ 1\} \right\},\ \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\} \right\rangle$, где $\circ$ определяется формулой $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, $\overline{f(x)} = 1 - f(x)$ и $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \{0;\ 1\}\ f(x) < g(x)$. Опишите **сигнатуру** этой системы и **интерпретации этой сигнатуры**.

Ответ. Сначала зададим все элементы **носителя** системы $\mathcal{A}$ и зададим **операции** таблицами:

x	0	1	формула
$f_1(x)$	0	0	$f_1(x) \equiv 0$
$f_2(x)$	0	1	$f_2(x) \equiv x$
$f_3(x)$	1	0	$f_3(x) \equiv 1 - x$
$f_4(x)$	1	1	$f_4(x) \equiv 1$

$f \circ g$				
$f \backslash g$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

f	f_1	f_2	f_3	f_4
$\overline{f}$	f_4	f_3	f_2	f_1

$$\left\{ (f,g) \,\middle|\, f < g \right\} = \left\{ (f_1,f_2),\ (f_1,f_3),\ (f_1,f_4),\ (f_2,f_4),\ (f_3,f_4) \right\}.$$

В алгебраической системе $\mathcal{A}$ две **операции** и одно отношение, т.е. сигнатуру системы $\mathcal{A}$ можно представить в виде $\Sigma = \langle \{\circ,\ \overline{}\},\ \{<\}, \mu \rangle$, причем

α	$\circ$	$\overline{}$	$<$
$\mu(\alpha)$	2	1	2

Интерпретация этой сигнатуры состоит в сопоставлении символам $\circ, \overline{}, <$ операций, заданных представленными выше таблицами и **предиката**, представленного выше **отношением**

$$\left\{ (f,g) \,\middle|\, f < g \right\} = \left\{ (f_1,f_2),\ (f_1,f_3),\ (f_1,f_4),\ (f_2,f_4),\ (f_3,f_4) \right\}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ.

Единичным элементом является

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ.

Единичным элементом является 2.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ.

Единичным элементом является 2.

Для 1 противоположным элементом будет

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ.

Единичным элементом является 2.

Для 1 противоположным элементом будет 3.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ.

Единичным элементом является 2.

Для 1 противоположным элементом будет 3.

Для 3 противоположным элементом будет

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ.

Единичным элементом является 2.

Для 1 противоположным элементом будет 3.

Для 3 противоположным элементом будет 1.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность:
Единичным элементом является 2.
Для 1 противоположным элементом будет 3.
Для 3 противоположным элементом будет 1.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) =$

Единичным элементом является 2.

Для 1 противоположным элементом будет 3.

Для 3 противоположным элементом будет 1.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

Единичным элементом является 2.

Для 1 противоположным элементом будет 3.

Для 3 противоположным элементом будет 1.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$. Можно проверить выполнение 27 равенств:

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
Можно проверить выполнение 27 равенств:
$1 \odot (1 \odot 1) = \qquad\qquad = (1 \odot 1) \odot 1;$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

Можно проверить выполнение 27 равенств:

$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 =$ $= (1 \odot 1) \odot 1;$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

Можно проверить выполнение 27 равенств:

$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = (1 \odot 1) \odot 1$;

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
Можно проверить выполнение 27 равенств:
$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 \quad = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1;$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
Можно проверить выполнение 27 равенств:
$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 \quad 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1;$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
Можно проверить выполнение 27 равенств:
$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1$;

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

Можно проверить выполнение 27 равенств:

$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1;$

$1 \odot (1 \odot 2) = \qquad\qquad = (1 \odot 1) \odot 2;$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

Можно проверить выполнение 27 равенств:

$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1;$

$1 \odot (1 \odot 2) = 1 \odot 1 = \qquad\qquad = (1 \odot 1) \odot 2;$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

Можно проверить выполнение 27 равенств:

$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1;$

$1 \odot (1 \odot 2) = 1 \odot 1 = 3 \qquad\qquad = (1 \odot 1) \odot 2;$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

Можно проверить выполнение 27 равенств:

$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1;$

$1 \odot (1 \odot 2) = 1 \odot 1 = 3 \quad = 3 \odot 2 = (1 \odot 1) \odot 2;$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
Можно проверить выполнение 27 равенств:
$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1$;
$1 \odot (1 \odot 2) = 1 \odot 1 = 3 \quad 3 = 3 \odot 2 = (1 \odot 1) \odot 2$;

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
Можно проверить выполнение 27 равенств:
$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1$;
$1 \odot (1 \odot 2) = 1 \odot 1 = 3 = 3 = 3 \odot 2 = (1 \odot 1) \odot 2$;

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
Можно проверить выполнение 27 равенств:
$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1$;
$1 \odot (1 \odot 2) = 1 \odot 1 = 3 = 3 = 3 \odot 2 = (1 \odot 1) \odot 2$;...

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
Можно проверить выполнение 27 равенств:
$1 \odot (1 \odot 1) = 1 \odot 3 = 2 = 2 = 3 \odot 1 = (1 \odot 1) \odot 1$;
$1 \odot (1 \odot 2) = 1 \odot 1 = 3 = 3 = 3 \odot 2 = (1 \odot 1) \odot 2$;...
Хлопотно как-то...

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
А можно применить изоморфизм.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2			
1			
3			

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1			
3			

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1		
3	3		

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	
3	3		

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3		

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0			
1			
2			

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1			
2			

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1		
2	2		

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	
2	2		

$1 + 2 =$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	
2	2		

$1 + 2 = 3 =$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	
2	2		

$1 + 2 = 3 = 3 \cdot 1 + 0$.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2		

$1 + 2 = 3 = 3 \cdot 1 + 0.$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	

$1 + 2 = 3 = 3 \cdot 1 + 0$.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	

$2 + 2 =$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	

$2 + 2 = 4 =$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	

$2 + 2 = 4 = 3 \cdot 1 + 1$.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$2 + 2 = 4 = 3 \cdot 1 + 1.$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}				
α^{ψ}				

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2			
α^{ψ}	2			

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2			$\odot$
α^{ψ}	2			$\odot$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1		$\odot$
α^{ψ}	2			$\odot$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2			$\odot$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3		$\odot$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Проверить изоморфность нетрудно:

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Проверить изоморфность нетрудно:

$(0 + 0)^{\varphi} =$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
А можно применить изоморфизм.
Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.
Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Проверить изоморфность нетрудно:
$(0+0)^{\varphi} = 0^{\varphi}$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Проверить изоморфность нетрудно:

$(0+0)^{\varphi} = 0^{\varphi} \qquad 0^{\varphi} \quad 0^{\varphi}$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Проверить изоморфность нетрудно:

$(0+0)^{\varphi} = 0^{\varphi}$ $\qquad$ $0^{\varphi} \odot 0^{\varphi}$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Проверить изоморфность нетрудно:

$(0+0)^{\varphi} = 0^{\varphi} \quad = 0^{\varphi} \odot 0^{\varphi}$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Проверить изоморфность нетрудно:

$(0+0)^{\varphi} = 0^{\varphi} \quad = 2 \odot 2 = 0^{\varphi} \odot 0^{\varphi}$

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Проверить изоморфность нетрудно:

$(0+0)^{\varphi} = 0^{\varphi} \quad 2 = 2 \odot 2 = 0^{\varphi} \odot 0^{\varphi}$

Надо проверить еще 7 равенств, сделайте сами.

Задача 4.

Проверить, что **группой** является алгебра, операция $\odot$ в которой задана таблицей

$x \odot y$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Ответ. Осталось доказать ассоциативность: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

А можно применить изоморфизм.

Нетрудно доказать, что относительно сложения по модулю 3 множество $\{0;\ 1;\ 2\}\}$ является группой.

Из сравнения таблиц Кэли нетрудно получить хотя бы один изоморфизм:

$x \odot y$			
$x \backslash y$	2	1	3
2	2	1	3
1	1	3	2
3	3	2	1

$x + y \ (\mathrm{mod} 3)$			
$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

α	0	1	2	$+$
α^{φ}	2	1	3	$\odot$
α^{ψ}	2	3	1	$\odot$

Проверить изоморфность нетрудно:

$(0+0)^{\varphi} = 0^{\varphi} = 2 = 2 \odot 2 = 0^{\varphi} \odot 0^{\varphi}$

Надо проверить еще 7 равенств, сделайте сами.

Поскольку алгебра $\langle \{0;1;2\}; \{+\}\}\rangle$ является группой, то изоморфная ей исходная алгебра тоже является группой.

Решение задачи 5.

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x + y)^{\tau} =$

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = x^\tau(+)^\tau y^\tau =$

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = x^\tau (+)^\tau y^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau =$

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^{\tau} = \min\{x^{\tau},\ y^{\tau}\}$,
$(x^{-1})^{\tau} = -(x^{\tau})$,

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^{\tau} = \min\{x^{\tau},\ y^{\tau}\}$,
$(x^{-1})^{\tau} = -(x^{\tau})$,
$(\max\{x;\ y;\ z\})^{\tau} =$

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau = -(x^\tau)$,
$(\max\{x;\ y;\ z\})^\tau = (x^\tau \cdot y^\tau \cdot z^\tau - z^\tau \cdot y^\tau \cdot x^\tau)$,

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau = -(x^\tau)$,
$(\max\{x;\ y;\ z\})^\tau = (x^\tau \cdot y^\tau \cdot z^\tau - z^\tau \cdot y^\tau \cdot x^\tau)$,
$(\sqrt{x})^\tau =$

Задача 5. Запишите формулы из **определения гомоморфизма** для случая, когда рассматривается гомоморфизм τ универсальной алгебры с операциями $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$ на некоторую универсальную алгебру, причем образом операции $+$ является $\min\{a;\ b\}$, операции $\bullet^{-1}$ — операция $(-\bullet)$, $\max\{x;\ y;\ z\}$ — $(x \cdot y \cdot z - z \cdot y \cdot x)$, $\sqrt{\bullet}$ — операция $(-\bullet)$.

Ответ. $(x+y)^\tau = \min\{x^\tau,\ y^\tau\}$,
$(x^{-1})^\tau = -(x^\tau)$,
$(\max\{x;\ y;\ z\})^\tau = (x^\tau \cdot y^\tau \cdot z^\tau - z^\tau \cdot y^\tau \cdot x^\tau)$,
$(\sqrt{x})^\tau = -(x^\tau)$.

Решение задачи 6.

Задача 6. Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}} \rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x \rho y$.

Задача 6. Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}} \rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x \rho y$.

Ответ.

$$u \in P' \ \Leftrightarrow$$

Задача 6. Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}} \rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x \rho y$.

Ответ.

$$u \in P' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ x \in P \end{array} \right. \right),$$

Задача 6. Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}} \rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x \rho y$.

Ответ.

$$u \in P' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ x \in P \end{array} \right. \right), \qquad \pi'(u) \ \Leftrightarrow$$

Задача 6. Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}} \rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x \rho y$.

Ответ.

$$u \in P' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ x \in P \end{array} \right. \right), \qquad \pi'(u) \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ \pi(x) \end{array} \right. \right),$$

Задача 6. Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}} \rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x \rho y$.

Ответ.

$$u \in P' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ x \in P \end{array} \right. \right), \qquad \pi'(u) \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ \pi(x) \end{array} \right. \right),$$

$$(u, v) \in R' \ \Leftrightarrow$$

Задача 6. Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}} \rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x \rho y$.

Ответ.

$$u \in P' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ x \in P \end{array} \right. \right), \qquad \pi'(u) \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ \pi(x) \end{array} \right. \right),$$

$$(u, v) \in R' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x, y \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ v = y^{\psi}, \\ (x, y) \in R \end{array} \right. \right),$$

Задача 6. Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}} \rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x \rho y$.

Ответ.

$$u \in P' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ x \in P \end{array} \right. \right), \qquad \pi'(u) \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ \pi(x) \end{array} \right. \right),$$

$$(u, v) \in R' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x, y \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ v = y^{\psi}, \\ (x, y) \in R \end{array} \right. \right), \qquad u \rho' v \ \Leftrightarrow$$

Задача 6. Пусть ψ — гомоморфизм алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A,\ F_{\mathcal{A}},\ P_{\mathcal{A}} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle B,\ F_{\mathcal{B}},\ P_{\mathcal{B}} \rangle$. Запишите а) определение одноместных отношений P' и предиката π' **индуцированных** одноместным отношением $P \in A$ и одноместным предикатом $\pi(x)$; б) отношений R' и предиката ρ' **индуцированных** двуместным отношением $R \in (A \times A)$ и двуместным предикатом $x \rho y$.

Ответ.

$$u \in P' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ x \in P \end{array} \right. \right), \qquad \pi'(u) \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ \pi(x) \end{array} \right. \right),$$

$$(u, v) \in R' \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x, y \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ v = y^{\psi}, \\ (x, y) \in R \end{array} \right. \right), \qquad u \rho' v \ \Leftrightarrow \ \left(\exists x, y \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^{\psi}, \\ v = y^{\psi}, \\ x \rho y \end{array} \right. \right).$$

Решение задачи 7.

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$\cdot$
x^{φ}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$*$

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$\cdot$
x^{φ}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$*$

$(-1)^{\varphi} * (-1)^{\varphi} =$ $= ((-1) \cdot (-1))^{\varphi}.$

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$\cdot$
x^φ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$*$

$$(-1)^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \qquad\qquad = ((-1) \cdot (-1))^\varphi.$$

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$\cdot$
x^φ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$*$

$$(-1)^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \quad = ((-1) \cdot (-1))^\varphi.$$

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$\cdot$
x^φ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$*$

$$(-1)^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1^\varphi = ((-1) \cdot (-1))^\varphi.$$

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$\cdot$
x^φ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$*$

$$(-1)^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1^\varphi = ((-1) \cdot (-1))^\varphi.$$

$$1^\varphi * (-1)^\varphi = \qquad\qquad = (1 \cdot (-1))^\varphi.$$

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$\cdot$
x^φ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$*$

$$(-1)^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1^\varphi = ((-1) \cdot (-1))^\varphi.$$

$$1^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^\varphi = (1 \cdot (-1))^\varphi.$$

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$\cdot$
x^φ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$*$

$$(-1)^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1^\varphi = ((-1) \cdot (-1))^\varphi.$$

$$1^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^\varphi = (1 \cdot (-1))^\varphi.$$

$$(-1)^\varphi * 1^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^\varphi = ((-1) \cdot 1)^\varphi.$$

Задача 7. Покажите, что алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$ **изоморфны**, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$\cdot$
x^φ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$*$

$$(-1)^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1^\varphi = ((-1) \cdot (-1))^\varphi.$$

$$1^\varphi * (-1)^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^\varphi = (1 \cdot (-1))^\varphi.$$

$$(-1)^\varphi * 1^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^\varphi = ((-1) \cdot 1)^\varphi.$$

$$1^\varphi * 1^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1^\varphi = (1 \cdot 1)^\varphi.$$

Решение задачи 8.

Задача 8. Покажите, что **изоморфны** алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ i;\ -i;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$, где $*$ — операция умножения матриц.

Задача 8. Покажите, что **изоморфны** алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ i;\ -i;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$-i$	i	$\cdot$
x^ψ	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$*$

Задача 8. Покажите, что **изоморфны** алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ i;\ -i;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ и $\mathcal{B} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$-i$	i	$\cdot$
x^ψ	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$*$

x	$-1 = i^2$	$1 = i^4$	$-i = i^3$	$i = i^1$	$\cdot$
x^ψ	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^1$	$*$

Решение задачи 9.

Задача 9. Постройте **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ i;\ -i;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ на $\mathcal{C} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$, где $*$ — операция умножения матриц.

Задача 9. Постройте **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ i;\ -i;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ на $\mathcal{C} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$-i$	i	$\cdot$
x^{ψ}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$*$

Задача 9. Постройте **гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{-1;\ i;\ -i;\ 1\},\ \{\cdot\} \rangle$ на $\mathcal{C} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \{*\} \right\rangle$, где $*$ — операция умножения матриц.

Ответ.

x	-1	1	$-i$	i	$\cdot$
x^ψ	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$*$

x	$-1 = i^2$	$1 = i^4$	$-i = i^3$	$i = i^1$	$\cdot$
x^ψ	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^4$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^3$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^1$	$*$

Решение задачи 10.

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^{φ}	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^{φ}	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^{φ}	b^{φ}	c^{φ}
$\alpha(u)$	b^{φ}	a^{φ}	b^{φ}

,

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

$\{a;\ c\}^\varphi =$

$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi =$

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\} \right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

$\{a;\ c\}^\varphi = \{a^\varphi;\ c^\varphi\}$,

$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi =$

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

$\{a;\ c\}^\varphi = \{a^\varphi;\ c^\varphi\}$,

$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi = \{(c^\varphi; b^\varphi)\ (c^\varphi; c^\varphi)\}$.

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

$$\{a;\ c\}^\varphi = \{a^\varphi;\ c^\varphi\},$$
$$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi = \{(c^\varphi; b^\varphi)\ (c^\varphi; c^\varphi)\}.$$

u	2	8
$\beta(u)$	8	2

,

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

$\{a;\ c\}^\varphi = \{a^\varphi;\ c^\varphi\}$,
$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi = \{(c^\varphi; b^\varphi)\ (c^\varphi; c^\varphi)\}$.

u	2	8
$\beta(u)$	8	2

,

$u \triangle v$:

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

$\{a;\ c\}^\varphi = \{a^\varphi;\ c^\varphi\}$,
$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi = \{(c^\varphi; b^\varphi)\ (c^\varphi; c^\varphi)\}$.

u	2	8
$\beta(u)$	8	2

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	2	8
2	2	8
8	8	8

,

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

$\{a;\ c\}^\varphi = \{a^\varphi;\ c^\varphi\}$,
$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi = \{(c^\varphi; b^\varphi)\ (c^\varphi; c^\varphi)\}$.

u	2	8
$\beta(u)$	8	2

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	2	8
2	2	8
8	8	8

,

$\{a;\ c\}^\varphi =$
$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi =$

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

$\{a;\ c\}^\varphi = \{a^\varphi;\ c^\varphi\}$,
$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi = \{(c^\varphi; b^\varphi)\ (c^\varphi; c^\varphi)\}$.

u	2	8
$\beta(u)$	8	2

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	2	8
2	2	8
8	8	8

,

$\{a;\ c\}^\varphi = \{2\}$,
$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi =$

Задача 10. Пусть φ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \left\langle \{a;\ b;\ c\},\ \{\alpha, \circ\},\ \left\{\{a;\ c\}, \{(c;b)\ (c;c)\}\right\}\right\rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B} = \langle \{2;\ 8\},\ \{\beta;\ \triangle\},\ \{P, Q\}\rangle$, где

x	a	b	c
$\alpha(x)$	b	a	b

,

$x \circ y$:

$x \backslash y$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

x	a	b	c	α	$\circ$	$\{a;\ c\}$	$\{(c;b)\ (c;c)\}$
x^φ	2	8	2	β	$\triangle$	P	Q

Найдите β, $\triangle$, P, Q.

Ответ.

u	a^φ	b^φ	c^φ
$\alpha(u)$	b^φ	a^φ	b^φ

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	a^φ	b^φ	c^φ
a^φ	c^φ	b^φ	a^φ
b^φ	b^φ	b^φ	b^φ
c^φ	a^φ	b^φ	c^φ

,

$\{a;\ c\}^\varphi = \{a^\varphi;\ c^\varphi\}$,
$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi = \{(c^\varphi; b^\varphi)\ (c^\varphi; c^\varphi)\}$.

u	2	8
$\beta(u)$	8	2

,

$u \triangle v$:

$u \backslash v$	2	8
2	2	8
8	8	8

,

$\{a;\ c\}^\varphi = \{2\}$,
$\{(c;b)\ (c;c)\}^\varphi = \{(2;\ 8),\ (2;\ 2)\}$.

Решение задачи 11.

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ. Ясно, что в условии задачи есть неточность:

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ. Ясно, что в условии задачи есть неточность:
$<$ — это не **отношение**, а

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ. Ясно, что в условии задачи есть неточность:
$<$ — это не **отношение**, а **предикат**.

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ.

$$(n+m)^\theta =$$

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ.

$$(n+m)^\theta = \frac{1}{2^{n+m}} =$$

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ.

$$(n+m)^\theta = \frac{1}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^m} =$$

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ.

$$(n+m)^\theta = \frac{1}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^m} = n^\theta \cdot m^\theta.$$

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ.

$$(n+m)^\theta = \frac{1}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^m} = n^\theta \cdot m^\theta.$$

Таким образом, $+^\theta = \cdot$.

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ. Получили, что $+^\theta = \cdot$.

$$n < m \ \Rightarrow$$

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ. Получили, что $+^\theta = \cdot$.

$$n < m \ \Rightarrow\ \frac{1}{2^n} \ ?\ \frac{1}{2^m}.$$

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ. Получили, что $+^\theta = \cdot$.

$$n < m \ \Rightarrow\ \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^m}.$$

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ. Получили, что $+^\theta = \cdot$.

$$n < m \ \Rightarrow\ \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^m}.$$

Таким образом, «$<$»$^\theta$ = «$>$».

Задача 11. Пусть θ — **сильный гомоморфизм** алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N},\ \{+\},\ \{<\} \rangle$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ с носителем $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, заданное формулой $n^\theta = \dfrac{1}{2^n}$. Найдите образы операции $+$ и отношения $<$.

Ответ. Итак, $+^\theta = \cdot$, $\text{«<»}^\theta = \text{«>»}$.

Решение задачи 12.

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \;\middle|\; \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ. Проверим **соответствующее равенство** для операции $+$.

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}?$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}?$$

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} =$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}?$$

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left((x_1 + x_2)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1 + y_2)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (z_1 + z_2)\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} =$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}?$$

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left((x_1 + x_2)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1 + y_2)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (z_1 + z_2)\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} =$$

$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i =$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}?$$

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left((x_1+x_2)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1+y_2)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (z_1+z_2)\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} =$$

$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\,i =$$

$$= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) =$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}?$$

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left((x_1+x_2)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1+y_2)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (z_1+z_2)\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} =$$

$$= (x_1+x_2) + (y_1+y_2)\,i =$$

$$= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left((x_1+x_2)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1+y_2)\overrightarrow{\mathbf{j}} + (z_1+z_2)\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} =$$

$$= (x_1+x_2) + (y_1+y_2)\,i =$$

$$= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}} \;\middle|\; \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = \left[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{r}}\right]$ и $\vec{\mathbf{a}}\,\rho\,\vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\vec{\mathbf{a}}\right| = \left|\vec{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\,\vec{\mathbf{i}} + y_1\,\vec{\mathbf{j}} + z_1\,\vec{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\,\vec{\mathbf{i}} + y_2\,\vec{\mathbf{j}} + z_2\,\vec{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\,\vec{\mathbf{i}} + y_1\,\vec{\mathbf{j}} + z_1\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\,\vec{\mathbf{i}} + y_2\,\vec{\mathbf{j}} + z_2\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

Проверим **соответствующее равенство** для операции f.

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right)?$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right)?$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} =$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right)?$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]\right)^{\varphi} =$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}} \;\middle|\; \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = \left[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{r}}\right]$ и $\vec{\mathbf{a}}\,\rho\,\vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\vec{\mathbf{a}}\right| = \left|\vec{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\,\vec{\mathbf{i}} + y_1\,\vec{\mathbf{j}} + z_1\,\vec{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\,\vec{\mathbf{i}} + y_2\,\vec{\mathbf{j}} + z_2\,\vec{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\,\vec{\mathbf{i}} + y_1\,\vec{\mathbf{j}} + z_1\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\,\vec{\mathbf{i}} + y_2\,\vec{\mathbf{j}} + z_2\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} f^{\varphi}\left(\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right)?$$

$$\left(f\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(\left[\vec{\mathbf{k}},\ x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right]\right)^{\varphi} = \left(x\,\vec{\mathbf{j}} - y\,\vec{\mathbf{i}}\right)^{\varphi} =$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = \left[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{r}}\right]$ и $\vec{\mathbf{a}}\,\rho\,\vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\vec{\mathbf{a}}\right| = \left|\vec{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\,\vec{\mathbf{i}} + y_1\,\vec{\mathbf{j}} + z_1\,\vec{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\,\vec{\mathbf{i}} + y_2\,\vec{\mathbf{j}} + z_2\,\vec{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\,\vec{\mathbf{i}} + y_1\,\vec{\mathbf{j}} + z_1\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\,\vec{\mathbf{i}} + y_2\,\vec{\mathbf{j}} + z_2\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} f^{\varphi}\left(\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right)?$$

$$\left(f\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(\left[\vec{\mathbf{k}},\ x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right]\right)^{\varphi} = \left(x\,\vec{\mathbf{j}} - y\,\vec{\mathbf{i}}\right)^{\varphi} = -y + xi =$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right)?$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]\right)^{\varphi} = \left(x\overrightarrow{\mathbf{j}} - y\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)^{\varphi} = -y + xi =$$

$$= f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right).$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right)?$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]\right)^{\varphi} = \left(x\overrightarrow{\mathbf{j}} - y\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)^{\varphi} = -y + xi =$$

$$= \left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} \cdot i = f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right).$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} \stackrel{?}{=} f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right)?$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]\right)^{\varphi} = \left(x\overrightarrow{\mathbf{j}} - y\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)^{\varphi} = -y + xi =$$

$$= (x + yi) \cdot i = \left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} \cdot i = f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right).$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right).$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(\left[\overrightarrow{\mathbf{k}},\ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right]\right)^{\varphi} = \left(x\overrightarrow{\mathbf{j}} - y\overrightarrow{\mathbf{i}}\right)^{\varphi} = -y + xi =$$

$$= (x + yi) \cdot i = \left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} \cdot i = f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right).$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ.

$$\left(\left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right) + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = \left(x_1\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_1\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} + \left(x_2\overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2\overrightarrow{\mathbf{j}} + z_2\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}.$$

$$\left(f\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)\right)^{\varphi} = f^{\varphi}\left(\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi}\right).$$

Значит, φ — **гомоморфизм**. Проверим, является ли он **сильным**.

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ. Проверим, является ли он **сильным**.

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right| = \qquad\qquad\qquad = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right| \end{cases}$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}} \;\middle|\; \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = \left[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{r}}\right]$ и $\vec{\mathbf{a}}\,\rho\,\vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\vec{\mathbf{a}}\right| = \left|\vec{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ. Проверим, является ли он **сильным**.

$$\begin{cases} \left|\vec{\mathbf{i}}\right| = \left|\vec{\mathbf{k}}\right|, \\ \left|\vec{\mathbf{i}}^{\varphi}\right| = |1 + 0i| = \qquad\qquad |0 + 0i| = \left|\vec{\mathbf{k}}^{\varphi}\right| \end{cases}$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ. Проверим, является ли он **сильным**.

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right| = |1 + 0i| = 1 \quad 0 = |0 + 0i| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right| \end{cases}$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ. Проверим, является ли он **сильным**.

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right| = |1 + 0i| = 1 \neq 0 = |0 + 0i| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right| \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ. Проверим, является ли он **сильным**.

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right| = |1 + 0i| = 1 \neq 0 = |0 + 0i| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{i}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \\ \end{cases}$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ. Проверим, является ли он **сильным**.

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right| = |1 + 0i| = 1 \neq 0 = |0 + 0i| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{i}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right)\overline{\mu}\left(\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right). \end{cases}$$

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ. Проверим, является ли он **сильным**.

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right| = |1 + 0i| = 1 \neq 0 = |0 + 0i| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{i}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right)\overline{\mu}\left(\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right). \end{cases}$$

Таким образом, φ не является **сильным гомоморфизмом**.

Задача 12. Пусть

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}} \,\middle|\, \{x,y,z\} \subseteq \mathbb{R} \right\},\ \{+, f\},\ \{\rho\} \right\rangle,$$

где $f\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \left[\overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{r}}\right]$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$,

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{C},\ \{+, g\},\ \{\mu\} \rangle,$$

где $g(z) = z \cdot i$ и $z_1 \mu z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Покажите, что отображение φ является **гомоморфизмом**, где $\left(x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}\right)^{\varphi} = x + yi$, $f^{\varphi} = g$, $\rho^{\varphi} = \mu$. Выясните, является ли этот гомоморфизм **сильным**, будет ли он **изоморфизмом**.

Ответ. Проверим, является ли он **сильным**.

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|, \\ \left|\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right| = |1 + 0i| = 1 \neq 0 = |0 + 0i| = \left|\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{i}}\,\rho\,\overrightarrow{\mathbf{k}}, \\ \left(\overrightarrow{\mathbf{i}}^{\varphi}\right)\overline{\mu}\left(\overrightarrow{\mathbf{k}}^{\varphi}\right). \end{cases}$$

Таким образом, φ не является **сильным гомоморфизмом**.
Следовательно, φ — это не **изоморфизм**.

Решение задачи 13.

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\left\{ \right.$ $\Rightarrow\ (x_1 + x_2;\quad +\quad)$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\quad + \quad)$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, & \Rightarrow\ (x_1 + x_2;\ y_1 + \quad) \end{cases}$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + \quad)$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$\Rightarrow (x^{-1};\quad)$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \ \Rightarrow \ (x^{-1};\qquad)$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1})$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} \\ \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \ \ \

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ \qquad\qquad\qquad \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{\qquad\qquad\})$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ \qquad\qquad\qquad \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\qquad\qquad\})$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\qquad\})$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\quad\})$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ \ \ \})$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ y_3\})$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ y_3\}) \in S$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ y_3\}) \in S,$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x};\quad\right)$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ y_3\}) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow \left(\sqrt{x};\quad\right)$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ.
$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$$

$$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$$

$$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ y_3\}) \in S,$$

$$(x;\ y) \in S \Rightarrow \left(\sqrt{x};\ \sqrt{y}\right)$$

Задача 13. Запишите формулы из **определения конгруэнции** S для случая, когда в исходной алгебраической системе рассматриваются операции $+$, $\bullet^{-1}$, $\max\{x;\ y;\ z\}$, $\sqrt{\bullet}$.

Ответ. $\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow (x^{-1};\ y^{-1}) \in S,$

$\begin{cases} (x_1;\ y_1) \in S, \\ (x_2;\ y_2) \in S, \\ (x_3;\ y_3) \in S \end{cases} \Rightarrow (\max\{x_1,\ x_2,\ x_3\};\ \max\{y_1,\ y_2,\ y_3\}) \in S,$

$(x;\ y) \in S \Rightarrow \left(\sqrt{x};\ \sqrt{y}\right) \in S.$

Решение задачи 14.

Задача 14. Запишите определение **класса элементов, эквивалентных элементу** m относительно **конгруэнции** T.

Задача 14. Запишите определение **класса элементов, эквивалентных элементу** m относительно **конгруэнции** T.

Ответ. Согласно определению **класса эквивалентных элементов** $C(m) =$

Задача 14. Запишите определение **класса элементов, эквивалентных элементу** m относительно **конгруэнции** T.

Ответ. Согласно определению **класса эквивалентных элементов** $C(m) = \left\{ t \,\middle|\, (m;\ t) \in T \right\}$.

Решение задачи 15.

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$\alpha'(C) =$

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ \qquad \right\}$$

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ (\qquad ;\, t) \in T, \right. \right\}$$

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\qquad ;\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\}$$

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\},$$

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\},$$

$$\beta'(C;\ D) =$$

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\},$$

$$\beta'(C;\ D) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\beta(x;\ y);\ t) \in T, \\ x \in C, \\ y \in D \end{array} \right. \right\},$$

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\},$$

$$\beta'(C;\ D) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\beta(x;\ y);\ t) \in T, \\ x \in C, \\ y \in D \end{array} \right. \right\},$$

$$\gamma'(C;\ D;\ E) =$$

Задача 15. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения операций, **индуцированных** одноместной операцией α, двуместной операцией β и трехместной операцией γ.

Ответ. По **определению индуцированной операции**

$$\alpha'(C) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\alpha(x);\ t) \in T, \\ x \in C \end{array} \right. \right\},$$

$$\beta'(C;\ D) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\beta(x;\ y);\ t) \in T, \\ x \in C, \\ y \in D \end{array} \right. \right\},$$

$$\gamma'(C;\ D;\ E) = \left\{ t \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} (\gamma(x;\ y;\ z);\ t) \in T, \\ x \in C, \\ y \in D, \\ z \in E \end{array} \right. \right\}.$$

Решение задачи 16.

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' =$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \qquad\qquad \middle| \, x \in P \right\}$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ \qquad\qquad \right\} \,\middle|\, x \in P \right\}$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' =$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t, x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ \qquad\qquad \right\}; \left\{ \qquad\qquad \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s,y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s,y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

$R' =$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s,y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

$$R' = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \,\middle|\, (x;\ y;\ z) \in R \right\}.$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s,y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

$$R' = \left\{ \left(\left\{ \qquad \right\}; \left\{ \qquad \right\}; \left\{ \qquad \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y;\ z) \in R \right\}.$$

Задача 16. Пусть T — конгруэнция алгебраической системы $\mathcal{A}$. Запишите определения отношений, **индуцированных** одноместным отношением P, двуместным отношением Q и трехместным отношением R.

Ответ. По **определению индуцированного отношения**

$$P' = \left\{ \left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\} \,\middle|\, x \in P \right\},$$

$$Q' = \left\{ \left(\left\{ t \,\middle|\, (t,x) \in T \right\}; \left\{ s \,\middle|\, (s,y) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y) \in Q \right\},$$

$$R' = \left\{ \left(\left\{ u \,\middle|\, (u,x) \in T \right\}; \left\{ v \,\middle|\, (v,y) \in T \right\}; \left\{ w \,\middle|\, (w,z) \in T \right\} \right) \,\middle|\, (x;\ y;\ z) \in R \right\}.$$

Решение задачи 17.

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (\quad\ ,\quad\ ) \in T, \\ (\quad\ ,\quad\ ) \in T \end{cases} \Rightarrow (\quad + \quad , \quad + \quad) \in T,$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (\qquad\quad , \qquad\quad) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + \qquad\quad , q_1(x,y) + \qquad\quad) \in T,$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ \mathbf{???}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ \textbf{???}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y))\in T\ \Rightarrow\ p(x,x)=q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases}(p_1(x,y),q_1(x,y))\in T,\\(p_2(x,y),q_2(x,y))\in T\end{cases}\ \Rightarrow\ (p_1(x,y)+p_2(x,y),q_1(x,y)+q_2(x,y))\in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y))\in T\ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y))\in T.$$

$$\begin{cases}(p_1(x,y),q_1(x,y))\in T,\\(p_2(x,y),q_2(x,y))\in T\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}p_1(x,x)=q_1(x,x),\\p_2(x,x)=q_2(x,x)\end{cases}\ \Rightarrow\ p_1(x,x)+p_2(x,x)=q_1(x,x)+q_2(x,x)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y)+p_2(x,y),q_1(x,y)+q_2(x,y))\in T,$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x) + p_2(x,x) = q_1(x,x) + q_2(x,x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y), q(x,y)) \in T \ \Rightarrow$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x) + p_2(x,x) = q_1(x,x) + q_2(x,x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y), q(x,y)) \in T \ \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow\ (\lambda p(x,y), \lambda q(x,y)) \in T.$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y)) \in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y), q_1(x,y)) \in T, \\ (p_2(x,y), q_2(x,y)) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x) = q_1(x,x), \\ p_2(x,x) = q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x) + p_2(x,x) = q_1(x,x) + q_2(x,x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y) + p_2(x,y), q_1(x,y) + q_2(x,y)) \in T,$$

$$(p(x,y), q(x,y)) \in T \ \Rightarrow\ p(x,x) = q(x,x) \ \Rightarrow \qquad \Rightarrow\ (\lambda p(x,y), \lambda q(x,y)) \in T.$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y))\in T \ \Rightarrow\ p(x,x)=q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y),q_1(x,y))\in T,\\ (p_2(x,y),q_2(x,y))\in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y)+p_2(x,y),q_1(x,y)+q_2(x,y))\in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y))\in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y))\in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y),q_1(x,y))\in T,\\ (p_2(x,y),q_2(x,y))\in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x)=q_1(x,x),\\ p_2(x,x)=q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x)+p_2(x,x)=q_1(x,x)+q_2(x,x)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y)+p_2(x,y),q_1(x,y)+q_2(x,y))\in T,$$

$$(p(x,y),q(x,y))\in T \ \Rightarrow\ p(x,x)=q(x,x)\ \Rightarrow\ \lambda p(x,x)=\lambda q(x,x)\ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y),\lambda q(x,y))\in T.$$

Задача 17. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ квадратичных форм $p(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с операциями сложения квадратичных форм и умножения квадратичной формы на число. Проверьте **по определению**, что конгруэнцией является отношение T, определенное на алгебре $\mathcal{A}$ формулой: $(p(x,y),\ q(x,y))\in T \ \Rightarrow\ p(x,x)=q(x,x)$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (p_1(x,y),q_1(x,y))\in T,\\ (p_2(x,y),q_2(x,y))\in T \end{cases} \Rightarrow\ (p_1(x,y)+p_2(x,y),q_1(x,y)+q_2(x,y))\in T,$$

$$(p(x,y),\ q(x,y))\in T \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y);\ \lambda q(x,y))\in T.$$

$$\begin{cases} (p_1(x,y),q_1(x,y))\in T,\\ (p_2(x,y),q_2(x,y))\in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(x,x)=q_1(x,x),\\ p_2(x,x)=q_2(x,x) \end{cases} \Rightarrow\ p_1(x,x)+p_2(x,x)=q_1(x,x)+q_2(x,x)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p_1(x,y)+p_2(x,y),q_1(x,y)+q_2(x,y))\in T,$$

$$(p(x,y),q(x,y))\in T \ \Rightarrow\ p(x,x)=q(x,x) \ \Rightarrow\ \lambda p(x,x)=\lambda q(x,x) \ \Rightarrow\ (\lambda p(x,y),\lambda q(x,y))\in T.$$

Задача решена.

Решение задачи 18.

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (\quad,\quad) \in S, \\ (\quad,\quad) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (\qquad,\qquad) \in S.$$

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (X_1, \quad) \in S, \\ (X_2, \quad) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2, \qquad) \in S.$$

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det(X_1X_2) = \det(Y_1Y_2)\ \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow\ \det X_1 \det X_2 = \det Y_1 \det Y_2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det(X_1X_2) = \det(Y_1Y_2)\ \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \det X_1 = \det Y_1, \\ \det X_2 = \det Y_2 \end{cases} \Rightarrow\ \det X_1 \det X_2 = \det Y_1 \det Y_2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det(X_1X_2) = \det(Y_1Y_2)\ \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача 18. Рассмотрим **полугруппу** матриц $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с операцией «**умножение матриц**». Докажите, что **конгруэнцией** является отношение S, заданное формулой: $(X,\ Y) \in S \ \Leftrightarrow\ \det X = \det Y$.

Ответ. Надо доказать **по определению** конгруэнции, что

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

$$\begin{cases} (X_1, Y_1) \in S, \\ (X_2, Y_2) \in S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \det X_1 = \det Y_1, \\ \det X_2 = \det Y_2 \end{cases} \Rightarrow\ \det X_1 \det X_2 = \det Y_1 \det Y_2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det(X_1X_2) = \det(Y_1Y_2)\ \Rightarrow\ (X_1X_2,\ Y_1Y_2) \in S.$$

Задача решена.

Решение задачи 19.

Задача 19. Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{\ }\}\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруэнциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если

$$T_1 = \left\{ (X,Y) \;\middle|\; \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = \left\{ (X,Y) \;\middle|\; \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \;\middle|\; \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Задача 19. Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{\ }\}\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруэнциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если

$$T_1 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Ответ. Для T_1 имеем

Задача 19. Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{\ }\}\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруэнциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если

$$T_1 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Ответ. Для T_1 имеем $\left\{ \begin{array}{l} X \cup Y \neq \emptyset, \\ (X,Y) \in T_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \neq \emptyset, \\ Y \neq \emptyset. \end{array} \right.$

Задача 19. Даны универсальные алгебры $\mathcal{A} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cap, \overline{\ }\}\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$. Проверьте, какие из **отношений эквивалентности** T_1, T_2 и T_3 являются **конгруэнциями** алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, если

$$T_1 = \left\{ (X,Y) \;\middle|\; \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}, \quad T_2 = \left\{ (X,Y) \;\middle|\; \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a\},\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\{a,b\}\} \end{array} \right. \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (X,Y) \;\middle|\; \left[\begin{array}{l} \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{b\}\}, \\ \{X,\ Y\} \subseteq \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Ответ. Для T_1 имеем $(X,Y) \in T_1 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} X = Y = \emptyset, \\ \emptyset \notin \{X,Y\}. \end{array} \right.$

Поэтому по **определению конгруэнции**, $\left\{ \begin{array}{l} (X_1;\ Y_1) \in T_1, \\ (X_2;\ Y_2) \in T_1 \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = Y_1 = \emptyset, \\ (X_2;\ Y_2) \in T_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X_1 = Y_1 = X_2 = Y_2 = \emptyset, \\ \emptyset \notin \{X_1 \cup X_2;\ Y_1 \cup Y_2\} \end{array} \right. \Rightarrow (X_1 \cup X_2;\ Y_1 \cup Y_2) \in T_1, \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \notin \{X_1, Y_1\}, \\ (X_2;\ Y_2) \in T_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \emptyset \notin \{X_1, Y_1, X_2, Y_2\}, \\ \emptyset \notin \{X_1 \cup \underbrace{X_2}_{\emptyset}, Y_1 \cup \underbrace{Y_2}_{\emptyset}\} \end{array} \right. \Rightarrow (X_1 \cup X_2;\ Y_1 \cup Y_2) \in T_1. \end{array} \right.$$

Решение задачи 20.

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Ясно, что $+^{\varphi} = \cdot$ и $(-\bullet)^{\varphi} = \overline{\bullet}$, что следует из

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Ясно, что $+^{\varphi} = \cdot$ и $(-\bullet)^{\varphi} = \overline{\bullet}$, что следует из сравнения «арностей» этих операций.

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n + m)^{\varphi} =$

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n + m)^{\varphi} =$ $= n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = \qquad\qquad = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi},$

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = \qquad\qquad = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.
$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

$(-n)^{\varphi} =$

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

$(-n)^{\varphi} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \overline{(n^{\varphi})}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

$(-n)^{\varphi} = i^{-n} = \qquad\qquad = \overline{(n^{\varphi})}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

$(-n)^{\varphi} = i^{-n} = i^{n-2n} = \qquad\qquad = \overline{(n^{\varphi})}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

$(-n)^{\varphi} = i^{-n} = i^{n-2n} = i^n(-1)^n =$ $= \overline{(n^{\varphi})}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

$(-n)^{\varphi} = i^{-n} = i^{n-2n} = i^n(-1)^n = (-i)^n = \qquad\qquad = \overline{(n^{\varphi})}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

$(-n)^{\varphi} = i^{-n} = i^{n-2n} = i^n (-1)^n = (-i)^n = \left(\ \overline{i}\ \right)^n = \qquad = \overline{(n^{\varphi})}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

$(-n)^{\varphi} = i^{-n} = i^{n-2n} = i^n(-1)^n = (-i)^n = \left(\ \overline{i}\ \right)^n = \overline{(i^n)} = \overline{(n^{\varphi})}$,

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\} \rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\} \rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Проверим, что φ — **гомоморфизм**.

$(n+m)^{\varphi} = i^{n+m} = i^n \cdot i^m = n^{\varphi} \cdot m^{\varphi} = n^{\varphi} +^{\varphi} m^{\varphi}$,

$(-n)^{\varphi} = i^{-n} = i^{n-2n} = i^n (-1)^n = (-i)^n = \left(\overline{i} \right)^n = \overline{(i^n)} = \overline{(n^{\varphi})}$, значит, φ — **гомоморфизм**.

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \Leftrightarrow$

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \ \Leftrightarrow \ m^{\varphi} = n^{\varphi} \ \Leftrightarrow$

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \ \Leftrightarrow \ m^{\varphi} = n^{\varphi} \ \Leftrightarrow \ i^m = i^n \ \Leftrightarrow$

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \ \Leftrightarrow \ m^{\varphi} = n^{\varphi} \ \Leftrightarrow \ i^m = i^n \ \Leftrightarrow \ i^{m-n} = 1 \ \Leftrightarrow$

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\} \rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\} \rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \ \Leftrightarrow \ m^{\varphi} = n^{\varphi} \ \Leftrightarrow \ i^m = i^n \ \Leftrightarrow \ i^{m-n} = 1 \ \Leftrightarrow \ m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \ \Leftrightarrow\ m^{\varphi} = n^{\varphi} \ \Leftrightarrow\ i^m = i^n \ \Leftrightarrow\ i^{m-n} = 1 \ \Leftrightarrow\ m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \ \Leftrightarrow\ m^{\varphi} = n^{\varphi} \ \Leftrightarrow\ i^m = i^n \ \Leftrightarrow\ i^{m-n} = 1 \ \Leftrightarrow\ m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим таблицами:

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \Leftrightarrow m^{\varphi} = n^{\varphi} \Leftrightarrow i^m = i^n \Leftrightarrow i^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим таблицами:

$\circ$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$				
$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$				
$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$				
$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$				

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \Leftrightarrow m^{\varphi} = n^{\varphi} \Leftrightarrow i^m = i^n \Leftrightarrow i^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим таблицами:

$\circ$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$
$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$
$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \Leftrightarrow m^{\varphi} = n^{\varphi} \Leftrightarrow i^m = i^n \Leftrightarrow i^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим таблицами:

$\circ$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$
$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$
$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$

C	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\hat{C}$				

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \Leftrightarrow m^{\varphi} = n^{\varphi} \Leftrightarrow i^m = i^n \Leftrightarrow i^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим таблицами:

$\circ$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$
$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$
$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$

C	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\hat{C}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \Leftrightarrow m^{\varphi} = n^{\varphi} \Leftrightarrow i^m = i^n \Leftrightarrow i^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим таблицами:

$\circ$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$
$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$
$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$

C	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\hat{C}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$

Естественный изоморфизм ε зададим

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \Leftrightarrow m^{\varphi} = n^{\varphi} \Leftrightarrow i^m = i^n \Leftrightarrow i^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим таблицами:

$\circ$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$
$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$
$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$

C	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\hat{C}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$

Естественный изоморфизм ε зададим таблицей:

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \Leftrightarrow m^{\varphi} = n^{\varphi} \Leftrightarrow i^m = i^n \Leftrightarrow i^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим таблицами:

$\circ$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$
$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$
$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$

C	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\hat{C}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$

Естественный изоморфизм ε зададим таблицей:

C	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\circ$	$\hat{\bullet}$
C^{ε}						

Задача 20. Проверьте, что для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}, \{\bullet + \bullet, -\bullet\}\rangle$ и алгебраической системы $\mathcal{B} = \langle \{\pm 1; \pm i\}, \{\bullet \cdot \bullet, \overline{\bullet}\}\rangle$, функция, заданная формулой $n^{\varphi} = i^n$, определяет **гомоморфизм**. Найдите **конгруэнцию**, порожденную этим гомоморфизмом, **фактор-систему** и и **естественный изоморфизм** ε.

Ответ. Найдем **конгруэнцию**, порожденную гомоморфизмом φ:
$(m, n) \in T_{\varphi} \Leftrightarrow m^{\varphi} = n^{\varphi} \Leftrightarrow i^m = i^n \Leftrightarrow i^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m - n = 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Операции $\circ$ и $\hat{\bullet}$ **фактор-системы** зададим таблицами:

$\circ$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$
$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$
$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$

C	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$
$\hat{C}$	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$

Естественный изоморфизм ε зададим таблицей:

C	$\{0; -4; 4; -8; \ldots\}$	$\{1; -3; 5; -7; \ldots\}$	$\{2; -2; 6; -6; \ldots\}$	$\{3; -1; 7; -5; \ldots\}$	$\circ$	$\hat{\bullet}$
C^{ε}	$i^0 = i^{-4} = i^4 = \ldots = 1$	$i^1 = i^{-3} = i^5 = \ldots = i$	$i^2 = i^{-2} = i^6 = \ldots = -1$	$i^3 = i^{-1} = i^7 = \ldots = -i$	$\cdot$	$\overline{\bullet}$

Решение задачи 21.

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\} \rangle$, где

$$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases} \qquad Q = \{a;b\} \times \{a;b\} \text{ — } \textbf{универсальное отношение},$$

$f(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y \backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\},\{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$$(x;y) \in P \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases} \qquad Q = \{a;b\} \times \{a;b\} \text{ — } \textbf{универсальное отношение},$$

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ. В таблицах Кэли операций f и g заменим все элементы их образами относительно действия φ:

$(f(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\}\rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases}$ $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\}, \{f;g\}, \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\}, \{Q\}\rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases}$ $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\},\{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases}$ $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

$(g(x;y))^\varphi$				
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это ***сильный*** гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\},\{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$(x;y) \in P \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases}$ $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \ \Rightarrow\ (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \end{cases}$$

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\},\{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$(x;y) \in P \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases}$ $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \ \Rightarrow\ (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \\ (0;1) \in P \ \Rightarrow\ (0^\varphi;1^\varphi) = (a;b) \in P' \end{cases}$$

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\},\{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$$(x;y) \in P \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases} \qquad Q = \{a;b\} \times \{a;b\} \text{ — } \textbf{универсальное отношение},$$

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \ \Rightarrow\ (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \\ (0;1) \in P \ \Rightarrow\ (0^\varphi;1^\varphi) = (a;b) \in P' \\ (1;2) \in P \ \Rightarrow\ (1^\varphi;2^\varphi) = (b;a) \in P' \end{cases}$$

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\},\{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$$(x;y) \in P \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases} \qquad Q = \{a;b\} \times \{a;b\} \text{ — } \textbf{универсальное отношение},$$

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \ \Rightarrow\ (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \\ (0;1) \in P \ \Rightarrow\ (0^\varphi;1^\varphi) = (a;b) \in P' \\ (1;2) \in P \ \Rightarrow\ (1^\varphi;2^\varphi) = (b;a) \in P' \\ (1;3) \in P \ \Rightarrow\ (1^\varphi;3^\varphi) = (b;b) \in P' \end{cases}$$

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$$(x;y) \in P \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases} \qquad Q = \{a;b\} \times \{a;b\} \text{ — } \textbf{универсальное отношение},$$

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

,

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

,

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

.

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$(f(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	b	a	b
$1^\varphi = b$		b	a	b	a
$2^\varphi = a$		a	b	a	b
$3^\varphi = b$		b	a	b	a

,

$(g(x;y))^\varphi$					
	x	0	1	2	3
y^φ	x^φ	a	b	a	b
$0^\varphi = a$		a	a	a	a
$1^\varphi = b$		a	b	a	b
$2^\varphi = a$		a	a	a	a
$3^\varphi = b$		a	b	a	b

.

Нетрудно увидеть, что эти таблицы совпадают, с точностью до дублирования строк и столбцов, с соответствующими таблицами Кэли для операций u и v. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Чтобы проверить, что это *сильный* гомоморфизм, построим **индуцированное отношение** P':

$$\begin{cases} (0;0) \in P \ \Rightarrow\ (0^\varphi;0^\varphi) = (a;a) \in P' \\ (0;1) \in P \ \Rightarrow\ (0^\varphi;1^\varphi) = (a;b) \in P' \\ (1;2) \in P \ \Rightarrow\ (1^\varphi;2^\varphi) = (b;a) \in P' \\ (1;3) \in P \ \Rightarrow\ (1^\varphi;3^\varphi) = (b;b) \in P' \end{cases} \Rightarrow\ P' = Q.$$

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\}, \{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$$(x;y) \in P \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases} \qquad Q = \{a;b\} \times \{a;b\} \text{ — универсальное отношение},$$

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ. **Конгруэнция** T_φ имеет вид

$$T_\varphi = \{(0;0),\ (0;2),\ (2;0),\ (2;2),\ (1;1),\ (1;3),\ (3;1),\ (3;3)\}.$$

Классы **эквивалентных** по R_φ элементов таковы $\{0;2\}$, $\{1;3\}$. Алгебраическая факторсистема имеет вид

$$\mathcal{A}/R_\varphi = \langle \{\{0;2\},\ \{1;3\}\},\ \{f',g'\},\ \{P'\}\rangle,$$

где

$f'(x';y')$		
$y'\backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{1;3\}$	$\{1;3\}$	$\{0;2\}$

$g'(x';y')$		
$y'\backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{0;2\}$
$\{1;3\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$

$$P' = \{\{0;2\},\ \{1;3\}\} \times \{\{0;2\},\ \{1;3\}\}.$$

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\},\{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases}$ $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$f'(x';y')$		
$y'\backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{1;3\}$	$\{1;3\}$	$\{0;2\}$

$g'(x';y')$		
$y'\backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{0;2\}$
$\{1;3\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$

$P' = \{\{0;2\},\ \{1;3\}\} \times \{\{0;2\},\ \{1;3\}\}$.

Таблицы для f' и g' с точностью до обозначений совпадают с таблицами для u и v, аналогично и для отношений P' и Q. Поэтому функция ε, заданная таблицей

x	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$	f'	g'	P'
x^ε	a	b	u	v	Q

является **взаимно однозначным** **гомоморфизмом**, более того,

Задача 21. $\mathcal{A} = \langle \{0;1;2;3\},\ \{f;g\},\ \{P\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{a;b\},\{u;v\},\ \{Q\}\rangle$, где

$(x;y) \in P \Leftrightarrow \begin{cases} \{x;y\} \subseteq \{0,1,2,3\}, \\ x \le y, \end{cases}$ $Q = \{a;b\} \times \{a;b\}$ — **универсальное отношение**,

$f(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$g(x;y)$				
$y\backslash x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$u(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	b
b	b	a

$v(x;y)$		
$y\backslash x$	a	b
a	a	a
b	a	b

x	0	1	2	3	f	g	P
x^φ	a	b	a	b	u	v	Q

Проверьте, что функция φ — **сильный гомоморфизм**, найдите конгруэнцию T_φ и $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ.

$f'(x';y')$		
$y'\backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{1;3\}$	$\{1;3\}$	$\{0;2\}$

$g'(x';y')$		
$y'\backslash x'$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$
$\{0;2\}$	$\{0;2\}$	$\{0;2\}$
$\{1;3\}$	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$

$P' = \{\{0;2\},\ \{1;3\}\} \times \{\{0;2\},\ \{1;3\}\}$.

Таблицы для f' и g' с точностью до обозначений совпадают с таблицами для u и v, аналогично и для отношений P' и Q. Поэтому функция ε, заданная таблицей

x	$\{0;2\}$	$\{1;3\}$	f'	g'	P'
x^ε	a	b	u	v	Q

является **взаимно однозначным** **гомоморфизмом**, более того, **изоморфизмом**.

Решение задачи 22.

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha \overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda \overrightarrow{\mathbf{i}} + \mu \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) \in T \ \Leftrightarrow\ \alpha = \lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha \overrightarrow{\mathbf{i}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda \overrightarrow{\mathbf{i}} + \mu \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) \in T \ \Leftrightarrow\ \alpha = \lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность:

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\qquad\qquad\Rightarrow\ \left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\qquad\Rightarrow\ \left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\ \Rightarrow$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\ \Rightarrow\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\qquad\Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\ \Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\\ \\ \\ \end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\qquad\qquad\right)$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\ \Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \\ \\ \end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\qquad\qquad+\qquad\qquad\right)$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\ \Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \\ \\ \end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\qquad\right)$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_1\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_2\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\overrightarrow{\mathbf{j}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_1\overrightarrow{\mathbf{j}}+\qquad\right)$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_1\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_2\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\overrightarrow{\mathbf{j}}+\alpha_2\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma_1\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_1\overrightarrow{\mathbf{j}}+\gamma_2\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_2\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\ \Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\lambda_1,\\ \alpha_2=\lambda_2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\lambda_1,\\ \alpha_2=\lambda_2\end{cases}\Rightarrow\ \alpha_1+\alpha_2=\gamma_1+\gamma_2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\lambda_1,\\ \alpha_2=\lambda_2\end{cases}\Rightarrow\ \alpha_1+\alpha_2=\gamma_1+\gamma_2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left((\alpha_1+\alpha_2)\,\vec{\mathbf{i}}+(\beta_1+\beta_2)\,\vec{\mathbf{j}};\ (\gamma_1+\gamma_2)\,\vec{\mathbf{i}}+(\delta_1+\delta_2)\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\gamma_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

$$\Rightarrow\ \left(\lambda\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right);\qquad\right)$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

$$\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\lambda\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right);\qquad\right)$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

$$\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\lambda\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right);\ \lambda\left(\gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\right)$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

$$\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\lambda\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right);\ \lambda\left(\gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\gamma_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

$$\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha_1=\gamma_1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\lambda\left(\alpha_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right);\ \lambda\left(\gamma_1\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\delta_1\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Проверим, что T — **отношение эквивалентности**.

Рефлексивность: $\alpha=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$

Симметричность:

$$\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\alpha\ \Rightarrow\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Транзитивность:

$$\begin{cases}\left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\lambda\,\vec{\mathbf{i}}+\mu\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \lambda=\gamma\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=\gamma\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{\mathbf{i}}+\beta\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma\,\vec{\mathbf{i}}+\delta\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

Конгруэнция:

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_1\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T,\\ \left(\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\ \lambda_2\,\vec{\mathbf{i}}+\mu_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\alpha_2\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_2\,\vec{\mathbf{j}};\gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}+\gamma_2\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_2\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T.$$

$$\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}};\ \gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Rightarrow\ \alpha_1=\gamma_1\ \Rightarrow\ \lambda\alpha_1=\lambda\gamma_1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\lambda\left(\alpha_1\,\vec{\mathbf{i}}+\beta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right);\ \lambda\left(\gamma_1\,\vec{\mathbf{i}}+\delta_1\,\vec{\mathbf{j}}\right)\right)\in T.$$

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Каждый класс **эквивалентных** элементов может быть представлен как

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Каждый класс **эквивалентных** элементов может быть представлен как множество радиусов-векторов точек на прямой, параллельной оси ординат.

Задача 22. На двумерном пространстве V геометрических векторов **отношение** T определено правилом:

$$\left(\alpha\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\beta\,\overrightarrow{\mathbf{j}};\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{j}}\right)\in T\ \Leftrightarrow\ \alpha=\lambda.$$

Докажите, что T — **конгруэнция**. Найдите **фактор-алгебру** V/T.

Ответ. Каждый класс **эквивалентных** элементов может быть представлен как множество радиусов-векторов точек на прямой, параллельной оси ординат.
Операция может быть представлена как суммирование чисел — точек пересечения оси абсцисс с прямыми, параллельными оси ординат.

Решение задачи 23.

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{ \qquad \right\}$,

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{ 2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$,

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,
Докажем, что I — это **идеал**:

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{ 2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$,
Докажем, что I — это **идеал**:
$m \cdot I =$

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,
Докажем, что I — это **идеал**:
$m \cdot I = m \cdot \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} =$

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Докажем, что I — это **идеал**:

$m \cdot I = m \cdot \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{2mn \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} =$

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \Big\{2n \,\Big|\, n \in \mathbb{Z}\Big\}$,

Докажем, что I — это **идеал**:

$m \cdot I = m \cdot \Big\{2n \,\Big|\, n \in \mathbb{Z}\Big\} = \Big\{2mn \,\Big|\, n \in \mathbb{Z}\Big\} = \Big\{2(mn) \,\Big|\, n \in \mathbb{Z}\Big\} \subseteq I.$

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**:

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \{I, 3+I\} = \ldots =$

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \ldots = \left\{\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \left\{\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

	$X \oplus Y$	
$X \backslash Y$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \left\{\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

	$X \oplus Y$		$X \odot Y$	
$X \backslash Y$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

Задача 23. Покажите, что в кольце целых чисел множество D четных чисел является носителем **идеала**. Найдите **фактор-кольцо** кольца целых чисел по этому идеалу. Покажите, что это **фактор-кольцо** изоморфно полю $GF(2)$, с носителем $\{0;\ 1\}$ в котором операции «сложение» $\boxed{+}$ и «умножение» $\boxed{\cdot}$ заданы таблицами

$\boxed{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxed{\cdot}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ответ. $I = \left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$,

Носитель **фактор-системы**: $\{I, 1+I\} = \left\{\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \left\{2n+1 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$.

	$X \oplus Y$		$X \odot Y$	
$X \backslash Y$	$\left\{2n \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\left\{2n+1 \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{2n+1 \,\middle\|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

Эти таблицы с точностью до обозначений совпадают с таблицами для $\boxed{+}$ и $\boxed{\cdot}$, что доказывает изоморфность этих алгебр.

Решение задачи 24.

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \in K,$

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \in K,$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \in K,$

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \in K,$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \in K,$

следовательно, $\cdot$ и $+$ действительно являются **операциями** на множестве K.

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Выполнение **аксиом кольца** следует из **свойств сложения** и **умножения матриц**.

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Проверим, что множество I «устойчиво относительно умножения» на элементы из K.

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Проверим, что множество I «устойчиво относительно умножения» на элементы из K.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} =$$

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Проверим, что множество I «устойчиво относительно умножения» на элементы из K.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma+\beta\gamma & \alpha\gamma+\beta\gamma \\ \beta\gamma+\alpha\gamma & \beta\gamma+\alpha\gamma \end{pmatrix}$$

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Покажем, что I — **идеал** в K.

Ясно, что I — полугруппа относительно операции сложения.

Проверим, что множество I «устойчиво относительно умножения» на элементы из K.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma+\beta\gamma & \alpha\gamma+\beta\gamma \\ \beta\gamma+\alpha\gamma & \beta\gamma+\alpha\gamma \end{pmatrix} \in I.$$

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Образ сложения и умножения зададим формулами:

$$(X + I) + (Y + I) =$$

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Образ сложения и умножения зададим формулами:

$$(X + I) + (Y + I) = (X + Y) + I,$$

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Образ сложения и умножения зададим формулами:

$$(X + I) + (Y + I) = (X + Y) + I, \quad (X + I) \cdot (Y + I) =$$

Задача 24. Пусть $GF(2)$ — кольцо (поле) вычетов по модулю 2, т.е. операции в этом поле заданы таблицами

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

. Проверьте, что кольцом является алгебра матриц с носителем $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \{\alpha;\beta\} \subseteq GF(2) \right\}$, с обычными операциями сложения и умножения матриц (с учетом специфики умножения в $GF(2)$). Покажите, что множество $I = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \middle| \gamma \in GF(2) \right\}$ является носителем идеала в K. Найдите **фактор-кольцо** K/I.

Ответ. Осталось найти **фактор-кольцо**.

Носитель составляют множества:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Образ сложения и умножения зададим формулами:

$$(X + I) + (Y + I) = (X + Y) + I, \quad (X + I) \cdot (Y + I) = (X \cdot Y) + I.$$

Решение задачи 25.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x, y\}$				
$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\}\rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle\{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\}\rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^\varphi = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^\varphi = \min$, $\tilde{\bullet}^\varphi = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x, y\}$				
$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x, y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$\min\{x^\varphi, y^\varphi\}$		
$x^\varphi \backslash y^\varphi$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$\min\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\}$		
$x^{\varphi} \backslash y^{\varphi}$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^{\varphi}}$		
x^{φ}	1	-1
$\widehat{x^{\varphi}}$	-1	1

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^{\varphi}$				
$x^{\varphi} \backslash y^{\varphi}$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\min\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\}$		
$x^{\varphi} \backslash y^{\varphi}$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

	$\widehat{x^{\varphi}}$	
x^{φ}	1	-1
$\widehat{x^{\varphi}}$	-1	1

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\}\rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle\{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\}\rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^\varphi = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^\varphi = \min$, $\tilde{\bullet}^\varphi = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^\varphi$				
$x^\varphi\backslash y^\varphi$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\max\{x,y\}$				
x^φ	1	1	-1	-1
$(\tilde{x})^\varphi$	-1	-1	1	1

,

$\min\{x^\varphi, y^\varphi\}$		
$x^\varphi\backslash y^\varphi$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^\varphi}$		
x^φ	1	-1
$\widehat{x^\varphi}$	-1	1

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\}\rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle\{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\}\rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^{\varphi}$				
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\max\{x,y\}$				
x^{φ}	1	1	-1	-1
$(\tilde{x})^{\varphi}$	-1	-1	1	1

,

$\min\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\}$		
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^{\varphi}}$		
x^{φ}	1	-1
$\widehat{x^{\varphi}}$	-1	1

Соответствующие таблицы совпадают с точностью до перестановки и дублирования строк и столбцов.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\}\rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle\{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\}\rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^{\varphi}$				
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\max\{x,y\}$				
x^{φ}	1	1	-1	-1
$(\tilde{x})^{\varphi}$	-1	-1	1	1

,

$\min\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\}$		
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^{\varphi}}$		
x^{φ}	1	-1
$\widehat{x^{\varphi}}$	-1	1

Соответствующие таблицы совпадают с точностью до перестановки и дублирования строк и столбцов.

Значит, φ — это гомоморфизм.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$(\max\{x, y\})^{\varphi} =$

$= \max^{\varphi} \{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] =$$

$$= \max^{\varphi}\left\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\right\},$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] =$$

$$= \max^{\varphi}\left\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\right\},$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b$$

$$= \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\left\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\right\},$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b$$

$$= \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\left\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\right\},$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b$$

$$\min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} =$$

$$= \widehat{x^{\varphi}}.$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{3 - x}{2}\right] =$$

$$= \widehat{x^{\varphi}}.$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{3 - x}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{3 - 2a - p}{2}\right] =$$

$$= \widehat{x^{\varphi}}.$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{3 - x}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{3 - 2a - p}{2}\right] = 1 - 2(a - 1) =$$

$$= \widehat{x^{\varphi}}.$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{3 - x}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{3 - 2a - p}{2}\right] = 1 - 2(a - 1) = 2a - 1$$

$$= \widehat{x^{\varphi}}.$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{3 - x}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{3 - 2a - p}{2}\right] = 1 - 2(a - 1) = 2a - 1$$

$$= -\left(1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]\right) = \widehat{x^{\varphi}}.$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{3 - x}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{3 - 2a - p}{2}\right] = 1 - 2(a - 1) = 2a - 1$$

$$= -\left(1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right]\right) = -\left(1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]\right) = \widehat{x^{\varphi}}.$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{3 - x}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{3 - 2a - p}{2}\right] = 1 - 2(a - 1) = 2a - 1$$

$$-(1 - 2a) = -\left(1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right]\right) = -\left(1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]\right) = \widehat{x^{\varphi}}.$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{3 - x}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{3 - 2a - p}{2}\right] = 1 - 2(a - 1) = 2a - 1 =$$

$$= -(1 - 2a) = -\left(1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right]\right) = -\left(1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]\right) = \widehat{x^{\varphi}}.$$

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Пусть $x = 2a + p$, где $p \in \{0;\ 1\}$, $y = 2b + q$, где $q \in \{0;\ 1\}$.
Не ограничивая общности рассуждений можно считать, например, что $a < b$.

$$(\max\{x, y\})^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{\max\{x, y\}}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{\max\{2a + p, 2b + q\}}{2}\right] = 1 - 2b =$$

$$= \min\{1 - 2a, 1 - 2b\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{2b + q}{2}\right]\right\} = \min\left\{1 - 2\left[\frac{x}{2}\right], 1 - 2\left[\frac{y}{2}\right]\right\} =$$

$$= \max^{\varphi}\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\},$$

$$\tilde{x}^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{3 - x}{2}\right] = 1 - 2\left[\frac{3 - 2a - p}{2}\right] = 1 - 2(a - 1) = 2a - 1 =$$

$$= -(1 - 2a) = -\left(1 - 2\left[\frac{2a + p}{2}\right]\right) = -\left(1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]\right) = \widehat{x^{\varphi}}.$$

Значит, φ — гомоморфизм.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\}\rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle\{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\}\rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^\varphi = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^\varphi = \min$, $\tilde{\bullet}^\varphi = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^\varphi$				
$x^\varphi\backslash y^\varphi$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\max\{x,y\}$				
x^φ	1	1	-1	-1
$(\tilde{x})^\varphi$	-1	-1	1	1

,

$\min\{x^\varphi, y^\varphi\}$		
$x^\varphi\backslash y^\varphi$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^\varphi}$		
x^φ	1	-1
$\widehat{x^\varphi}$	-1	1

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi :\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^{\varphi}$				
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\max\{x,y\}$				
x^{φ}	1	1	-1	-1
$(\tilde{x})^{\varphi}$	-1	-1	1	1

,

$\min\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\}$		
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^{\varphi}}$		
x^{φ}	1	-1
$\widehat{x^{\varphi}}$	-1	1

Построим фактор-систему.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\}\rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle\{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\}\rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^\varphi = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^\varphi = \min$, $\tilde{\bullet}^\varphi = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_\varphi$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^\varphi$				
$x^\varphi\backslash y^\varphi$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\max\{x,y\}$				
x^φ	1	1	-1	-1
$(\tilde{x})^\varphi$	-1	-1	1	1

,

$\min\{x^\varphi, y^\varphi\}$		
$x^\varphi\backslash y^\varphi$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^\varphi}$		
x^φ	1	-1
$\widehat{x^\varphi}$	-1	1

x	0	1	2	3
x^φ	1	1	-1	-1

,

Построим фактор-систему.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^{\varphi}$				
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\max\{x,y\}$				
x^{φ}	1	1	-1	-1
$(\tilde{x})^{\varphi}$	-1	-1	1	1

,

$\min\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\}$		
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^{\varphi}}$		
x^{φ}	1	-1
$\widehat{x^{\varphi}}$	-1	1

x	0	1	2	3
x^{φ}	1	1	-1	-1

,

$C\backslash D$	$\{0;\ 1\}$	$\{2;\ 3\}$
$\{0;\ 1\}$	$\{0;\ 1\}$	$\{2;\ 3\}$
$\{2;\ 3\}$	$\{2;\ 3\}$	$\{2;\ 3\}$

,

Построим фактор-систему.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^{\varphi}$				
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\max\{x,y\}$				
x^{φ}	1	1	-1	-1
$(\tilde{x})^{\varphi}$	-1	-1	1	1

,

$\min\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\}$		
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^{\varphi}}$		
x^{φ}	1	-1
$\widehat{x^{\varphi}}$	-1	1

x	0	1	2	3
x^{φ}	1	1	-1	-1

,

$C\backslash D$	$\{0;\ 1\}$	$\{2;\ 3\}$
$\{0;\ 1\}$	$\{0;\ 1\}$	$\{2;\ 3\}$
$\{2;\ 3\}$	$\{2;\ 3\}$	$\{2;\ 3\}$

,

C	$\{0;\ 1\}$	$\{2;\ 3\}$
C'	$\{2;\ 3\}$	$\{0;\ 1\}$

.

Построим фактор-систему.

Задача 25. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A} = \langle \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}, \{\max, \tilde{x}\} \rangle$, где $\tilde{x} = 3 - x$, $\mathcal{B} = \langle \{-1;\ 1\}, \{\max, \hat{x}\} \rangle$, где $\hat{x} = -x$, и отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, определенное формулами: $x^{\varphi} = 1 - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t), $\max^{\varphi} = \min$, $\tilde{\bullet}^{\varphi} = \hat{\bullet}$. Проверьте, что φ — гомоморфизм, найдите фактор-систему $\mathcal{A}/T_{\varphi}$.

Ответ. Сначала решим задачу перебором.

$\max\{x,y\}$				
$x\backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

$\max\{x,y\}$				
x	0	1	2	3
$\tilde{x}$	3	2	1	0

$(\max\{x,y\})^{\varphi}$				
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

,

$\max\{x,y\}$				
x^{φ}	1	1	-1	-1
$(\tilde{x})^{\varphi}$	-1	-1	1	1

,

$\min\{x^{\varphi}, y^{\varphi}\}$		
$x^{\varphi}\backslash y^{\varphi}$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	-1

,

$\widehat{x^{\varphi}}$		
x^{φ}	1	-1
$\widehat{x^{\varphi}}$	-1	1

x	0	1	2	3
x^{φ}	1	1	-1	-1

,

$C\backslash D$	$\{0;\ 1\}$	$\{2;\ 3\}$
$\{0;\ 1\}$	$\{0;\ 1\}$	$\{2;\ 3\}$
$\{2;\ 3\}$	$\{2;\ 3\}$	$\{2;\ 3\}$

,

C	$\{0;\ 1\}$	$\{2;\ 3\}$
C'	$\{2;\ 3\}$	$\{0;\ 1\}$

.

Фактор-система построена.

Решение задачи 26.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.
Ответ. Пусть носитель исходной группы имеет вид $G = \{a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}$.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть носитель исходной группы имеет вид $G = \{a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}$.

Конгруэнция — это отношение эквивалентности. Согласно **критерию отношения эквивалентности** нам достаточно указать классы **эквивалентных** элементов.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть носитель исходной группы имеет вид $G = \{a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}$.

Конгруэнция — это отношение эквивалентности. Согласно **критерию отношения эквивалентности** нам достаточно указать классы **эквивалентных** элементов.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** рассмотрим класс, содержащий «особый» элемент, в данном случае — элемент

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть носитель исходной группы имеет вид $G = \{a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}$.

Конгруэнция — это отношение эквивалентности. Согласно **критерию отношения эквивалентности** нам достаточно указать классы **эквивалентных** элементов.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** рассмотрим класс, содержащий «особый» элемент, в данном случае — элемент $e = a^0$.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.
Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$. Пусть $C' = \{a^k,\ a^m\}$, то $(a^k;\ a^m) \in T$. Следовательно, по **определению конгруэнции**,

$$\begin{cases} (a^k;\ a^m) \in T, \\ (a^{-k};\ a^{-k}) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$. Пусть $C' = \{a^k,\ a^m\}$, то $(a^k;\ a^m) \in T$. Следовательно, по **определению конгруэнции**,

$$\begin{cases} (a^k;\ a^m) \in T, \\ (a^{-k};\ a^{-k}) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^{k-k};\ a^{m-k}) \in T.$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$. Пусть $C' = \{a^k,\ a^m\}$, то $(a^k;\ a^m) \in T$. Следовательно, по **определению конгруэнции**,

$$\begin{cases} (a^k;\ a^m) \in T, \\ (a^{-k};\ a^{-k}) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^{m-k}) \in T.$$ Поэтому $a^{m-k} \in C_0 = \{a^0\}$.

Следовательно, $m - k = 0$, т.е. $a^k = a^m$.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$. Пусть $C' = \{a^k,\ a^m\}$, то $(a^k;\ a^m) \in T$. Следовательно, по **определению конгруэнции**,

$$\begin{cases} (a^k;\ a^m) \in T, \\ (a^{-k};\ a^{-k}) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^{m-k}) \in T.$$ Поэтому $a^{m-k} \in C_0 = \{a^0\}$.

Следовательно, $m - k = 0$, т.е. $a^k = a^m$.

Таким образом, все классы являются одноэлементными.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Следовательно, если $C_0 = \{e\} = \{a^0\}$, то конгруэнция T — это отношение равенства.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.
Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow .$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a^m;\ a^{2m}) \in T.$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \leq r < m$. Тогда, согласно **определению конгруэнции**

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \leq r < m$. Тогда, согласно **определению конгруэнции**

$\begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^6;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \leq r < m$. Тогда, согласно **определению конгруэнции**

$\begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^6;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^0;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \leq r < m$. Тогда, согласно **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^6;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^0;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \left(a^0 \cdot a^0;\ a^{-km} \cdot a^{km+r}\right) \in T,$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \leq r < m$. Тогда, согласно **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^6;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^0;\ a^{-km}\right) \in T, \\ \left(a^0;\ a^{km+r}\right) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^r) \in T,$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Следовательно, m делит нацело число 6.

В самом деле, пусть $6 = mk + r$, где r — остаток от деления на m, в частности, $0 \leq r < m$. Тогда, согласно **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^{-km}) \in T, \\ (a^6;\ a^{km+r}) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^0;\ a^{-km}) \in T, \\ (a^0;\ a^{km+r}) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^r) \in T$, что противоречит минимальности выбора m.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции**

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**
$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**
$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a^2;\ a^2 \cdot a^2) \in T$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**
$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T.$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**
$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T.$ Из **транзитивности** T следует, что

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T.$ Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow .$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**
$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T.$ Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**
$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**
$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,$
$\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a;\ a^2 \cdot a) \in T.$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**
$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3$
$\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a;\ a^2 \cdot a) \in T.$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3$

$\begin{cases} (a^0;\ a^4) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a;\ a^4 \cdot a) \in T.$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Пусть $C_0 = \{e,\ a^m\} = \{a^0,\ a^m\}$. Можно считать, что m — минимальное натуральное число со свойством $(a^0,\ a^m) \in T$.

По **определению конгруэнции**
$\begin{cases} (a^0;\ a^m) \in T, \\ (a^m;\ a^m) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^m;\ a^{2m}) \in T.$ Продолжая этот процесс, получаем, что $\{a^0,\ a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\}$. Мы доказали, что m делит нацело число 6.

У числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Ситуации с делителями 1 и 6 мы уже рассмотрели.

Если $a^2 \in C_0$, то по **определению конгруэнции** $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^2;\ a^4) \in T$. Из **транзитивности** T следует, что $\begin{cases} (a^0;\ a^2) \in T, \\ (a^2;\ a^4) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0;\ a^4) \in T.$

Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $\quad C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$.

$\begin{cases} (a^0;\ a^4) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a^0 \cdot a;\ a^4 \cdot a) \in T.$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$		
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$		
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$		

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Итак, $C_0 = \{a^0,\ a^2,\ a^4\}$, $C_1 = \{a,\ a^3,\ a^5\}$. Индуцированную операцию зададим таблицей Кэли

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$
$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a,\ a^3,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^2,\ a^4\}$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.
Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$. Тогда

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.
Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$. Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}$,

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,$

По **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^3) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a^0 \cdot a;\ a^3 \cdot a) \in T.$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,$

По **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^3) \in T, \\ (a;\ a) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a;\ a^4) \in T.$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,$

По **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^3) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a^0 \cdot a^2;\ a^3 \cdot a^2) \in T.$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

По **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (a^0;\ a^3) \in T, \\ (a^2;\ a^2) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a^2;\ a^5) \in T.$$

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$			
$\{a,\ a^4\}$			
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$		
$\{a,\ a^4\}$			
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	
$\{a,\ a^4\}$			
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$			
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$		
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$
$\{a^2,\ a^5\}$			

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$
$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^2,\ a^5\}$		

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$
$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	

Задача 26. Найти все **фактор-группы** циклической группы порядка 6.

Ответ. Остался последний случай: $a^3 \in C_0$.

Тогда $C_0 = \{a^0,\ a^3\}, \quad C_1 = \{a,\ a^4\}, \quad C_2 = \{a^2,\ a^5\}$

Операцию зададим таблицей Кэли:

$C_i * C_j$

$C_i \backslash C_j$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$
$\{a,\ a^4\}$	$\{a,\ a^4\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$
$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^2,\ a^5\}$	$\{a^0,\ a^3\}$	$\{a,\ a^4\}$

Решение задачи 27.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид:

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»**.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент»

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными. Действительно, во-первых, в одном классе **эквивалентных** элементов не могут быть элементы a и b, иначе в этот же класс попал бы элемент $\{a, b\}$.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными. Значит, во-вторых, в неодноэлементный класс должен попасть элемент $\emptyset$ и, допустим, a.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными. Значит, во-вторых, в неодноэлементный класс должен попасть элемент $\emptyset$ и, допустим, a. Тогда $\emptyset \cap \{b\} = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \{\emptyset,\ \{a\}\}$, но

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными. Значит, во-вторых, в неодноэлементный класс должен попасть элемент $\emptyset$ и, допустим, a. Тогда $\emptyset \cap \{b\} = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \{\emptyset,\ \{a\}\}$, но $\{a\} \cap \{b\} = \{a, b\} \notin \{\emptyset,\ \{a\}\}$, противоречие с **определением конгруэнции**.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Мы доказали, что если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными, т.е данная конгруэнция — это

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Рассмотрим класс **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\emptyset$ или $\{a, b\}$. Выберем, например, $\{a, b\}$.

Мы доказали, что если $C_0 = \{a, b\}$, то все классы **эквивалентных** элементов являются одноэлементными, т.е данная конгруэнция — это отношение равенства.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a, b\}) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \,|\, X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\}, \{a, b\}) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\} \cap \{b\}, \{a, b\} \cap \{b\}) \in T$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \,|\, X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\},\{a,b\}) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\}\cap\{b\},\{a,b\}\cap\{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset,\{b\}) \in T.$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \,|\, X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\},\{a,b\}) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\}\cap\{b\}, \{a,b\}\cap\{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset,\{b\}) \in T.$$

Получили фактор-систему $\mathcal{P}/T$ с индуцированными операциями $\cup'$, $\cap'$, $\overline{}'$

	$C_\alpha \cup' C_\beta$	
$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \,|\, X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\},\{a,b\}) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\}\cap\{b\}, \{a,b\}\cap\{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset,\{b\}) \in T.$$

Получили фактор-систему $\mathcal{P}/T$ с индуцированными операциями $\cup'$, $\cap'$, $\overline{}'$

$C_\alpha \cup' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

$C_\alpha \cap' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\},\{a,b\}) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\}\cap\{b\}, \{a,b\}\cap\{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset,\{b\}) \in T.$$

Получили фактор-систему $\mathcal{P}/T$ с индуцированными операциями $\cup'$, $\cap'$, $\overline{}'$

$C_\alpha \cup' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

$C_\alpha \cap' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

C	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\overline{C}'$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства. Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$.

Если этот класс C_0 включает в себя и элемент $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**,

$$\begin{cases} (\{a\},\{a,b\}) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\}\cap\{b\}, \{a,b\}\cap\{b\}) \in T\ \Rightarrow\ (\emptyset,\{b\}) \in T.$$

Получили фактор-систему $\mathcal{P}/T$ с индуцированными операциями $\cup'$, $\cap'$, $\overline{}'$

$C_\alpha \cup' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

$C_\alpha \cap' C_\beta$

$C_\alpha \backslash C_\beta$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$
$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$

C	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$
$\overline{C}'$	$\{\emptyset,\{b\}\}$	$\{\emptyset,\{b\}\}$

Аналогично получаем изоморфную построенной системе фактор-систему с носителем $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\} \rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 эквивалентных по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\},\{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\},\{a\}) \in T, \\ (\{a\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \,|\, X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\},\{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\},\{a\}) \in T, \\ (\{a\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{a\}, \{a\} \cap \{b\}) \in T \Rightarrow$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \,|\, X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\},\{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\},\{a\}) \in T, \\ (\{a\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (\{a\}\cap\{a\}, \{a\}\cap\{b\}) \in T \ \Rightarrow\ (\{a\},\emptyset) \in T \ \Rightarrow$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \,|\, X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\},\{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\},\{a\}) \in T, \\ (\{a\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{a\}, \{a\} \cap \{b\}) \in T \Rightarrow (\{a\},\emptyset) \in T \Rightarrow (\{a\},\emptyset) \in T \Rightarrow$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \,|\, X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\},\{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\},\{a\}) \in T, \\ (\{a\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{a\}, \{a\} \cap \{b\}) \in T \Rightarrow (\{a\},\emptyset) \in T \Rightarrow (\{a\},\emptyset) \in T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 = \{\{a,b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \emptyset\}.$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \,|\, X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Пусть класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\{b\}$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\},\{b\}) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\},\{a\}) \in T, \\ (\{a\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\} \cap \{a\}, \{a\} \cap \{b\}) \in T \Rightarrow (\{a\},\emptyset) \in T \Rightarrow (\{a\},\emptyset) \in T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 = \{\{a,b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \emptyset\}.$$

Значит, в этом случае конгруэнция является **универсальным отношением**.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруэнции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \emptyset) \in T$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a, b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a, b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a; b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset, \{b\}\},\ \{\{a\}, \{a, b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset, \{a\}\},\ \{\{b\}, \{a, b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруэнции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a, b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\}, \emptyset) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\}, \emptyset) \in T, \\ (\{b\}, \{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруэнции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\},\emptyset) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\},\emptyset) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\}\cup\{b\}, \emptyset\cup\{b\}) \in T \Rightarrow (\{a,b\},\{b\}) \in T \Rightarrow$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруэнции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\},\emptyset) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\},\emptyset) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\}\cup\{b\}, \emptyset\cup\{b\}) \in T \Rightarrow (\{a,b\},\{b\}) \in T \Rightarrow C_0 = \{\{a,b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \emptyset\}.$$

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруэнции — универсальное отношение.

Осталось рассмотреть случай, когда класс C_0 **эквивалентных** по конгруэнции T элементов из $\mathbf{P}$, содержащий «экстремальный элемент» $\{a,b\}$ включает в себя элемент $\{a\}$ и $\emptyset$, то, согласно **определению конгруэнции** и **определению класса эквивалентных элементов**, $(\{a\},\emptyset) \in T$

$$\begin{cases} (\{a\},\emptyset) \in T, \\ (\{b\},\{b\}) \in T \end{cases} \Rightarrow (\{a\}\cup\{b\}, \emptyset\cup\{b\}) \in T \Rightarrow (\{a,b\},\{b\}) \in T \Rightarrow C_0 = \{\{a,b\},\ \{a\},\ \{b\},\ \emptyset\}.$$

Значит, в этом случае конгруэнция является **универсальным отношением**.

Задача 27. Найти все **фактор-алгебры** алгебры всех подмножеств множества $\{a,b\}$: $\mathcal{P} = \langle \{X \mid X \subseteq \{a,b\}\}, \{\cup, \cap, \overline{\ }\}\rangle$.

Ответ. **Носитель** алгебры $\mathcal{P}$ имеет вид: $\mathbf{P} = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a;b\}\Big\}$.

Первый вариант конгруэнции — отношение равенства.

Второй вариант конгруэнции приводит к фактор-системам с носителями $\Big\{\{\emptyset,\{b\}\},\ \{\{a\},\{a,b\}\}\Big\}$ и $\Big\{\{\emptyset,\{a\}\},\ \{\{b\},\{a,b\}\}\Big\}$.

Третий вариант конгруэнции — универсальное отношение.

Решение задачи 28.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число».

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число». Ясно, что «экстремальными» являются числа

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число». Ясно, что «экстремальными» являются числа 0 и 1.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число». Ясно, что «экстремальными» являются числа 0 и 1. Какое из них «экстремальнее»?

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число». Ясно, что «экстремальными» являются числа 0 и 1. Какое из них «экстремальнее»?
Число 0 «ведет» себя необычно и относительно сложения, и относительно умножения.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Ясно, что один из вариантов конгруэнции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруэнции, отличные от отношения равенства.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Ясно, что один из вариантов конгруэнции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруэнции, отличные от отношения равенства.

Значит, есть различные числа m и n такие, что $(m,\ n) \in T$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (m;\ n) \in T, \\ (-m,\ -m) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Ясно, что один из вариантов конгруэнции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруэнции, отличные от отношения равенства.

Значит, есть различные числа m и n такие, что $(m,\ n) \in T$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (m;\ n) \in T, \\ (-m;\ -m) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m-m;\ n-m) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Ясно, что один из вариантов конгруэнции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруэнции, отличные от отношения равенства.

Значит, есть различные числа m и n такие, что $(m,\ n) \in T$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (m;\ n) \in T, \\ (-m;\ -m) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m-m;\ n-m) \in T\ \Rightarrow\ (0, n-m) \in T.$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Ясно, что один из вариантов конгруэнции — отношение равенства. Поэтому рассмотрим конгруэнции, отличные от отношения равенства.

Значит, есть различные числа m и n такие, что $(m,\ n) \in T$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (m;\ n) \in T, \\ (-m;\ -m) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m-m;\ n-m) \in T\ \Rightarrow\ (0, n-m) \in T.$$

Значит, мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Если отрицательное число x принадлежит C_0, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (x;\ 0) \in T \end{cases}$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Если отрицательное число x принадлежит C_0, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (x;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot x;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Если отрицательное число x принадлежит C_0, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (x;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot x;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-x, 0) \in T.$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Если отрицательное число x принадлежит C_0, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (x;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot x;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-x, 0) \in T.$$

Поэтому если в классе C_0 содержится ненулевое число, то в этом классе содержится положительное число.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим $(m+1)$ на $(k+1)$ с остатком:

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $\quad m = pk + r$, где $0 \le r \le k - 1$.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T.$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T.$

Следовательно, по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \le r \le k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T.$

Следовательно, по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \leq r \leq k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T.$

Следовательно, по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \leq r \leq k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$$ но

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \leq r \leq k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$$ но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит,

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \leq r \leq k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$$ но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит, $r = 0$.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T\ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \leq r \leq k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T.$$ Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруэнции**

$$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T\ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$$ но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит, $r = 0$.

Значит, фактор-система представляет собой кольцо вычетов по модулю k, т.е. $(x;\ y) \in T\ \Leftrightarrow\ \Big(\exists p \in \mathbb{Z}\ (x - y = kp)\Big)$. Отношение $<$ индуцирует

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T \Rightarrow (-m, 0) \in T.$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \leq r \leq k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow (kp;\ 0p) \in T$. Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T \Rightarrow (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (m - kp;\ 0) \in T \Rightarrow (r;\ 0) \in T,$ но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит, $r = 0$.

Значит, фактор-система представляет собой кольцо вычетов по модулю k, т.е. $(x;\ y) \in T \Leftrightarrow \Big(\exists p \in \mathbb{Z}\ (x - y = kp)\Big)$. Отношение $<$ индуцирует **универсальное отношение**, т.к.

Задача 28. Найти все **фактор-алгебры** кольца целых чисел с отношением $<$.

Ответ. В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** рассмотрим класс C_0 **эквивалентных** элементов, содержащий «экстремальное число» 0. Мы рассматриваем ситуацию, когда в классе C_0, содержащем 0, имеется хотя бы один ненулевой элемент.

Возьмем минимальное положительное число k, содержащееся в C_0.

Пусть m — произвольное ненулевое число из C_0.

Если $m < 0$, то по **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (-1;\ -1) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ ((-1)\cdot m;\ (-1)\cdot 0) \in T \ \Rightarrow\ (-m, 0) \in T.$

Значит, согласно **определению класса эквивалентных элементов** $(-m) \in C_0$. Итак, можно считать, что m — положительный элемент из C_0.

Разделим m на k с остатком: $m = pk + r$, где $0 \leq r \leq k-1$. Тогда по **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (k;\ 0) \in T, \\ (p;\ p) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (kp;\ 0p) \in T$. Как мы доказали ранее, $(kp;\ 0) \in T \ \Rightarrow\ (-kp;\ 0) \in T$.

Следовательно, по **определению конгруэнции**

$\begin{cases} (-kp;\ 0) \in T, \\ (m;\ 0) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (m - kp;\ 0) \in T \ \Rightarrow\ (r;\ 0) \in T,$ но k — минимальное положительное число с этим свойством. Значит, $r = 0$.

Значит, фактор-система представляет собой кольцо вычетов по модулю k, т.е. $(x;\ y) \in T \ \Leftrightarrow\ \Big(\exists p \in \mathbb{Z}\ (x - y = kp)\Big)$. Отношение $<$ индуцирует **универсальное отношение**, т.к. для любых целых чисел x, y найдется такое целое число q, что $x < y + kp$.

Решение задачи 29.

Задача 29. Постройте конгруэнцию T для **гомоморфизма, созданного** при решении **задачи VII.9**, и фактор-систему $\mathcal{A}/T$.

Задача 29. Постройте конгруэнцию T для **гомоморфизма, созданного** при решении **задачи VII.9**, и фактор-систему $\mathcal{A}/T$.

Ответ. $T = \{(-1;-1)\,,\ (-1;1)\,,\ (1;-1)\,,\ (1;1)\,,\ (i;i)\,,\ (i;-i)\,,\ (-i;i)\,,\ (-i;-i)\}\,.$

Задача 29. Постройте конгруэнцию T для **гомоморфизма, созданного** при решении **задачи VII.9**, и фактор-систему $\mathcal{A}/T$.

Ответ.

$x\backslash y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$

Решение задачи 30.

Задача 30. Найти таблицы Кэли операций $*$ и $+$ для простого поля $\{0, e, a\}$ характеристики 3.

Задача 30. Найти таблицы Кэли операций $*$ и $+$ для простого поля $\{0, e, a\}$ характеристики 3.

Ответ. Таблицы Кэли:

Задача 30. Найти таблицы Кэли операций $*$ и $+$ для простого поля $\{0, e, a\}$ характеристики 3.

Ответ. Таблицы Кэли:

$*$	0	e	a
0	0	0	0
e	0	e	a
a	0	a	e

Задача 30. Найти таблицы Кэли операций $*$ и $+$ для простого поля $\{0, e, a\}$ характеристики 3.

Ответ. Таблицы Кэли:

$*$	0	e	a
0	0	0	0
e	0	e	a
a	0	a	e

$+$	0	e	a
0	0	e	a
e	e	a	0
a	a	0	e

Решение задачи 31.

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Корней у многочлена f в поле P нет: $f(0) = e$, $f(e) = e + e = a$, $f(a) = e * a * a + e = e + e = a$.

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Корней у многочлена f в поле P нет: $f(0) = e$, $f(e) = e + e = a$, $f(a) = e * a * a + e = e + e = a$.

Можно было рассуждать иначе: если $f(x) = 0$ для x из P, то $e * x * x = -e$, то есть $x * x = a$, но мультипликативная группа поля P имеет порядок 2, поэтому $x^2 = e$ для любого x из P.

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять $\{e, b\}$.

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять $\{e, b\}$.

Поэтому любой элемент поля F представим в виде $u * e + v * b$, где u, v принадлежат множеству $\{0, e, a\}$.

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять $\{e, b\}$.

Поэтому любой элемент поля F представим в виде $u * e + v * b$, где u, v принадлежат множеству $\{0, e, a\}$.

Так как $e * b^2 + e = 0$, то $e * b^2 = -e = a$, откуда $b * b = a$.

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять $\{e, b\}$.

Поэтому любой элемент поля F представим в виде $u * e + v * b$, где u, v принадлежат множеству $\{0, e, a\}$.

Имеем $b * b = a$. Сначала зададим операции формулами:

$$(\alpha + \beta * b) + (\gamma + \delta * b) =$$

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять $\{e, b\}$.

Поэтому любой элемент поля F представим в виде $u * e + v * b$, где u, v принадлежат множеству $\{0, e, a\}$.

Имеем $b * b = a$. Сначала зададим операции формулами:

$$(\alpha + \beta * b) + (\gamma + \delta * b) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) * b,$$

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять $\{e, b\}$.

Поэтому любой элемент поля F представим в виде $u * e + v * b$, где u, v принадлежат множеству $\{0, e, a\}$.

Имеем $b * b = a$. Сначала зададим операции формулами:

$$(\alpha + \beta * b) + (\gamma + \delta * b) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) * b,$$

$(\alpha+\beta*b)*(\gamma+\delta*b) =$

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять $\{e, b\}$.

Поэтому любой элемент поля F представим в виде $u * e + v * b$, где u, v принадлежат множеству $\{0, e, a\}$.

Имеем $b * b = a$. Сначала зададим операции формулами:

$$(\alpha + \beta * b) + (\gamma + \delta * b) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) * b,$$

$(\alpha+\beta*b)*(\gamma+\delta*b) = \alpha*\gamma+(\alpha*\delta+\beta*\gamma)*b+\beta*\delta*b^2 =$

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять $\{e, b\}$.

Поэтому любой элемент поля F представим в виде $u * e + v * b$, где u, v принадлежат множеству $\{0, e, a\}$.

Имеем $b * b = a$. Сначала зададим операции формулами:

$$(\alpha + \beta * b) + (\gamma + \delta * b) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) * b,$$

$$(\alpha+\beta*b)*(\gamma+\delta*b) = \alpha*\gamma+(\alpha*\delta+\beta*\gamma)*b+\beta*\delta*b^2 = (\alpha*\gamma+\beta*\delta*a)+(\alpha*\delta+\beta*\gamma)*b.$$

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Обозначим через b корень многочлена $e * x^2 + e = 0$ в некотором расширении поля P. Характеристика поля равна 3, размерность искомого поля F, как линейного пространства над P, равна 2, в качестве базиса можно взять $\{e, b\}$.

Поэтому любой элемент поля F представим в виде $u * e + v * b$, где u, v принадлежат множеству $\{0, e, a\}$.

Имеем $b * b = a$. Зададим операции таблицами. Введем обозначения:

вектор	e	b	a	$a * b$	$e + b$	$a + b$	$e + a * b$	$a + a * b$
обозначение	e	b	a	c	d	k	m	n

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ.

вектор	e	b	a	$a*b$	$e+b$	$a+b$	$e+a*b$	$a+a*b$
обозначение	e	b	a	c	d	k	m	n

Используя правила умножения многочленов (смотря на выражение $u * e + v * b$ как на многочлен от u, v, причем $b * b = a$), получим таблицу Кэли для $*$.
Например, $a * c = a * a * b = e * b = b$, $a * d = a * (e + b) = a + a * b = n$ Таким образом, с учетом

$$b^2 = a, \qquad a * b^2 = a * a = e$$

имеем

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ.

вектор	e	b	a	$a*b$	$e+b$	$a+b$	$e+a*b$	$a+a*b$
обозначение	e	b	a	c	d	k	m	n

Таким образом, с учетом $b^2 = a$, $2b^2 = e$ имеем

$*$	0	e	a	b	c	d	k	m	n
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	e	a	b	c	d	k	m	n
a	0	a	e	c	b	n	m	k	d
b	0	b	c	a	e	k	n	d	m
c	0	c	b	e	a	m	d	n	k
d	0	d	n	k	m	c	e	a	b
k	0	k	m	n	d	e	b	c	a
m	0	m	k	d	n	a	c	b	e
n	0	n	d	m	k	b	a	e	c

Задача 31. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e$ неприводим над полем $P = \{0, e, a\}$ из примера XVII.30. Найти простое расширение поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ.

вектор	e	b	a	$a*b$	$e+b$	$a+b$	$e+a*b$	$a+a*b$
обозначение	e	b	a	c	d	k	m	n

Таким образом, с учетом $b^2 = a$, $2b^2 = e$ имеем

$*$	0	e	a	b	c	d	k	m	n
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	e	a	b	c	d	k	m	n
a	0	a	e	c	b	n	m	k	d
b	0	b	c	a	e	k	n	d	m
c	0	c	b	e	a	m	d	n	k
d	0	d	n	k	m	c	e	a	b
k	0	k	m	n	d	e	b	c	a
m	0	m	k	d	n	a	c	b	e
n	0	n	d	m	k	b	a	e	c

$+$	0	e	a	b	c	d	k	m	n
0	0	e	a	b	c	d	k	m	n
e	e	a	0	e	k	n	b	n	c
a	a	0	e	k	n	b	d	c	m
b	b	d	k	c	0	m	n	e	a
c	c	m	n	0	b	e	a	d	k
d	d	k	b	m	e	n	c	a	0
k	k	b	d	n	a	c	m	0	e
m	m	n	c	e	d	a	0	k	b
n	n	c	m	a	k	0	e	b	d

Решение задачи 32.

Задача 32. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Задача 32. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ. $f(a) = e + a = 0$, следовательно,

Задача 32. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ. $f(a) = e + a = 0$, следовательно, f делится на $x - a = e * x + e$:

Задача 32. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ. $f(a) = e + a = 0$, следовательно, f делится на $x - a = e * x + e$:

$$
\begin{array}{rrr|l}
e*x^4 & & +a & e*x+e \\
\cline{4-4}
e*x^4+e*x^3 & & & e*x^3+a*x^2+e*x+a \\
\cline{1-2}
a*x^3 & & +a & \\
a*x^3+a*x^2 & & & \\
\cline{2-3}
e*x^2 & & +a & \\
e*x^2+e*x & & & \\
\cline{3-3}
a*x & & +a & \\
a*x & & +a & \\
\cline{4-4}
0 & & &
\end{array}
$$

Задача 32. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ. $f(a) = e + a = 0$, следовательно, f делится на $x - a = e * x + e$:

$$
\begin{array}{rr|l}
e * x^4 & +a & e * x + e \\
\cline{3-3}
e * x^4 + e * x^3 & & e * x^3 + a * x^2 + e * x + a \\
\cline{1-2}
a * x^3 & +a & \\
a * x^3 + a * x^2 & & \\
\cline{1-2}
e * x^2 & +a & \\
e * x^2 + e * x & & \\
\cline{1-2}
a * x & +a & \\
a * x & +a & \\
\cline{1-2}
0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|l}
e * x^3 + a * x^2 + e * x & +a & e * x + a \\
\cline{3-3}
e * x^3 + a * x^2 & & e * x^2 + e \\
\cline{1-2}
e * x & +a & \\
e * x & +a & \\
\cline{1-2}
0 & &
\end{array}
$$

Задача 32. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ. $f(a) = e + a = 0$, следовательно, f делится на $x - a = e * x + e$:

$$\begin{array}{r|l} e*x^3 + a*x^2 + e*x + a & e*x + a \\ \cline{2-2} e*x^3 + a*x^2 & e*x^2 + e \\ \cline{1-1} e*x + a & \\ e*x + a & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Заметим, что $e * x^2 + e$ — многочлен из **примера XVIII.31**. Итак,

$$e * x^4 + a =$$

Задача 32. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ. $f(a) = e + a = 0$, следовательно, f делится на $x - a = e * x + e$:

$$\begin{array}{r|l} e*x^3 + a*x^2 + e*x + a & e*x + a \\ \cline{2-2} e*x^3 + a*x^2 & e*x^2 + e \\ \cline{1-1} e*x + a & \\ e*x + a & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Заметим, что $e * x^2 + e$ — многочлен из **примера XVIII.31**. Итак,

$$e * x^4 + a = (x + e) * (x + a) * (e * x^2 + e),$$

Задача 32. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ. $f(a) = e + a = 0$, следовательно, f делится на $x - a = e * x + e$:

$$\begin{array}{r|l} e*x^3 + a*x^2 + e*x + a & e*x + a \\ \cline{2-2} e*x^3 + a*x^2 & e*x^2 + e \\ \cline{1-1} e*x + a & \\ e*x + a & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Заметим, что $e * x^2 + e$ — многочлен из **примера XVIII.31**. Итак,

$$e * x^4 + a = (x + e) * (x + a) * (e * x^2 + e),$$

и применяем результат **примера XVIII.31**.

Решение задачи 33.

Задача 33. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Задача 33. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ. $f(a) = 0$, следовательно $f(x)$ делится на $x - a = e * x + e$. Имеем:

Задача 33. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ.

$$
\begin{array}{r|l}
e*x^4+a*x^3+a*x^2+a*x+e & e*x+e \\
\cline{2-2}
e*x^4+e*x^3 & e*x^3+e*x^2+e*x+e \\
\cline{1-1}
\quad e*x^3+a*x^2+a*x+e & \\
\quad e*x^3+e*x^2 & \\
\cline{1-1}
\quad\quad e*x^2+a*x+e & \\
\quad\quad e*x^2+e*x & \\
\cline{1-1}
\quad\quad\quad e*x+e & \\
\quad\quad\quad e*x+e & \\
\cline{1-1}
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

Задача 33. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e*x^4 + a*x^3 + a*x^2 + a*x + e$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ.

$$
\begin{array}{r|l}
e*x^4+a*x^3+a*x^2+a*x+e & e*x+e \\
\cline{2-2}
e*x^4+e*x^3 & e*x^3+e*x^2+e*x+e \\
\cline{1-1}
e*x^3+a*x^2+a*x+e & \\
e*x^3+e*x^2 & \\
\cline{1-1}
e*x^2+a*x+e & \\
e*x^2+e*x & \\
\cline{1-1}
e*x+e & \\
e*x+e & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
e*x^3+e*x^2+e*x+e & e*x+e \\
\cline{2-2}
e*x^3+e*x^2 & e*x^2+e \\
\cline{1-1}
e*x+e & \\
e*x+e & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Задача 33. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ.

$$\begin{array}{r|l} e*x^3+e*x^2+e*x+e & e*x+e \\ \cline{2-2} e*x^3+e*x^2 & e*x^2+e \\ \cline{1-1} e*x+e & \\ e*x+e & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Таким образом,

$$e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e =$$

Задача 33. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ.

$$\begin{array}{r|l} e*x^3+e*x^2+e*x+e & e*x+e \\ \cline{2-2} e*x^3+e*x^2 & e*x^2+e \\ \cline{1-1} e*x+e & \\ e*x+e & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Таким образом,

$$e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e = (x + e) * (x + e) * (e * x^2 + e),$$

Задача 33. Проверить, является ли многочлен $f(x) = e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e$ неприводимым над полем $P = \{0, e, a\}$. Найти простое расширение поля P, соответствующее многочлену f.

Ответ.

$$\begin{array}{r|l} e*x^3+e*x^2+e*x+e & e*x+e \\ \cline{2-2} e*x^3+e*x^2 & e*x^2+e \\ \cline{1-1} e*x+e & \\ e*x+e & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Таким образом,

$$e * x^4 + a * x^3 + a * x^2 + a * x + e = (x + e) * (x + e) * (e * x^2 + e),$$

и остается применить результат **примера XVIII.31**.

Решение задачи 34.

Задача 34. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ неприводим над полем $P = \{0, e\}$. Найти простое расширение Q поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Задача 34. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ неприводим над полем $P = \{0, e\}$. Найти простое расширение Q поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Так как степень многочлена $f(x)$ равна двум, то, в силу теоремы Безу для того, чтобы убедиться в неприводимости многочлена f, достаточно проверить, что у него в поле P нет корней.

Задача 34. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ неприводим над полем $P = \{0, e\}$. Найти простое расширение Q поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Так как степень многочлена $f(x)$ равна двум, то, в силу теоремы Безу для того, чтобы убедиться в неприводимости многочлена f, достаточно проверить, что у него в поле P нет корней.

Корней действительно нет: $f(0) = e$, $f(e) = e + e + e = e$. Следовательно, f неприводим.

Задача 34. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ неприводим над полем $P = \{0, e\}$. Найти простое расширение Q поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. Так как степень многочлена $f(x)$ равна двум, то, в силу теоремы Безу для того, чтобы убедиться в неприводимости многочлена f, достаточно проверить, что у него в поле P нет корней.

Корней действительно нет: $f(0) = e$, $f(e) = e + e + e = e$. Следовательно, f неприводим.

Пусть a — корень этого многочлена в некотором расширении поля P. Тогда $\{e, a\}$ — максимальная линейно независимая система векторов, поскольку $e * a * a = -e * a - e = e * a + e$ ($e = -e$, так как $e + e = 0$).

Задача 34. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ неприводим над полем $P = \{0, e\}$. Найти простое расширение Q поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. В таблице сложения на диагонали стоят 0, так как характеристика поля равна 2.

Задача 34. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ неприводим над полем $P = \{0, e\}$. Найти простое расширение Q поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. В таблице сложения на диагонали стоят 0, так как характеристика поля равна 2. Заметим, что в любом столбце и в любой строке каждый элемент поля встречается ровно один раз. Теперь нетрудно найти таблицы Кэли.

Задача 34. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ неприводим над полем $P = \{0, e\}$. Найти простое расширение Q поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. В таблице сложения на диагонали стоят 0, так как характеристика поля равна 2. Заметим, что в любом столбце и в любой строке каждый элемент поля встречается ровно один раз. Теперь нетрудно найти таблицы Кэли.

$*$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	b	e
b	0	b	e	a

Задача 34. Проверить, что многочлен $f(x) = e * x^2 + e * x + e$ неприводим над полем $P = \{0, e\}$. Найти простое расширение Q поля P, соответствующее неприводимому многочлену f.

Ответ. В таблице сложения на диагонали стоят 0, так как характеристика поля равна 2. Заметим, что в любом столбце и в любой строке каждый элемент поля встречается ровно один раз. Теперь нетрудно найти таблицы Кэли.

$*$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	b	e
b	0	b	e	a

$+$	0	e	a	b
0	0	e	a	b
e	e	0	b	a
a	a	b	0	e
b	b	a	e	0

Решение задачи 35.

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. Так как поле $GF(2) = \{0;\ 1\}$ имеет **характеристику** 2, то $1 + 1 = 0$, откуда $(-1) = 1$. Значит из $t^3 + t^2 + 1 = 0$ следует, что $t^3 = t^2 + 1$.

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1$,
$t^4 =$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1$,
$t^4 = t^3 + t =$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1$,
$t^4 = t^3 + t = t^2 + 1 + t$,

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1,$
$t^5 =$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1,$
$t^5 = t^3 + t^2 + t =$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1,$
$t^5 = t^3 + t^2 + t = t^2 + 1 + t^2 + t$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1,$
$t^5 = t^3 + t^2 + t = t^2 + 1 + t^2 + t = t + 1,$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1, \quad t^5 = t + 1,$
$t^6 =$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1, \quad t^5 = t + 1,$
$t^6 = t^2 + t,$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1, \quad t^5 = t + 1, \quad t^6 = t^2 + t,$
$t^7 =$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1, \quad t^5 = t + 1, \quad t^6 = t^2 + t,$
$t^7 = t^3 + t^2 =$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1, \quad t^5 = t + 1, \quad t^6 = t^2 + t,$
$t^7 = t^3 + t^2 = t^2 + 1 + t^2$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1, \quad t^5 = t + 1, \quad t^6 = t^2 + t,$
$t^7 = t^3 + t^2 = t^2 + 1 + t^2 = 1.$

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1, \quad t^5 = t + 1, \quad t^6 = t^2 + t, \quad t^7 = 1.$

Результат согласуется с тем, что мультипликативная группа поля $GF(8)$ является цилической и ее порядок должен быть равен

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1, \quad t^5 = t + 1, \quad t^6 = t^2 + t, \quad t^7 = 1.$

Результат согласуется с тем, что мультипликативная группа поля $GF(8)$ является цилической и ее порядок должен быть равен $8 - 1 = 7$.

Задача 35. Найдите таблицы Кэли для расширения поля $GF(2) = \{0;\ 1\}$ с помощью корня t многочлена $x^3 + x^2 + 1$.

Ответ. $t^3 = t^2 + 1, \quad t^4 = t^2 + t + 1, \quad t^5 = t + 1, \quad t^6 = t^2 + t, \quad t^7 = 1.$

	$+$	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	t^2+t+1
	0	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	t^2+t+1
	1	1	0	$t+1$	t	t^2+1	t^2	t^2+t+1	t^2+t
	t	t	$t+1$	0	1	t^2+t	t^2+t+1	t^2	t^2+1
	$t+1$	$t+1$	t	1	0	t^2+t+1	t^2+t	t^2+1	t^2
	t^2	t^2	t^2+1	t^2+t	t^2+t+1	0	1	t	$t+1$
	t^2+1	t^2+1	t^2	t^2+t+1	t^2+t	1	0	$t+1$	t
	t^2+t	t^2+t	t^2+t+1	t^2	t^2+1	t	$t+1$	0	1
	t^2+t+1	t^2+t+1	t^2+t	t^2+1	t^2	$t+1$	t	1	0

			t^0	t^1	t^5	t^2	t^3	t^6	t^4
	$\cdot$	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	t^2+t+1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
t^0	1	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	t^2+t+1
t^1	t	0	t	t^2	t^2+t	t^2+1	t^2+t+1	1	$t+1$
t^5	$t+1$	0	$t+1$	t^2+t	t^2+1	1	t	t^2+t+1	t^2
t^2	t^2	0	t^2	t^2+1	t^2+t+1	0	1	t	$t+1$
t^3	t^2+1	0	t^2+1	t^2+t+1	t^2+t	1	0	$t+1$	t
t^6	t^2+t	0	t^2+t	1	t^2+1	t	$t+1$	0	1
t^4	t^2+t+1	0	t^2+t+1	$t+1$	t^2	$t+1$	t	1	0

Решение задачи 36.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

$$Q = \{0, e, a, b, b + e, b + a, a * b, a * b + e, a * b + a\}\,.$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

$$Q = \{0, e, a, b, b + e, b + a, a * b, a * b + e, a * b + a\}.$$

$$\begin{cases} (b + e)^2 = b^2 + a * b + e = a + a * b + e = a * b, \end{cases}$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

$$Q = \{0, e, a, b, b + e, b + a, a * b, a * b + e, a * b + a\}.$$

$$\begin{cases} (b + e)^2 = b^2 + a * b + e = a + a * b + e = a * b, \\ (b + e)^3 = a * b * (b + e) = a * a + a * b = a * b + e, \end{cases}$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

$$Q = \{0, e, a, b, b + e, b + a, a * b, a * b + e, a * b + a\}.$$

$$\begin{cases} (b + e)^2 = b^2 + a * b + e = a + a * b + e = a * b, \\ (b + e)^3 = a * b * (b + e) = a * a + a * b = a * b + e, \\ (b + e)^4 = (a * b + e) * (b + e) = a * b^2 + a * b + b + e = a, \end{cases}$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

$$Q = \{0, e, a, b, b + e, b + a, a * b, a * b + e, a * b + a\}.$$

$$\begin{cases} (b + e)^2 = b^2 + a * b + e = a + a * b + e = a * b, \\ (b + e)^3 = a * b * (b + e) = a * a + a * b = a * b + e, \\ (b + e)^4 = (a * b + e) * (b + e) = a * b^2 + a * b + b + e = a, \\ (b + e)^5 = a * (b + e) = a * b + a = a * (b + e), \end{cases}$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

$$Q = \{0, e, a, b, b + e, b + a, a * b, a * b + e, a * b + a\}.$$

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a * b + e = a + a * b + e = a * b, \\ (b+e)^3 = a * b * (b+e) = a * a + a * b = a * b + e, \\ (b+e)^4 = (a * b + e) * (b+e) = a * b^2 + a * b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a * (b+e) = a * b + a = a * (b+e), \\ (b+e)^6 = a * (b+e) * (b+e) = a * a * b = b, \end{cases}$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

$$Q = \{0, e, a, b, b + e, b + a, a * b, a * b + e, a * b + a\}.$$

$$\begin{cases} (b + e)^2 = b^2 + a * b + e = a + a * b + e = a * b, \\ (b + e)^3 = a * b * (b + e) = a * a + a * b = a * b + e, \\ (b + e)^4 = (a * b + e) * (b + e) = a * b^2 + a * b + b + e = a, \\ (b + e)^5 = a * (b + e) = a * b + a = a * (b + e), \\ (b + e)^6 = a * (b + e) * (b + e) = a * a * b = b, \\ (b + e)^7 = b * (b + e) = b^2 + b = b + a, \end{cases}$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

$$Q = \{0, e, a, b, b + e, b + a, a * b, a * b + e, a * b + a\}.$$

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a * b + e = a + a * b + e = a * b, \\ (b+e)^3 = a * b * (b+e) = a * a + a * b = a * b + e, \\ (b+e)^4 = (a * b + e) * (b+e) = a * b^2 + a * b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a * (b+e) = a * b + a = a * (b+e), \\ (b+e)^6 = a * (b+e) * (b+e) = a * a * b = b, \\ (b+e)^7 = b * (b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a) * (b+e) = b^2 + b + b * a + a = e. \end{cases}$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ. Мультипликативная группа расширения поля P с помощью элемента b имеет вид:

$$Q = \{0, e, a, b, b + e, b + a, a * b, a * b + e, a * b + a\}.$$

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a * b + e = a + a * b + e = a * b, \\ (b+e)^3 = a * b * (b+e) = a * a + a * b = a * b + e, \\ (b+e)^4 = (a * b + e) * (b+e) = a * b^2 + a * b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a * (b+e) = a * b + a = a * (b+e), \\ (b+e)^6 = a * (b+e) * (b+e) = a * a * b = b, \\ (b+e)^7 = b * (b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a) * (b+e) = b^2 + b + b * a + a = e. \end{cases}$$

В частности, обратным к $(b + e)$ является элемент $(b + e)^7 = b + a$.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Найдем многочлен над P, корнем которого является $(b + e)$.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Найдем многочлен над P, корнем которого является $(b + e)$. *Что надо найти?*

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Найдем многочлен над P, корнем которого является $(b + e)$. *Что надо найти?* Многочлен.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Найдем многочлен над P, корнем которого является $(b + e)$. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?*

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Найдем многочлен над P, корнем которого является $(b + e)$. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* В виде многочлена с коэффициентами из P.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Найдем многочлен над P, корнем которого является $(b + e)$. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* В виде многочлена с коэффициентами из P. *Сведем задач с значениям характеристик и введем переменные.*

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Найдем многочлен над P, корнем которого является $(b + e)$. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* В виде многочлена с коэффициентами из P. *Сведем задач с значениям характеристик и введем переменные.* Многочлен определяется своими коэффициентами.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Во-первых, обозначим, допустим, аргумент многочлена через x,

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Во-первых, обозначим, допустим, аргумент многочлена через x, во-вторых, обозначим коэффициенты многочлена буквами, допустим α (коэффициент перед x) и β (коэффициент перед x^0).

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Итак, надо найти коэффициенты многочлена $x^2 + \alpha * x + \beta$.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Итак, надо найти коэффициенты многочлена $x^2 + \alpha * x + \beta$. *Получим уравнение. Значение какой характеристики вычислим двумя способами?*

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Итак, надо найти коэффициенты многочлена $x^2 + \alpha * x + \beta$. *Получим уравнение. Значение какой характеристики вычислим двумя способами?* По условию искомый многочлен обращается в ноль при $x = b + e$.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

Итак, надо найти коэффициенты многочлена $x^2 + \alpha * x + \beta$. *Получим уравнение. Значение какой характеристики вычислим двумя способами?* По условию искомый многочлен обращается в ноль при $x = b + e$. Из этого условия и определения b получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (b+e)^2 + \alpha*(b+e) + \beta = 0, \\ b^2 + e = 0. \end{cases}$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+e)^2 + \alpha*(b+e) + \beta = 0, \\ b^2 + e = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $b^2 = a$.

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+e)^2 + \alpha*(b+e) + \beta = 0, \\ b^2 + e = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $b^2 = a$. Значит, учетом $e + e = a$ и $(e + e + e) = 0$, первое уравнение системы можно преобразовать следующим образом:

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+e)^2 + \alpha*(b+e) + \beta = 0, \\ b^2 + e = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $b^2 = a$. Значит, учетом $e + e = a$ и $(e + e + e) = 0$, первое уравнение системы можно преобразовать следующим образом:

$$b^2 + a*b + e + \alpha*(b+e) + \beta = 0 \;\Rightarrow\; a*b + \alpha*b + \alpha + \beta = 0 \;\Rightarrow\; b(\alpha + a) + \alpha + \beta = 0,$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+e)^2 + \alpha*(b+e) + \beta = 0, \\ b^2 + e = 0. \end{cases}$$

$$b^2 + a*b + e + \alpha*(b+e) + \beta = 0 \;\Rightarrow\; a*b + \alpha*b + \alpha + \beta = 0 \;\Rightarrow\; b(\alpha+a) + \alpha + \beta = 0,$$

$$\begin{cases} \alpha + a = 0, \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+e)^2 + \alpha*(b+e) + \beta = 0, \\ b^2 + e = 0. \end{cases}$$

$$b^2 + a*b + e + \alpha*(b+e) + \beta = 0 \;\Rightarrow\; a*b + \alpha*b + \alpha + \beta = 0 \;\Rightarrow\; b(\alpha+a) + \alpha + \beta = 0,$$

$$\begin{cases} \alpha + a = 0, \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = e, \\ \beta = a. \end{cases}$$

Задача 36. В примере XVIII.31) обозначим через b корень многочлена $f(x) = e * x^2 + e$. Найдите степени элемента $(b+e)$, элемент, обратный к $(b+e)$ в мультипликативной группе соответствующего поля, и многочлен второй степени над P, корнем которого является элемент $(b + e)$.

Ответ.

$$\begin{cases} (b+e)^2 = b^2 + a*b + e = a + a*b + e = a*b, \\ (b+e)^3 = a*b*(b+e) = a*a + a*b = a*b + e, \\ (b+e)^4 = (a*b+e)*(b+e) = a*b^2 + a*b + b + e = a, \\ (b+e)^5 = a*(b+e) = a*b + a = a*(b+e), \\ (b+e)^6 = a*(b+e)*(b+e) = a*a*b = b, \\ (b+e)^7 = b*(b+e) = b^2 + b = b + a, \\ (b+e)^8 = (b+a)*(b+e) = b^2 + b + b*a + a = e. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+e)^2 + \alpha*(b+e) + \beta = 0, \\ b^2 + e = 0. \end{cases}$$

$$b^2 + a*b + e + \alpha*(b+e) + \beta = 0 \;\Rightarrow\; a*b + \alpha*b + \alpha + \beta = 0 \;\Rightarrow\; b(\alpha+a) + \alpha + \beta = 0,$$

$$\begin{cases} \alpha + a = 0, \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = e, \\ \beta = a. \end{cases}$$

Итак, искомый многочлен имеет вид $x^2 + x + a$.

Решение задачи 37.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?*

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?*

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* Алгебраическим выражением.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* Алгебраическим выражением. *Введем переменные.*

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* Алгебраическим выражением. *Введем переменные.* Пусть x — аргумент многочлена, и буквами обозначим коэффициенты многочлена.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* Алгебраическим выражением. *Введем переменные.* Пусть x — аргумент многочлена, и буквами обозначим коэффициенты многочлена. Так как $8 = 2^3$, то степень многочлена не выше 3, поэтому мы ищем многочлен $\alpha + \beta x + \gamma \cdot x^2 + x^3$.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* Алгебраическим выражением. *Введем переменные.* Пусть x — аргумент многочлена, и буквами обозначим коэффициенты многочлена. Так как $8 = 2^3$, то степень многочлена не выше 3, поэтому мы ищем многочлен $\alpha + \beta x + \gamma \cdot x^2 + x^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?*

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* Алгебраическим выражением. *Введем переменные.* Пусть x — аргумент многочлена, и буквами обозначим коэффициенты многочлена. Так как $8 = 2^3$, то степень многочлена не выше 3, поэтому мы ищем многочлен $\alpha + \beta x + \gamma \cdot x^2 + x^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* По условию 3 является корнем этого многочлена, т.е.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* Алгебраическим выражением. *Введем переменные.* Пусть x — аргумент многочлена, и буквами обозначим коэффициенты многочлена. Так как $8 = 2^3$, то степень многочлена не выше 3, поэтому мы ищем многочлен $\alpha + \beta x + \gamma \cdot x^2 + x^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* По условию 3 является корнем этого многочлена, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**. *Что надо найти?* Многочлен. *В каком виде представим ответ?* Алгебраическим выражением. *Введем переменные.* Пусть x — аргумент многочлена, и буквами обозначим коэффициенты многочлена. Так как $8 = 2^3$, то степень многочлена не выше 3, поэтому мы ищем многочлен $\alpha + \beta x + \gamma \cdot x^2 + x^3$. *Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?* По условию 3 является корнем этого многочлена, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$. Следовательно, $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2$

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0$,

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0, \quad 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 =$

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0, \quad 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 3 \neq 0,$

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0$, $1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 3 \neq 0$, $0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 =$

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0$, $1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 3 \neq 0$, $0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 1 \neq 0$,

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0$, $1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 3 \neq 0$, $0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 1 \neq 0$,
$1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 =$

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0$, $1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 3 \neq 0$, $0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 1 \neq 0$,
$1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 2 + 2 =$

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0$, $1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 3 \neq 0$, $0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 1 \neq 0$, $1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 2 + 2 = 0$.

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0$, $1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 3 \neq 0$, $0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 1 \neq 0$, $1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 2 + 2 = 0$.
Итак, искомый многочлен равен

Задача 37. Найдите многочлен, корнем которого является элемент 3 поля $GF(8)$, в котором полевые операции определены таблицами:

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	7	0	1	2	3
5	0	5	7	6	1	0	3	2
6	0	6	1	5	2	3	0	1
7	0	7	3	4	3	2	1	0

Ответ. Осталось решить уравнение $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3^2 + 3^3$, т.е. $\alpha + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 5 + 2 = 0$. В данном случае, видимо, проще всего это сделать перебором, так как значения всех коэффициентов — это 0 или 1.
$0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \neq 0$, $1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 3 \neq 0$, $0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 1 \neq 0$, $1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 = 2 + 2 = 0$.
Итак, искомый многочлен равен $1 + x + x^3$.

Решение задачи 38.

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \mid f(x) \in P[x] \right\}$.

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \Big\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\Big|\; f(x) \in P[x] \Big\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \Big\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\Big|\; f(x) \in P[x] \Big\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \Big\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\Big|\; f(x) \in P[x] \Big\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени 1, так как $\deg(e * x^2 + e) = 2$.

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\middle|\; f(x) \in P[x] \right\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени 1, так как $\deg(e * x^2 + e) = 2$.

Введем следующие обозначения

многочлен	e	$e * x$	$a * x$	$e + e * x$	$a + e * x$	$e + a * x$	$a + a * x$
обозначение	e	b	c	d	k	m	n

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\middle|\; f(x) \in P[x] \right\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени 1, так как $\deg(e * x^2 + e) = 2$.

Введем следующие обозначения

многочлен	e	$e * x$	$a * x$	$e + e * x$	$a + e * x$	$e + a * x$	$a + a * x$
обозначение	e	b	c	d	k	m	n

Тогда, например,

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\middle|\; f(x) \in P[x] \right\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени 1, так как $\deg(e * x^2 + e) = 2$.

Введем следующие обозначения

многочлен	e	$e * x$	$a * x$	$e + e * x$	$a + e * x$	$e + a * x$	$a + a * x$
обозначение	e	b	c	d	k	m	n

Тогда, например,

$d{*}m =$

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\middle|\; f(x) \in P[x] \right\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени 1, так как $\deg(e * x^2 + e) = 2$.

Введем следующие обозначения

многочлен	e	$e * x$	$a * x$	$e + e * x$	$a + e * x$	$e + a * x$	$a + a * x$
обозначение	e	b	c	d	k	m	n

Тогда, например,

$d{*}m = (e{*}e{*}x){*}(e{+}a{*}x) =$

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\middle|\; f(x) \in P[x] \right\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени 1, так как $\deg(e * x^2 + e) = 2$.

Введем следующие обозначения

многочлен	e	$e * x$	$a * x$	$e + e * x$	$a + e * x$	$e + a * x$	$a + a * x$
обозначение	e	b	c	d	k	m	n

Тогда, например,

$d*m = (e*e*x)*(e+a*x) = e+(a+e)*x+a*x^2 =$

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \;\middle|\; f(x) \in P[x] \right\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени 1, так как $\deg(e * x^2 + e) = 2$.

Введем следующие обозначения

многочлен	e	$e * x$	$a * x$	$e + e * x$	$a + e * x$	$e + a * x$	$a + a * x$
обозначение	e	b	c	d	k	m	n

Тогда, например,

$$d*m = (e*e*x)*(e+a*x) = e+(a+e)*x+a*x^2 = e+a*x^2 =$$

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \mid f(x) \in P[x] \right\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени 1, так как $\deg(e * x^2 + e) = 2$.

Введем следующие обозначения

многочлен	e	$e * x$	$a * x$	$e + e * x$	$a + e * x$	$e + a * x$	$a + a * x$
обозначение	e	b	c	d	k	m	n

Тогда, например,

$$d * m = (e * e * x) * (e + a * x) = e + (a + e) * x + a * x^2 = e + a * x^2 = a * (e * x^2 + e) + a.$$

Задача 38. Для **задачи XVIII.31** получить **таблицы Кэли** с помощью фактор-кольца кольца многочленов $P[x]$ по идеалу $I = \left\{ f(x)\left(e * x^2 + e\right) \mid f(x) \in P[x] \right\}$.

Ответ. Рассмотрим кольцо многочленов $P[x]$, идеал I, порожденный многочленом $f(x) = e * x^2 + e$, и фактор-кольцо $P[x]/I$. В каждом классе эквивалентных по конгруэнции, соответствующей идеалу I, элементов выберем в качестве представителя многочлен минимальной степени.

В силу теоремы о делении многочленов с остатком (алгоритм Евклида) получаем, что такими представителями являются многочлены степени 1, так как
$\deg(e * x^2 + e) = 2$.

Введем следующие обозначения

многочлен	e	$e * x$	$a * x$	$e + e * x$	$a + e * x$	$e + a * x$	$a + a * x$
обозначение	e	b	c	d	k	m	n

Тогда, например,

$$d * m = (e * e * x) * (e + a * x) = e + (a + e) * x + a * x^2 = e + a * x^2 = a * (e * x^2 + e) + a.$$

Таким образом при умножении классов, элементами которых являются d и m, то есть многочлены $e + e * x$ и $e + a * x$ соответственно, получается класс, предста-

вителем которого является многочлен a, что совпадает со значением, полученным нами ранее (см. **таблицу Кэли** для $*$).

Спасибо за внимание!

e-mail: yu.b.melnikov@yandex.ru, UriiMelnikov58@gmail.com

Вернуться к списку презентаций?