

Министерство науки и высшего образования РФ
Уральский государственный экономический университет



Ю. Б. Мельников



Алгебра и теория чисел. Алгебра

КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения занятия

e-mail:
yu.b.melnikov@yandex.ru
UriiMelnikov58@gmail.com

Екатеринбург
2021

I. Инструкция к пособию	12
II. Базовые исследовательские стратегии	21
III. Комплексные числа и многочлены	22
III.1. Некоторые выводы	46
III.2. Направления развития исследования?	67
III.3. Равенство комплексных чисел	73
III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов .	76
III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов .	85
III.6. Вычитание и деление	99
III.7. Свойства комплексного сопряжения	130
III.8. Итоговые формулы	139
IV. Комплексная плоскость	140

IV.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры	145
IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры	151
IV.3. Итоговые правила сложения и умножения векторов комплексной плоскости	180
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому	194
V.1. Изоморфность	217
V.2. Формы записи комплексного числа	238
VI. Формула Муавра	241
VII. Корни степени n из 1	257
VII.1. Корни степени 4 из 1	261

VII.2. Первообразные корни из 1	287
VII.3. Теорема о степенях первообразного корня	303
VII.4. Теорема о группе корней из 1	305
Матричное и теоретико-множественное представление комплексных чисел	307
Теоретико-множественное представление алгебры комплекс- ных чисел	308
Матричное представление алгебры комплексных чисел . . .	316
Пример 1 выполнения операций с комплексными числа- ми в алгебраической форме	324
Пример 2 выполнения операций с комплексными числа- ми в алгебраической форме	344
Пример 3 выполнения операций комплексной плоскости	361

Пример 4 комплексного сопряжения в комплексной плоскости 387

Пример 5 перевода в разные формы записи комплексного числа 415

Пример 6 применения формулы Муавра в тригонометрии 450

Пример 7 отыскания корней из комплексного числа 457

Пример 8 нахождения корней из 1 473

Пример 9 нахождения примитивных корней по определению 531

Задачи для самостоятельного решения: операции

алгебры комплексных чисел

567

Задача IX.1

568

Задача IX.2

569

Задача IX.3

570

Задача IX.4

571

Задача IX.5

572

Задача IX.6

573

Задача IX.7

574

Решение систем линейных уравнений с комплексными коэффициентами

575

Задача X.8	575
Задача X.9	576
Задача X.10	577
<i>Квадратные уравнения</i>	578
Задача XI.11	578
<i>Применения комплексных чисел</i>	579
Задача XII.12	579
Задача XII.13	580
XIII. Тело кватернионов	581
XIII.1. Определение кватерниона	589

XIII.2. Теорема о теле кватернионов	634
XIII.3. Матричное представление кватернионов	640
XIII.4. Завершение доказательства теоремы 4	695
XIII.5. Обратный кватернион	699
XIII.6. Деление кватернионов	722
XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов	729

XIV. Теорема Фробениуса **771**

XIV.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$	774
XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число	782
XIV.3. Лемма о разложении элементов из F	804
XIV.4. Лемма о подпространстве I	861
XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F	950
XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса	1019

Пример 10 вычисления значения операций алгебры кватернионов	1096
Пример 11 вычисления значения операций алгебры кватернионов (матричная интерпретация)	1128
Пример 12 вычисления обратного элемента	1138
Пример 13 вычисления значения операций алгебры кватернионов (геометрическая интерпретация)	1146
Задачи для самостоятельного решения	1158
<i>XV. Операции алгебры кватернионов</i>	1159
Задача XV.14	1160

Задача XV.15	1161
<i>XVI. Матричное представление кватернионов</i>	1162
Задача XVI.16	1163
Задача XVI.17	1164
<i>XVII. Геометрическая интерпретация кватернионов</i>	1165
Задача XVII.18	1166
<i>XVIII. Решение уравнений в алгебре кватернионов</i>	1167
Задача XVIII.19	1168
<i>XIX. Применения кватернионов</i>	1169

Задача XIX.20	1170
Задача XIX.21	1171
Задача XIX.22	1172
Ответы и решения	1173

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с Intel x-86.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с Intel x-86.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла 0000Spisok.pdf со ссылками на файлы 00Set.pdf, 00Matrix.pdf, 00AnalGeom.pdf, 00LinAlgebra.pdf, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы Adobe Reader.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с Intel x-86.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла 0000Spisok.pdf со ссылками на файлы 00Set.pdf, 00Matrix.pdf, 00AnalGeom.pdf, 00LinAlgebra.pdf, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы Adobe Reader.

Кроме того, имеются гиперссылки на пособия «Математический анализ» и «Элементарная математика».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения. Имеются гиперссылки на тесты для самообучения и самоконтроля.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

В программе Adobe Reader и Acrobat Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для того, чтобы **вызвать панель навигации** в Acrobat Reader надо, во-первых, выйти из полноэкранного режима (например, нажатием **Esc**), и, во-вторых, нажать клавишу **F4** и выбрать на левой вертикальной панели вертикальный флажок «Закладки» .

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и ← (в Adobe Reader X может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и ← (в Adobe Reader X может не работать).

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Базовые исследовательские стратегии

- 1) стратегия **алгоритмического построения модели**;
- 2) стратегия **поиска и использования аналогии**;
- 3) стратегия **обогащения модели**;
- 4) стратегия **смены ролей и приоритетов**;
- 5) стратегия **приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**;
- 6) стратегия **перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**;
- 7) стратегия **предвкушения**.

III. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**.

III. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**.

Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен

III. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**.

Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

III. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**.

Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является

III. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**.

Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является 0.

III. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**.

Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является 0.

Значения переменной, обращающие многочлен в 0, получили название «корни многочлена».

III. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**.

Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является 0.

Значения переменной, обращающие многочлен в 0, получили название «корни многочлена».

Но некоторые многочлены корней (действительных) не имеют, значит, мы не можем решить целый класс уравнений.

III. Комплексные числа и многочлены

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**.

Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является 0.

Значения переменной, обращающие многочлен в 0, получили название «корни многочлена».

Но некоторые многочлены корней (действительных) не имеют, значит, мы не можем решить целый класс уравнений.

ЧТО ДЕЛАТЬ???

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Одним из интересных объектов для изучения в математике является **многочлен**.

Согласно **стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций**, наиболее перспективным направлением исследования являются случаи, при которых многочлен принимает «экстремальные» значения.

Примером такого значения многочлена является 0.

Значения переменной, обращающие многочлен в 0, получили название «корни многочлена».

Но некоторые многочлены корней (действительных) не имеют, значит, мы не можем решить целый класс уравнений.

ЧТО ДЕЛАТЬ???

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию** .

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

не можем решить $3x = 5$

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

не можем решить $3x = 5$ — вводим рациональные числа;

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

не можем решить $3x = 5$ — вводим рациональные числа;

не можем решить $x^2 = 2$

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

не можем решить $3x = 5$ — вводим рациональные числа;

не можем решить $x^2 = 2$ — вводим действительные числа;

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

не можем решить $3x = 5$ — вводим рациональные числа;

не можем решить $x^2 = 2$ — вводим действительные числа;

не можем решить $x^2 + 4 = 0$

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

не можем решить $3x = 5$ — вводим рациональные числа;

не можем решить $x^2 = 2$ — вводим действительные числа;

не можем решить $x^2 + 4 = 0$

Используя **стратегию поиска аналогии** приходим к необходимости

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

не можем решить $3x = 5$ — вводим рациональные числа;

не можем решить $x^2 = 2$ — вводим действительные числа;

не можем решить $x^2 + 4 = 0$

Используя **стратегию поиска аналогии** приходим к необходимости расширения понятия «число».

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

не можем решить $3x = 5$ — вводим рациональные числа;

не можем решить $x^2 = 2$ — вводим действительные числа;

не можем решить $x^2 + 4 = 0$ — введем _____ числа.

Используя **стратегию поиска аналогии** приходим к необходимости расширения понятия «число».

III. Комплексные числа и многочлены

Некоторые многочлены не имеют корней.

Применим **стратегию поиска аналогии**.

Раньше при невозможности решить уравнения определенного типа приходилось расширять понятие числа:

не можем решить $x + 5 = 0$ — вводим отрицательные числа;

не можем решить $3x = 5$ — вводим рациональные числа;

не можем решить $x^2 = 2$ — вводим действительные числа;

не можем решить $x^2 + 4 = 0$ — введем **комплексные** числа.

Используя **стратегию поиска аналогии** приходим к необходимости расширения понятия «число».

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.
Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации:

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант решения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант решения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

Принцип «бритвы Оккама» предписывает не вводить новых понятий без необходимости.

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

Принцип «бритвы Оккама» предписывает не вводить новых понятий без необходимости.

В качестве «новых чисел» возьмем

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант решения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

Принцип «бритвы Оккама» предписывает не вводить новых понятий без необходимости.

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен,

III.1. Некоторые выводы

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

Принцип «бритвы Оккама» предписывает не вводить новых понятий без необходимости.

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например, от i (в радиоэлектронике — от j).

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi + ci^2 + \dots + di^n$?

Применение корней многочленов упрощает многие вычисления.

Некоторые многочлены не имеют корней (действительных).

С помощью **стратегии поиска аналогии** получаем вариант разрешения проблемной ситуации: расширение понятия «число».

Какие объекты взять в качестве «новых чисел»?

Принцип «бритвы Оккама» предписывает не вводить новых понятий без необходимости.

В качестве «новых чисел» возьмем многочлен, например, от i (в радиоэлектронике — от j).

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi + ci^2 + \dots + di^n$?

Какую степень многочлена выбрать?

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi + ci^2 + \dots + di^n$?

Какую степень многочлена выбрать?

Применим стратегию

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi + ci^2 + \dots + di^n$?

Какую степень многочлена выбрать?

Применим стратегию **приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi + ci^2 + \dots + di^n$?

Какую степень многочлена выбрать?

Применим стратегию **приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» —

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi + ci^2 + \dots + di^n$?

Какую степень многочлена выбрать?

Применим стратегию **приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» —
многочлены степени

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi + ci^2 + \dots + di^n$?

Какую степень многочлена выбрать?

Применим стратегию **приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» — многочлены степени не выше 1.

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi + ci^2 + \dots + di^n$?

Какую степень многочлена выбрать?

Применим стратегию **приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» — многочлены степени не выше 1.

Поэтому «новые числа» будут иметь вид...

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi + ci^2 + \dots + di^n$?

Какую степень многочлена выбрать?

Применим стратегию **приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» — многочлены степени не выше 1.

Поэтому «новые числа» будут иметь вид...

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi$, $\{a; b\} \subseteq \mathbb{R}$.

Какую степень многочлена выбрать?

Применим стратегию **приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Минимальный нетривиальный случай для «новых чисел» — многочлены степени не выше 1.

Поэтому «новые числа» будут иметь вид...

III.1. Некоторые выводы

Комплексное число: $a + bi$, $\{a; b\} \subseteq \mathbb{R}$.

Займемся операциями алгебры комплексных чисел $\mathbb{C}$.

III.2. Направления развития исследования?

Одним из первых этапов построения теории является

III.2. Направления развития исследования?

Одним из первых этапов построения теории является *формирования критериев равенства объектов*.

III.2. Направления развития исследования?

Как определить равенство «новых чисел»?

Одним из первых этапов построения теории является *формирования критериев равенства объектов*.

III.2. Направления развития исследования?

Как определить равенство «новых чисел»?

Какие отношения ввести на множестве «новых чисел»?

III.2. Направления развития исследования?

Как определить равенство «новых чисел»?

Какие отношения ввести на множестве «новых чисел»?

Как определить операции «сложение» и «умножение»?

III.2. Направления развития исследования?

Как определить равенство «новых чисел»?

Какие отношения ввести на множестве «новых чисел»?

Как определить операции «сложение» и «умножение»?

Какие еще операции следует ввести?

III.3. Равенство комплексных чисел

Как определить равенство «новых чисел»?

Равенство многочленов выглядит вполне многообещающе:

III.3. Равенство комплексных чисел

Как определить равенство «новых чисел»?

Равенство многочленов выглядит вполне многообещающе:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

III.3. Равенство комплексных чисел

Как определить равенство «новых чисел»?

Равенство многочленов выглядит вполне многообещающе:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

Этой формулой мы свели равенство «новых чисел» к равенству действительных чисел.

III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

КОММУТАТИВНОСТЬ,

III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть обратный элемент,

III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть обратный элемент,

есть нулевой элемент (нейтральный по сложению).

III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть обратный элемент,

есть нулевой элемент (нейтральный по сложению).

Итак, сложение комплексных чисел введем формулой:

III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть обратный элемент,

есть нулевой элемент (нейтральный по сложению).

Итак, сложение комплексных чисел введем формулой:

$$(a + bi) + (c + di) =$$

III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть обратный элемент,

есть нулевой элемент (нейтральный по сложению).

Итак, сложение комплексных чисел введем формулой:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) +$$

III.4. Сложение комплексных чисел на языке многочленов

Сложение многочленов в качестве сложения «новых чисел» удовлетворяет всем требованиям:

коммутативность,

ассоциативность,

есть обратный элемент,

есть нулевой элемент (нейтральный по сложению).

Итак, сложение комплексных чисел введем формулой:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Умножение многочленов как «новых чисел» вызывает проблему повышения степени:

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Умножение многочленов как «новых чисел» вызывает проблему повышения степени:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (bc + ad)i + bdi^2.$$

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Умножение многочленов как «новых чисел» вызывает проблему повышения степени:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (bc + ad)i + bdi^2.$$

ЧТО ДЕЛАТЬ?

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Умножение многочленов как «новых чисел» вызывает проблему повышения степени:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (bc + ad)i + bdi^2.$$

ЧТО ДЕЛАТЬ?

Достаточно дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов $x^2 + bx + c$ «самый простой»?

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов $x^2 + bx + c$ «самый простой»?

Самый простой случай — когда все коэффициенты 0 или 1.

После перебора получаем, что простейший требуемый многочлен — это

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов $x^2 + bx + c$ «самый простой»?

Самый простой случай — когда все коэффициенты 0 или 1.

После перебора получаем, что простейший требуемый многочлен — это $x^2 + 1$.

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов $x^2 + bx + c$ «самый простой»?

Самый простой случай — когда все коэффициенты 0 или 1.

После перебора получаем, что простейший требуемый многочлен — это $x^2 + 1$.

Значит, положим $i^2 + 1 = 0$.

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Надо дополнить умножение правилом для задания i^2 в виде $a + bi$.

При формировании понятийного и аналитического аппаратов ведущую роль обычно играет **стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Сделаем i корнем «самого простого» из многочленов, не имеющих действительных корней.

Какой из многочленов $x^2 + bx + c$ «самый простой»?

Самый простой случай — когда все коэффициенты 0 или 1.

После перебора получаем, что простейший требуемый многочлен — это $x^2 + 1$.

Значит, положим $i^2 + 1 = 0$.

Значит, получили правило: $i^2 = -1$.

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Получили правило: $i^2 = -1$.

Отсюда следует правило умножения:

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Получили правило: $i^2 = -1$.

Отсюда следует правило умножения:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Рассмотреть пример?

III.5. Умножение комплексных чисел на языке многочленов

Получили правило: $i^2 = -1$.

Отсюда следует правило умножения:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Введем вторичные операции: вычитание и деление.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) =$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i,$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) =$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) +$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел

$$(a + bi) - (c + di) =$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) =$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) +$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Как быть с делением?

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} =$$

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} =$$

Применим стратегию

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} =$$

Применим стратегию **поиска и использования аналогии**.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} =$$

Применим стратегию **поиска и использования аналогии**.

Когда было надо «избавиться от иррациональности в знаменателе».

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} =$$

Применим стратегию **поиска и использования аналогии**.

Когда было надо «избавиться от иррациональности в знаменателе».

Представьте себе, что вместо i написано, например, $\sqrt{2}$...

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} =$$

Применим стратегию **поиска и использования аналогии**.

Когда было надо «избавиться от иррациональности в знаменателе».

Представьте себе, что вместо i написано, например, $\sqrt{2}$...

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Применим стратегию **поиска и использования аналогии**.

Когда было надо «избавиться от иррациональности в знаменателе».

Представьте себе, что вместо i написано, например, $\sqrt{2}$...

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Все ли так хорошо, как кажется?

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам надо представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам надо представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам надо представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

сопряжение:

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам надо представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Комплексное сопряжение:

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам надо представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Комплексное сопряжение: $\overline{a + bi} =$

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам надо представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Комплексное сопряжение: $\overline{a + bi} = a - bi$.

Все ли так хорошо, как кажется?

Применим **стратегию поиска аналогии**.

При введении переменных одна буква обозначает число в целом.

Нам надо представить деление через умножение и сложение в символическом виде, но это невозможно без дополнительной операции.

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Комплексное сопряжение: $\overline{a + bi} = a - bi$.

Рассмотрим пример?

III.6. Вычитание и деление

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Вычитание комплексных чисел как многочленов нас устроит:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}.$$

Комплексное сопряжение: $\overline{a + bi} = a - bi$.

III.7. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \bar{z} =$$

$$z \cdot \bar{z} =$$

III.7. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) =$$

$$z \cdot \bar{z} =$$

III.7. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a =$$

$$z \cdot \bar{z} =$$

III.7. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R};$$

$$z \cdot \bar{z} =$$

III.7. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R};$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) =$$

III.7. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R};$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 =$$

III.7. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R};$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}.$$

III.7. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R};$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Комплексное сопряжение** суммы слагаемых равно сумме комплексно сопряженных слагаемых:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

III.7. Свойства комплексного сопряжения

1. Сумма и произведение **комплексно сопряженных** чисел являются вещественными числами:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R};$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Комплексное сопряжение** суммы слагаемых равно сумме комплексно сопряженных слагаемых:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

3. **Комплексное сопряжение** произведения равно произведению комплексно сопряженных сомножителей:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

III.8. Итоговые формулы

$$i^2 = -1,$$

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d, \end{cases}$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$\overline{a + bi} = a - bi, \quad (a + bi) \cdot \overline{(a + bi)} = a^2 + b^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}.$$

Главная потеря: исчезли привычные отношения «меньше», «больше».

IV. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

IV. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

Если удачно определить умножение векторов, можно получить расширение понятия «число».

IV. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

Если удачно определить умножение векторов, можно получить расширение понятия «число».

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** минимизируем размерность.

IV. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

Если удачно определить умножение векторов, можно получить расширение понятия «число».

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** минимизируем размерность.

Одномерный случай — это числовая ось. Ничего нового...

IV. Комплексная плоскость

Сложение векторов по свойствам похоже на сложение чисел.

Если удачно определить умножение векторов, можно получить расширение понятия «число».

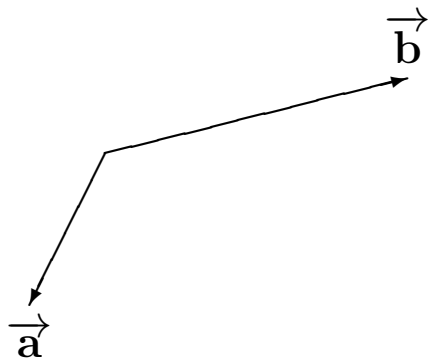
В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** минимизируем размерность.

Одномерный случай — это числовая ось. Ничего нового...

Поэтому рассмотрим *плоскость* геометрических векторов.

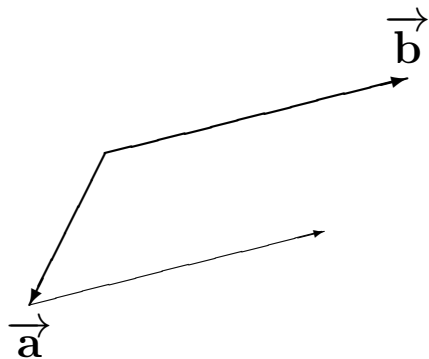
IV.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Сложение проводится или по правилу треугольника



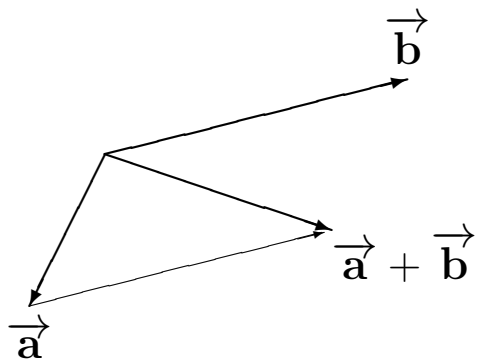
IV.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Сложение проводится или по правилу треугольника



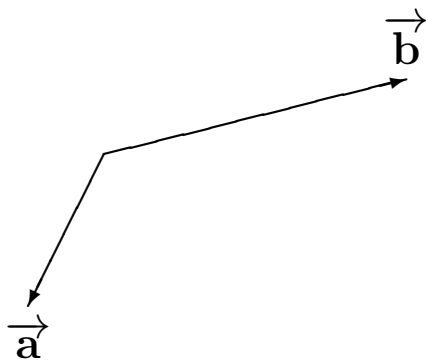
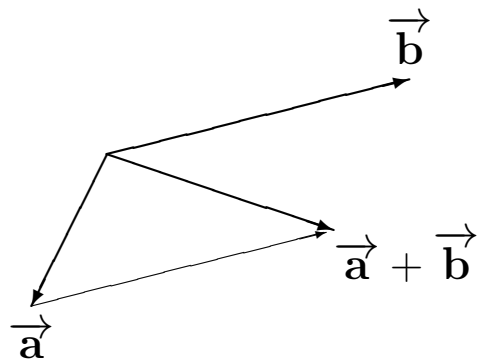
IV.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Сложение проводится или по правилу треугольника



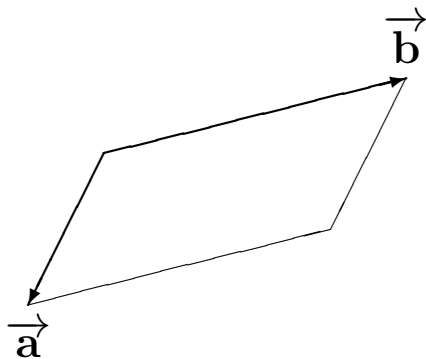
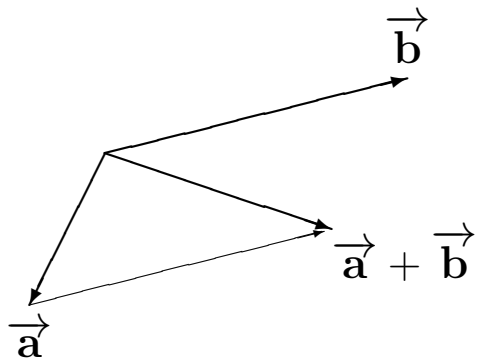
IV.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Сложение проводится или по правилу треугольника, или по правилу параллелограмма:



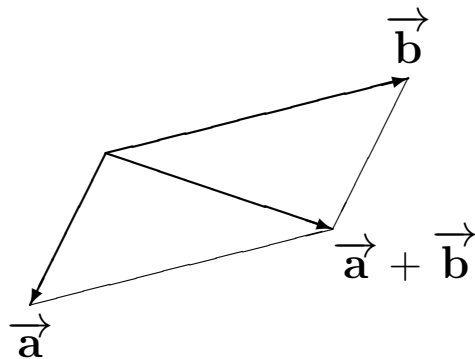
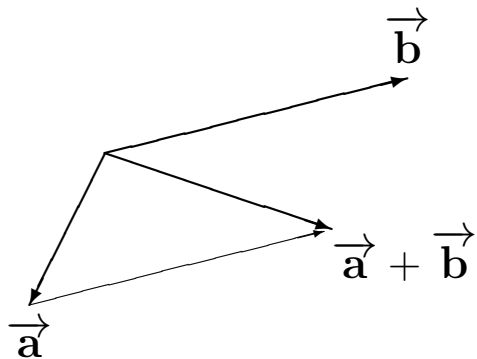
IV.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Сложение проводится или по правилу треугольника, или по правилу параллелограмма:



IV.1. Сложение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Сложение проводится или по правилу треугольника, или по правилу параллелограмма:



IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется...

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

Длину произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ естественно считать равной

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

Длину произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ естественно считать равной произведению их длин:

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

Длину произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ естественно считать равной произведению их длин:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

Как определить произведение двух векторов плоскости с тем, чтобы сохранить наиболее важные свойства произведения чисел?

Мы хотим получить конкретное правило, поэтому применим **стратегию построения модели**.

Вектор определяется длиной и направлением.

Длину произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ естественно считать равной произведению их длин:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

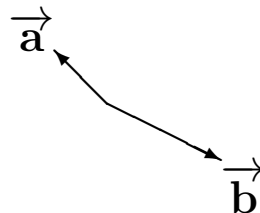
КАК ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ?

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?

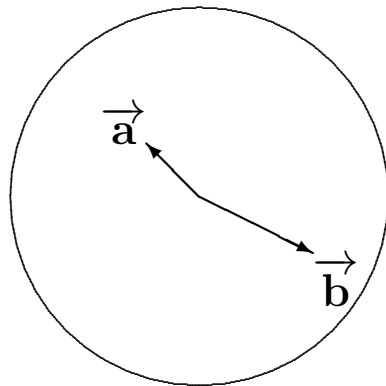


IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?

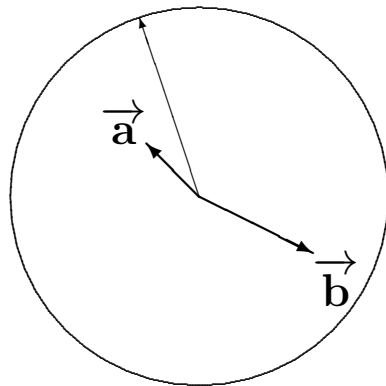


IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?

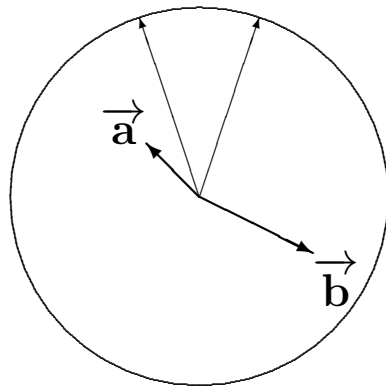


IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?

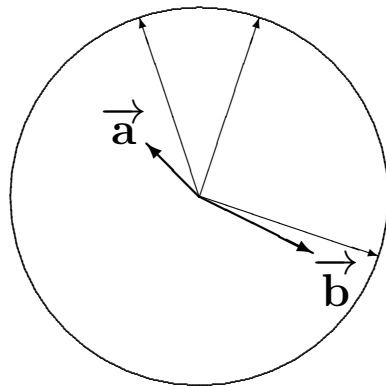


IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?

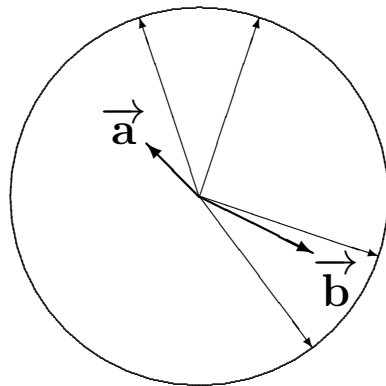


IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?

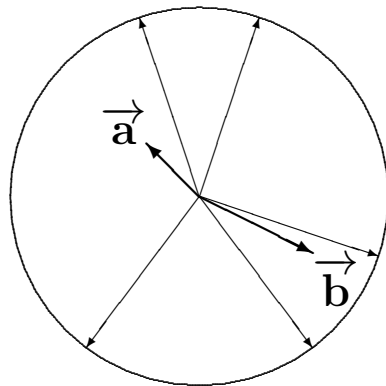


IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?

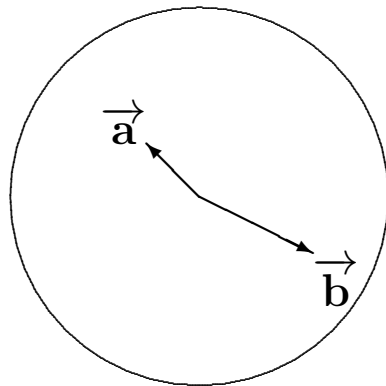


IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



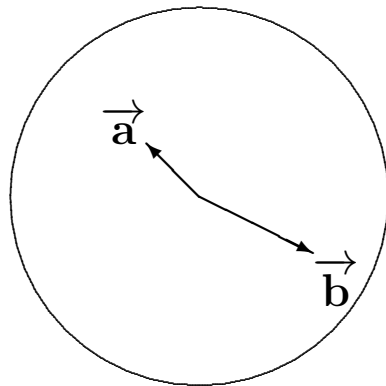
Направление задается относительно некоторых «стационарных» объектов.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



Направление задается относительно некоторых «стационарных» объектов.

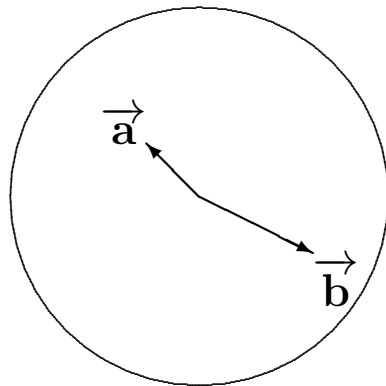
В качестве такого объекта естественно взять вектор.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



Направление задается относительно некоторых «стационарных» объектов.

В качестве такого объекта естественно взять вектор.

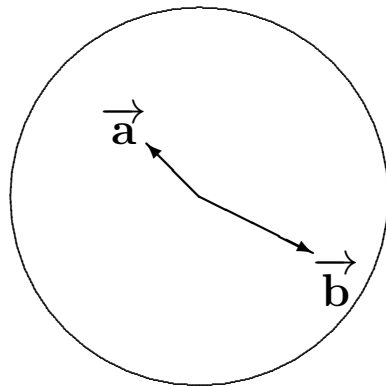
Но его длина нам не важна!

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



Направление задается относительно некоторых «стационарных» объектов.

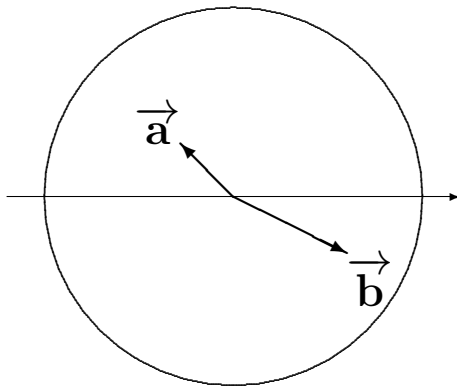
Поэтому в качестве «стационарного» объекта возьмем **ось**.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



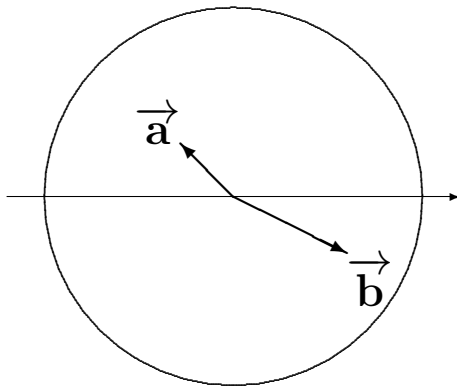
Эта ось называется **полярной осью**.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



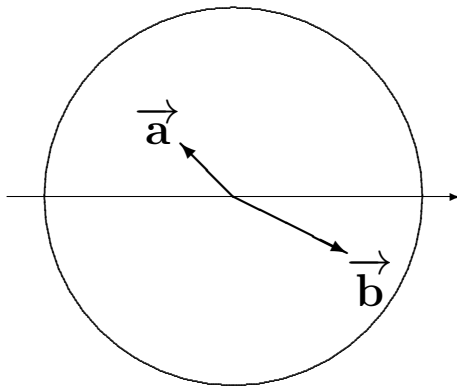
Эта ось называется **полярной осью**. Направление вектора будем описывать его углом с этой осью, считая, что положительное направление отсчета — против часовой стрелки.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



Эта ось называется **полярной осью**. Направление вектора будем описывать его углом с этой осью, считая, что положительное направление отсчета — против часовой стрелки.

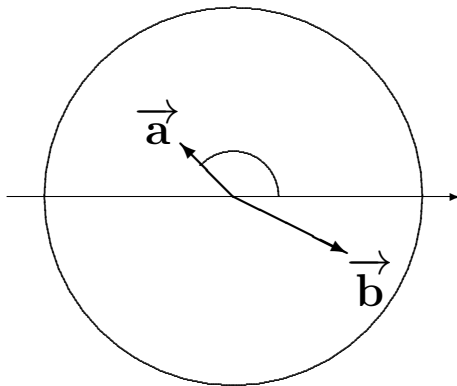
Величина (ориентированного) угла, образуемого вектором с полярной осью, называется **аргументом**.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



Эта ось называется **полярной осью**. Направление вектора будем описывать его углом с этой осью, считая, что положительное направление отсчета — против часовой стрелки.

Величина (ориентированного) угла, образуемого вектором с полярной осью, называется **аргументом**.

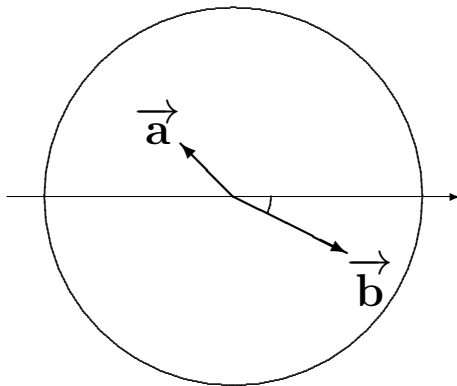
Для $\vec{a}$ изображенный аргумент положителен.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



Эта ось называется **полярной осью**. Направление вектора будем описывать его углом с этой осью, считая, что положительное направление отсчета — против часовой стрелки.

Величина (ориентированного) угла, образуемого вектором с полярной осью, называется **аргументом**.

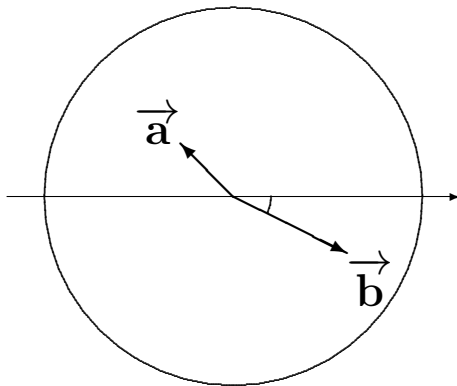
Для $\vec{b}$ изображенный аргумент отрицателен.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



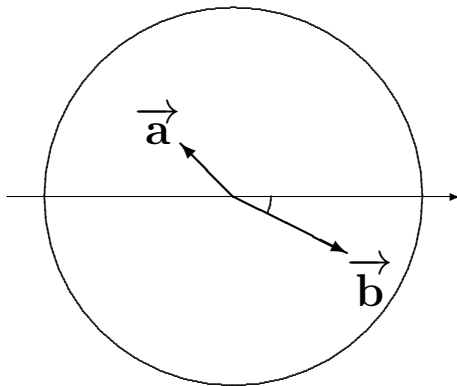
Для выбора аргумента произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций.**

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



Для выбора аргумента произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

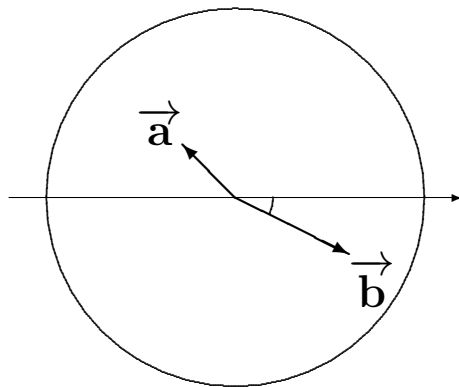
В качестве аргумента произведения естественно взять либо произведение, либо сумму аргументов сомножителей.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?



Для выбора аргумента произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

В качестве аргумента произведения естественно взять либо произведение, либо сумму аргументов сомножителей.

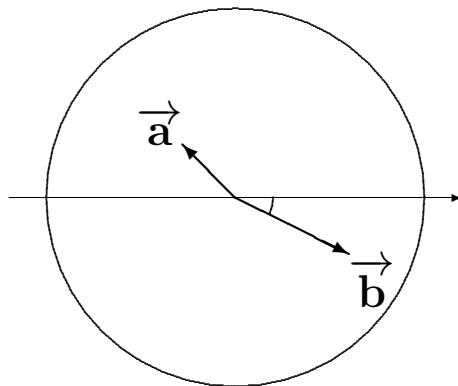
Измерение величины угла в виде «квадратных градусов» выглядит странно.

IV.2. Умножение комплексных чисел на языке векторной алгебры

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

КАК ЗАДАТЬ

НАПРАВЛЕНИЕ?

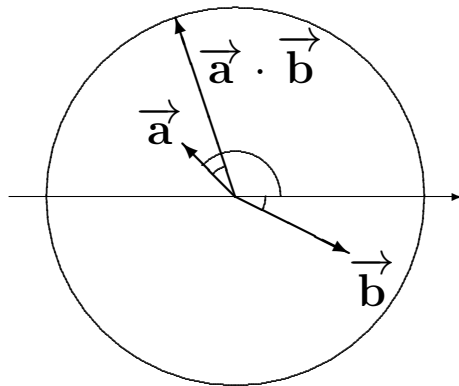
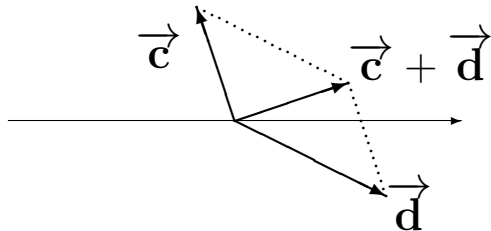


Для выбора аргумента произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

В качестве аргумента произведения естественно взять либо произведение, либо сумму аргументов сомножителей.

Поэтому выбираем сумму.

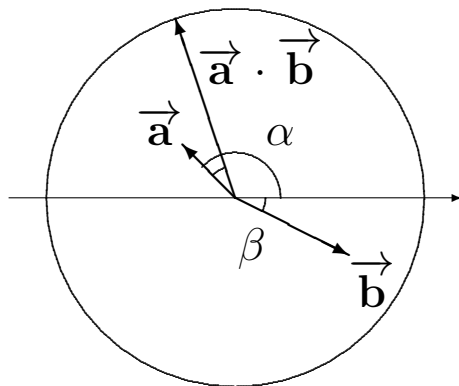
IV.3. Итоговые правила сложения и умножения векторов комплексной плоскости



Сложение векторов комплексной плоскости проводится по «правилу параллелограмма» или «правилу треугольника».

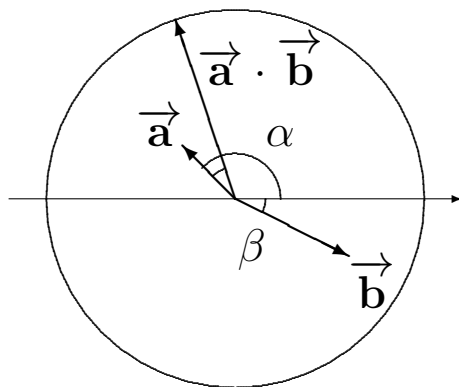
Итак, в комплексной плоскости **произведением ненулевых векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, модуль которого равен произведению модулей сомножителей: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, а аргумент равен сумме **аргументов** сомножителей (с учётом знака слагаемых). Ой?

IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



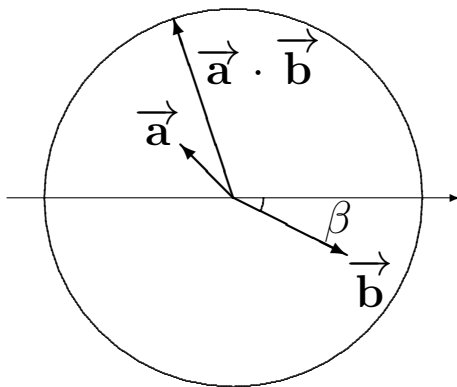
В данном примере положительный аргумент вектора $\vec{a}$ суммировался с отрицательным аргументом вектора $\vec{b}$, поэтому результат умножения $\vec{a} \cdot \vec{b}$ относительно вектора $\vec{a}$ повернут по часовой стрелке на угол $|\beta|$, а относительно вектора $\vec{b}$ повернут против часовой стрелки на угол $|\alpha|$.

IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

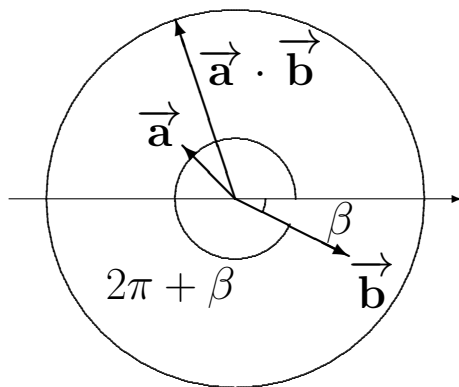
IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

Мы выбрали отрицательное значение β для $\vec{b}$.

IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

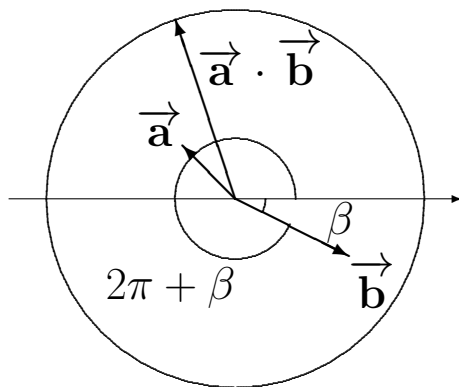


Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

Мы выбрали отрицательное значение β для $\vec{b}$.

Помимо аргумента β для вектора $\vec{b}$, можно было взять другое значение аргумента, допустим, $(2\pi + \beta)$.

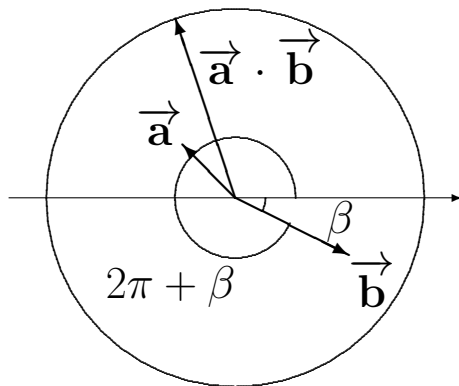
IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

Караул! Аргумент вектора комплексной плоскости определяется неоднозначно!

IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

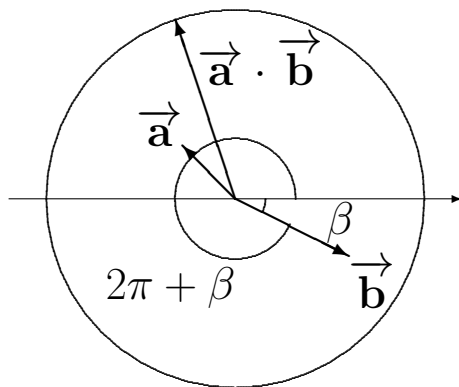


Все ли так уж хорошо в нашем определении произведения векторов комплексной плоскости?

Караул! Аргумент вектора комплексной плоскости определяется неоднозначно!

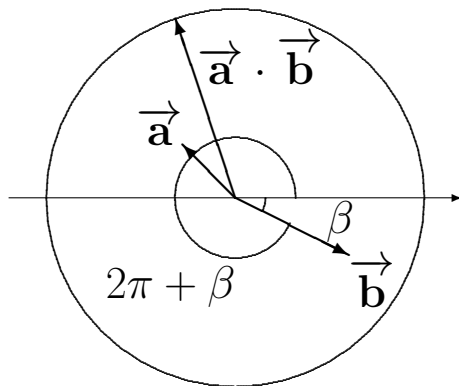
Где гарантия, что при другом выборе аргументов векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получим тот же результат при умножении этих векторов комплексной плоскости?

IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



Значит, однозначность операции умножения векторов надо доказать!

IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

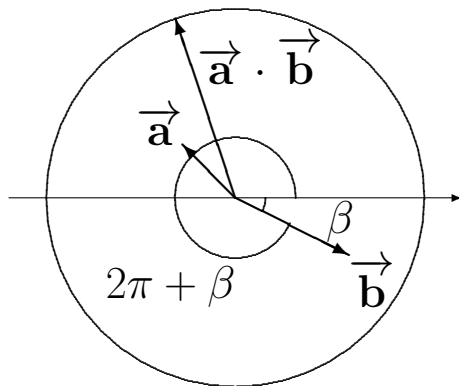


Значит, однозначность операции умножения векторов надо доказать!

Ясно, что различные аргументы вектора отличаются на угол $2k\pi$ радиан, где k — целое число. Поэтому при другом выборе аргументов для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$(\varphi + 2k\pi) + (\psi + 2m\pi) =$$

IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

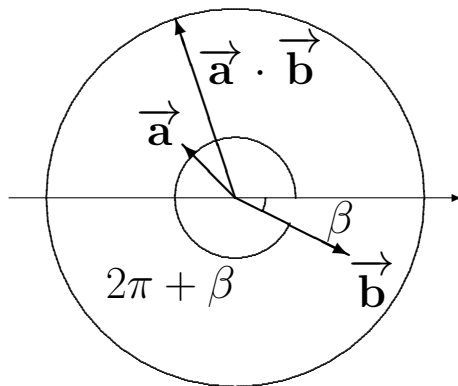


Значит, однозначность операции умножения векторов надо доказать!

Ясно, что различные аргументы вектора отличаются на угол $2k\pi$ радиан, где k — целое число. Поэтому при другом выборе аргументов для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$(\varphi + 2k\pi) + (\psi + 2m\pi) = (\varphi + \psi) + 2(k + m)\pi.$$

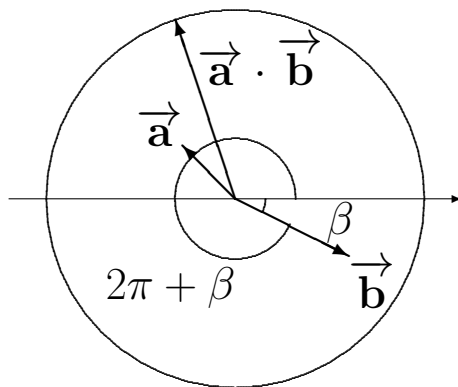
IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



$$(\varphi + 2k\pi) + (\psi + 2m\pi) = (\varphi + \psi) + 2(k + m)\pi.$$

Значит, при другом выборе аргументов получим, быть может, другое значение аргумента произведения векторов, но вектор будет тот же самый. Однозначность операции доказана.

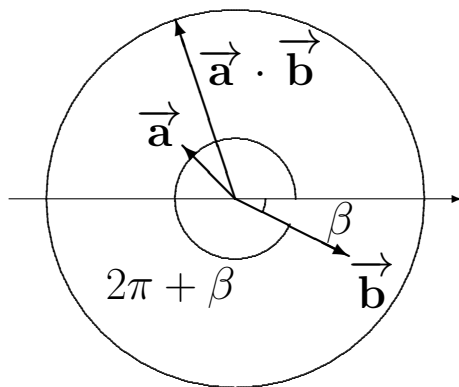
IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



В комплексной плоскости **произведением ненулевых векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, модуль которого равен произведению модулей сомножителей: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, а аргумент равен сумме **аргументов** сомножителей (с учётом знака слагаемых).

Теперь всё хорошо?

IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости



В комплексной плоскости **произведением ненулевых векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, модуль которого равен произведению модулей сомножителей: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, а **аргумент** равен сумме **аргументов** сомножителей (с учётом знака слагаемых).

Теперь всё хорошо?

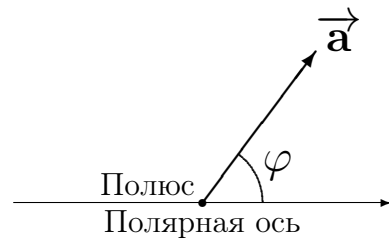
А если хотя бы один из множителей — нулевой вектор?

IV.3. Итоговое правило умножения векторов комплексной плоскости

Определение 1. В комплексной плоскости **произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$** называется такой вектор $\vec{c}$, что $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, и аргумент вектора $\vec{c}$ равен сумме **аргументов сомножителей** (с учётом знака слагаемых). При этом положим $\vec{0} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

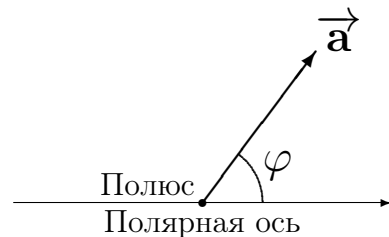
Рассмотреть пример?

V. Переход от одного представления комплексного числа к другому



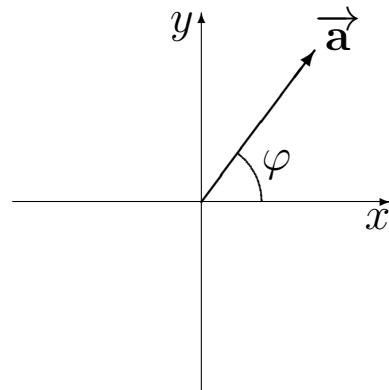
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.



V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

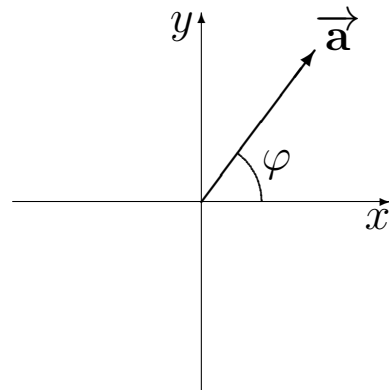
Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.



V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

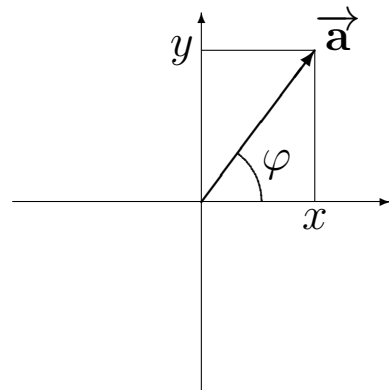
Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.



V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.



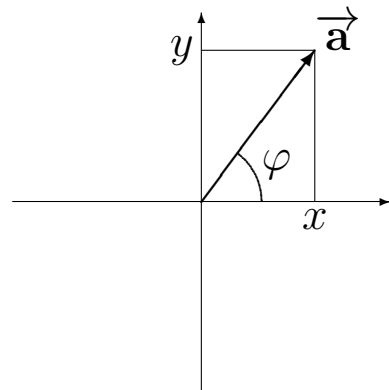
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$



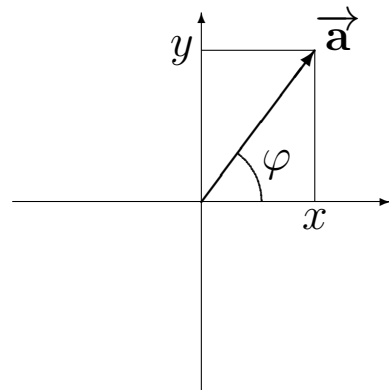
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \end{cases}$$



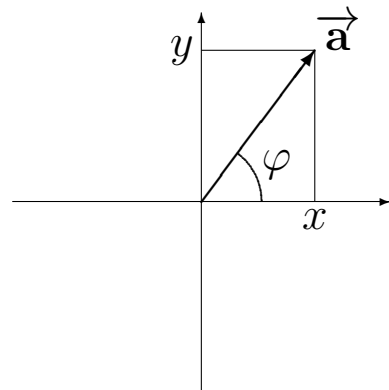
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



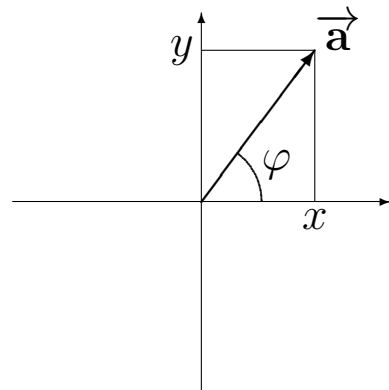
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} =$$

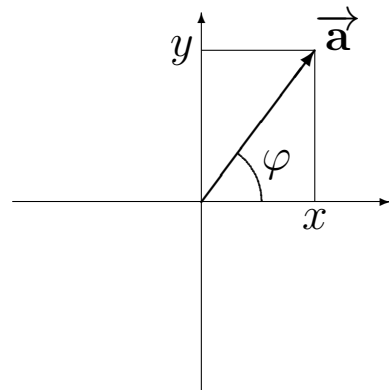
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = \text{■} \vec{i} + \text{■} \vec{j} =$$

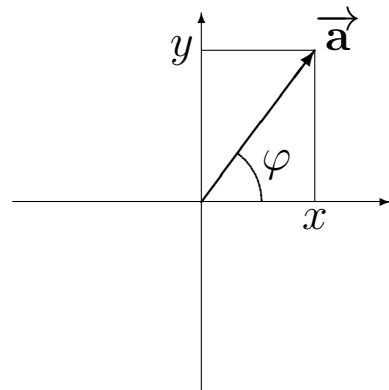
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} =$$

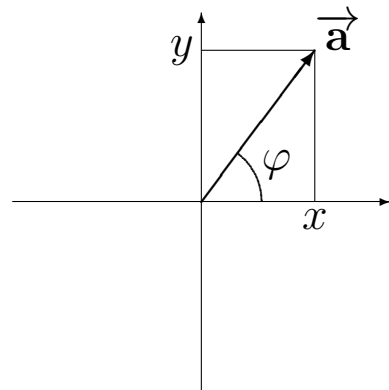
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \text{ } \vec{i} + \text{ } \vec{j},$$

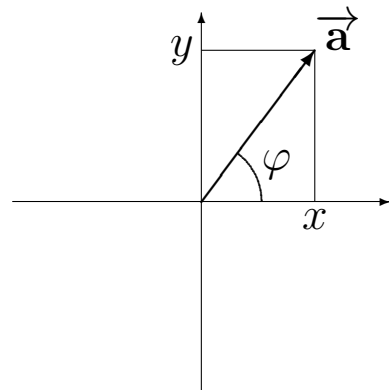
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \text{ } \vec{i} + \text{ } \vec{j},$$

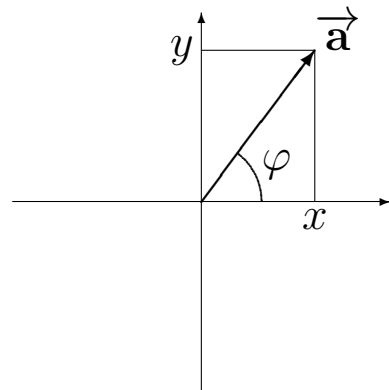
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j},$$

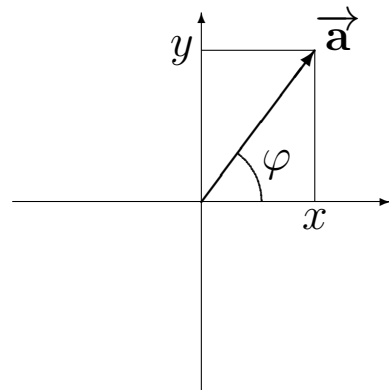
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j},$$

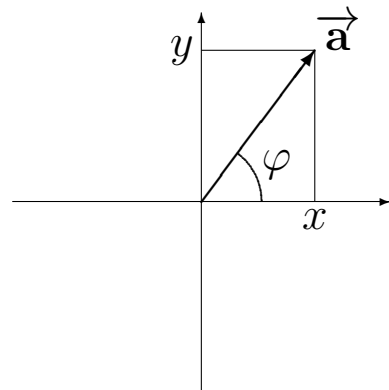
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j},$$

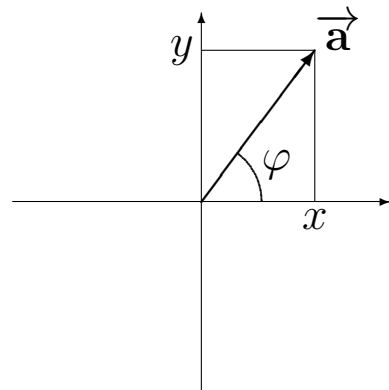
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j}, \quad |\vec{a}| =$$

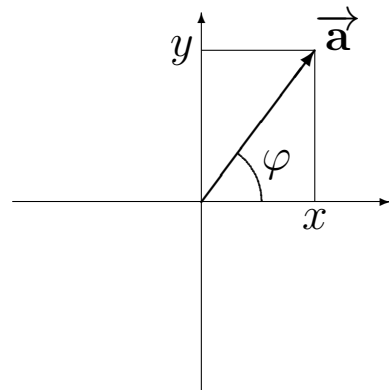
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j}, \quad |\vec{a}| = \rho,$$

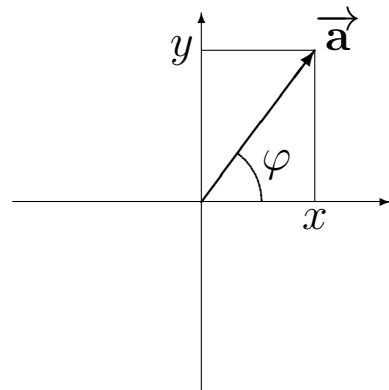
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j}, \quad |\vec{a}| = \rho,$$

что для комплексных чисел на языке многочленов означает

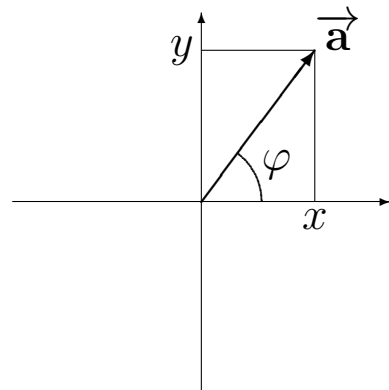
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j}, \quad |\vec{a}| = \rho,$$

что для комплексных чисел на языке многочленов означает

$$x + iy =$$

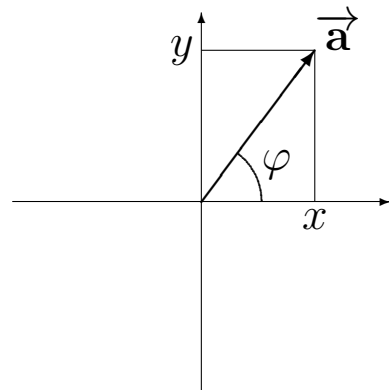
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j}, \quad |\vec{a}| = \rho,$$

что для комплексных чисел на языке многочленов означает

$$x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

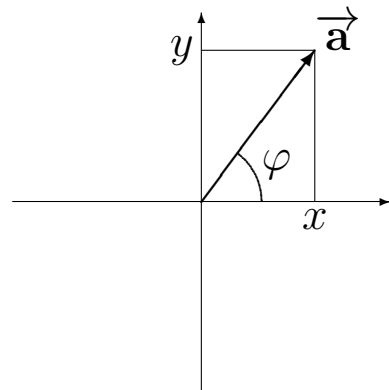
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j}, \quad |\vec{a}| = \rho,$$

что для комплексных чисел на языке многочленов означает

$$x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \rho =$$

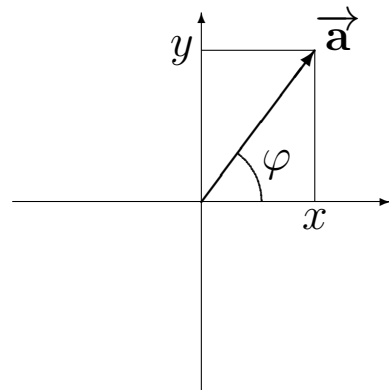
V. Переход от одного представления комплексного числа к другому

Введем на комплексной плоскости декартову систему координат.

Найдем декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Из прямоугольного треугольника получаем

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Получили формулы преобразований для вектора комплексной плоскости:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j}, \quad |\vec{a}| = \rho,$$

что для комплексных чисел на языке многочленов означает

$$x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем

$$F(z_1 + z_2) =$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем

$$F(z_1 + z_2) = F((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)) =$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем

$$F(z_1 + z_2) = F((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)) = F((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) =$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем

$$\begin{aligned} F(z_1 + z_2) &= F((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)) = F((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = \\ &= (x_1 + x_2) \overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1 + y_2) \overrightarrow{\mathbf{j}} = \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем

$$\begin{aligned} F(z_1 + z_2) &= F((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)) = F((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = \\ &= (x_1 + x_2) \overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1 + y_2) \overrightarrow{\mathbf{j}} = \left(x_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1 \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) + \left(x_2 \overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) = \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем

$$\begin{aligned} F(z_1 + z_2) &= F((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)) = F((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = \\ &= (x_1 + x_2) \overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1 + y_2) \overrightarrow{\mathbf{j}} = \left(x_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1 \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) + \left(x_2 \overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) = \\ &= F(x_1 + y_1 i) + F(x_2 + y_2 i) = \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем

$$\begin{aligned} F(z_1 + z_2) &= F((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)) = F((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = \\ &= (x_1 + x_2) \overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_1 + y_2) \overrightarrow{\mathbf{j}} = \left(x_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + y_1 \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) + \left(x_2 \overrightarrow{\mathbf{i}} + y_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) = \\ &= F(x_1 + y_1 i) + F(x_2 + y_2 i) = F(z_1) + F(z_2). \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$F(z_1 z_2) = F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) =$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \right. \right) \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \right.\right. \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \right.\right. \end{aligned} \quad \left.\left. \right)\right) =$$

Но $i^2 = -1$.

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \right.\right. \end{aligned} \quad \left.\left.\right) \right) =$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\right)\right) = \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\right)\right) = \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\right)\right) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)\right) = \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\right)\right) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)\right) = \\ &= \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \overrightarrow{\mathbf{j}} = \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \vec{\mathbf{i}} + y \vec{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\right)\right) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)\right) = \\ &= \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \vec{\mathbf{i}} + \rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \vec{\mathbf{j}} = \\ &= \left(\rho_1 \cos \varphi_1 \vec{\mathbf{i}} + \rho_1 \sin \varphi_1 \vec{\mathbf{j}}\right) \left(\rho_2 \cos \varphi_2 \vec{\mathbf{i}} + \rho_2 \sin \varphi_2 \vec{\mathbf{j}}\right) = \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Тогда для сложения имеем $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$.

Доказательство аналогичного свойства **умножения**:

$$\begin{aligned} F(z_1 z_2) &= F(\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\right)\right) = \\ &= F\left(\rho_1 \rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)\right) = \\ &= \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \overrightarrow{\mathbf{j}} = \\ &= \left(\rho_1 \cos \varphi_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_1 \sin \varphi_1 \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) \left(\rho_2 \cos \varphi_2 \overrightarrow{\mathbf{i}} + \rho_2 \sin \varphi_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}\right) = F(z_1) \cdot F(z_2). \end{aligned}$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Для сложения и, соответственно, для умножения имеем

$$F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2),$$

$$F(z_1 z_2) = F(z_1) \cdot F(z_2).$$

Функция F является взаимно однозначной, т.е.

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Для сложения и, соответственно, для умножения имеем

$$F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2),$$

$$F(z_1 z_2) = F(z_1) \cdot F(z_2).$$

Функция F является взаимно однозначной, т.е.

$$F(z_1) = F(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2.$$

V.1. Изоморфность

Положим

$$F(x + iy) = x \overrightarrow{\mathbf{i}} + y \overrightarrow{\mathbf{j}}. \quad (2)$$

Для сложения и, соответственно, для умножения имеем

$$F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2),$$

$$F(z_1 z_2) = F(z_1) \cdot F(z_2).$$

Функция F является взаимно однозначной, т.е.

$$F(z_1) = F(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2.$$

Значит рассмотренные нами алгебры — алгебра комплексных чисел на языке многочленов и алгебра векторов комплексной плоскости — являются одинаковыми, изоморфными.

V.2. Формы записи комплексного числа

Алгебраическая
форма
записи

$$\overbrace{x + iy} =$$

V.2. Формы записи комплексного числа

Алгебраическая
форма
записи

$$\overbrace{x + iy} = \underbrace{\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)} =$$

Тригонометрическая
форма
записи

V.2. Формы записи комплексного числа

Алгебраическая
форма
записи

Показательная
форма
записи

$$\overbrace{x + iy} = \underbrace{\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{\text{Тригонометрическая форма записи}} = \overbrace{\rho e^{i\varphi}}^{\text{Показательная форма записи}}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Рассмотрим пример?

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Рассмотрим пример?

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. Это формула легко доказывается **методом математической индукции**.

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. *База индукции.*

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. *База индукции.*

При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. База индукции.

При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. База индукции.

При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n =$$

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. *База индукции.*

При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n-1} (\cos \varphi + i \sin \varphi) =$$

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. *База индукции.*

При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n-1} (\cos \varphi + i \sin \varphi) =$$

(по предположению индукции)

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. *База индукции.*

При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n-1} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (\cos (n-1)\varphi + i \sin (n-1)\varphi) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \end{aligned}$$

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. База индукции.

При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n-1} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (\cos (n-1)\varphi + i \sin (n-1)\varphi) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \end{aligned}$$

(по **правилу умножения векторов комплексной плоскости**)

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. *База индукции.*

При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n-1} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (\cos (n-1)\varphi + i \sin (n-1)\varphi) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \end{aligned}$$

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доказательство. *База индукции.*

При $n = 1$ левая и правая части равенства (3) тождественны.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для любого m с условием $1 \leq m < n$ формула (3) верна. Тогда

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n-1} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (\cos (n-1)\varphi + i \sin (n-1)\varphi) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \end{aligned}$$

Формула (3) доказана.

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Из этой формулы можно вывести следующую формулу для извлечения корней из комплексных чисел:

$$\left(\rho e^{i(\varphi+2k\pi)} \right)^{1/n} = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Рассмотрим пример?

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Из этой формулы можно вывести следующую формулу для извлечения корней из комплексных чисел:

$$\left(\rho e^{i(\varphi+2k\pi)} \right)^{1/n} = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Последняя формула в соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций** позволяет в качестве перспективного направления исследований выделить изучение

VI. Формула Муавра

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \text{ т.е. } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Из этой формулы можно вывести следующую формулу для извлечения корней из комплексных чисел:

$$\left(\rho e^{i(\varphi+2k\pi)} \right)^{1/n} = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Последняя формула в соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных»** ситуаций позволяет в качестве перспективного направления исследований выделить изучение

корней степени n из 1.

Рассмотрим пример?

VII. Корни степени n из 1

С чего начать изучение корней степени n из 1?

VII. Корни степени n из 1

С чего начать изучение корней степени n из 1?

Можно получить следствия из **формулы Муавра** («дедуктивный метод») или

VII. Корни степени n из 1

С чего начать изучение корней степени n из 1?

Можно получить следствия из **формулы Муавра** («дедуктивный метод») или сформировать перспективные гипотезы на основании различных примеров («индуктивный метод»).

VII. Корни степени n из 1

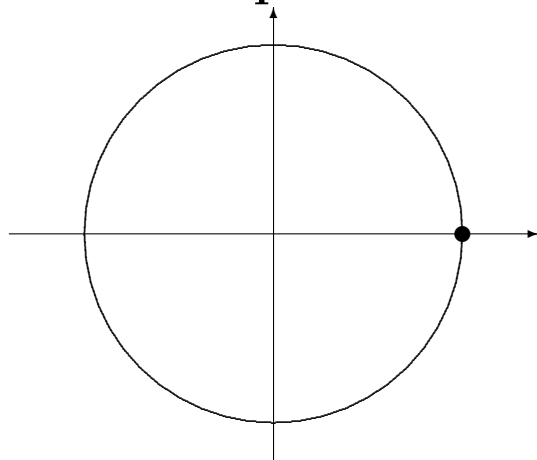
С чего начать изучение корней степени n из 1?

Можно получить следствия из **формулы Муавра** («дедуктивный метод») или сформировать перспективные гипотезы на основании различных примеров («индуктивный метод»).

Применим второй метод.

VII.1. Корни степени 4 из 1

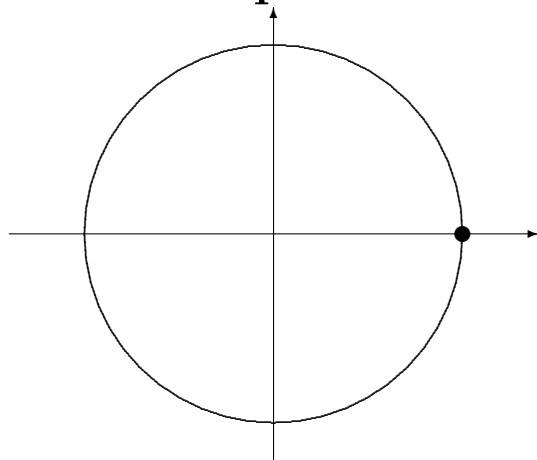
Корни степени 4 из 1 имеют вид



$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{???i}} =$$

VII.1. Корни степени 4 из 1

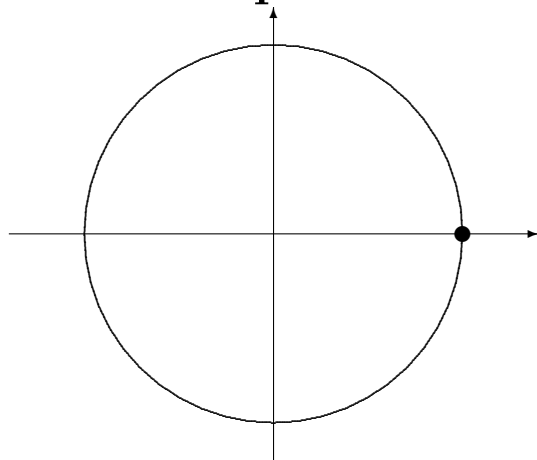
Корни степени 4 из 1 имеют вид



$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} =$$

VII.1. Корни степени 4 из 1

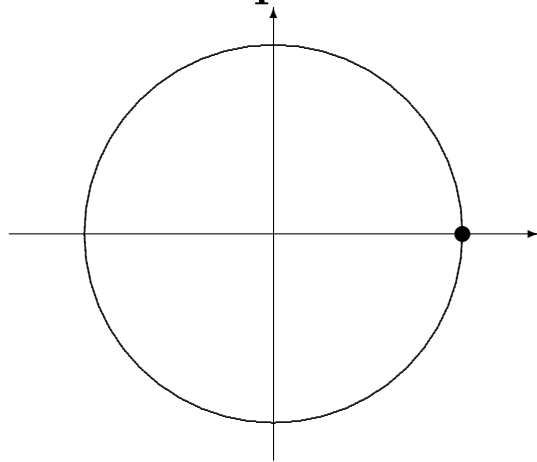
Корни степени 4 из 1 имеют вид



$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

VII.1. Корни степени 4 из 1

Корни степени 4 из 1 имеют вид

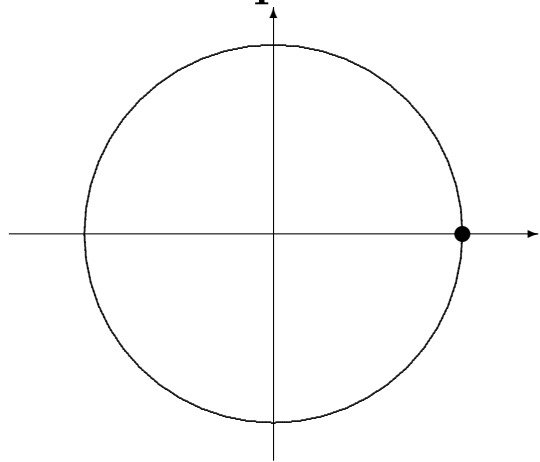


$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \Rightarrow e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 =$$

VII.1. Корни степени 4 из 1

Корни степени 4 из 1 имеют вид
1,

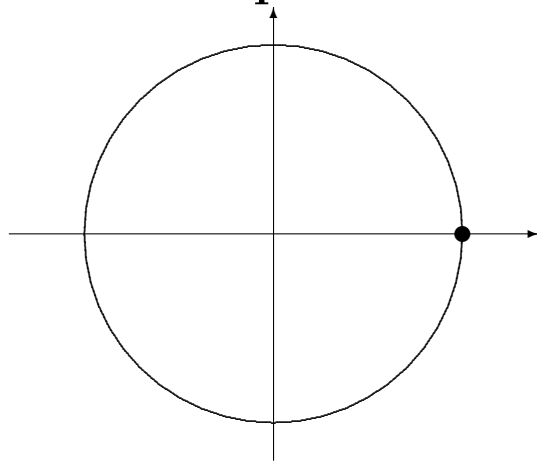


$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \Rightarrow e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1

Корни степени 4 из 1 имеют вид
1,

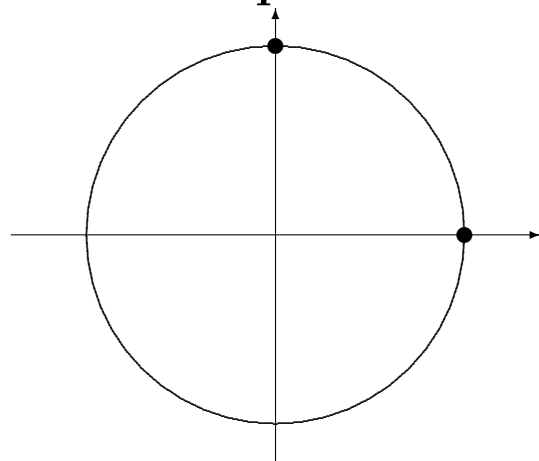


$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \Rightarrow e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \Rightarrow e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} =$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



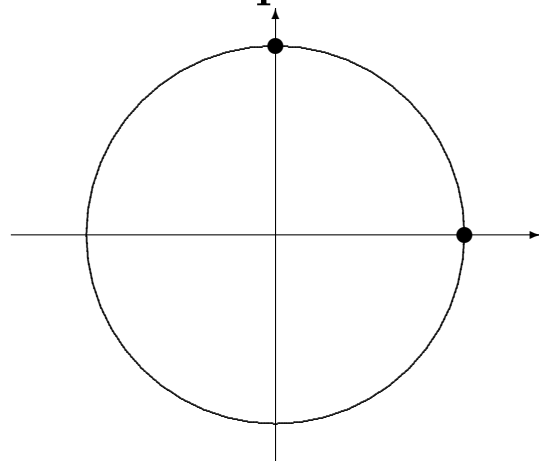
Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i,$

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \Rightarrow e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \Rightarrow e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i,$

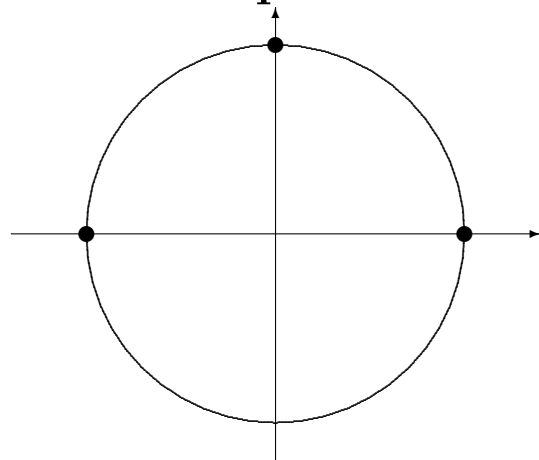
$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \Rightarrow e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \Rightarrow e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2 \Rightarrow e^{2\pi i/2} = \cos \pi + i \sin \pi =$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1),$

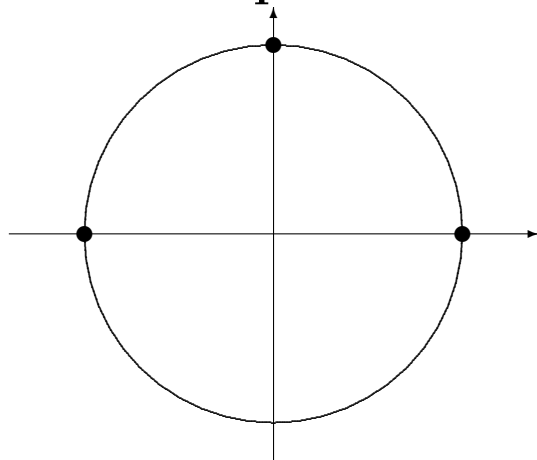
$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \Rightarrow e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \Rightarrow e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2 \Rightarrow e^{2\pi i/2} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1),$

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

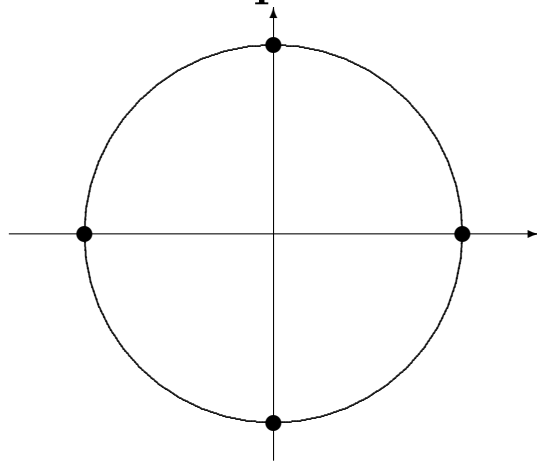
$$k = 0 \Rightarrow e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \Rightarrow e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2 \Rightarrow e^{2\pi i/2} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$k = 3 \Rightarrow e^{3\pi i/2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} =$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{k\pi i/2}.$$

$$k = 0 \Rightarrow e^{0\pi i/2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

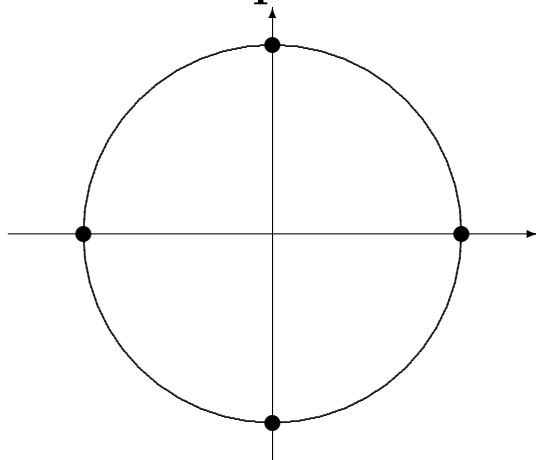
$$k = 1 \Rightarrow e^{1\pi i/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2 \Rightarrow e^{2\pi i/2} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

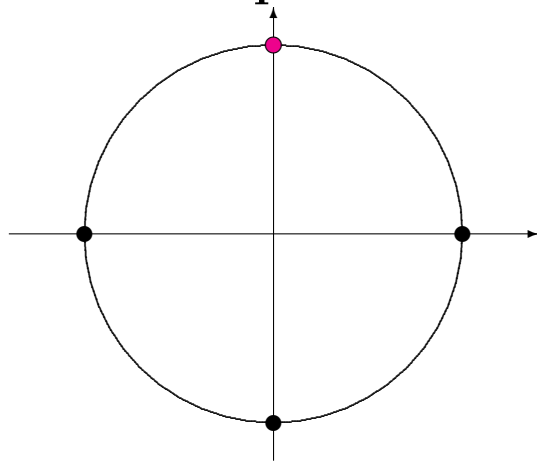
$$k = 3 \Rightarrow e^{3\pi i/2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

VII.1. Корни степени 4 из 1

Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.



VII.1. Корни степени 4 из 1

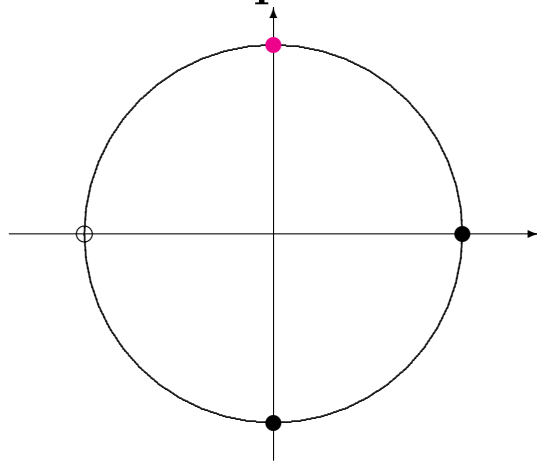


Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1, i, (-1), (-i).$

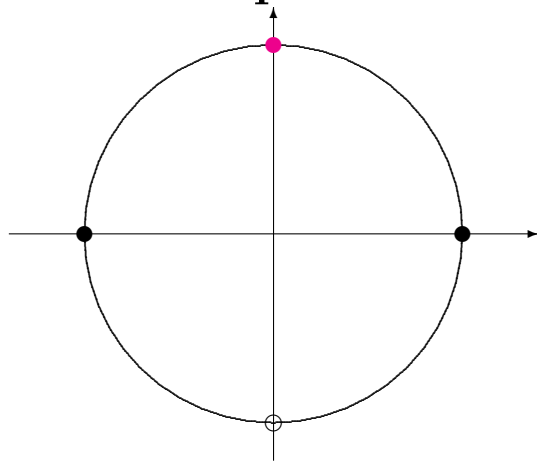
$$i^1 = i,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.
 $i^1 = i, \quad i^2 = -1,$

VII.1. Корни степени 4 из 1

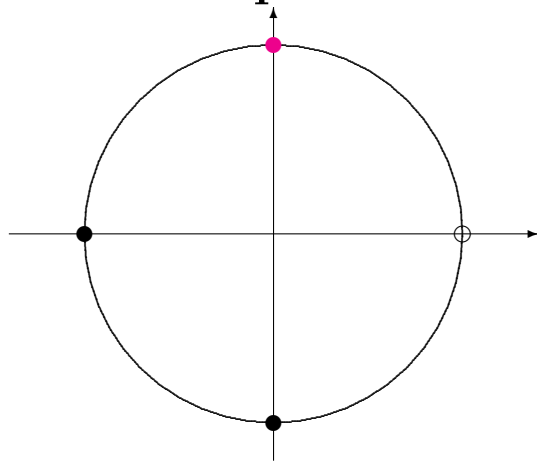


Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i,$$

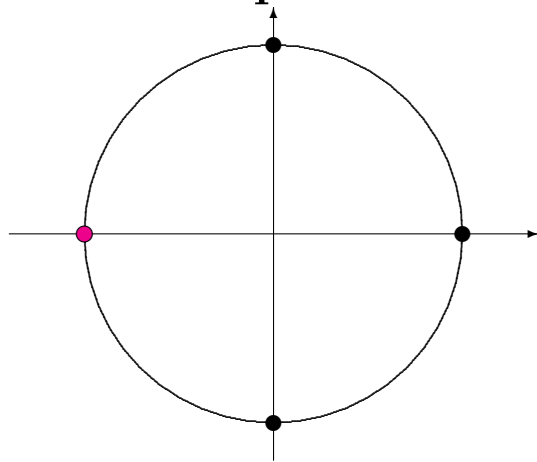
VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

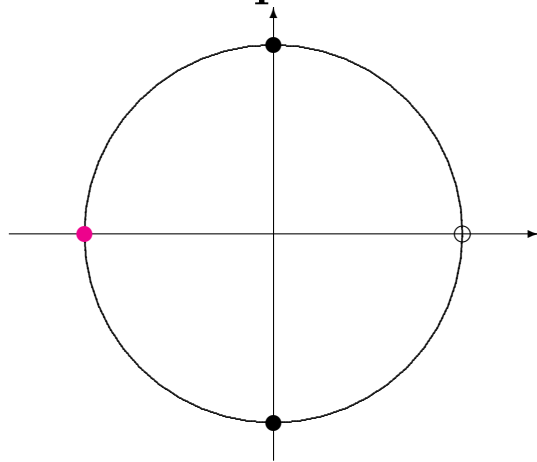
VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \\ (-1)^1 = -1,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1

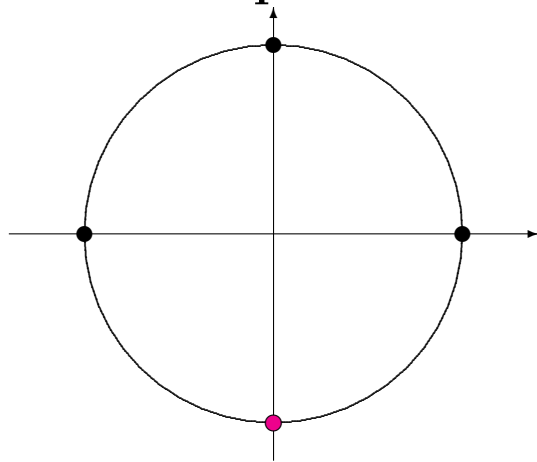


Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



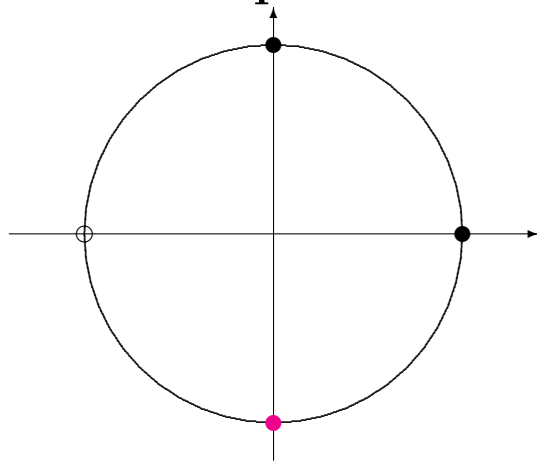
Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$$

$$(-i)^1 = -i,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



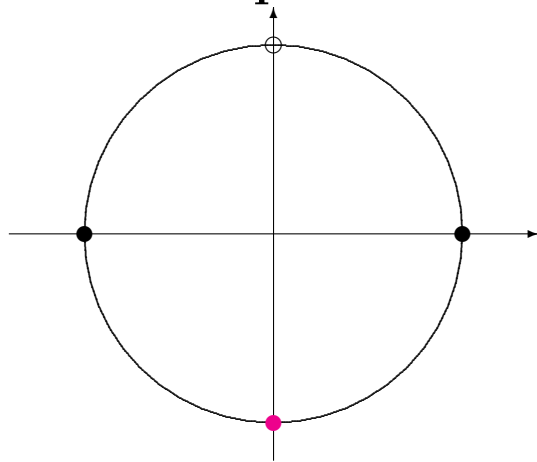
Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$$

$$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



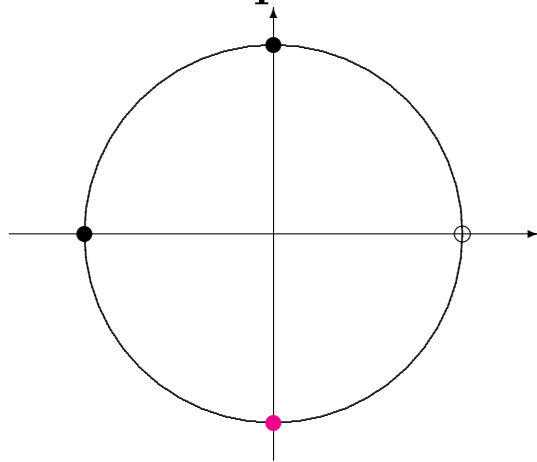
Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$$

$$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид

$1, i, (-1), (-i).$

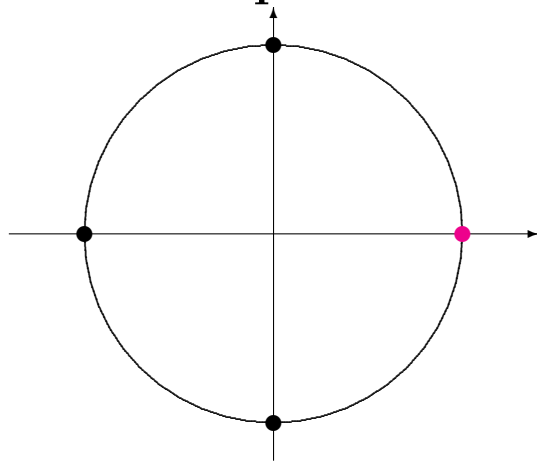
$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$$

$$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$$

$$(-i)^4 = 1.$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$$

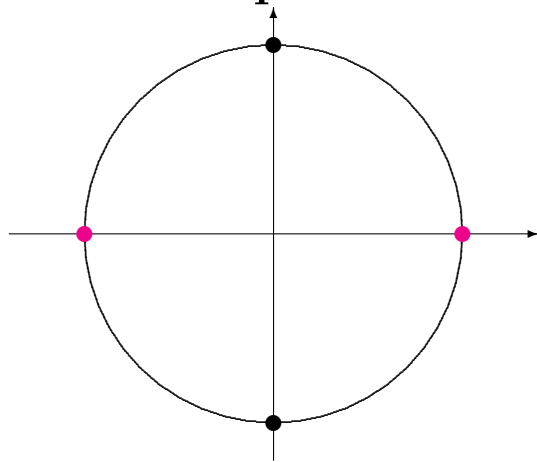
$$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$$

$$(-i)^4 = 1.$$

Таким образом, среди корней степени 4 из 1 некоторые числа обращаются в ноль в степени, меньшей 4:

$$1^1 = 1,$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$$

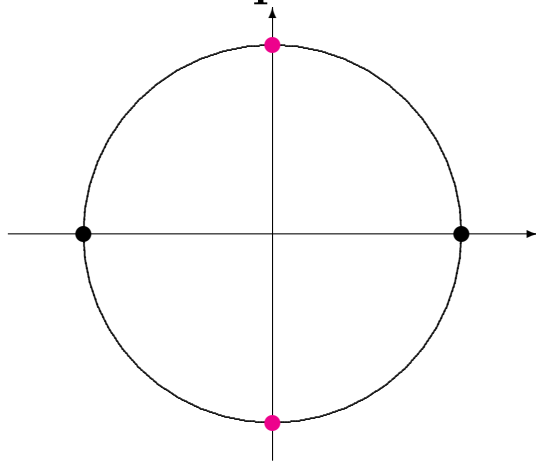
$$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$$

$$(-i)^4 = 1.$$

Таким образом, среди корней степени 4 из 1 некоторые числа обращаются в ноль в степени, меньшей 4:

$$1^1 = 1, \quad (-1)^2 = 1.$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$$

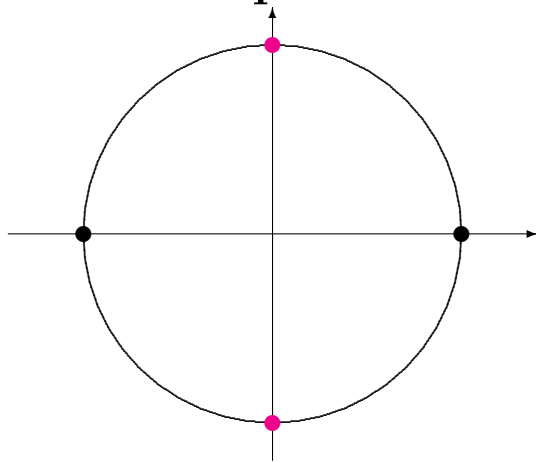
$$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$$

$$(-i)^4 = 1.$$

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** наибольший интерес представляют те корни z степени 4 из 1, для которых

$$m \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow z^m \neq 1.$$

VII.1. Корни степени 4 из 1



Корни степени 4 из 1 имеют вид
 $1, i, (-1), (-i)$.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1,$$

$$(-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i,$$

$$(-i)^4 = 1.$$

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** наибольший интерес представляют те корни z степени 4 из 1, для которых

$$m \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow z^m \neq 1.$$

В рассмотренном случае получилось, что любой корень степени 4 из 1 представляется в виде i^k и в виде $(-i)^m$.

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n - 1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется первообразным корнем тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n - 1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Рассмотрим пример?

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется первообразным корнем тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(k; n) = 1$.

Доказательство.

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^q =$$

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} =$$

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} =$$

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pn\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2n\pi}{n}}\right)^p =$$

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} &\Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pn\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2n\pi}{n}}\right)^p = \\ &= \left(e^{i2\pi}\right)^p = \end{aligned}$$

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} &\Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pn\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2n\pi}{n}}\right)^p = \\ &= \left(e^{i2\pi}\right)^p = 1^p = \end{aligned}$$

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} &\Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^q = e^{i\frac{2kq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pdq\pi}{n}} = e^{i\frac{2pn\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2n\pi}{n}}\right)^p = \\ &= \left(e^{i2\pi}\right)^p = 1^p = 1. \end{aligned}$$

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^q = 1.$$

В силу **формулы (5)** q не может быть меньше n .

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^q = 1.$$

В силу **формулы (5)** q не может быть меньше n .

Значит, $q = n$, поэтому

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Доказательство. Пусть $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ — первообразный корень, и **НОД**($k; n$) = d . Тогда

$$\begin{cases} k = pd, \\ n = qd \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^q = 1.$$

В силу **формулы (5)** q не может быть меньше n .

Значит, $q = n$, поэтому **НОД**($k; n$) = 1.

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД** $(k; n) = 1$.

Доказательство. Обратное утверждение легко доказать методом «от противного», сделайте это самостоятельно.

VII.2. Первообразные корни из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда **НОД**($k; n$) = 1.

Вычислить количество первообразных корней степени n из 1 можно с помощью **функции Эйлера**, используя **теорему о вычислении функции Эйлера**.

VII.3. Теорема о степенях первообразного корня

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется первообразным корнем тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(k; n) = 1$.

Теорема 2 (о степенях первообразного корня). Если ξ — первообразный корень степени n из 1, то

$$z^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists k \left\{ \begin{array}{l} k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}, \\ \xi^k = z. \end{array} \right.$$

VII.3. Теорема о степенях первообразного корня

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется первообразным корнем тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 1 (критерий первообразности корня). Корень $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ из 1 является первообразным тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(k; n) = 1$.

Теорема 2 (о степенях первообразного корня). Если ξ — первообразный корень степени n из 1, то

$$z^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists k \left\{ \begin{array}{l} k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}, \\ \xi^k = z. \end{array} \right.$$

Доказательство. Это следствие из **критерия первообразности корня** и **следствия о представлении Н.О.Д.**

VII.4. Теорема о группе корней из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 2 (о степенях первообразного корня). Если ξ — первообразный корень степени n из 1, то

$$z^n = 1 \Rightarrow \exists k \begin{cases} k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}, \\ \xi^k = z. \end{cases}$$

Теорема 3 (о группе корней из 1). Пусть n — натуральное число. Множество комплексных корней степени n из 1 является **циклической группой** относительно операции умножения комплексных чисел.

Доказательство.

VII.4. Теорема о группе корней из 1

Определение 2. Корень z степени n из 1 называется **первообразным корнем** тогда и только тогда, когда

$$m \in \{1; 2; \dots; (n-1)\} \Rightarrow z^m \neq 1. \quad (5)$$

Теорема 2 (о степенях первообразного корня). Если ξ — первообразный корень степени n из 1, то

$$z^n = 1 \Rightarrow \exists k \begin{cases} k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}, \\ \xi^k = z. \end{cases}$$

Теорема 3 (о группе корней из 1). Пусть n — натуральное число. Множество комплексных корней степени n из 1 является **циклической группой** относительно операции умножения комплексных чисел.

Доказательство. Это следствие из **теоремы о степенях первообразного корня** и **примера конечной циклической группы**.

Матричное и теоретико-множественное представление комплексных чисел

Мы рассмотрели **представление комплексных чисел в виде многочленов** от переменной i (в электротехнике и радиоэлектронике рассматриваются многочлены от j), и **представление комплексных чисел как векторов комплексной плоскости**. В некоторых случаях применяются другие трактовки термина «комплексное число». Мы рассмотрим **теоретико-множественное** и **матричное** представления.

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

1. $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c);$

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

1. $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c);$
2. $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d);$

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

1. $(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c);$
2. $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d);$
3. $\overline{(a; b)} = (a; -b).$

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

$$1. (a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c);$$

$$2. (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d);$$

$$3. \overline{(a; b)} = (a; -b).$$

Роль мнимой единицы играет пара

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

$$1. (a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c);$$

$$2. (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d);$$

$$3. \overline{(a; b)} = (a; -b).$$

Роль мнимой единицы играет пара $(0; 1)$, поскольку

$$(0; 1) \cdot (0; 1) =$$

Теоретико-множественное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении комплексное число трактуется как упорядоченная пара действительных чисел $(a; b)$. Таким образом, в данном представлении множество комплексных чисел совпадает с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Определим операции $+$, $\cdot$ и $\overline{}$ формулами:

$$1. (a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c);$$

$$2. (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d);$$

$$3. \overline{(a; b)} = (a; -b).$$

Роль мнимой единицы играет пара $(0; 1)$, поскольку $(0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0)$.

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} =$$

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} =$$

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -b_1 a_2 - a_1 b_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -b_1 a_2 - a_1 b_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

Комплексное сопряжение на языке матричной алгебры определяется формулой

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -b_1 a_2 - a_1 b_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

Комплексное сопряжение на языке матричной алгебры определяется формулой $\overline{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -b_1 a_2 - a_1 b_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

В роли мнимой единицы в этой алгебре выступает матрица

Матричное представление алгебры комплексных чисел

В данном представлении под комплексными числами понимаются матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа.

Сложение в этой алгебре определяется как обычное **сложение матриц**, а **умножение** совпадает с **умножением матриц**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -b_1a_2 - a_1b_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}.$$

В роли мнимой единицы в этой алгебре выступает матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, поскольку, очевидно, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение.

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) =$

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) =$

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,

$(2 + i)(3 - 2i) =$

Сначала найдем вещественную часть...

Пример 1. Вычислите $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - \quad) + i(\quad) =$

Сначала найдем вещественную часть...

Пример 1. Вычислите $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + 1i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - \quad) + i(\quad) =$

Сначала найдем вещественную часть...

Пример 1. Вычислите $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + 1i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i($

Пример 1. Вычислите $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i($

Теперь найдем мнимую часть...

Пример 1. Вычислите $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + \quad) =$

Теперь найдем мнимую часть...

Пример 1. Вычислите $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + 1i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + \quad) =$

Теперь найдем мнимую часть...

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + 1i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) =$

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) = 8 - i$,

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) = 8 - i$,
 $(2 + i) - (3 - 2i) =$

Пример 1. Вычислите $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) = 8 - i$,
 $(2 + i) - (3 - 2i) = 2 - 3 + i(1 - (-2)) =$

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) = 8 - i$,
 $(2 + i) - (3 - 2i) = 2 - 3 + i(1 - (-2)) = -1 + 3i$,

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) = 8 - i$,
 $(2 + i) - (3 - 2i) = 2 - 3 + i(1 - (-2)) = -1 + 3i$,
 $(3 + 5i)(2 - 6i) =$

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) = 8 - i$,
 $(2 + i) - (3 - 2i) = 2 - 3 + i(1 - (-2)) = -1 + 3i$,
 $(3 + 5i)(2 - 6i) = (3 \cdot 2 - 5 \cdot (-6)) +$

Пример 1. *Вычислите* $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) = 8 - i$,
 $(2 + i) - (3 - 2i) = 2 - 3 + i(1 - (-2)) = -1 + 3i$,
 $(3 + 5i)(2 - 6i) = (3 \cdot 2 - 5 \cdot (-6)) + i(3 \cdot (-6) + 5 \cdot 2) =$

Пример 1. Вычислите $(2 + i) + (3 - 2i)$, $(2 + i)(3 - 2i)$,
 $(2 + i) - (3 - 2i)$, $(1 - 2i)(5 + i)$, $(3 + 5i)(2 - 6i)$.

Решение. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$,
 $(2 + i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - (1 \cdot (-2))) + i(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) = 8 - i$,
 $(2 + i) - (3 - 2i) = 2 - 3 + i(1 - (-2)) = -1 + 3i$,
 $(3 + 5i)(2 - 6i) = (3 \cdot 2 - 5 \cdot (-6)) + i(3 \cdot (-6) + 5 \cdot 2) = 36 - 8i$.

Вернуться к лекции?

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение.

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} =$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,
 $\overline{3-2i} =$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,
 $\overline{3-2i} = 3+2i$,

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$\overline{3-2i} = 3+2i$,

$\overline{-4i} =$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,
 $\overline{3-2i} = 3+2i$,
 $\overline{-4i} = 4i$,

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} =$$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} = 7,$$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} = 7,$$

$$\frac{(8-i)}{(3-2i)} =$$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} = 7,$$

$$\frac{(8-i)}{(3-2i)} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} =$$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} = 7,$$

$$\frac{(8-i)}{(3-2i)} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24 - (-2) + i(16 - 3)}{13} =$$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} = 7,$$

$$\frac{(8-i)}{(3-2i)} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24 - (-2) + i(16-3)}{13} = 2+i,$$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} = 7,$$

$$\frac{(8-i)}{(3-2i)} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24 - (-2) + i(16 - 3)}{13} = 2 + i,$$

$$\frac{(7-9i)}{(1-2i)} =$$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} = 7,$$

$$\frac{(8-i)}{(3-2i)} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24 - (-2) + i(16-3)}{13} = 2+i,$$

$$\frac{(7-9i)}{(1-2i)} = \frac{(7-9i)(1+2i)}{1+4} =$$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} = 7,$$

$$\frac{(8-i)}{(3-2i)} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24 - (-2) + i(16-3)}{13} = 2+i,$$

$$\frac{(7-9i)}{(1-2i)} = \frac{(7-9i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{25+5i}{5} =$$

Пример 2. Вычислите $\overline{2+i}$, $\overline{3-2i}$, $\overline{-4i}$, $\overline{7}$, $\frac{(8-i)}{(3-2i)}$,
 $\frac{(7-9i)}{(1-2i)}$.

Решение. $\overline{2+i} = 2-i$,

$$\overline{3-2i} = 3+2i,$$

$$\overline{-4i} = 4i,$$

$$\overline{7} = 7,$$

$$\frac{(8-i)}{(3-2i)} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24 - (-2) + i(16-3)}{13} = 2+i,$$

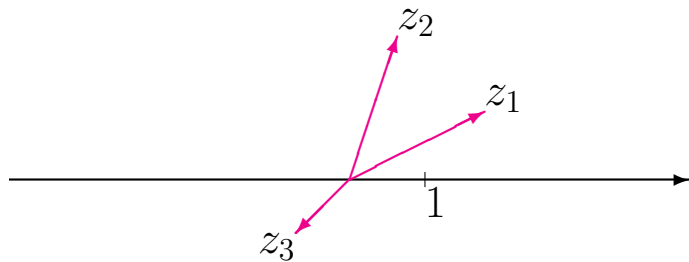
$$\frac{(7-9i)}{(1-2i)} = \frac{(7-9i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{25+5i}{5} = 5+i$$

Вернуться к лекции?

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

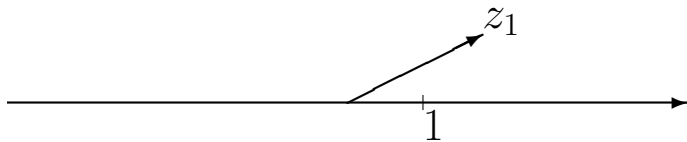
в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;



Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

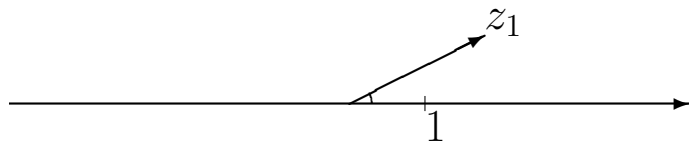


Найдем а) z_1^2 .

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

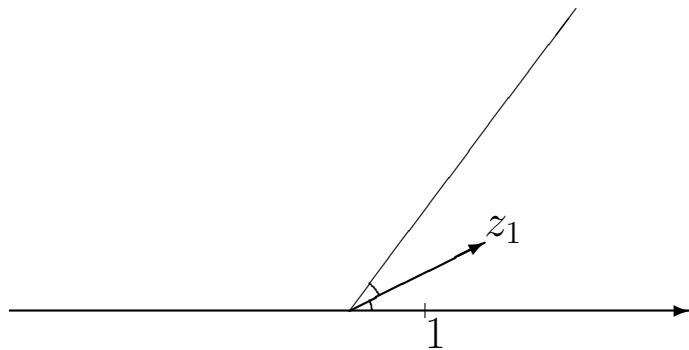


Найдем а) z_1^2 .

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

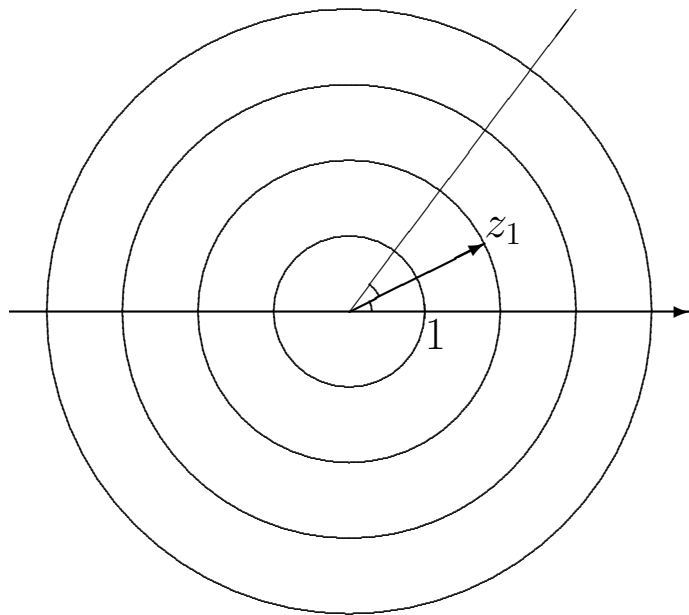


Найдем а) z_1^2 .

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

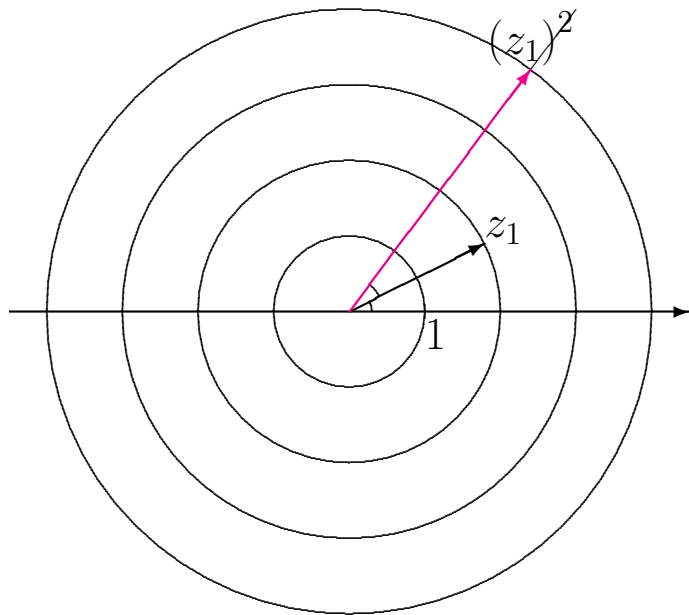


Найдем а) z_1^2 .

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

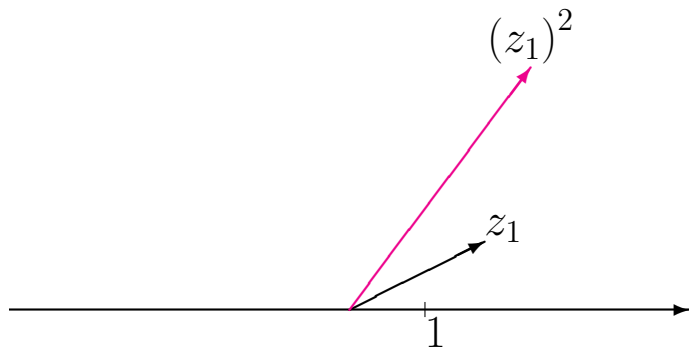
в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;



Найдем а) z_1^2 .

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;
в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

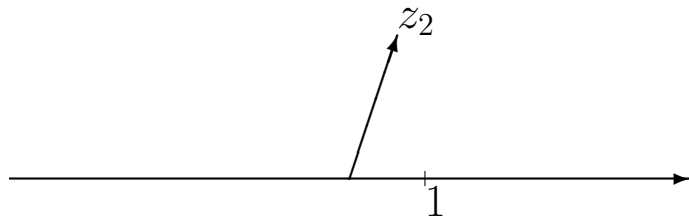


Найдем а) z_1^2 . Искомый вектор найден.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

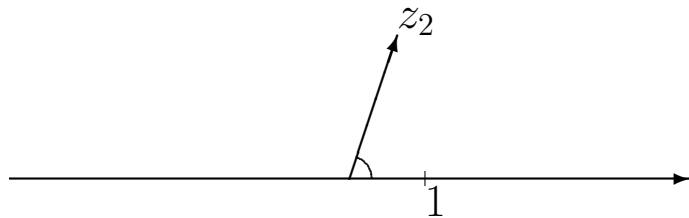


Найдем б) $(z_2)^{-1}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

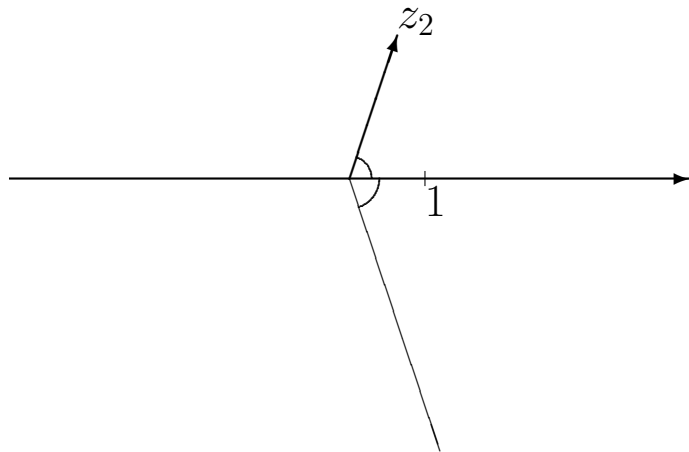


Найдем б) $(z_2)^{-1}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

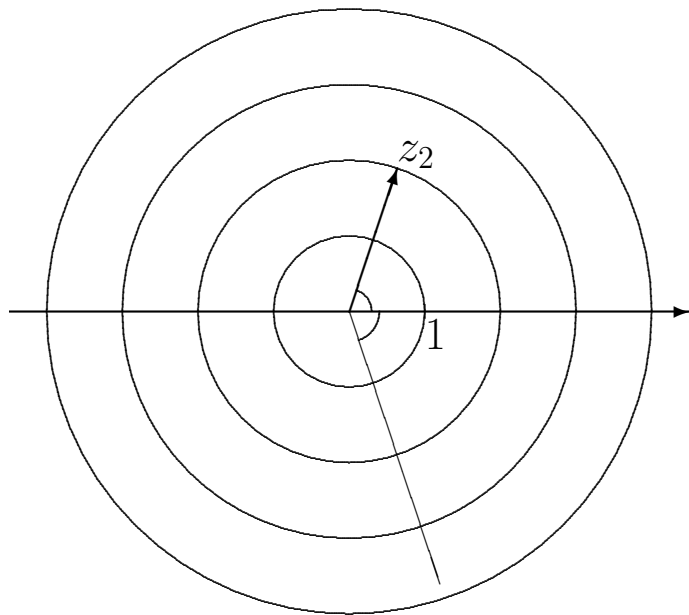


Найдем б) $(z_2)^{-1}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

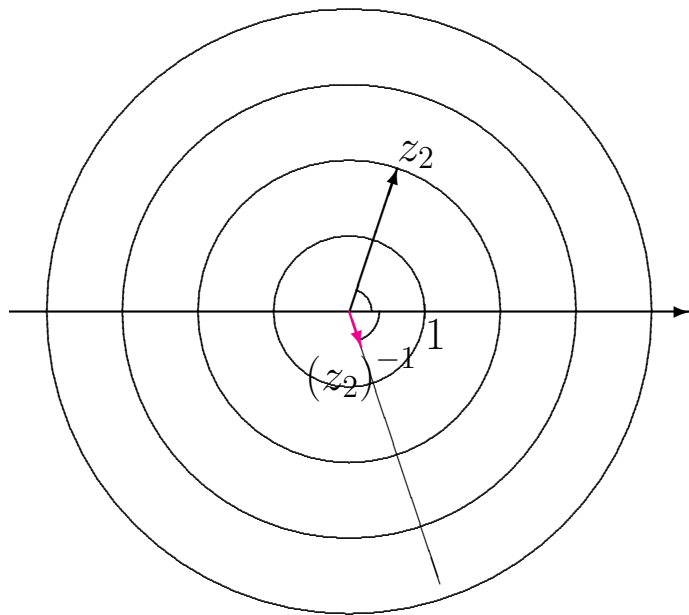


Найдем б) $(z_2)^{-1}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

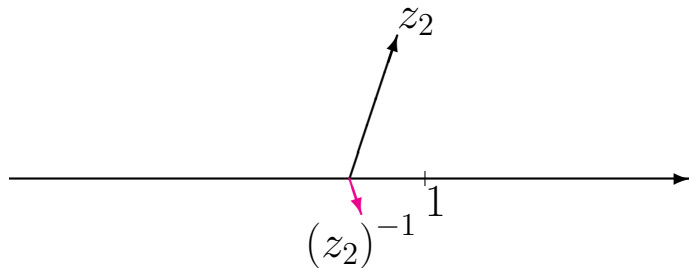


Найдем б) $(z_2)^{-1}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

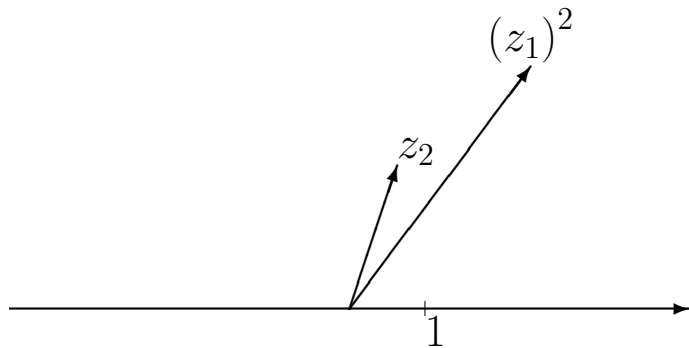


Найдем б) $(z_2)^{-1}$. Искомый вектор найден.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

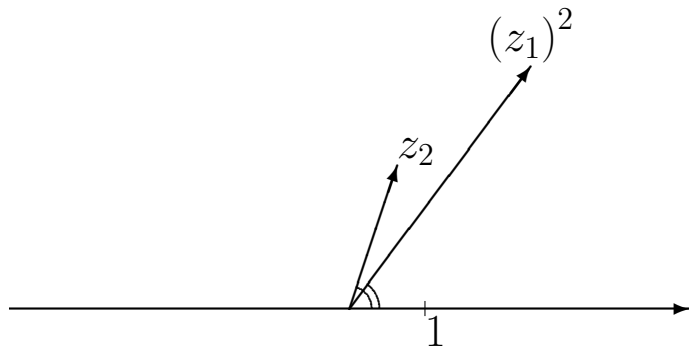


Найдем в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

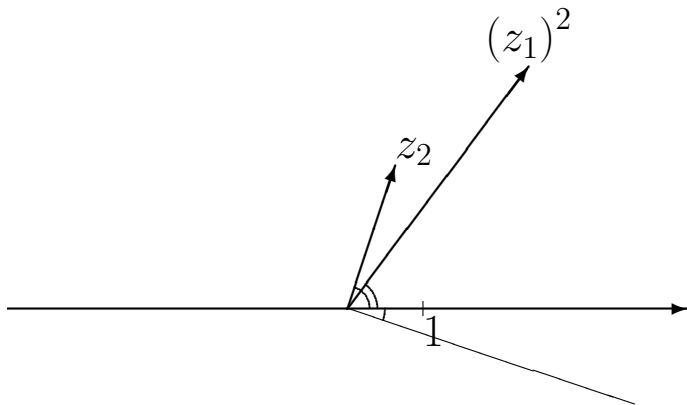


Найдем в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

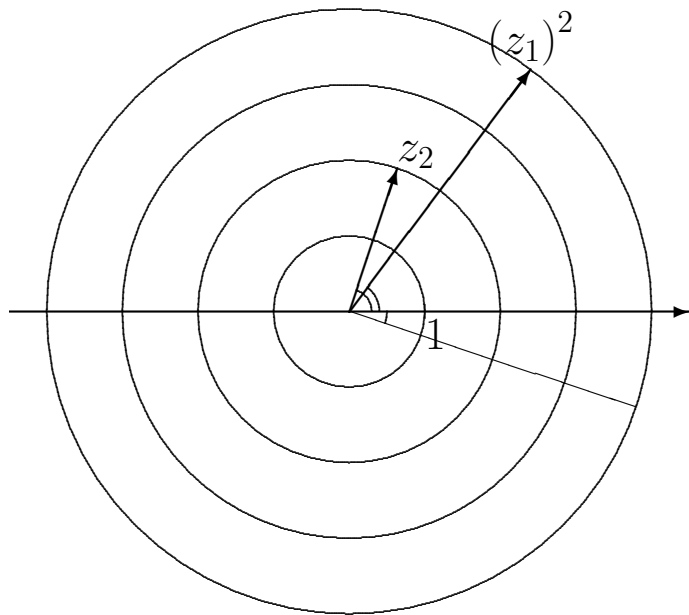


Найдем в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

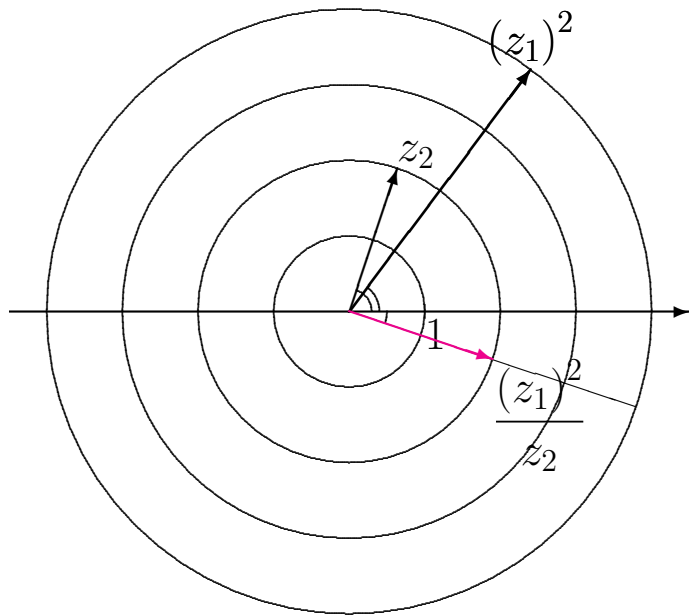
в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;



Найдем в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

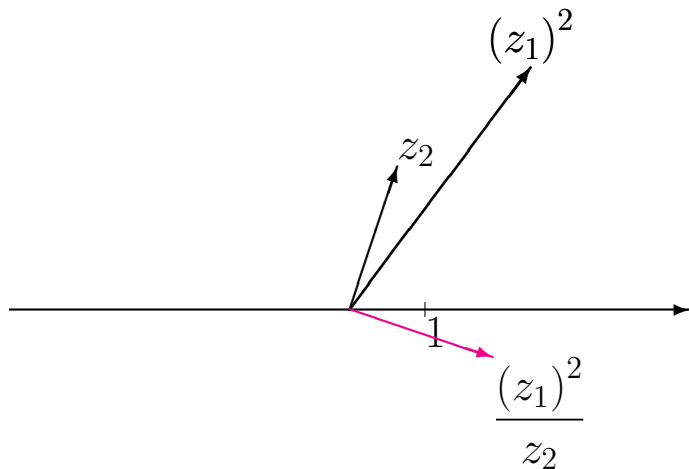
а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;
в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;



Найдем в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; б) $(z_2)^{-1}$;
 в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; г) $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

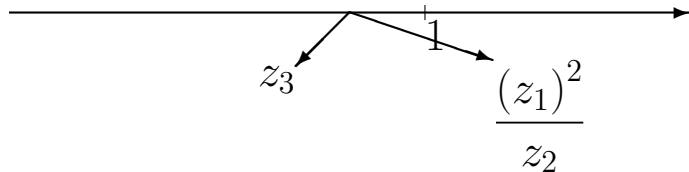


Найдем в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$. Искомый вектор найден.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

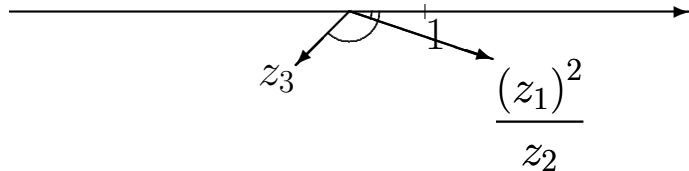


Найдем г) $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

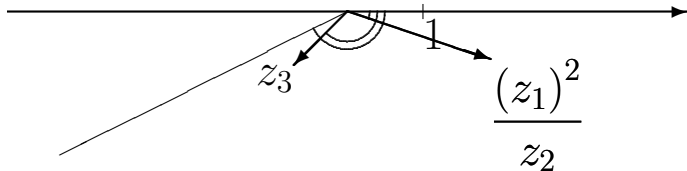


Найдем г) $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

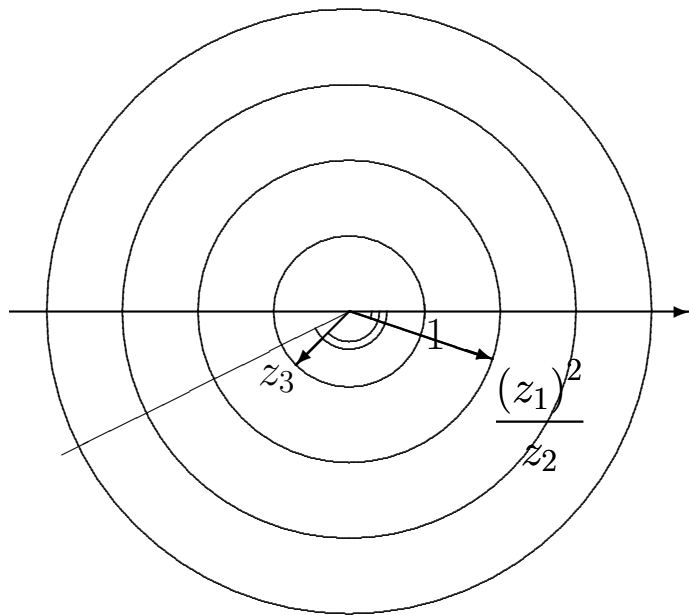
в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;



Найдем г) $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

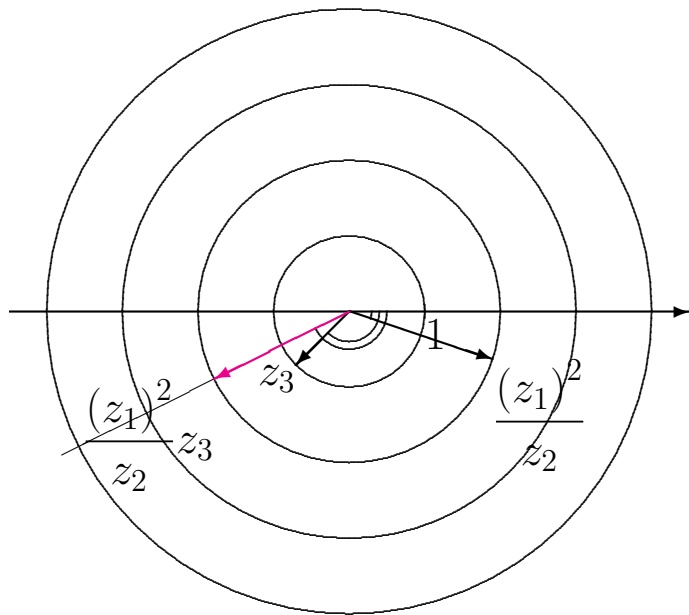
а) $(z_1)^2$; б) $(z_2)^{-1}$;
 в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; г) $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;



Найдем г) $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

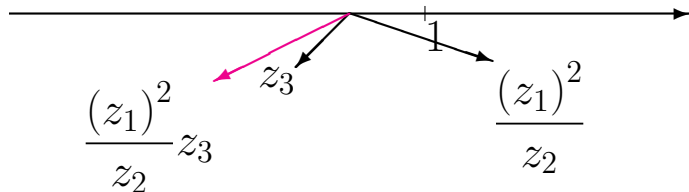
а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;
в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;



Найдем г) $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; б) $(z_2)^{-1}$;
 в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; г) $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;

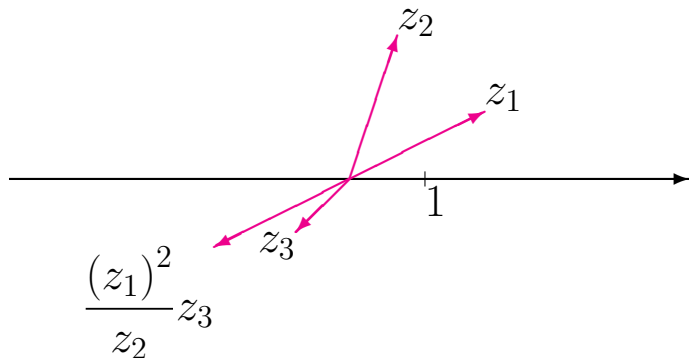


Найдем г) $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$. Искомый вектор найден.

Пример 3. Для векторов на рисунке изобразите:

а) $(z_1)^2$; **б)** $(z_2)^{-1}$;

в) $\frac{(z_1)^2}{z_2}$; **г)** $\frac{(z_1)^2}{z_2} z_3$;



Вернемся к лекции или рассмотрим
комплексное сопряжение в комплексной плоскости?

Пример 4. *Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.*

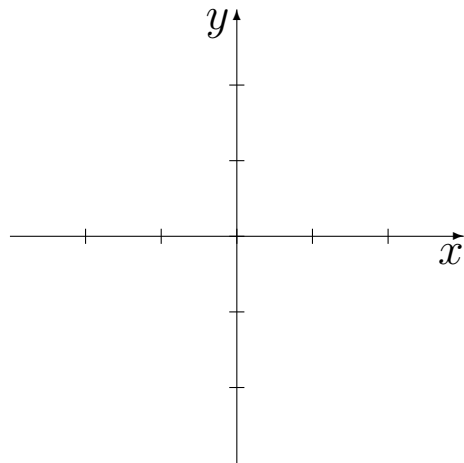
Решение.

Пример 4. *Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.*

Решение. Для формирования гипотезы применим прием конкретизации.

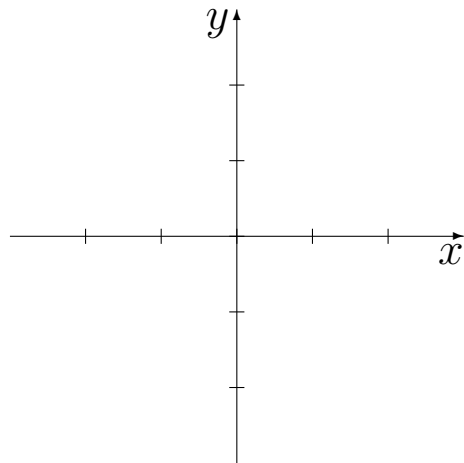
Пример 4. *Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.*

Решение. Возьмем комплексное число $(2 + i)$. Ему в комплексной плоскости соответствует вектор



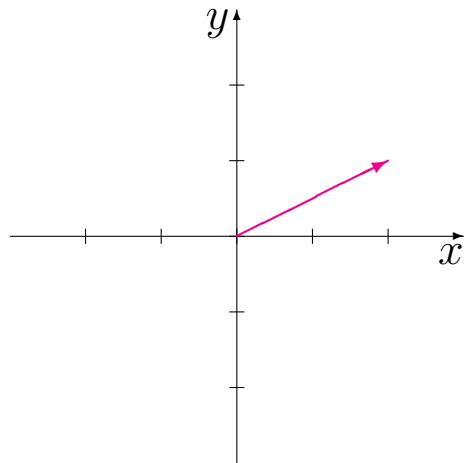
Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Возьмем комплексное число $(2 + i)$. Ему в комплексной плоскости соответствует вектор $2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

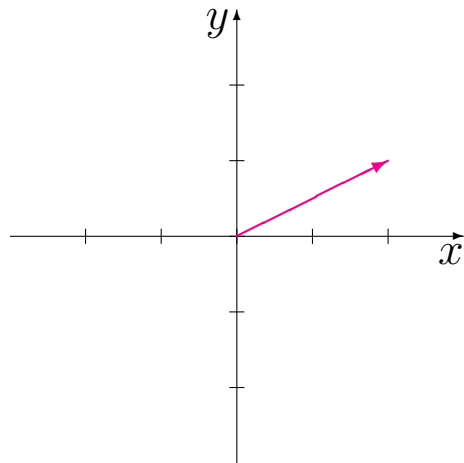
Решение. Возьмем комплексное число $(2 + i)$. Ему в комплексной плоскости соответствует вектор $2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Возьмем комплексное число $(2 + i)$. Ему в комплексной плоскости соответствует вектор $2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$.

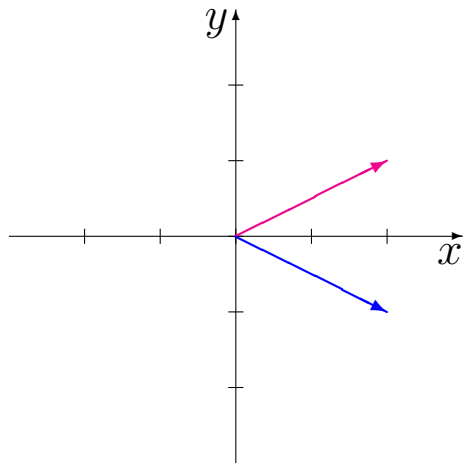
Тогда числу $\overline{2 + i} = 2 - i$ соответствует вектор $2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

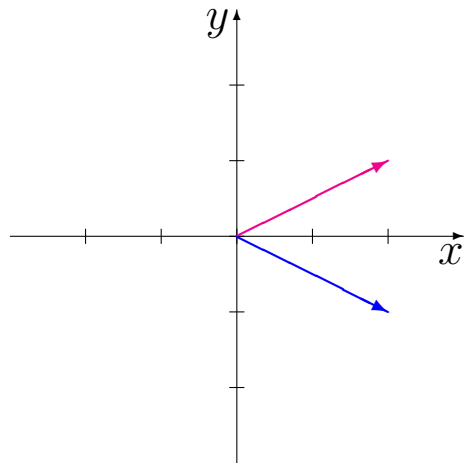
Решение. Возьмем комплексное число $(2 + i)$. Ему в комплексной плоскости соответствует вектор $2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$.

Тогда числу $\overline{2 + i} = 2 - i$ соответствует вектор $2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}$.



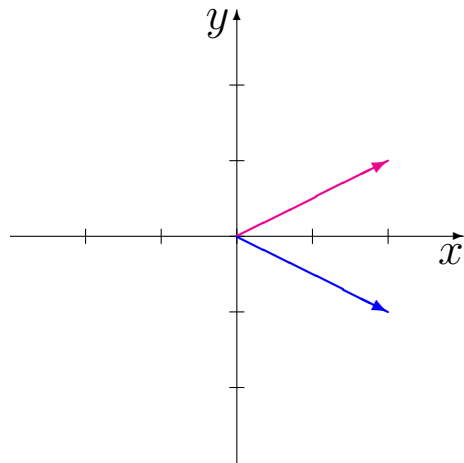
Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-2 + 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор



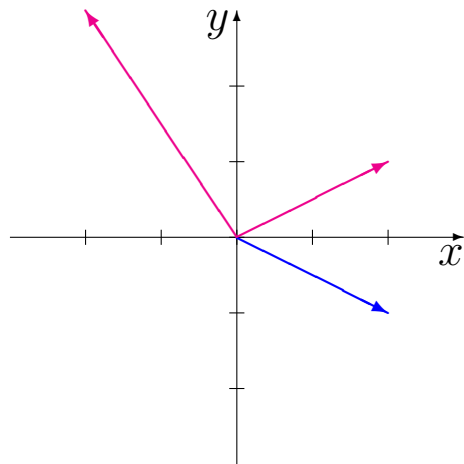
Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-2 + 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

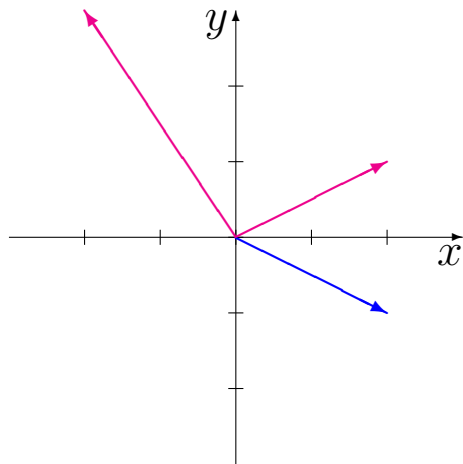
Решение. Комплексному числу $(-2 + 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-2 + 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}$.

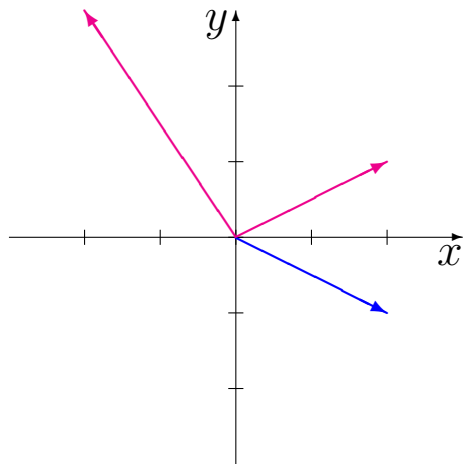
Тогда числу $\overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$ соответствует вектор



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-2 + 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}$.

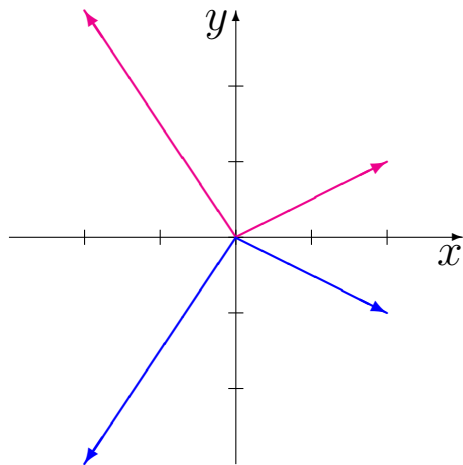
Тогда числу $\overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$ соответствует вектор $-2\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

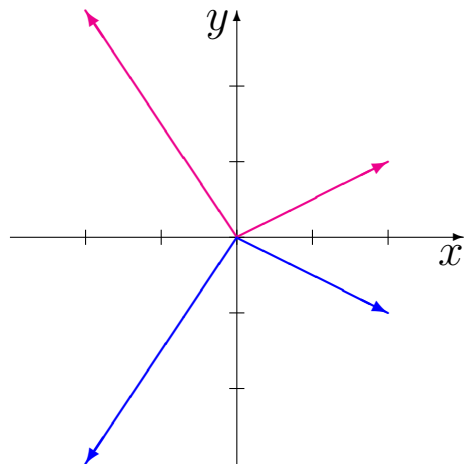
Решение. Комплексному числу $(-2 + 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}$.

Тогда числу $\overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$ соответствует вектор $-2\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}}$.



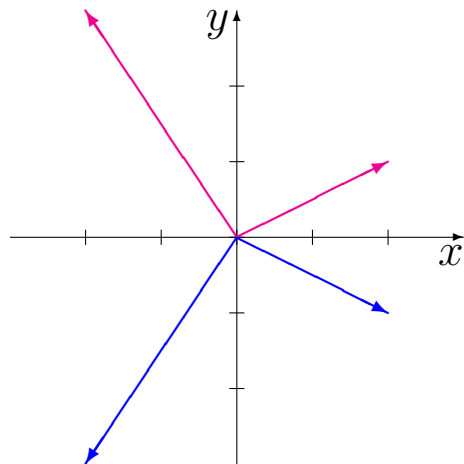
Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(1 - 2i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор



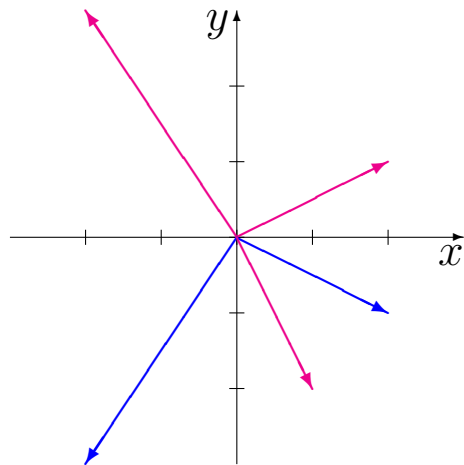
Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(1 - 2i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

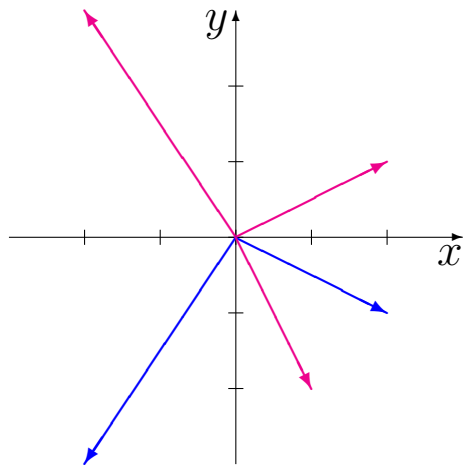
Решение. Комплексному числу $(1 - 2i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $\vec{i} - 2\vec{j}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(1 - 2i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $\vec{i} - 2\vec{j}$.

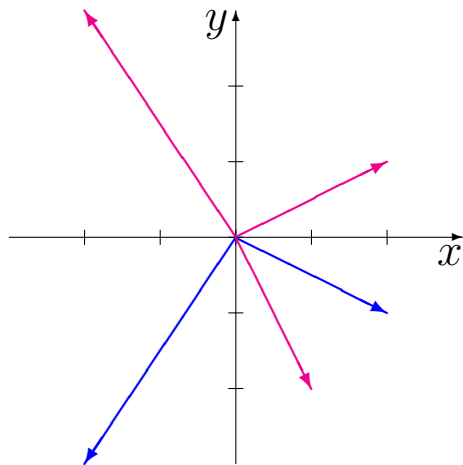
Тогда числу $\overline{1 - 2i} = 1 + 2i$ соответствует вектор



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(1 - 2i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}}$.

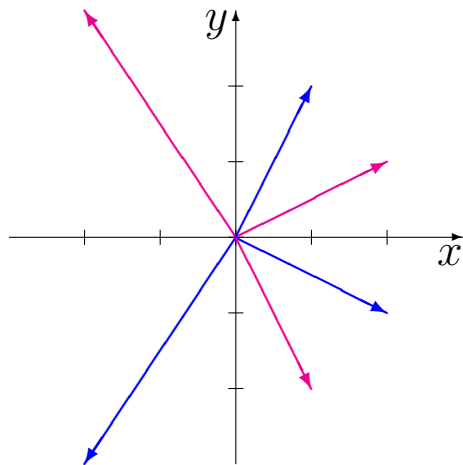
Тогда числу $\overline{1 - 2i} = 1 + 2i$ соответствует вектор $\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

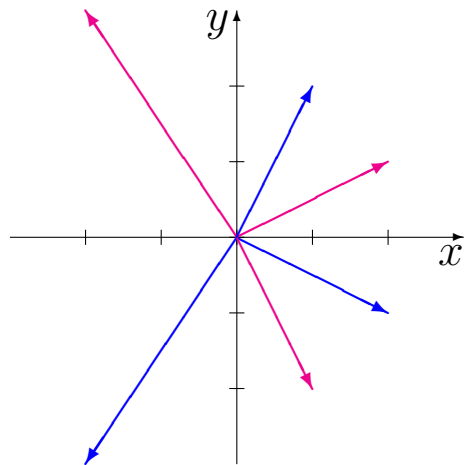
Решение. Комплексному числу $(1 - 2i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}}$.

Тогда числу $\overline{1 - 2i} = 1 + 2i$ соответствует вектор $\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}}$.



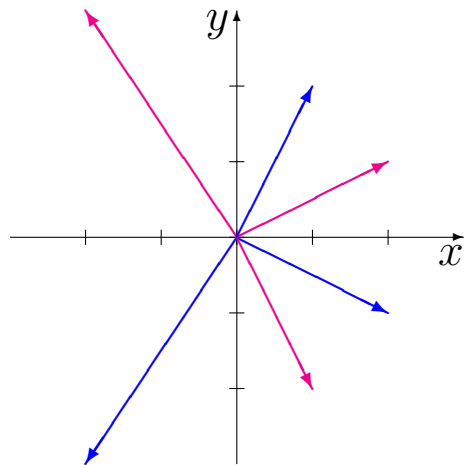
Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-1 - 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор



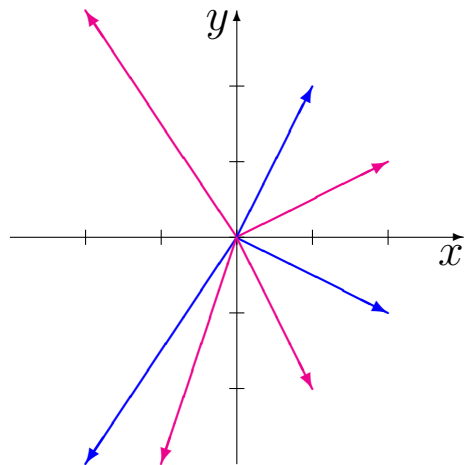
Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-1 - 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-\vec{i} - 3\vec{j}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

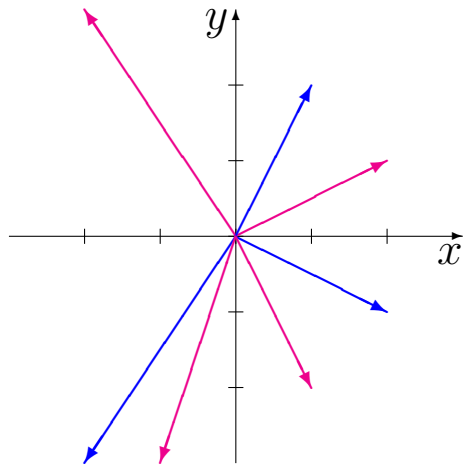
Решение. Комплексному числу $(-1 - 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-\vec{i} - 3\vec{j}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-1 - 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}}$.

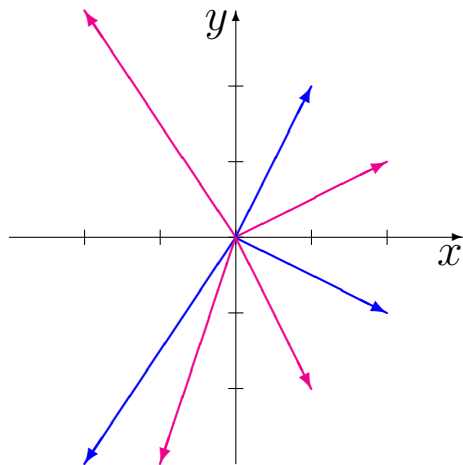
Тогда числу $\overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$ соответствует вектор



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-1 - 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}}$.

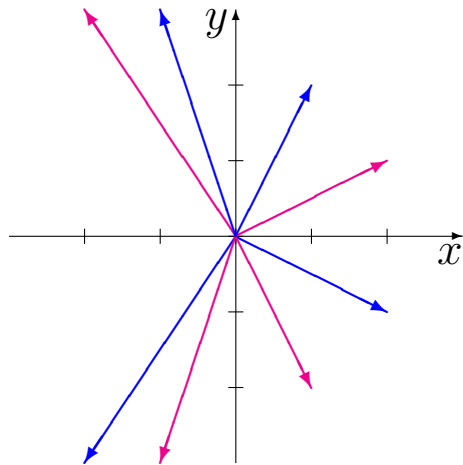
Тогда числу $\overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$ соответствует вектор $-\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-1 - 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}}$.

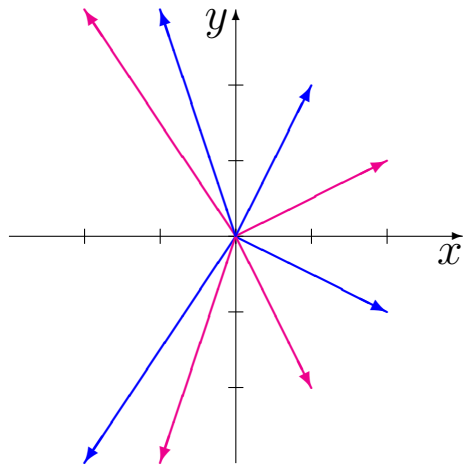
Тогда числу $\overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$ соответствует вектор $-\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}$.



Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-1 - 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}}$.

Тогда числу $\overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$ соответствует вектор $-\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}$.

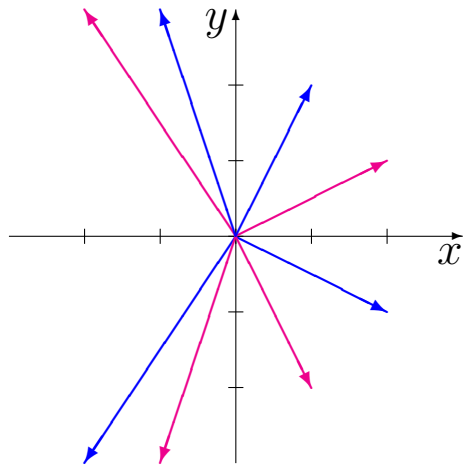


Следовательно, комплексному сопряжению в комплексной плоскости соответствует

Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-1 - 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-\vec{i} - 3\vec{j}$.

Тогда числу $\overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$ соответствует вектор $-\vec{i} + 3\vec{j}$.

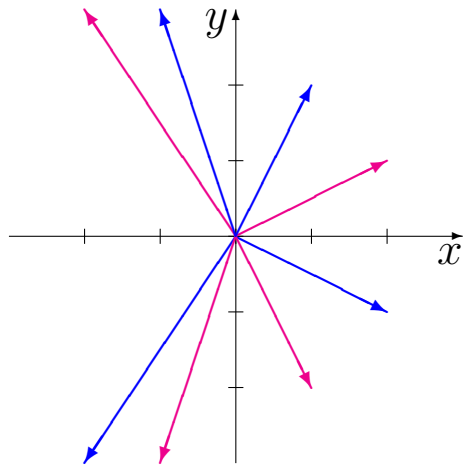


Следовательно, комплексному сопряжению в комплексной плоскости соответствует **зеркальное отражение относительно оси абсцисс, т.е. оси Ox .**

Пример 4. Укажите геометрическую интерпретацию комплексного сопряжения в комплексной плоскости.

Решение. Комплексному числу $(-1 - 3i)$ в комплексной плоскости соответствует вектор $-\vec{i} - 3\vec{j}$.

Тогда числу $\overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$ соответствует вектор $-\vec{i} + 3\vec{j}$.



Следовательно, комплексному сопряжению в комплексной плоскости соответствует **зеркальное отражение относительно оси абсцисс, т.е. оси Ox .**

Вернуться к лекции?

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение. Корни этого многочлена найдем по сокращенной формуле, учитывая четность коэффициента при z :

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение. Корни этого многочлена найдем по сокращенной формуле, учитывая четность коэффициента при z :

$$z = -3 \pm \sqrt{\quad} =$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение. Корни этого многочлена найдем по сокращенной формуле, учитывая четность коэффициента при z :

$$z = -3 \pm \sqrt{9 - 25} =$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение. Корни этого многочлена найдем по сокращенной формуле, учитывая четность коэффициента при z :

$$z = -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm \sqrt{-16} =$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение. Корни этого многочлена найдем по сокращенной формуле, учитывая четность коэффициента при z :

$$z = -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm \sqrt{-16} = -3 \pm 4i.$$

Пример 5. Записать в **алгебраической, тригонометрической и показательной форме** тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение. Корни этого многочлена найдем по сокращенной формуле, учитывая четность коэффициента при z :

$$z = -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm \sqrt{-16} = -3 \pm 4i.$$

Согласно условию, нас интересует корень $(-3 + 4i)$. Мы должны представить его в **тригонометрической форме**

$$-3 + 4i =$$

Пример 5. Записать в **алгебраической, тригонометрической и показательной форме** тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение. Корни этого многочлена найдем по сокращенной формуле, учитывая четность коэффициента при z :

$$z = -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm \sqrt{-16} = -3 \pm 4i.$$

Согласно условию, нас интересует корень $(-3 + 4i)$. Мы должны представить его в **тригонометрической форме**

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Сравнивая вещественную и мнимую части комплексного числа в левой и правой частях равенства $x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получаем систему уравнений:

Пример 5. Записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Сравнивая вещественную и мнимую части комплексного числа в левой и правой частях равенства $x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Сравнивая вещественную и мнимую части комплексного числа в левой и правой частях равенства $x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \end{cases}$$

Пример 5. Записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Сравнивая вещественную и мнимую части комплексного числа в левой и правой частях равенства $x + i y = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \end{cases}$$

Пример 5. Записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Сравнивая вещественную и мнимую части комплексного числа в левой и правой частях равенства $x + i y = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

Пример 5. Записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Сравнивая вещественную и мнимую части комплексного числа в левой и правой частях равенства $x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \text{ в нашем случае } \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \end{cases}$$

Пример 5. Записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Сравнивая вещественную и мнимую части комплексного числа в левой и правой частях равенства $x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \text{ в нашем случае } \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Сравнивая вещественную и мнимую части комплексного числа в левой и правой частях равенства $x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \text{ в нашем случае } \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Легко понять, что

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \end{cases}$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Легко понять, что

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \end{cases}$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Легко понять, что

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2, \end{cases}$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Легко понять, что

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2, \\ \frac{y}{x} = \end{cases}$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Легко понять, что

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2, \\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2, \\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

Тут есть одна тонкость.

Учитывая, что $\rho \geq 0$, величина ρ находится однозначно, в нашем случае она равна $\rho =$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2, \\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

Тут есть одна тонкость.

Учитывая, что $\rho \geq 0$, величина ρ находится однозначно, в нашем случае она равна $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} =$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2, \\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

Тут есть одна тонкость.

Учитывая, что $\rho \geq 0$, величина ρ находится однозначно, в нашем случае она равна $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 25, \\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

Тут есть одна тонкость.

А вот угол φ потребует дополнительных усилий.

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 25, \\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

Тут есть одна тонкость.

А вот угол φ потребует дополнительных усилий. Дело в том, что уравнение $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi$ определяет φ с точностью до $k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, а нам надо определить его с точностью до периода функций $\sin$ и $\cos$, то есть с точностью до

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

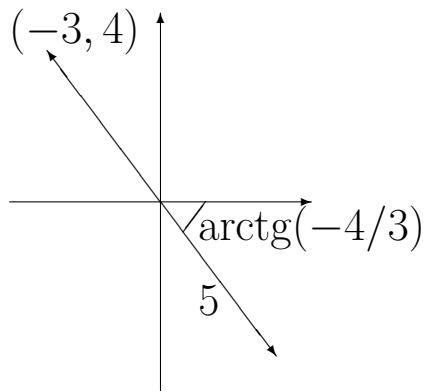
Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = \rho \cos \varphi, \\ 4 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 25, \\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

Тут есть одна тонкость.

А вот угол φ потребует дополнительных усилий. Дело в том, что уравнение $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi$ определяет φ с точностью до $k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, а нам надо определить его с точностью до периода функций $\sin$ и $\cos$, то есть с точностью до $2k\pi$. Покажем, как это можно сделать.



$$Y \text{ на } \operatorname{tg} \varphi = -\frac{4}{3}.$$

Рис. 1

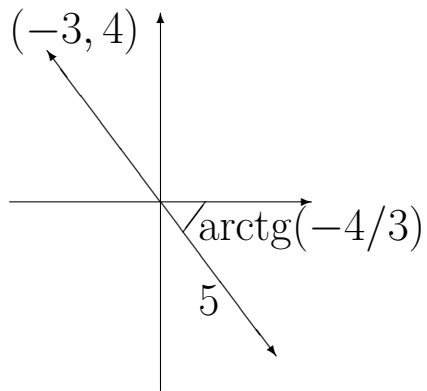


Рис. 1

У нас $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{4}{3}$.

Как известно, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

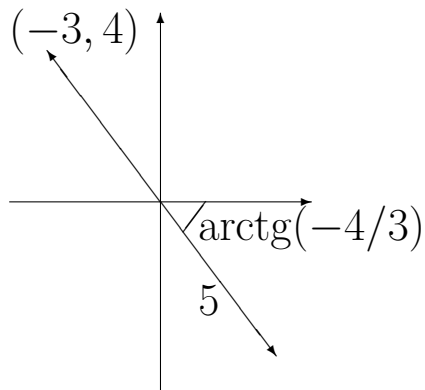


Рис. 1

У нас $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{4}{3}$.

Как известно, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) < 0$
 точка с полярными координатами
 $\left(5, -\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ лежит в четвертой
 четверти.

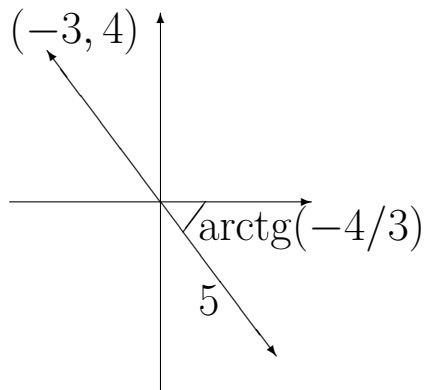


Рис. 1

У нас $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{4}{3}$.

Как известно, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) < 0$
 точка с полярными координатами
 $\left(5, -\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ лежит в четвертой
 четверти.

Но точка с декартовыми координатами $(-3, 4)$, соответствующая
 комплексному числу $-3 + 4i$, лежит во второй четверти.

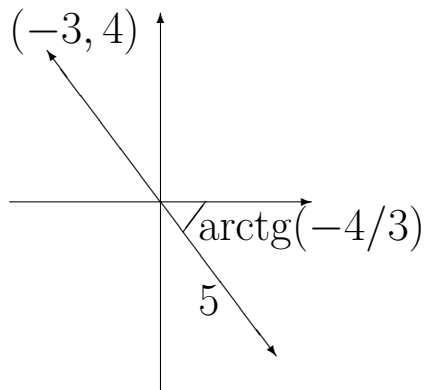


Рис. 1

У нас $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{4}{3}$.

Как известно, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) < 0$
 точка с полярными координатами
 $\left(5, -\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ лежит в четвертой
 четверти.

Но точка с декартовыми координатами $(-3, 4)$, соответствующая комплексному числу $-3 + 4i$, лежит во второй четверти.

Поэтому на самом деле $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = 5 \cos \varphi, \\ 4 = 5 \sin \varphi, \end{cases} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Поэтому на самом деле $\varphi = \pi - \arctg\left(\frac{4}{3}\right) + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Окончательно получаем $-3 + 4i =$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = 5 \cos \varphi, \\ 4 = 5 \sin \varphi, \end{cases} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Поэтому на самом деле $\varphi = \pi - \arctg\left(\frac{4}{3}\right) + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Окончательно получаем $-3 + 4i =$

$$= 5 \left(\cos \left(\pi - \arctg \frac{4}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\pi - \arctg \frac{4}{3} + 2k\pi \right) \right) =$$

Пример 5. Записать в *алгебраической, тригонометрической и показательной форме* тот корень многочлена $z^2 + 6z + 25$, мнимая часть которого положительна.

Решение.

$$-3 + 4i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \begin{cases} -3 = 5 \cos \varphi, \\ 4 = 5 \sin \varphi, \end{cases} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Поэтому на самом деле $\varphi = \pi - \arctg\left(\frac{4}{3}\right) + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Окончательно получаем $-3 + 4i =$

$$\begin{aligned} &= 5 \left(\cos \left(\pi - \arctg \frac{4}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\pi - \arctg \frac{4}{3} + 2k\pi \right) \right) = \\ &= 5e^{i\left(\pi - \arctg \frac{4}{3} + 2k\pi\right)}. \end{aligned}$$

Вернуться к лекции?

Пример 6. Используя *формулу Муавра*, выразите $\cos 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение.

Пример 6. Используя *формулу Муавра*, выразите $\cos 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение. Рассмотрим комплексное число $\cos 3x + i \sin 3x$. Согласно *формуле Муавра*, используя формулу «*бинома Ньютона*» или «*треугольник Паскаля*», получаем

Пример 6. Используя *формулу Муавра*, выразите $\cos 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение. Рассмотрим комплексное число $\cos 3x + i \sin 3x$. Согласно *формуле Муавра*, используя формулу «*бинома Ньютона*» или «*треугольник Паскаля*», получаем

$$\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3 =$$

Пример 6. Используя *формулу Муавра*, выразите $\cos 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение. Рассмотрим комплексное число $\cos 3x + i \sin 3x$. Согласно *формуле Муавра*, используя формулу «*бинома Ньютона*» или «*треугольник Паскаля*», получаем

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x &= (\cos x + i \sin x)^3 = \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x =\end{aligned}$$

Пример 6. Используя **формулу Муавра**, выразите $\cos 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение. Рассмотрим комплексное число $\cos 3x + i \sin 3x$. Согласно **формуле Муавра**, используя формулу «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**», получаем

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x &= (\cos x + i \sin x)^3 = \\&= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x = \\&= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) .\end{aligned}$$

Пример 6. Используя *формулу Муавра*, выразите $\cos 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение. Рассмотрим комплексное число $\cos 3x + i \sin 3x$. Согласно *формуле Муавра*, используя формулу «*бинома Ньютона*» или «*треугольник Паскаля*», получаем

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x &= (\cos x + i \sin x)^3 = \\&= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x = \\&= \underbrace{\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x}_{\cos 3x} + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) .\end{aligned}$$

Пример 6. Используя *формулу Муавра*, выразите $\cos 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение. Рассмотрим комплексное число $\cos 3x + i \sin 3x$. Согласно *формуле Муавра*, используя формулу «*бинома Ньютона*» или «*треугольник Паскаля*», получаем

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x &= (\cos x + i \sin x)^3 = \\&= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x = \\&= \underbrace{\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x}_{\cos 3x} + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) .\end{aligned}$$

Следовательно, $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$.

Вернуться к лекции?

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

Решение.

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

Решение. Представим число $4i$ в показательной форме (в данном случае это легко сделать «в уме»): $4i =$

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

Решение. Представим число $4i$ в показательной форме (в данном случае это легко сделать «в уме»): $4i = 4e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Используя **формулу Муавра**, получаем

$$(4i)^{1/4} =$$

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

Решение. Представим число $4i$ в показательной форме (в данном случае это легко сделать «в уме»): $4i = 4e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Используя **формулу Муавра**, получаем

$$(4i)^{1/4} = \sqrt[4]{4} \cdot \left(e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \right)^{1/4} = \quad k \in \mathbb{Z}.$$

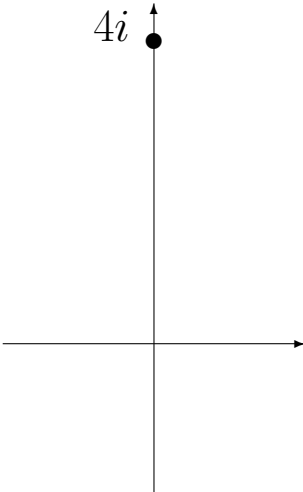
Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

Решение. Представим число $4i$ в показательной форме (в данном случае это легко сделать «в уме»): $4i = 4e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Используя **формулу Муавра**, получаем

$$(4i)^{1/4} = \sqrt[4]{4} \cdot \left(e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \right)^{1/4} = \sqrt[4]{4} \cdot e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 7. *Аналитически и геометрически* найдите все корни 4-й степени из $4i$.

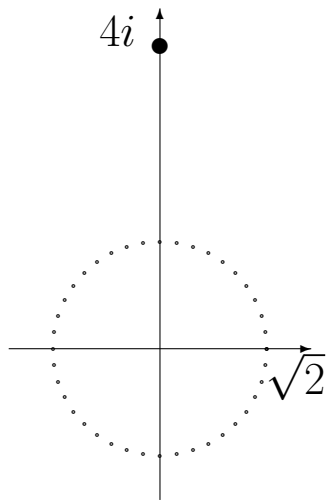
$4i$

A complex plane with a horizontal real axis and a vertical imaginary axis. The origin is at the center. On the positive imaginary axis, there is a point marked with a black dot. The label '4i' is placed to the left of this point. The axes end in arrows.

Решение. Сделаем то же самое геометрическими методами.

Рис. 2

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*



Решение. Имеем $|\sqrt[4]{4i}| = \sqrt{2}$, то есть все корни степени 4 из $4i$ будут лежать на окружности радиуса $\sqrt{2}$.

Рис. 2

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

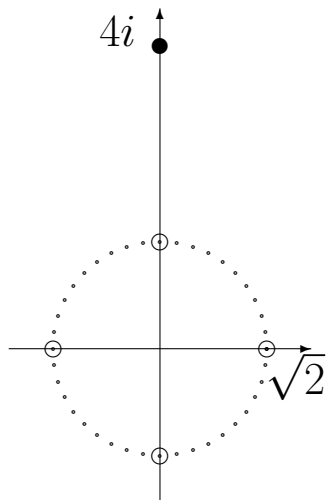


Рис. 2

Решение. Степень корня равна 4, поэтому разделим окружность на 4 равные части таким образом, чтобы одна из точек деления находилась на положительной части оси Ox . Эти точки на рисунке 2 мы отметили кружками, точнее, небольшими окружностями.

Пример 7. *Аналитически и геометрически* найдите все корни 4-й степени из $4i$.

Решение. Аргумент числа $4i$, очевидно, равен $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

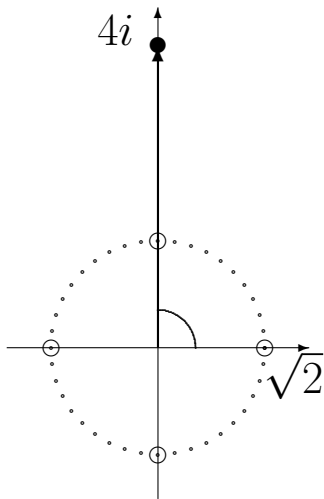
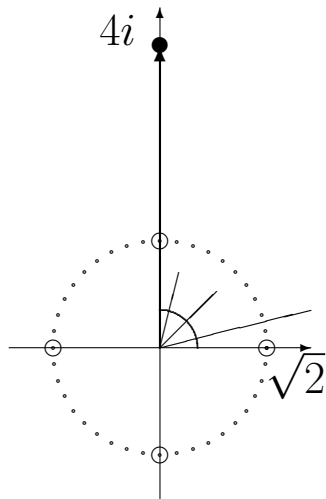


Рис. 2

Пример 7. *Аналитически и геометрически* найдите все корни 4-й степени из $4i$.



Решение. Аргумент числа $4i$, очевидно, равен $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Аргумент любого из искомых корней, как мы знаем, равен $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

Рис. 2

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

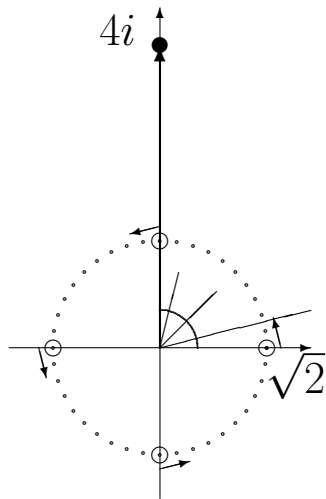


Рис. 2

Решение. Аргумент числа $4i$, очевидно, равен $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Аргумент любого из искомых корней, как мы знаем, равен $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. Поэтому для получения всех нужных корней достаточно повернуть окружность радиуса $\sqrt{2}$ (на которой лежат все искомые корни) на угол $\frac{\pi}{8}$.

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

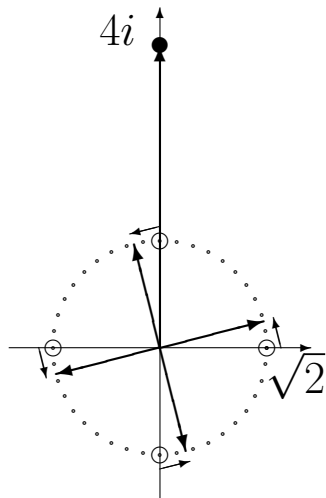


Рис. 2

Решение. При этом полученные ранее 4 кружка займут нужное положение, и мы получим все четыре искомых корня:

$$\cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right), \text{ т.е.}$$

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

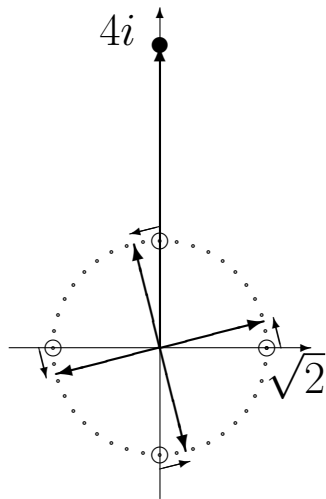


Рис. 2

Решение. При этом полученные ранее 4 кружка займут нужное положение, и мы получим все четыре искомых корня:

$$\cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right), \text{ т.е.}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8},$$

Пример 7. *Аналитически и геометрически найдите все корни 4-й степени из $4i$.*

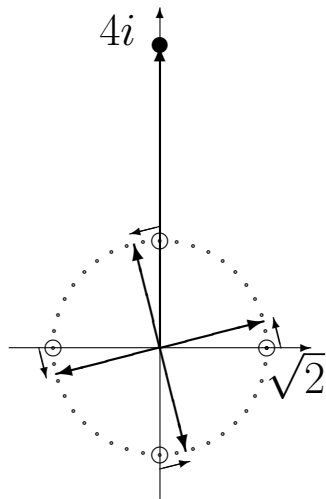


Рис. 2

Решение. При этом полученные ранее 4 кружка займут нужное положение, и мы получим все четыре искомых корня:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right), \text{ т.е.}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}, \quad \cos\frac{5\pi}{8} + i \sin\frac{5\pi}{8},$$

Пример 7. *Аналитически и геометрически* найдите все корни 4-й степени из $4i$.

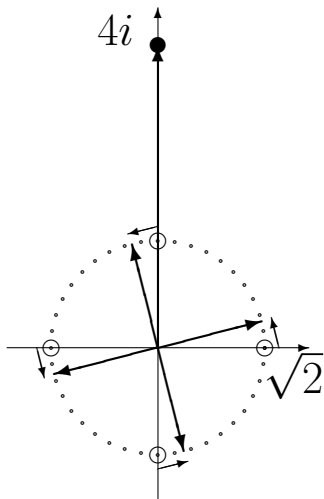


Рис. 2

Решение. При этом полученные ранее 4 кружка займут нужное положение, и мы получим все четыре искомых корня:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right), \text{ т.е.}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}, \quad \cos\frac{5\pi}{8} + i \sin\frac{5\pi}{8},$$

$$\cos\frac{9\pi}{8} + i \sin\frac{9\pi}{8},$$

Пример 7. *Аналитически и геометрически* найдите все корни 4-й степени из $4i$.

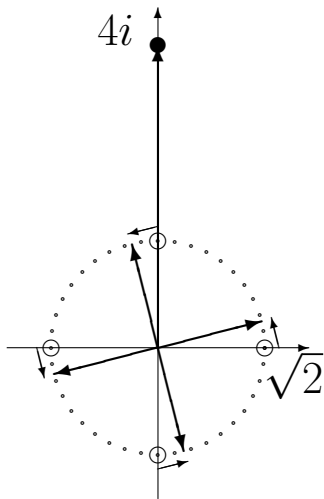


Рис. 2

Решение. При этом полученные ранее 4 кружка займут нужное положение, и мы получим все четыре искомых корня:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right), \text{ т.е.}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}, \quad \cos\frac{5\pi}{8} + i \sin\frac{5\pi}{8},$$

$$\cos\frac{9\pi}{8} + i \sin\frac{9\pi}{8}, \quad \cos\frac{13\pi}{8} + i \sin\frac{13\pi}{8}.$$

Вернемся к лекции?

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Мы приведем *решение с алгебраической* формой комплексного числа,
решение с тригонометрической формой,
решение с показательной формой,
и *геометрическое решение*.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Сначала проведем вычисления с помощью алгебраической формы записи.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Воспользуемся *стратегией составления уравнений*.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Воспользуемся *стратегией составления уравнений*.
Что надо найти?

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Воспользуемся *стратегией составления уравнений*.
Что надо найти? Комплексное число.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Воспользуемся *стратегией составления уравнений*.
Что надо найти? Комплексное число.
В каком виде представим ответ?

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Воспользуемся *стратегией составления уравнений*.
Что надо найти? Комплексное число.
В каком виде представим ответ? В алгебраической форме.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Воспользуемся *стратегией составления уравнений*.
Что надо найти? Комплексное число.
В каком виде представим ответ? В алгебраической форме.
Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Воспользуемся *стратегией составления уравнений*.
Что надо найти? Комплексное число.
В каком виде представим ответ? В алгебраической форме.
Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.
Пусть искомый корень имеет вид $x + iy$.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Воспользуемся *стратегией составления уравнений*.
Что надо найти? Комплексное число.
В каком виде представим ответ? В алгебраической форме.
Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.
Пусть искомый корень имеет вид $x + iy$.
Составим уравнение. Воспользуемся известным равенством или выберем величину, значение которой вычислим разными способами.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Воспользуемся **стратегией составления уравнений**.
Что надо найти? Комплексное число.
В каком виде представим ответ? В алгебраической форме.
Сведем задачу к числовым параметрам и введем переменные.
Пусть искомый корень имеет вид $x + iy$.
Составим уравнение. Воспользуемся известным равенством или выберем величину, значение которой вычислим разными способами.
По определению корня третьей степени имеем $(x + iy)^3 = 1$.

Пример 8. Используя алгебраическую и тригонометрическую формы записи и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. В равенстве $(x + iy)^3 = 1$ раскроем скобки с помощью «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»:

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. В равенстве $(x + iy)^3 = 1$ раскроем скобки с помощью «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»:

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. В равенстве $(x + iy)^3 = 1$ раскроем скобки с помощью «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»:

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1$$

и сравним вещественные части числа в левой и правой частях последнего равенства:

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. В равенстве $(x + iy)^3 = 1$ раскроем скобки с помощью «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»:

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1$$

и сравним вещественные части числа в левой и правой частях последнего равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. = 1,$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. В равенстве $(x + iy)^3 = 1$ раскроем скобки с помощью «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»:

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1$$

и сравним вещественные части числа в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ \end{cases}$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. В равенстве $(x + iy)^3 = 1$ раскроем скобки с помощью «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»:

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1$$

и сравним мнимые части числа в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ \end{cases}$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. В равенстве $(x + iy)^3 = 1$ раскроем скобки с помощью «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»:

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1$$

и сравним мнимые части числа в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ \qquad \qquad \qquad = 0 \end{cases}$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. В равенстве $(x + iy)^3 = 1$ раскроем скобки с помощью «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»:

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1$$

и сравним мнимые части числа в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. В равенстве $(x + iy)^3 = 1$ раскроем скобки с помощью «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»:

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1$$

и сравним мнимые части числа в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0. \end{cases}$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Если $y = 0$, то $x = 1$, т.е. получили корень

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Если $y = 0$, то $x = 1$, т.е. получили корень 1.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Если $y = 0$, то $x = 1$, т.е. получили корень 1.

Если $y^2 = 3x^2$, то

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Если $y = 0$, то $x = 1$, т.е. получили корень 1.

Если $y^2 = 3x^2$, то $x^3 - 3x \cdot 3x^2 = 1$.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Если $y = 0$, то $x = 1$, т.е. получили корень 1.

Если $y^2 = 3x^2$, то $x^3 - 3x \cdot 3x^2 = 1$.

$$8x^3 = -1 \Rightarrow$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Если $y = 0$, то $x = 1$, т.е. получили корень 1.

Если $y^2 = 3x^2$, то $x^3 - 3x \cdot 3x^2 = 1$.

$$8x^3 = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Если $y = 0$, то $x = 1$, т.е. получили корень 1.

Если $y^2 = 3x^2$, то $x^3 - 3x \cdot 3x^2 = 1$.

$$8x^3 = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Если $y = 0$, то $x = 1$, т.е. получили корень 1.

Если $y^2 = 3x^2$, то $x = -\frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и *операции комплексной плоскости* найдите все корни степени 3 из 1.

Решение.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1, \\ (3x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$$

Из второго равенства следует, что либо $y = 0$, либо $3x^2 - y^2 = 0$.

Если $y = 0$, то $x = 1$, т.е. получили корень 1.

Если $y^2 = 3x^2$, то $x = -\frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя *алгебраическую форму записи*, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в *тригонометрической форме*:

$$\sqrt[3]{1} =$$

Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя *алгебраическую форму записи*, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в *тригонометрической форме*:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} =$$

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} =$$

Учтем, что для комплексных чисел, **в отличие от действительных чисел**, имеет место тождество $\sqrt[3]{x} \equiv x^{1/3} \dots$

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} =$$

Учтем, что для комплексных чисел, **в отличие от действительных чисел**, имеет место тождество $\sqrt[3]{x} \equiv x^{1/3} \dots$

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} =$$

=

Используя следствие из **формулы Муавра**: формулу **для вычисления корней**, получаем...

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} = \\ &= \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \in\end{aligned}$$

Используя следствие из **формулы Муавра**: формулу **для вычисления корней**, получаем...

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; \quad -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} = \\ &= \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \in \left\{ ? \right\}. \quad k = 0; 3; 6; \dots\end{aligned}$$

Используя следствие из **формулы Муавра**: формулу **для вычисления корней**, получаем ($k \in \mathbb{Z}$)...

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} = \\ &= \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \in \left\{ 1; \right. \end{aligned}$$

Используя следствие из **формулы Муавра**: формулу **для вычисления корней**, получаем $(k \in \mathbb{Z})\dots$

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} = \\ &= \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \in \left\{ 1; ? \right\}. \quad k = 1; 4; 7; \dots\end{aligned}$$

Используя следствие из **формулы Муавра**: формулу **для вычисления корней**, получаем ($k \in \mathbb{Z}$)...

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} = \\ &= \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \in \left\{ 1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \right\}. \quad k = 1; 4; 7; \dots\end{aligned}$$

Используя следствие из **формулы Муавра**: формулу **для вычисления корней**, получаем $(k \in \mathbb{Z})\dots$

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} = \\ &= \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \in \left\{ 1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; ? \right\}. \quad k = 2; 5; 8; \dots\end{aligned}$$

Используя следствие из **формулы Муавра**: формулу **для вычисления корней**, получаем ($k \in \mathbb{Z}$)...

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} = \\ &= \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \in \left\{ 1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.\end{aligned}$$

Используя следствие из **формулы Муавра**: формулу **для вычисления корней**, получаем $(k \in \mathbb{Z})\dots$

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно получить решение в **тригонометрической форме**:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/3} = \\ &= \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \in \left\{ 1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.\end{aligned}$$

Результат, естественно, совпал итогом вычислений, проведенных с использованием **алгебраической формы записи комплексного числа**.

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение с помощью **показательной формы записи**:

$$\sqrt[3]{1} =$$

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение с помощью **показательной формы записи**:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{e^{2ki\pi}} =$$

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение с помощью **показательной формы записи**:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{e^{2ki\pi}} = e^{2ki\pi/3} \in$$

Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую форму записи**, получили три корня: $1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение с помощью **показательной формы записи**:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{e^{2ki\pi}} = e^{2ki\pi/3} \in \left\{ 1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

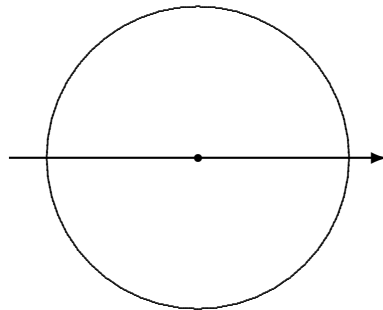
Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя *алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи*, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Геометрическое решение.

Отметим в комплексной плоскости точку (вектор) 1.



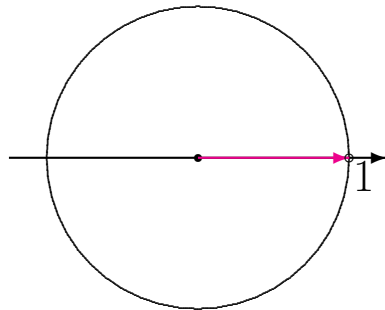
Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя *алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи*, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Геометрическое решение.

Отметим в комплексной плоскости точку (вектор) 1.



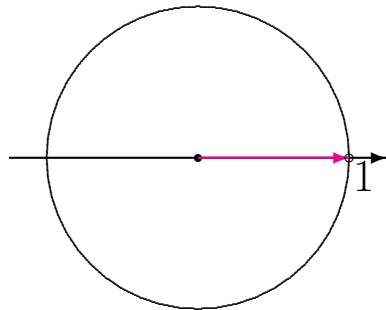
Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя *алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи*, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Геометрическое решение.

Разделим окружность на три равные части, начиная от точки 1.



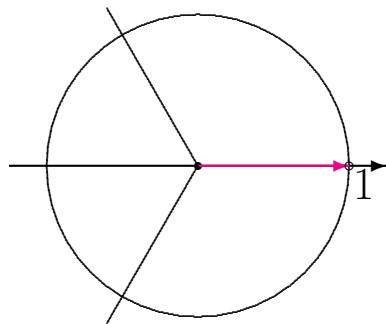
Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя *алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи*, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Геометрическое решение.

Разделим окружность на три равные части, начиная от точки 1.



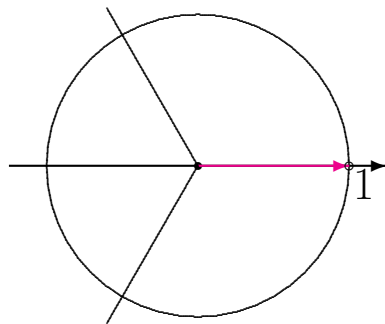
Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя *алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи*, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Геометрическое решение.

В итоге получим искомые векторы.



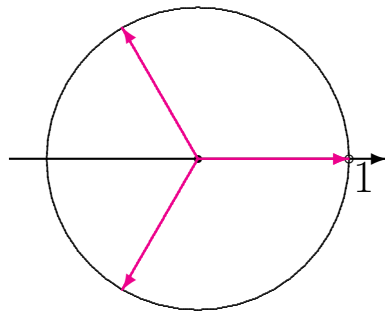
Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя *алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи*, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Геометрическое решение.

В итоге получим искомые векторы.

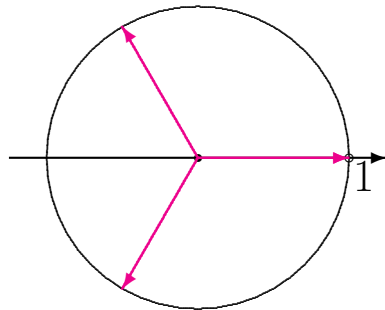


Пример 8. Используя *алгебраическую и тригонометрическую формы записи* и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя *алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи*, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Сравним с результатами предыдущих вычислений.

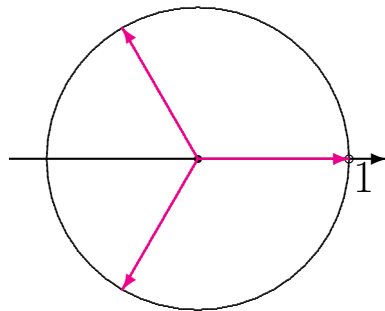


Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи**, получили три корня: 1; $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Сравним с результатами предыдущих вычислений.

Для решения, проведенного **с использованием тригонометрической и показательной форм записи** комплексного числа ответ совпал, так как модули корней равны 1, и аргументы — $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (с точностью до полных углов).



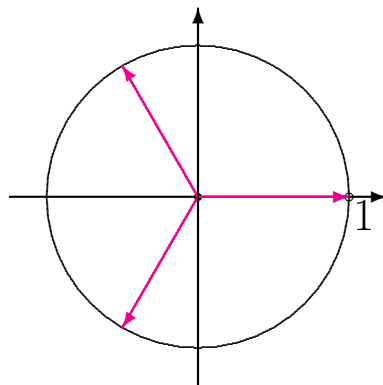
Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и операции комплексной плоскости найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи**, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Сравним с результатами предыдущих вычислений.

Проверим совпадение с результатами вычислений, **проведенных с использованием алгебраической формы.**



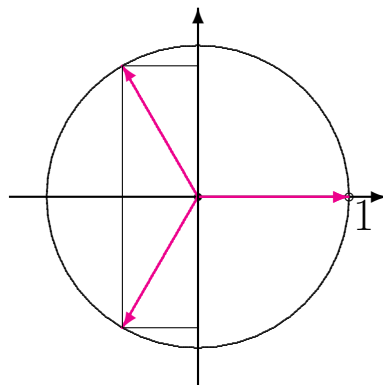
Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

Решение. Используя **алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи**, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Сравним с результатами предыдущих вычислений.

Проверим совпадение с результатами вычислений, **проведенных с использованием алгебраической формы.**



Пример 8. Используя **алгебраическую и тригонометрическую формы записи** и **операции комплексной плоскости** найдите все корни степени 3 из 1.

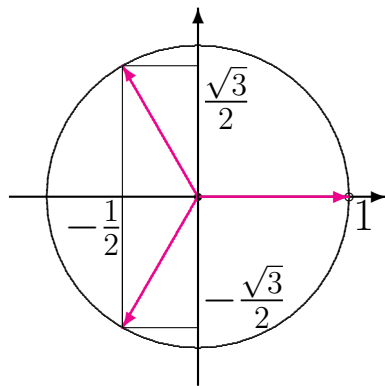
Решение. Используя **алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи**, получили три корня: 1;

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Сравним с результатами предыдущих вычислений.

Проверим совпадение с результатами вычислений, **проведенных с использованием алгебраической формы**.

Полное совпадение!



Вернемся к лекции?

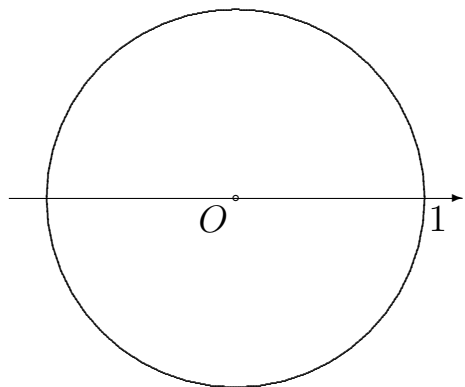
Пример 9. *Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.*

Решение.

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

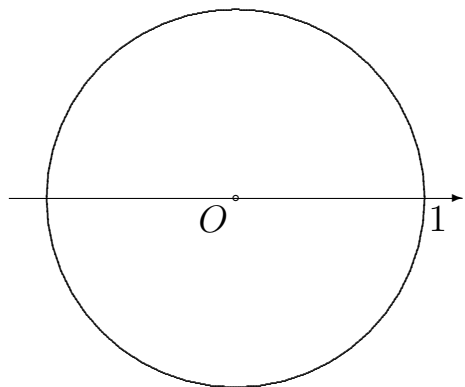
Решение.

$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$



Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

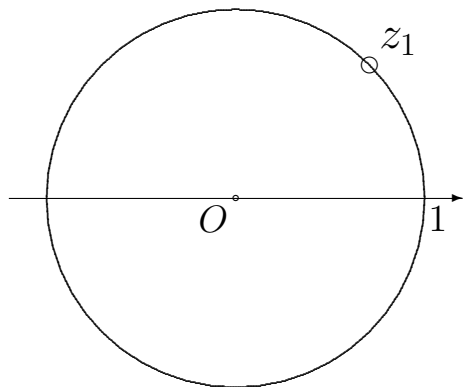
Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$
$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

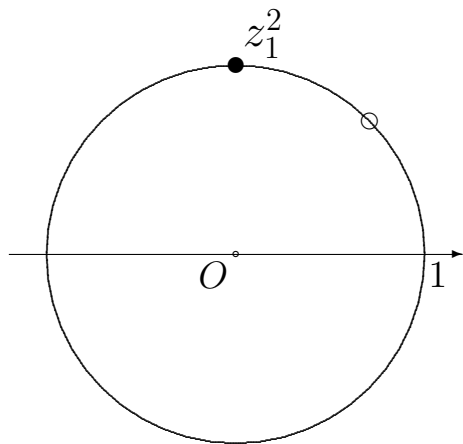
Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$
$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



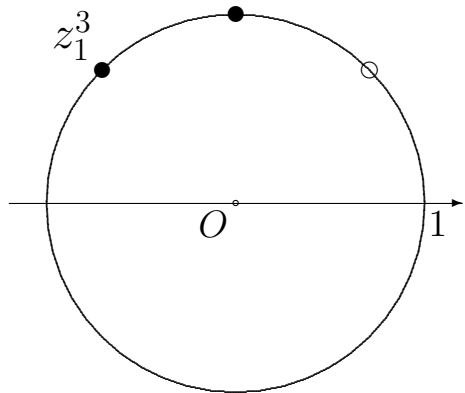
$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_1^2 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



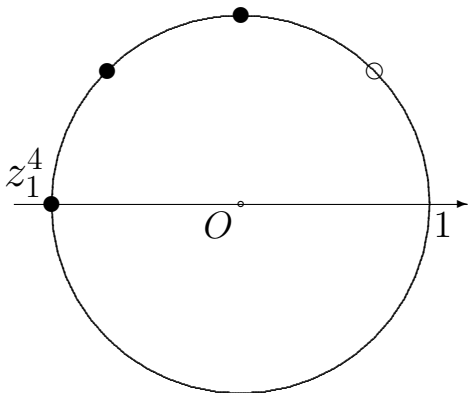
$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_1^3 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



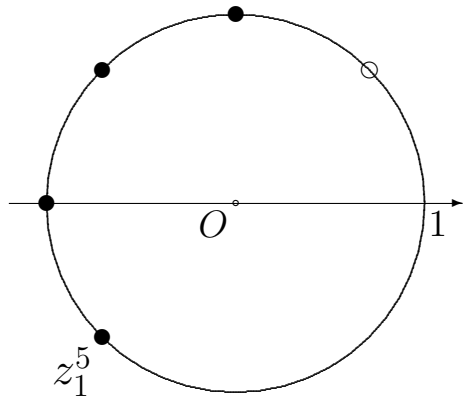
$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_1^4 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



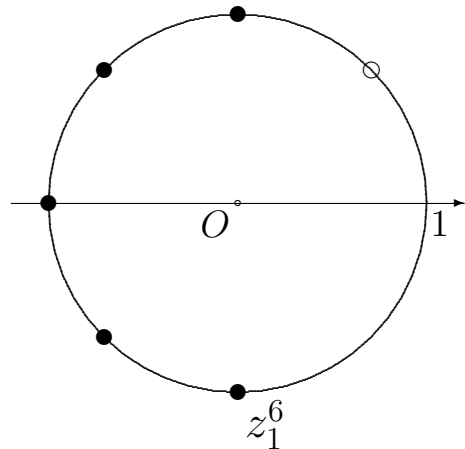
$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_1^5 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



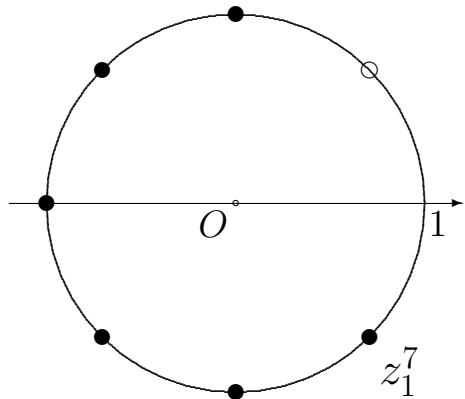
$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_1^6 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



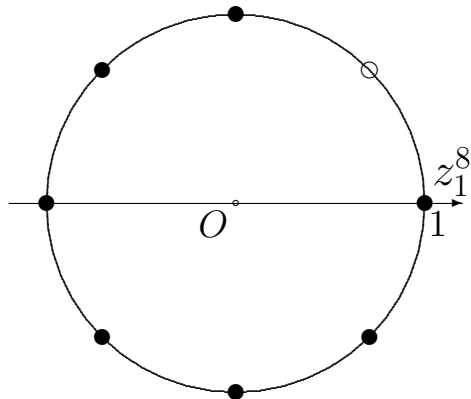
$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_1^7 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

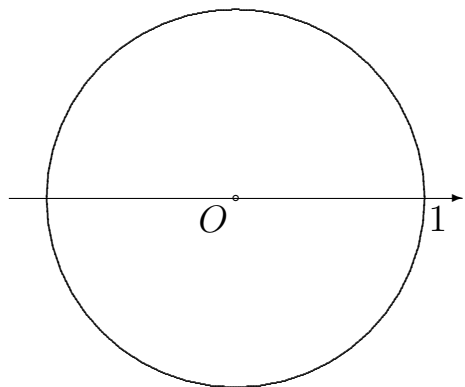
$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_1^8 = 1.$$

Итак, z_1 — примитивный корень.

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

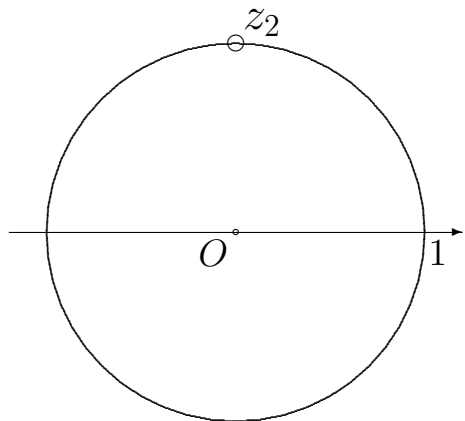
$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}} \quad - \quad \text{примитивный}$$

$$\text{корень.}$$

$$z_2 = \vec{\mathbf{j}}.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

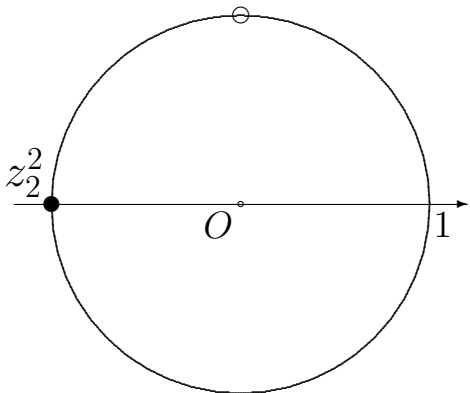
$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}} \quad - \quad \text{примитивный}$$

$$\text{корень.}$$

$$z_2 = \vec{\mathbf{j}}.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}} \quad \text{— примитивный}$$

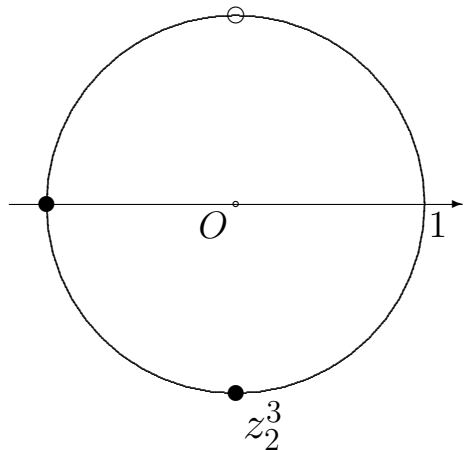
корень.

$$z_2 = \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_2^2 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{i} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{j} \right).$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \quad \text{— примитивный}$$

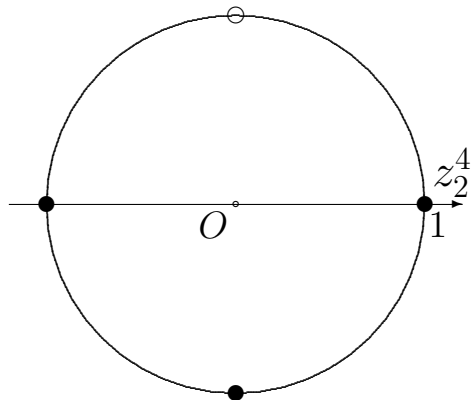
корень.

$$z_2 = \vec{j}.$$

$$z_2^3 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

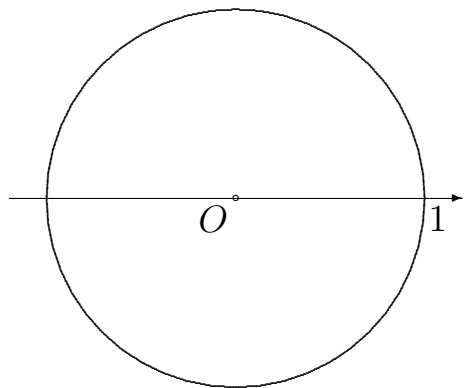
$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}} \quad \text{— примитивный корень.}$$

$$z_2 = \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_2^4 = 1 \quad \text{— не примитивный.}$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

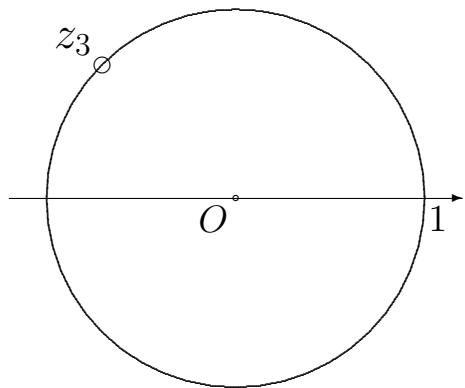
z_1 — примитивный корень.

z_2 — не примитивный корень.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

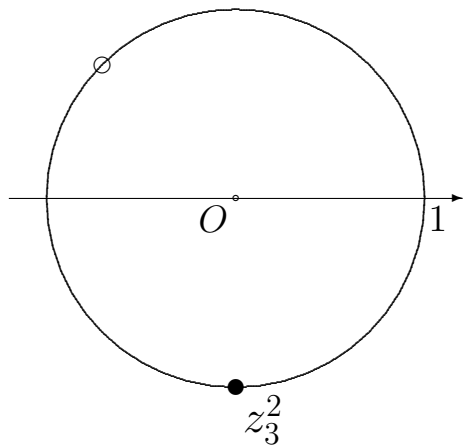
z_1 — примитивный корень.

z_2 — не примитивный корень.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1 — примитивный корень.

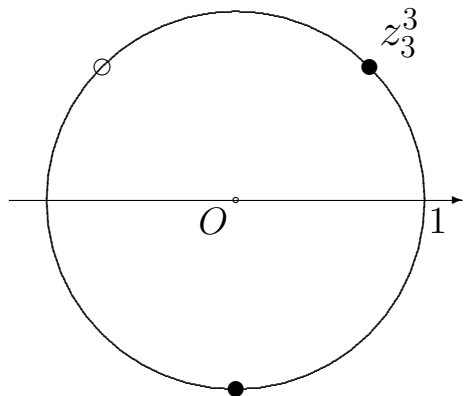
z_2 — не примитивный корень.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_3^2 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1 — примитивный корень.

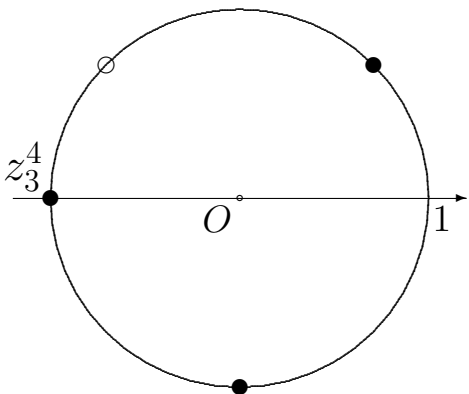
z_2 — не примитивный корень.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_3^3 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1 — примитивный корень.

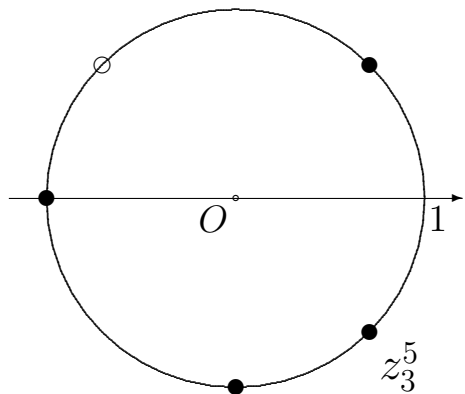
z_2 — не примитивный корень.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_3^4 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1 — примитивный корень.

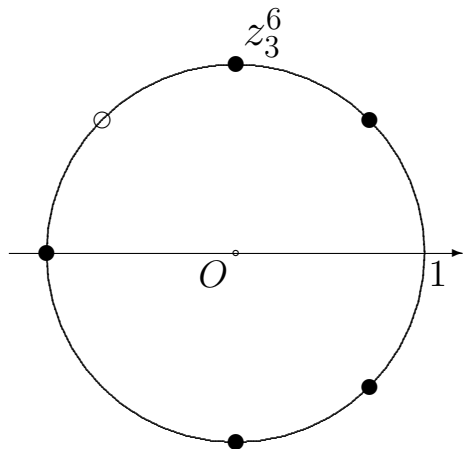
z_2 — не примитивный корень.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_3^5 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1 — примитивный корень.

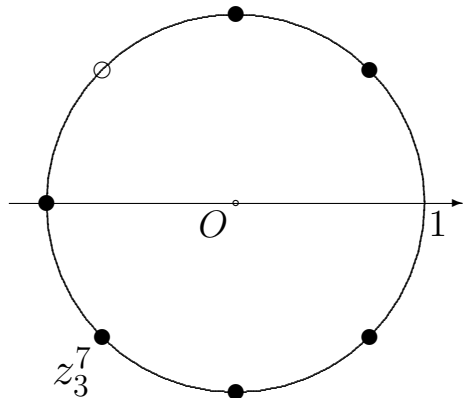
z_2 — не примитивный корень.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_3^6 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1 — примитивный корень.

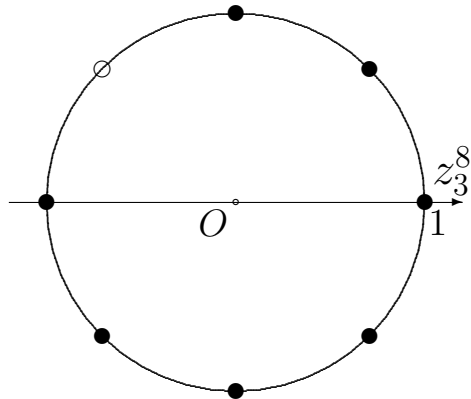
z_2 — не примитивный корень.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_3^7 \neq 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1 — примитивный корень.

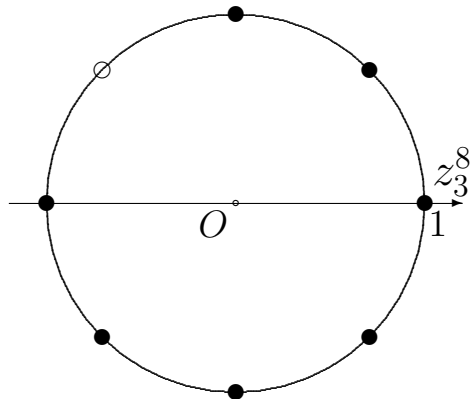
z_2 — не примитивный корень.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{\mathbf{j}}.$$

$$z_3^8 = 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



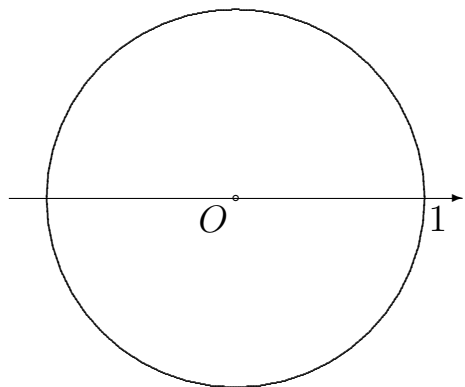
$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3 — примитивные корни.

z_2 — не примитивный корень.

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3 — примитивные корни.

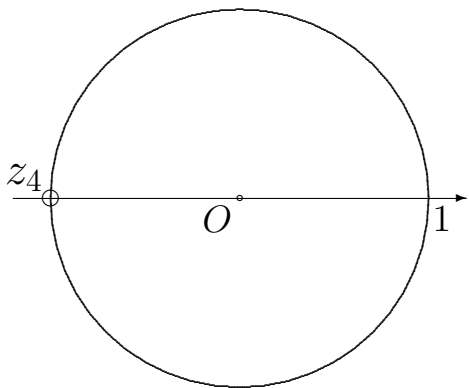
z_2 — не примитивный корень.

Является ли примитивным корень

$$z_4 = \left(\cos \frac{4\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{4\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right) =$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3 — примитивные корни.

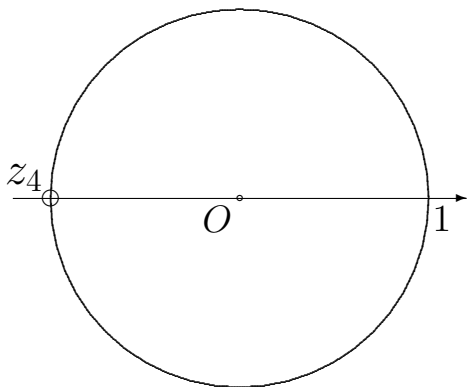
z_2 — не примитивный корень.

Является ли примитивным корень

$$z_4 = \left(\cos \frac{4\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{4\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right) = -1?$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3 — примитивные корни.

z_2 — не примитивный корень.

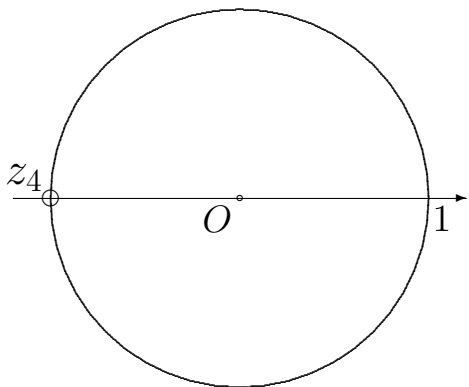
Является ли примитивным корень

$$z_4 = \left(\cos \frac{4\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{4\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right) = -1?$$

Очевидно, нет, поскольку $z_4^2 = 1$.

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

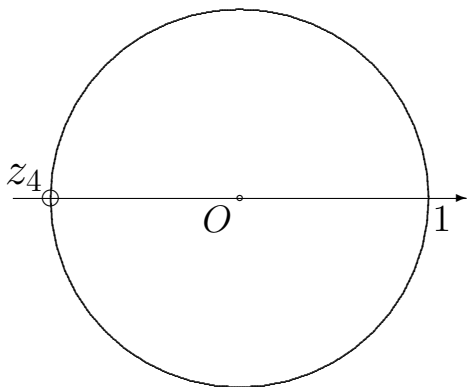
z_1, z_3 — примитивные корни.

z_2, z_4 — не примитивные корни.

Какие из корней z_5, z_6, z_7 являются примитивными?

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3 — примитивные корни.

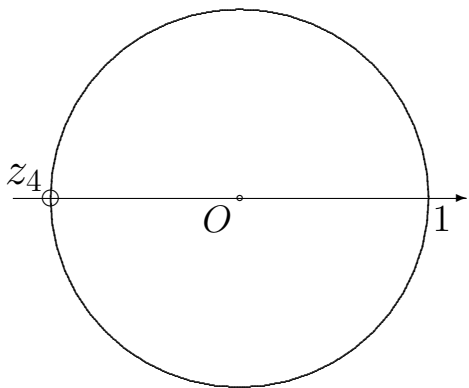
z_2, z_4 — не примитивные корни.

Какие из корней z_5, z_6, z_7 являются примитивными?

$$z_6^? = 1 \dots$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3 — примитивные корни.

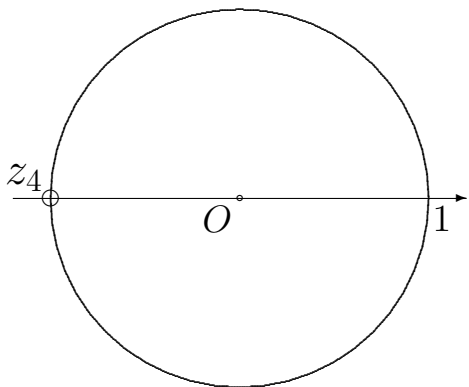
z_2, z_4 — не примитивные корни.

Какие из корней z_5, z_6, z_7 являются примитивными?

$$z_6^4 = 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3 — примитивные корни.

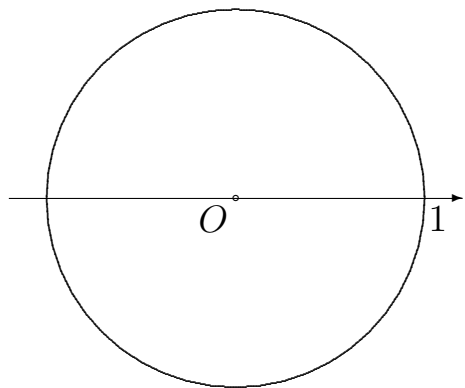
z_2, z_4, z_6 — не примитивные корни.

Какие из корней z_5, z_6, z_7 являются примитивными?

$$z_6^4 = 1.$$

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3 — примитивные корни.

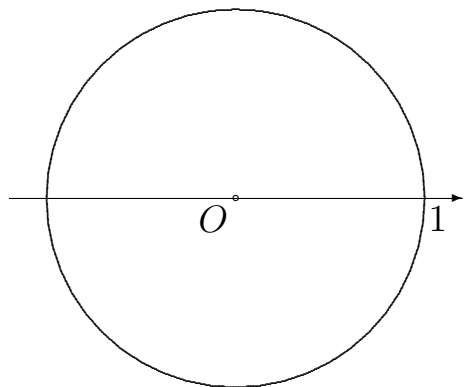
z_2, z_4, z_6 — не примитивные корни.

Какие из корней z_5, z_6, z_7 являются примитивными?

Корни z_5 и z_7 являются

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3 — примитивные корни.

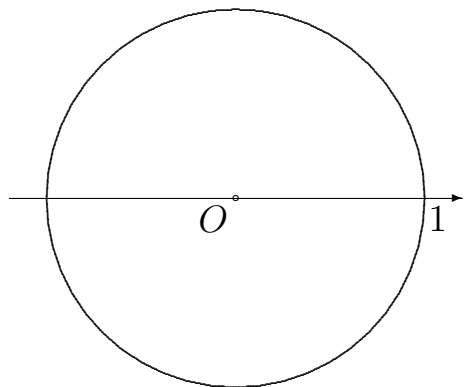
z_2, z_4, z_6 — не примитивные корни.

Какие из корней z_5, z_6, z_7 являются примитивными?

Корни z_5 и z_7 являются примитивными.

Пример 9. Перебором всех вариантов найдите все примитивные корни из 1 порядка 8.

Решение.



$$\text{Имеем } z_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{i}} + \sin \frac{k\pi}{4} \vec{\mathbf{j}} \right).$$

z_1, z_3, z_5, z_7 — примитивные корни.

z_2, z_4, z_6, z_0 — не примитивные корни.

Как это увидеть без утомительных вычислений?

Вернёмся к лекции?

Задания для самостоятельного выполнения

Задача IX.1. (Ответ приведен на стр.1175.) Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$,
 $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$, $(2 - 3i)(5 - 2i)$,
 $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Задача IX.2. (Ответ приведен на стр.1192.) Вычислите $\overline{1-i}$,
 $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$, $\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}$.

Задача IX.3. (Ответ приведен на стр.1220.)
 Найдите с помощью **опера-**

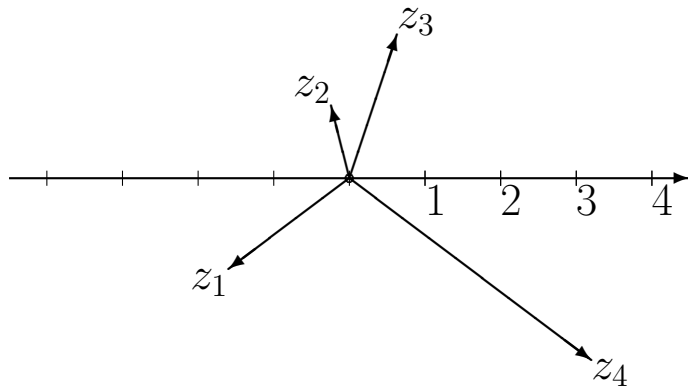
ций комплексной плос-

кости $(z_1 + z_2), \quad z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2},$

$\overline{z_1}, \quad \sqrt{z_2}, \quad (z_1 + z_3), \quad z_1 z_3,$

$\frac{z_1}{z_2}, \quad \overline{z_2}, \quad \overline{z_3}, \quad (z_2 + z_4), \quad z_2 z_4,$

$\frac{z_3}{z_4}, \quad \overline{z_4}, \quad \sqrt[3]{z_2}.$



Задача IX.4.

(Ответ приведен на стр.1268.)

Представь-

те в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости:

а) $(1 + i\sqrt{3})$;
б) $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$;

е) $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0, 6\pi + i \cos 0, 6\pi$;

з) $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1, 6i)$;

м) $(-1, 2 + 1, 6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Задача IX.5. (Ответ приведен на стр.1367.) Выполните действия с

комплексными числами в алгебраической и показательной формах:

а) $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$;

е) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$. Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Задача IX.6. (Ответ приведен на стр.1434.) Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Задача IX.7. (Ответ приведен на стр.1471.) Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Задача X.8. (Ответ приведен на стр.1511.)

Решите методом

Гаусса и с помощью формул Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} (2 - i)x + (1 + 2i)y = 12 + 4i, \\ (-1 + i)x + (3 - 2i)y = 2 - 11i. \end{cases}$$

Задача X.9. (Ответ приведен на стр.1546.) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$$

Задача X.10. (Ответ приведен на стр.1566.)

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$$

Задача XI.11. (Ответ приведен на стр.1582.)

$$x^2 - 5x + 9 = 0.$$

Решить уравнение

Задача XII.12. (Ответ приведен на стр.1596.) Выразить $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Задача XII.13. (Ответ приведен на стр.1603.) Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

XIII. Тело кватернионов

XIII. Тело кватернионов

До поступления в вуз вы изучили поле рациональных и поле действительных чисел.

XIII. Тело кватернионов

До поступления в вуз вы изучили поле рациональных и поле действительных чисел.

Потом вы узнали о поле комплексных чисел и научились с ним работать.

XIII. Тело кватернионов

До поступления в вуз вы изучили поле рациональных и поле действительных чисел.

Потом вы узнали о поле комплексных чисел и научились с ним работать.

Важнейшее алгебраическое свойство поля комплексных чисел — его алгебраическая замкнутость, т.е.

XIII. Тело кватернионов

До поступления в вуз вы изучили поле рациональных и поле действительных чисел.

Потом вы узнали о поле комплексных чисел и научились с ним работать.

Важнейшее алгебраическое свойство поля комплексных чисел — его алгебраическая замкнутость, т.е.

наличие корней у любого многочлена степени, большей 0.

XIII. Тело кватернионов

До поступления в вуз вы изучили поле рациональных и поле действительных чисел.

Потом вы узнали о поле комплексных чисел и научились с ним работать.

Важнейшее алгебраическое свойство поля комплексных чисел — его алгебраическая замкнутость, т.е.

наличие корней у любого многочлена степени, большей 0.

Один из базовых языков алгебры комплексных чисел — это язык многочленов, когда под комплексным числом понимается многочлен от переменной i .

XIII. Тело кватернионов

До поступления в вуз вы изучили поле рациональных и поле действительных чисел.

Потом вы узнали о поле комплексных чисел и научились с ним работать.

Важнейшее алгебраическое свойство поля комплексных чисел — его алгебраическая замкнутость, т.е.

наличие корней у любого многочлена степени, большей 0.

Один из базовых языков алгебры комплексных чисел — это язык многочленов, когда под комплексным числом понимается многочлен от переменной i .

А нельзя ли получить интересную конструкцию, если обобщить до многочлена от нескольких переменных?

XIII. Тело кватернионов

До поступления в вуз вы изучили поле рациональных и поле действительных чисел.

Потом вы узнали о поле комплексных чисел и научились с ним работать.

Важнейшее алгебраическое свойство поля комплексных чисел — его алгебраическая замкнутость, т.е.

наличие корней у любого многочлена степени, большей 0.

Один из базовых языков алгебры комплексных чисел — это язык многочленов, когда под комплексным числом понимается многочлен от переменной i .

А нельзя ли получить интересную конструкцию, если обобщить до многочлена от нескольких переменных?

Сейчас рассмотрим такую конструкцию и покажем, что она уникальна (см. **теорему Фробениуса**).

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) =$$
$$=$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ = (a_1 + a_2) + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (&) + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (\quad \quad \quad) + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 & \quad \quad \quad) + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 & \quad \quad \quad) + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 &\quad) + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + & \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + & \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + & \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + & \quad) i + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (&) i + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + & \quad) i + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + & \quad) i + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + & \quad) i + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$. (6)

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 &\quad) i + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 &\quad) i + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1) i + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (&)j + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ & + (\quad \quad \quad)j + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ & + (a_1c_2 + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ & + (a_1c_2 + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + \quad \quad \quad)j + \end{aligned}$$

ХІІІ.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$. (6)

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + \quad \quad \quad)j + \end{aligned}$$

ХІІІ.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$. (6)

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - d_2b_1)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + c_1b_2 - c_2b_1)k \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1) i + \\ + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - d_2 b_1) j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + c_1 b_2 - c_2 b_1) k \end{aligned}$$

ХІІІ.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ &+ (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + c_1b_2 - b_1c_2)k. \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ & + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + c_1b_2 - c_2b_1)k. \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ & + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1) i + \\ + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (a_1 d_2 + & \quad) k. \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + \quad \quad \quad)k. \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$. (6)

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)k. \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$. (6)

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)k. \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)k. \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, сумма и произведение кватернионов можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)k. \end{aligned}$$

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)k. \end{aligned}$$

Это умножение называют **умножением Грассмана**.

XIII.1. Определение кватерниона

Определение 3. Кватернионом называется многочлен $a + bi + cj + dk$ над $\mathbb{R}$ от i, j, k с отношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i, \quad j \cdot k = i = -k \cdot j, \quad k \cdot i = j = -i \cdot k. \quad (6)$$

Значит, **сумма** и **произведение кватернионов** можно определить формулами:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) &= \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i + \\ &+ (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)k. \end{aligned}$$

Это умножение называют **умножением Грассмана**.

Рассмотрим пример?

XIII.2. Теорема о теле кватернионов

Теорема 4. Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.

Доказательство.

XIII.2. Теорема о теле кватернионов

Теорема 4. *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

XIII.2. Теорема о теле кватернионов

Теорема 4. *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

XIII.2. Теорема о теле кватернионов

Теорема 4. *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

Проверку остальных **аксиом тела** можно было бы осуществить непосредственным вычислением, но мы выберем другой путь.

XIII.2. Теорема о теле кватернионов

Теорема 4. *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

Проверку остальных **аксиом тела** можно было бы осуществить непосредственным вычислением, но мы выберем другой путь.

А именно, применим **стратегию построения модели**.

XIII.2. Теорема о теле кватернионов

Теорема 4. *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы надо проверить выполнение **аксиом тела**.

Тот факт, что относительно сложения алгебра кватернионов является **группой**, очевиден.

Проверку остальных **аксиом тела** можно было бы осуществить непосредственным вычислением, но мы выберем другой путь.

А именно, применим **стратегию построения модели**.

Построим модель алгебры кватернионов средствами **матричной алгебры**.

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Ясно, что это обобщение традиционного **матричного представления комплексных чисел**, при котором комплексному числу $a + bi$ сопоставляется матрица

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Ясно, что это обобщение традиционного **матричного представления комплексных чисел**, при котором комплексному числу $a + bi$ сопоставляется матрица $\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$.

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Ясно, что это обобщение традиционного **матричного представления комплексных чисел**, при котором комплексному числу $a + bi$ сопоставляется матрица $\begin{pmatrix} a & \\ & \end{pmatrix}$.

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Ясно, что это обобщение традиционного **матричного представления комплексных чисел**, при котором комплексному числу $a + bi$ сопоставляется матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix}$.

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Ясно, что это обобщение традиционного **матричного представления комплексных чисел**, при котором комплексному числу $a + bi$ сопоставляется матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Ясно, что это обобщение традиционного **матричного представления комплексных чисел**, при котором комплексному числу $a + bi$ сопоставляется матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Как доказать равенство?

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

1) приведение равенства $L = R$ к тождеству;

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

- 1) приведение равенства $L = R$ к тождеству;
- 2) доказательство двух неравенств: $L \leq R$ и $L \geq R$;

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

- 1) приведение равенства $L = R$ к тождеству;
- 2) доказательство двух неравенств: $L \leq R$ и $L \geq R$;
- 3) применение метода «от противного».

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

- 1) **приведение равенства $L = R$ к тождеству**;
- 2) доказательство двух неравенств: $L \leq R$ и $L \geq R$;
- 3) применение метода «от противного».

Применим **первый способ**.

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

$$((a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k))^\varphi =$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

$$((a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k))^\varphi =$$

$$= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi.$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

$$((a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k))^\varphi =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} + \\ = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi.$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

$$((a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k))^\varphi =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi.$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

$$\begin{aligned} & ((a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k))^\varphi = \\ & = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i & c_1 + c_2 + (d_1 + d_2)i \\ -(c_1 + c_2) + (d_1 + d_2)i & a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)i \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ & = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi. \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство. Здесь x^φ — образ элемента x относительно действия φ . Это обозначение будем заменять привычное $\varphi(x)$.

$$\begin{aligned} & ((a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k))^\varphi = \\ & = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i & c_1 + c_2 + (d_1 + d_2)i \\ -(c_1 + c_2) + (d_1 + d_2)i & a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)i \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ & = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi. \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi =$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix}.$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + \\ & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & \\ & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + \\ \quad + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ \quad + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & \quad + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & \\ \quad + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ & = \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} & + (&)i + \\ + (&)j + (&)k \end{pmatrix}^\varphi = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ & + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ & + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} & + (&)i + \\ + (&)j + (&)k \end{pmatrix}^\varphi = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ & + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ & + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i \\ & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (\quad)i + \\ &+ (\quad)j + (\quad)k)^\varphi = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (\quad)i + \\ &+ (\quad)j + (\quad)k)^\varphi = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ &+ (\quad \quad \quad)j + (\quad \quad \quad)k)^\varphi = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ &+ (\quad \quad \quad)j + (\quad \quad \quad)k)^\varphi = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ &+ (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (\quad \quad \quad)k)^\varphi = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ &+ (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (\quad \quad \quad)k)^\varphi = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ &+ (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k)^\varphi = \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ &+ (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k)^\varphi = \\ &= ((a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k))^\varphi. \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)^\varphi \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)^\varphi = \\ & = \begin{pmatrix} a_1 + b_1i & c_1 + d_1i \\ -c_1 + d_1i & a_1 - b_1i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + b_2i & c_2 + d_2i \\ -c_2 + d_2i & a_2 - b_2i \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)(-c_2 + d_2i) & (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i) + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i) \\ (-c_1 + d_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 - b_1i)(-c_2 + d_2i) & (-c_1 + d_1i)(c_2 + d_2i) + (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + & a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)i \\ -c_1a_2 - d_1b_2 - a_1c_2 + b_1d_2 + & -c_1c_2 - d_1d_2 + a_1a_2 - b_1b_2 + \\ + (-c_1b_2 + d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2)i & + (-c_1d_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - b_1a_2)i \end{pmatrix} = \\ & = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ & + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k)^\varphi = \\ & = ((a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k))^\varphi. \end{aligned}$$

ХІІІ.3. Матричное представление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Доказательство.

Рассмотрим пример?

ХІІІ.4. Завершение доказательства **теоремы 4**

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Теорема 4. *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Доказательство.

ХІІІ.4. Завершение доказательства **теоремы 4**

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Теорема 4. *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

ХІІІ.4. Завершение доказательства **теоремы 4**

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Теорема 4. *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что операция умножения кватернионов является **ассоциативной**, поскольку операция умножения матриц ассоциативна.

Дистрибутивность умножения в алгебре кватернионов теперь следует из дистрибутивности умножения матриц.

ХІІІ.4. Завершение доказательства **теоремы 4**

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Теорема 4. *Алгебра кватернионов относительно операций сложения и умножения кватернионов является **телом**.*

Доказательство. Существование обратного элемента относительно умножения кватернионов следует из того, что **отображение (7)** является мономорфизмом, **критерия существования обратной матрицы** и невырожденности ненулевой матрицы.

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

Теорема 5 позволяет найти обратный к кватерниону $a + bi + cj + dk$.

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$(a+bi+cj+dk)^{-1} =$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} & (a + bi + cj + dk)^{-1} = \\ & = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a+bi+cj+dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ a+bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a+bi+cj+dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ a+bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} a - bi & \\ & a + bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\begin{pmatrix} a - bi & \\ & a + bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{} \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ a + bi & \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{} \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ a + bi & \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{} \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a+bi+cj+dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \right|} \begin{pmatrix} a-bi & -c-di \\ c-di & a+bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \\ \left| \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \right| &= (a+bi)(a-bi) - (c+di)(-c+di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a+bi+cj+dk)^{-1} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a-bi & -c-di \\ c-di & a+bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \\ \left| \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \right| &= (a+bi)(a-bi) - (c+di)(-c+di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a+bi+cj+dk)^{-1} &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \\ &= \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a-bi & -c-di \\ c-di & a+bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \\ \left| \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \right| &= (a+bi)(a-bi) - (c+di)(-c+di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a+bi+cj+dk)^{-1} &= \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \\ &= \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a-bi & -c-di \\ c-di & a+bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \\ \left| \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \right| &= (a+bi)(a-bi) - (c+di)(-c+di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a+bi+cj+dk)^{-1} &= \frac{a-bi}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \\ &= \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a-bi & -c-di \\ c-di & a+bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \\ \left| \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \right| &= (a+bi)(a-bi) - (c+di)(-c+di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \frac{a - bi - cj}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = \\ \left| \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \right| &= (a + bi)(a - bi) - (c + di)(-c + di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)^{-1} &= \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ &= \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \\ \left| \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \right| &= (a + bi)(a - bi) - (c + di)(-c + di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

XIII.5. Обратный кватернион

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (8)$$

XIII.6. Деление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (8)$$

Определение 4. *Сопряженным к кватерниону $a + bi + cj + dk$ называется кватернион*

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk. \quad (9)$$

XIII.6. Деление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (8)$$

Определение 4. *Сопряженным к кватерниону $a + bi + cj + dk$ называется кватернион*

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует формула деления кватернионов q_1 и q_2 :

XIII.6. Деление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (8)$$

Определение 4. *Сопряженным к кватерниону $a + bi + cj + dk$ называется кватернион*

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует формула деления кватернионов q_1 и q_2 :

$$\frac{q_1}{q_2} =$$

XIII.6. Деление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (8)$$

Определение 4. *Сопряженным к кватерниону $a + bi + cj + dk$ называется кватернион*

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует формула деления кватернионов q_1 и q_2 :

$$\frac{q_1}{q_2} =$$

$$= q_1 \cdot q_2^{-1} =$$

XIII.6. Деление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (8)$$

Определение 4. *Сопряженным к кватерниону $a + bi + cj + dk$ называется кватернион*

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует формула деления кватернионов q_1 и q_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{q_1}{q_2} = \\ & = q_1 \cdot q_2^{-1} = q_1 \cdot \frac{1}{q_2 \overline{q_2}} \overline{q_2} = \end{aligned}$$

XIII.6. Деление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (8)$$

Определение 4. **Сопряженным** к кватерниону $a + bi + cj + dk$ называется кватернион

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует формула деления кватернионов q_1 и q_2 :

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{q_1 \overline{q_2}}{q_2 \overline{q_2}}.$$

$$= q_1 \cdot q_2^{-1} = q_1 \cdot \frac{1}{q_2 \overline{q_2}} \overline{q_2} =$$

XIII.6. Деление кватернионов

Теорема 5. *Отображение*

$$(a + bi + cj + dk)^\varphi = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad (7)$$

является взаимно однозначным и для любых кватернионов x и y выполняются тождества $(x + y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$, $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \cdot y^\varphi$

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (8)$$

Определение 4. **Сопряженным** к кватерниону $a + bi + cj + dk$ называется кватернион

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует формула деления кватернионов q_1 и q_2 :

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{q_1 \overline{q_2}}{q_2 \overline{q_2}}. \quad (10)$$

Рассмотрим пример?

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**:

$$\underbrace{a}_{\text{скалярная часть}} + \underbrace{bi + cj + dk}_{\text{векторная часть}}.$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

Векторной части $bi + cj + dk$ кватерниона $a + bi + cj + dk$ сопоставим вектор $b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}$, т.е. введем отображение ψ формулой

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$,
 $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) =$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Имеем, в силу $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$,
 $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = -b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$,
 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = -b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (c_1d_2 - \quad) i \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$,
 $j \cdot k = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = -b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (c_1d_2 - c_2d_1)i \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$,
 $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} = -i \cdot k$,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = -b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (c_1d_2 - c_2d_1)i + (b_2d_1 - \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$,
 $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = -b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (c_1d_2 - c_2d_1)i + (b_2d_1 - b_1d_2)j + \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} = -j \cdot i$,
 $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = -b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (c_1d_2 - c_2d_1)i + (b_2d_1 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - \quad)k = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}$,
 $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = -b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (c_1d_2 - c_2d_1)i + (b_2d_1 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - b_2c_1)k = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Имеем, в силу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$,
 $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = -b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (c_1d_2 - c_2d_1)i + (b_2d_1 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - b_2c_1)k = \\ & = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно **формулам векторной алгебры**,

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно **формулам векторной алгебры**,

$$(b_1i + c_1j + d_1k) \cdot (b_2i + c_2j + d_2k) =$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^{\psi} = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно **формулам векторной алгебры**,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k) \cdot (b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = - \left(b_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_1 \overrightarrow{\mathbf{j}} + d_1 \overrightarrow{\mathbf{k}}, b_2 \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + d_2 \overrightarrow{\mathbf{k}} \right) + \left[b_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_1 \overrightarrow{\mathbf{j}} + d_1 \overrightarrow{\mathbf{k}}, b_2 \overrightarrow{\mathbf{i}} + c_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + d_2 \overrightarrow{\mathbf{k}} \right]^{\psi^{-1}} = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \vec{\mathbf{i}} + c \vec{\mathbf{j}} + d \vec{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

$$(b_1i + c_1j + d_1k) (b_2i + c_2j + d_2k) = - (b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, согласно **формулам векторной алгебры**,

$$\begin{aligned} & (b_1i + c_1j + d_1k) \cdot (b_2i + c_2j + d_2k) = \\ & = - \left(b_1 \vec{\mathbf{i}} + c_1 \vec{\mathbf{j}} + d_1 \vec{\mathbf{k}}, b_2 \vec{\mathbf{i}} + c_2 \vec{\mathbf{j}} + d_2 \vec{\mathbf{k}} \right) + \left[b_1 \vec{\mathbf{i}} + c_1 \vec{\mathbf{j}} + d_1 \vec{\mathbf{k}}, b_2 \vec{\mathbf{i}} + c_2 \vec{\mathbf{j}} + d_2 \vec{\mathbf{k}} \right]^{\psi^{-1}} = \\ & = - \left((b_1i + c_1j + d_1k)^\psi, (b_2i + c_2j + d_2k)^\psi \right) + \left[(b_1i + c_1j + d_1k)^\psi, (b_2i + c_2j + d_2k)^\psi \right]^{\psi^{-1}}. \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов

$$u_p = b_pi + c_pj + d_pk$$

$$u_1 \cdot u_2 = - \left(u_1^\psi, u_2^\psi \right) + \left[u_1^\psi, u_2^\psi \right]^{\psi^{-1}},$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов

$$u_p = b_pi + c_pj + d_pk$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов

$$u_p = b_pi + c_pj + d_pk$$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) + \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) - \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right]^{\psi^{-1}}. \quad (12)$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов

$$u_p = b_pi + c_pj + d_pk$$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) + \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) - \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right]^{\psi^{-1}}. \quad (12)$$

Получаем формулы для скалярного и векторного произведения:

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \overrightarrow{\mathbf{i}} + c \overrightarrow{\mathbf{j}} + d \overrightarrow{\mathbf{k}}. \quad (10)$$

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, согласно **формулам векторной алгебры**, для кватернионов

$$u_p = b_pi + c_pj + d_pk$$

$$u_1 \cdot u_2 = -\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) + \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right]^{\psi^{-1}}, \quad u_2 \cdot u_1 = -\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) - \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right]^{\psi^{-1}}. \quad (12)$$

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1)^\psi \quad (11)$$

Рассмотрим пример?

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] =$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2} (u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2} (u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1)^\psi, u_3^\psi\right] + \left[(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2)^\psi, u_1^\psi\right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3)^\psi, u_2^\psi\right] \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left((u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1) u_3 - u_3 (u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1) + \right. \\ & \quad \left. + (u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2) u_1 - u_1 (u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2) + \right. \\ & \quad \left. + (u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3) u_2 - u_2 (u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3) \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2} (u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2} (u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1)^\psi, u_3^\psi\right] + \left[(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2)^\psi, u_1^\psi\right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3)^\psi, u_2^\psi\right] \right) = \\ &= \frac{1}{4} (u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 (u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1) + \\ & \quad + (u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2) u_1 - u_1 (u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2) + \\ & \quad + (u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3) u_2 - u_2 (u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3))^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right) u_1 - u_1 \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right) \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - u_1 \left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right) \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - u_1 u_2 u_3 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right) u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right) \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - u_1 u_2 u_3 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 \left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi \right) = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(u_1 u_2 u_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - u_1 u_2 u_3 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 + u_2 u_1 u_3 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 - u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 + u_2 u_1 u_3 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(-u_2 u_1 u_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 + u_2 u_1 u_3 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(-\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3 - u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 + \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(-u_3 u_1 u_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. + u_3 u_1 u_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(-\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 + u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(u_3 u_2 u_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - u_3 u_2 u_1 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2}\left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi, u_3^\psi\right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2\right)^\psi, u_1^\psi\right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3\right)^\psi, u_2^\psi\right]\right) = \\ & = \frac{1}{4}\left(\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 + \right. \\ & \quad \left. + u_2 u_3 u_1 - \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1\right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(u_2 u_3 u_1 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. - u_1 u_3 u_2 - u_2 u_3 u_1 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1 + u_1 u_3 u_2 + \right. \\ & \quad \left. - u_1 u_3 u_2 - \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(u_1 u_3 u_2 - u_1 u_3 u_2 \right)^\psi = \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\begin{aligned} & \left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left[\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1 \right)^\psi, u_3^\psi \right] + \left[\left(u_2 \cdot u_3 - u_3 \cdot u_2 \right)^\psi, u_1^\psi \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(u_3 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_3 \right)^\psi, u_2^\psi \right] \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(u_1 u_3 u_2 - u_1 u_3 u_2 \right)^\psi = 0. \end{aligned}$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

Получили формулы для скалярного и векторного произведения:

$$\left(u_1^\psi, u_2^\psi\right) = -\frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1\right), \quad \left[u_1^\psi, u_2^\psi\right] = \frac{1}{2}\left(u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_1\right)^\psi \quad (11)$$

В частности, получаем **тождество Якоби**:

$$\left[\left[u_1^\psi, u_2^\psi\right], u_3^\psi\right] + \left[\left[u_2^\psi, u_3^\psi\right], u_1^\psi\right] + \left[\left[u_3^\psi, u_1^\psi\right], u_2^\psi\right] = 0. \quad (12)$$

XIII.7. Геометрическая интерпретация кватернионов

В кватернионе $a + bi + cj + dk$ слагаемое a называется **скалярной частью кватерниона**, а выражение $bi + cj + dk$ — его **векторной частью**.

Векторной части $bi + cj + dk$ кватерниона $a + bi + cj + dk$ сопоставлен вектор $b \vec{\mathbf{i}} + c \vec{\mathbf{j}} + d \vec{\mathbf{k}}$, т.е. введем отображение ψ формулой

$$(bi + cj + dk)^\psi = b \vec{\mathbf{i}} + c \vec{\mathbf{j}} + d \vec{\mathbf{k}}. \quad (11)$$

Для кватернионов $a_p + \underbrace{b_p i + c_p j + d_p k}_{u_p}$, где $p \in \{1; 2\}$:

$$(a_1 + u_1) \cdot (a_2 + u_2) = \underbrace{a_1 a_2 - \left(u_1^\psi, u_2^\psi \right)}_{\text{скалярная часть}} + \underbrace{a_1 u_2 + a_2 u_1 + \left[u_1^\psi, u_2^\psi \right]^{\psi^{-1}}}_{\text{векторная часть}}. \quad (13)$$

XIV. Теорема Фробениуса

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство

XIV. Теорема Фробениуса

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство разобьем на несколько лемм.

XIV. Теорема Фробениуса

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство разобьем на несколько лемм.

Положим

$$I = \left\{ x \left| \begin{array}{l} x \in F, \\ x^2 \in \mathbb{R}, \\ x^2 \leq 0. \end{array} \right. \right\} = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad (16)$$

XIV.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма **1. I**. $I \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство.

XIV.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 1. $I \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

XIV.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 1. $I \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I \Rightarrow \\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow \end{cases}$$

XIV.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 1. $I \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I \Rightarrow x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow \end{cases}$$

XIV.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 1. $I \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I \Rightarrow x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \end{cases}$$

XIV.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 1. $I \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I & \Rightarrow x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} & \Rightarrow x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow$$

XIV.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 1. $I \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I & \Rightarrow x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} & \Rightarrow x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

XIV.1. Лемма о пересечении I и $\mathbb{R}$

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 1. $I \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I \cap \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} x \in I \Rightarrow x^2 \leq 0; \\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Лемма доказана.

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \alpha^2 z^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad \alpha^2 z^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \alpha^2 \cdot z^2 \qquad \alpha z \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot z^2 \qquad \alpha z \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot z^2 \qquad \alpha z \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \qquad \alpha z \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \qquad \alpha z \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right\} \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \quad \alpha z \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \quad = (z \cdot z^{-1})^2$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2 =$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2 = z^2 \cdot (z^{-1})^2$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{< 0} \cdot (z^{-1})^2$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{< 0} \cdot \underbrace{(z^{-1})^2}_{< 0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{< 0} \cdot \underbrace{(z^{-1})^2}_{< 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z^{-1})^2 < 0 \Rightarrow$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{< 0} \cdot \underbrace{(z^{-1})^2}_{< 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z^{-1})^2 < 0 \Rightarrow$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{< 0} \cdot \underbrace{(z^{-1})^2}_{< 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z^{-1})^2 < 0 \Rightarrow z^{-1} \in I.$$

XIV.2. Лемма о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Лемма 2. 1) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow \alpha z \in I;$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow z^{-1} \in I.$

Доказательство.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha z)^2 = \underbrace{\alpha^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \alpha z \in I.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} z \neq 0, \\ z \in I \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1^2 = (z \cdot z^{-1})^2 = \underbrace{z^2}_{< 0} \cdot \underbrace{(z^{-1})^2}_{< 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z^{-1})^2 < 0 \Rightarrow z^{-1} \in I.$$

Лемма доказана.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

Согласно **формуле (21)** система векторов $\{a^0; a; a^2; \dots; a^{n+1}\}$ содержит вектора,

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

Согласно **формуле (21)** система векторов $\{a^0; a; a^2; \dots; a^{n+1}\}$ содержит $n + 2$ вектора,

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

Согласно **формуле (21)** система векторов $\{a^0; a; a^2; \dots; a^{n+1}\}$ содержит $n + 2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

Согласно **формуле (21)** система векторов $\{a^0; a; a^2; \dots; a^{n+1}\}$ содержит $n + 2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна $n + 1$.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство.

Согласно **формуле (21)** система векторов $\{a^0; a; a^2; \dots; a^{n+1}\}$ содержит $n + 2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна $n + 1$.

Поэтому эта система векторов является **линейно зависимой**.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство.

Согласно **формуле (21)** система векторов $\{a^0; a; a^2; \dots; a^{n+1}\}$ содержит $n + 2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна $n + 1$.

Поэтому эта система векторов является **линейно зависимой**.

Значит, найдутся такие вещественные коэффициенты $\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_{n+1}$, не все равные 0, что...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Согласно **формуле (21)** система векторов $\{a^0; a; a^2; \dots; a^{n+1}\}$ содержит $n + 2$ вектора, а размерность линейного пространства F над $\mathbb{R}$ равна $n + 1$.

Поэтому эта система векторов является **линейно зависимой**.

Значит, найдутся такие вещественные коэффициенты $\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_{n+1}$, не все равные 0, что...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только многочлены первой степени или второй степени с отрицательным дискриминантом.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены первой степени** или второй степени с отрицательным дискриминантом.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены первой степени** или второй степени с отрицательным дискриминантом.

Если a является корнем многочлена первой степени $(x - \gamma)$, то $a = \gamma \in \mathbb{R}$, откуда

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены первой степени** или второй степени с отрицательным дискриминантом.

Если a является корнем многочлена первой степени $(x - \gamma)$, то $a = \gamma \in \mathbb{R}$, откуда $a = a + 0$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены первой степени** или второй степени с отрицательным дискриминантом.

Если a является корнем многочлена первой степени $(x - \gamma)$, то $a = \gamma \in \mathbb{R}$, откуда $a = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} + 0$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены первой степени** или второй степени с отрицательным дискриминантом.

Если a является корнем многочлена первой степени $(x - \gamma)$, то $a = \gamma \in \mathbb{R}$, откуда $a = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in I}$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in I \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены первой степени** или второй степени с отрицательным дискриминантом.

Если a является корнем многочлена первой степени $(x - \gamma)$, то $a = \gamma \in \mathbb{R}$, откуда $a = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in I}$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in I \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены первой степени** или второй степени с отрицательным дискриминантом.

Если a является корнем многочлена первой степени $(x - \gamma)$, то $a = \gamma \in \mathbb{R}$, откуда $a = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{0}_{\in I} = b + c$.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены** первой степени или **второй степени с отрицательным дискриминантом**.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены** первой степени или **второй степени с отрицательным дискриминантом**.

Если a является корнем многочлена второй степени $(x^2 + \gamma x + \delta)$ с отрицательным дискриминантом, то...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены** первой степени или **второй степени с отрицательным дискриминантом**.

$a =$

Если a является корнем многочлена второй степени $(x^2 + \gamma x + \delta)$ с отрицательным дискриминантом, то...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены** первой степени или **второй степени с отрицательным дискриминантом**.

$$a = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}}{2} =$$

Если a является корнем многочлена второй степени $(x^2 + \gamma x + \delta)$ с отрицательным дискриминантом, то...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены** первой степени или **второй степени с отрицательным дискриминантом**.

$$a = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}}{2} = (-\gamma/2) \pm \left(i\sqrt{4\delta - \gamma^2/2} \right)$$

Если a является корнем многочлена второй степени $(x^2 + \gamma x + \delta)$ с отрицательным дискриминантом, то...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены** первой степени или **второй степени с отрицательным дискриминантом**.

$$a = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}}{2} = \overbrace{(-\gamma/2)}^{\in \mathbb{R}} \pm \overbrace{\left(i\sqrt{4\delta - \gamma^2/2}\right)}^{\in I} =$$

Если a является корнем многочлена второй степени $(x^2 + \gamma x + \delta)$ с отрицательным дискриминантом, то...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены** первой степени или **второй степени с отрицательным дискриминантом**.

$$a = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}}{2} = \overbrace{(-\gamma/2)}^{\in \mathbb{R}} \pm \overbrace{\left(i\sqrt{4\delta - \gamma^2/2}\right)}^{\in \mathbf{I}} =$$

Если a является корнем многочлена второй степени $(x^2 + \gamma x + \delta)$ с отрицательным дискриминантом, то...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in I \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только **многочлены** первой степени или **второй степени с отрицательным дискриминантом**.

$$a = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}}{2} = \overbrace{(-\gamma/2)}^{\in \mathbb{R}} \pm \overbrace{\left(i\sqrt{4\delta - \gamma^2/2}\right)}^{\in I} = b + c.$$

Если a является корнем многочлена второй степени $(x^2 + \gamma x + \delta)$ с отрицательным дискриминантом, то...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in I \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только многочлены первой степени или второй степени с отрицательным дискриминантом.

$$a = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}}{2} = \overbrace{(-\gamma/2)}^{\in \mathbb{R}} \pm \overbrace{\left(i\sqrt{4\delta - \gamma^2/2}\right)}^{\in I} = b + c.$$

Итак, мы доказали утверждение о разложении в сумму.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

Доказательство. $\alpha_0 a^0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$.

Следовательно, элемент a является корнем многочлена

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^{n+1}.$$

Неприводимыми над $\mathbb{R}$ являются только многочлены первой степени или второй степени с отрицательным дискриминантом.

$$a = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}}{2} = \overbrace{(-\gamma/2)}^{\in \mathbb{R}} \pm \overbrace{\left(i\sqrt{4\delta - \gamma^2/2}\right)}^{\in I} = b + c.$$

Итак, мы доказали утверждение о разложении в сумму.

Осталось доказать однозначность этого разложения.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

Запишем утверждение об однозначности на «языке равенств».

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

Запишем утверждение об однозначности на «языке равенств».

Не знаете? Применим стратегию формализации информации.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

Запишем утверждение об однозначности на «языке равенств».

Иногда проще сформулировать противоположное утверждение:

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

Запишем утверждение об однозначности на «языке равенств».

Иногда проще сформулировать противоположное утверждение:

$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2$, но $b_1 \neq b_2$ или $c_1 \neq c_2$.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство.

Запишем утверждение об однозначности на «языке равенств».

Иногда проще сформулировать противоположное утверждение:

$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2$, но $b_1 \neq b_2$ или $c_1 \neq c_2$.

Сформулируем отрицание...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2$

Запишем утверждение об однозначности на «языке равенств».

Иногда проще сформулировать противоположное утверждение:

$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2$, но $b_1 \neq b_2$ или $c_1 \neq c_2$.

Сформулируем отрицание...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow$

Запишем утверждение об однозначности на «языке равенств».

Иногда проще сформулировать противоположное утверждение:

$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2$, но $b_1 \neq b_2$ или $c_1 \neq c_2$.

Сформулируем отрицание...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

Доказательство. $a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$

Запишем утверждение об однозначности на «языке равенств».

Иногда проще сформулировать противоположное утверждение:

$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2$, но $b_1 \neq b_2$ или $c_1 \neq c_2$.

Сформулируем отрицание...

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1^2 = (b_2 - b_1)^2 + c_2^2 + 2(b_2 - b_1) \cdot c_2$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = (b_2 - b_1)^2 + c_2^2 + 2(b_2 - b_1) \cdot c_2$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2 + c_2^2}_{\in \mathbb{R}} + 2(b_2 - b_1) \cdot c_2$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = \overbrace{(b_2 - b_1)}^{\in \mathbb{R}} + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + c_2^2 + \overbrace{2(b_2 - b_1)}^{\in \mathbb{R}} \cdot c_2$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \overbrace{2(b_2 - b_1)}^{\in \mathbb{R}} \cdot \overbrace{c_2}^{\in I}$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in I} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I}$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = b_1, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = b_1, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1, \\ c_1 = c_2, \end{cases}$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = b_1, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1, \\ c_1 = c_2, \end{cases} \quad \text{т.е. в этом случае однозначность доказана.}$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = b_1, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1, \\ c_1 = c_2, \end{cases} \quad \text{т.е. в этом случае однозначность доказана.}$$

Отталось рассмотреть случай

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = b_1, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1, \\ c_1 = c_2, \end{cases} \quad \text{т.е. в этом случае однозначность доказана.}$$

Отталося рассмотреть случай

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = b_1, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1, \\ c_1 = c_2, \end{cases} \quad \text{т.е. в этом случае однозначность доказана.}$$

Отталося рассмотреть случай $c_2 = 0$.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_2 = b_1. \end{cases}$$

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются **однозначно**.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_2 = b_1. \end{cases}$$

И в этом случае однозначность подтверждена.

XIV.3. Лемма о разложении элементов из F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 3. $a \in F \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbf{I} \quad a = b + c$, причем элементы b и c определяются *однозначно*.

$$\text{Доказательство. } a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \in \mathbb{R}, \\ c_1 = c_2 \in I. \end{cases}$$

$$b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \Rightarrow c_1 = (b_2 - b_1) + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1^2}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(b_2 - b_1)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2(b_2 - b_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{c_2}_{\in I} \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_1 = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_1 + c_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0, \\ b_2 = b_1. \end{cases}$$

И в этом случае однозначность подтверждена.

Лемма доказана.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \Rightarrow \end{array} \right.$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \gamma a =$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \gamma a = -\delta b - \varepsilon$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = -\delta b - \varepsilon$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \varepsilon$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}},$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}},$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}},$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

По лемме о разложении элементов из F в сумму получаем, что $\varepsilon = 0$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \end{array} \right.$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

По лемме о разложении элементов из F в сумму получаем, что $\varepsilon = 0$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \begin{cases} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{cases}$$

Тогда для некоторых действительных чисел $\gamma, \delta, \varepsilon$, не все из которых равны 0, имеем...

По лемме о разложении элементов из F в сумму получаем, что $\varepsilon = 0$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \begin{cases} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{cases}$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\begin{cases} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \begin{cases} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{cases}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\gamma \neq 0$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \end{array} \right.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\gamma \neq 0$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\gamma \neq 0$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

$$a * b + b * a =$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ **линейно зависима**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2 \right) =$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ **линейно зависима**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2 \right) = -2 (\delta / \gamma) \cdot b^2$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ **линейно зависима**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2 \right) = \underbrace{-2(\delta/\gamma)}_{\in \mathbb{R}} \cdot b^2$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ **линейно зависима**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2 \right) = \underbrace{-2(\delta/\gamma)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{b^2}_{\in \mathbb{R}}$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ **линейно зависима**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2 \right) = \underbrace{-2(\delta/\gamma)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{b^2}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае формулу (17) доказали.

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2 \right) = \underbrace{-2(\delta/\gamma)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{b^2}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае формулу (17) доказали. Докажем (18).

$$a * b + b * a = -\frac{\delta}{\gamma} b^2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma} b^2 \right) = \underbrace{-2(\delta/\gamma)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{b^2}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае формулу (17) доказали. Докажем (18).

$$\alpha a + \beta b =$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае формулу (17) доказали. Докажем (18).

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b =$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ **линейно зависима**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае **формулу (17)** доказали. Докажем **(18)**.

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b = (-\alpha \delta / \gamma + \beta) \cdot b$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ **линейно зависима**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае **формулу (17)** доказали. Докажем **(18)**.

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b = \underbrace{(-\alpha \delta / \gamma + \beta)}_{\in \mathbb{R}} \cdot b$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ **линейно зависима**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае **формулу (17)** доказали. Докажем **(18)**.

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b = \underbrace{(-\alpha \delta / \gamma + \beta)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{b}_{\in I}$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = \underbrace{-\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае формулу (17) доказали. Докажем (18).

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b = \underbrace{(-\alpha \delta / \gamma + \beta)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{b}_{\in I} \in I.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = -\underbrace{\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае формулу (17) доказали. Докажем (18).

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b = \underbrace{(-\alpha \delta / \gamma + \beta)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{b}_{\in I} \in I.$$

В этом случае формула (18) также доказана.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть система $\{a; b; 1\}$ линейно зависима.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma a + \delta b + \varepsilon \cdot 1 = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \neq 0, \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\gamma a}_{\in I} = -\underbrace{\delta b}_{\in I} - \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0, \\ \gamma a = -\delta b. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \neq \gamma, \\ a = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot b. \end{array} \right.$$

В этом случае формулу (17) доказали. Докажем (18).

$$\alpha a + \beta b = -\alpha \frac{\delta}{\gamma} b + \beta b = \underbrace{(-\alpha \delta / \gamma + \beta)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{b}_{\in I} \in I.$$

В этом случае формула (18) также доказана. Осталось рассмотреть случай, когда $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то утверждение леммы очевидно.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то утверждение леммы очевидно.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

По лемме о разложении элементов из F в сумму...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a =$$

По лемме о разложении элементов из F в сумму...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I},$$

По лемме о разложении элементов из F в сумму...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b =$$

По лемме о разложении элементов из F в сумму...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

По лемме о разложении элементов из F в сумму...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

Возведем обе части в квадрат...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 +$$

Возведем обе части в квадрат...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) =$$

Возведем обе части в квадрат...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 +$$

Возведем обе части в квадрат...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

Возведем обе части в квадрат...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (\quad) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (\lambda + f) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda + \alpha\beta f = \mu^2 + g^2 + 2\mu g$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (\lambda + f) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \alpha\beta f = \mu^2 + g^2 + 2\mu g$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (\lambda + f) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \mu^2 + g^2 + 2\mu g$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (\lambda + f) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + 2\mu g$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (\lambda + f) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (a \cdot b + b \cdot a) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

$$\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta (\lambda + f) = \mu^2 + g^2 + 2\mu g.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}.$$

По лемме о разложении элементов из F в сумму...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

По лемме о разложении элементов из F в сумму...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда (17) доказано и $\mu = 0$ или $g = 0$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда (17) доказано и $\mu = 0$ или $g = 0$.

Если $\mu = 0$, то

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда (17) доказано и $\mu = 0$ или $g = 0$.

Если $\mu = 0$, то

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда (17) доказано и $\mu = 0$ или $g = 0$.

Если $\mu = 0$, то и (18) тоже доказано.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда (17) доказано и $\mu = 0$ или $g = 0$.

Если $g = 0$, то

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда (17) доказано и $\mu = 0$ или $g = 0$.

Если $g = 0$, то

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда (17) доказано и $\mu = 0$ или $g = 0$.

Если $g = 0$, то $\alpha a + \beta b + (-1)\mu = 0$,

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда (17) доказано и $\mu = 0$ или $g = 0$.

Если $g = 0$, то $\alpha a + \beta b + (-1)\mu = 0$,

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Пусть $f = 0$. Тогда (17) доказано и $\mu = 0$ или $g = 0$.

Если $g = 0$, то $\alpha a + \beta b + (-1)\mu = 0$, получаем противоречие с линейной независимостью векторов $a, b, 1$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$.

Тогда $\mu \neq 0$, поэтому...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow$

Тогда $\mu \neq 0$, поэтому...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu +$

Тогда $\mu \neq 0$, поэтому...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

Тогда $\mu \neq 0$, поэтому...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f.$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}.$$

$$\underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

$$\text{Остался случай } f \neq 0. \quad g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f.$$

Положим $\alpha = 1, \quad \beta = 4\mu$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

Положим $\alpha = 1$, $\beta = 4\mu$. Тогда $\frac{\alpha\beta}{2\mu} = \frac{1 \cdot 4\mu}{2\mu}$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f,$$

Положим $\alpha = 1$, $\beta = 4\mu$. Тогда $\frac{\alpha\beta}{2\mu} = \frac{1 \cdot 4\mu}{2\mu}$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f,$$

Положим $\alpha = 2\mu$, $\beta = 1$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f,$$

Положим $\alpha = 2\mu$, $\beta = 1$. Тогда $\frac{\alpha\beta}{2\mu} = \frac{2\mu \cdot 1}{2\mu}$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f, \quad 2\mu a + b = \mu + f.$$

Положим $\alpha = 2\mu$, $\beta = 1$. Тогда $\frac{\alpha\beta}{2\mu} = \frac{2\mu \cdot 1}{2\mu}$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f, \quad 2\mu a + b = \mu + f.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f, \quad 2\mu a + b = \mu + f.$$

Из «желтого уравнения» вычтем «зеленое», умноженное на 2...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f, \quad 2\mu a + b = \mu + f. \quad (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b = -\mu.$$

Из «желтого уравнения» вычтем «зеленое», умноженное на 2...

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f, \quad 2\mu a + b = \mu + f. \quad (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b = -\mu.$$

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f, \quad 2\mu a + b = \mu + f. \quad (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b = -\mu.$$

Но $(1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b + \mu = 0$ противоречит

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f, \quad 2\mu a + b = \mu + f. \quad (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b = -\mu.$$

Но $(1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b + \mu = 0$ противоречит

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f, \quad 2\mu a + b = \mu + f. \quad (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b = -\mu.$$

Но $(1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b + \mu = 0$ противоречит лин. незав-ти $\{a; b; 1\}$.

XIV.4. Лемма о подпространстве I

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 4. Если $a, b \in \mathbf{I}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$c = a \cdot b + b \cdot a \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$d = \alpha a + \beta b \in I. \quad (18)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{a; b; 1\}$ линейно независима.

Можно считать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

$$c = a \cdot b + b \cdot a = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{f}_{\in I}, \quad d = \alpha a + \beta b = \underbrace{\mu}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g}_{\in I}. \\ \underbrace{\alpha^2 \cdot a^2 + \beta^2 \cdot b^2 + \alpha\beta\lambda}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\alpha\beta f}_{\in I} = \underbrace{\mu^2 + g^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\mu g}_{\in I}. \quad \alpha\beta f = 2\mu g.$$

Остался случай $f \neq 0$. $g = \frac{\alpha\beta}{2\mu} f \Rightarrow \alpha a + \beta b = \mu + \frac{\alpha\beta}{2\mu} f$.

$$a + 4\mu b = \mu + 2f, \quad 2\mu a + b = \mu + f. \quad (1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b = -\mu.$$

Но $(1 - 4\mu)a + (4\mu - 2)b + \mu = 0$ противоречит лин. незав-ти $\{a; b; 1\}$.

Лемма доказана.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — *тело кватернионов*.

Доказательство.

Достаточно доказать, что

$$\left\{ \begin{array}{l} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{array} \right. \quad (19)$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — *тело кватернионов*.

Доказательство. $k^2 = -1$,

Достаточно доказать, что

$$\left\{ \begin{array}{l} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{array} \right. \quad (19)$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — *тело кватернионов*.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$,

Достаточно доказать, что

$$\left\{ \begin{array}{l} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{array} \right. \quad (19)$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — *кватернионов*^{тело}.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$,

Достаточно доказать, что

$$\left\{ \begin{array}{l} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{array} \right. \quad (19)$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

Достаточно доказать, что

$$\left\{ \begin{array}{l} i^2 = j^2 = -1, \\ i * j \in I \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k^2 = -1, \\ i * j = -j * i = k, \\ j * k = -k * j = i, \\ k * i = -i * k = j. \end{array} \right. \quad (19)$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

Проверим, что...

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$.

Проверим, что...

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$$

$$(j \cdot i) \cdot (i \cdot j) =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$$

$$(j \cdot i) \cdot (i \cdot j) = j \cdot i \cdot i \cdot j =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$$

$$(j \cdot i) \cdot (i \cdot j) = j \cdot i \cdot i \cdot j = j \cdot (-1) \cdot j =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$$

$$(j \cdot i) \cdot (i \cdot j) = j \cdot i \cdot i \cdot j = j \cdot (-1) \cdot j = -j^2 =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$$

$$(j \cdot i) \cdot (i \cdot j) = j \cdot i \cdot i \cdot j = j \cdot (-1) \cdot j = -j^2 = -(-1) =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$$

$$(j \cdot i) \cdot (i \cdot j) = j \cdot i \cdot i \cdot j = j \cdot (-1) \cdot j = -j^2 = -(-1) = 1.$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$$

$$(j \cdot i) \cdot (i \cdot j) = j \cdot i \cdot i \cdot j = j \cdot (-1) \cdot j = -j^2 = -(-1) = 1.$$

«Желтое равенство» доказано.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$.

Из **формулы (17)** следует, что...

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$ $i \cdot j + j \cdot i$

Из **формулы (17)** следует, что...

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

Из **формулы (17)** следует, что...

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело}**кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}.$ $= i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $i \cdot j + (i \cdot j)^{-1} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + (i \cdot j)^{-1} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + (i \cdot j)^{-1} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

По **лемме о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число**

$$\begin{cases} i \cdot j \in I, \\ (i \cdot j)^{-1} \end{cases}$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + (i \cdot j)^{-1} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

По **лемме о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число**

$$\begin{cases} i \cdot j \in I, \\ (i \cdot j)^{-1} \in I \end{cases}$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

По **лемме о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число**

$$\begin{cases} i \cdot j \in I, \\ (i \cdot j)^{-1} \in I \end{cases}$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

По **лемме о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число**

$$\begin{cases} i \cdot j \in I, \\ (i \cdot j)^{-1} \in I \end{cases} \Rightarrow i \cdot j + (i \cdot j)^{-1}$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

По **лемме о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число** и **лемме о подпространстве I**

$$\begin{cases} i \cdot j \in I, \\ (i \cdot j)^{-1} \in I \end{cases} \Rightarrow i \cdot j + (i \cdot j)^{-1}$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R}$

По **лемме о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число** и **лемме о подпространстве I**

$$\begin{cases} i \cdot j \in I, \\ (i \cdot j)^{-1} \in I \end{cases} \Rightarrow i \cdot j + (i \cdot j)^{-1} \in I.$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I =$

По **лемме о замкнутости I относительно инвертирования и умножения на число** и **лемме о подпространстве I**

$$\begin{cases} i \cdot j \in I, \\ (i \cdot j)^{-1} \in I \end{cases} \Rightarrow i \cdot j + (i \cdot j)^{-1} \in I.$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I =$

По **лемме о пересечении I и $\mathbb{R}$** ...

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$.

По **лемме о пересечении I и $\mathbb{R}$** ...

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело}**кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$.

Итак, $i \cdot j =$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$.

Итак, $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

Итак, $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k^2 = (i \cdot j) \cdot (i \cdot j) =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k^2 = (i \cdot j) \cdot (i \cdot j) = (i \cdot j) \cdot (-(i \cdot j)^{-1}) =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k^2 = (i \cdot j) \cdot (i \cdot j) = (i \cdot j) \cdot \left(-(i \cdot j)^{-1} \right) = -(i * j) * (i * j)^{-1} =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k^2 = (i \cdot j) \cdot (i \cdot j) = (i \cdot j) \cdot \left(-(i \cdot j)^{-1} \right) = -(i * j) * (i * j)^{-1} = -1.$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — *тело кватернионов*.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k^2 = (i \cdot j) \cdot (i \cdot j) = (i \cdot j) \cdot \left(-(i \cdot j)^{-1} \right) = -(i * j) * (i * j)^{-1} = -1.$$

Равенство $k^2 = -1$ доказано.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$k =$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k = i \cdot j =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.
 $k = i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1} =$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.
 $k = i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1} = -j \cdot i$.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — *тело кватернионов*.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k = i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1} = -j \cdot i.$$

Равенство $k = -j \cdot i$ доказано.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \ \& \ x^2 \in \mathbb{R} \ \& \ x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$j \cdot k =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$j \cdot k = j \cdot i \cdot j =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.
 $j \cdot k = j \cdot i \cdot j = (i \cdot j)^{-1} \cdot j =$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.
 $j \cdot k = j \cdot i \cdot j = (i \cdot j)^{-1} \cdot j = -i \cdot j \cdot j =$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.
 $j \cdot k = j \cdot i \cdot j = (i \cdot j)^{-1} \cdot j = -i \cdot j \cdot j = -i \cdot (-1) = i$,

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$j \cdot k = j \cdot i \cdot j = (i \cdot j)^{-1} \cdot j = -i \cdot j \cdot j = -i \cdot (-1) = i, \\ -k \cdot j =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$j \cdot k = j \cdot i \cdot j = (i \cdot j)^{-1} \cdot j = -i \cdot j \cdot j = -i \cdot (-1) = i,$$

$$-k \cdot j = -i \cdot j \cdot j =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$j \cdot k = j \cdot i \cdot j = (i \cdot j)^{-1} \cdot j = -i \cdot j \cdot j = -i \cdot (-1) = i, \\ -k \cdot j = -i \cdot j \cdot j = -(-i) =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$j \cdot k = j \cdot i \cdot j = (i \cdot j)^{-1} \cdot j = -i \cdot j \cdot j = -i \cdot (-1) = i, \\ -k \cdot j = -i \cdot j \cdot j = -(-i) = i.$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$j \cdot k = j \cdot i \cdot j = (i \cdot j)^{-1} \cdot j = -i \cdot j \cdot j = -i \cdot (-1) = i, \\ -k \cdot j = -i \cdot j \cdot j = -(-i) = i.$$

Система равенств $j \cdot k = -k \cdot j = i$ доказана.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k \cdot i =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k \cdot i = i \cdot j \cdot i =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.
 $k \cdot i = i \cdot j \cdot i = -(i \cdot j)^{-1} \cdot i =$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.
 $k \cdot i = i \cdot j \cdot i = -(i \cdot j)^{-1} \cdot i = -j \cdot i \cdot i =$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — **тело кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.
 $k \cdot i = i \cdot j \cdot i = -(i \cdot j)^{-1} \cdot i = -j \cdot i \cdot i = -j \cdot (-1) =$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k \cdot i = i \cdot j \cdot i = -(i \cdot j)^{-1} \cdot i = -j \cdot i \cdot i = -j \cdot (-1) = j,$$

$$-i \cdot k =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k \cdot i = i \cdot j \cdot i = -(i \cdot j)^{-1} \cdot i = -j \cdot i \cdot i = -j \cdot (-1) = j,$$

$$-i \cdot k = -i \cdot i \cdot j =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k \cdot i = i \cdot j \cdot i = -(i \cdot j)^{-1} \cdot i = -j \cdot i \cdot i = -j \cdot (-1) = j,$$

$$-i \cdot k = -i \cdot i \cdot j = -(-j) =$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k \cdot i = i \cdot j \cdot i = -(i \cdot j)^{-1} \cdot i = -j \cdot i \cdot i = -j \cdot (-1) = j,$$

$$-i \cdot k = -i \cdot i \cdot j = -(-j) = j.$$

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то
 $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — **кватернионы**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

$$k \cdot i = i \cdot j \cdot i = -(i \cdot j)^{-1} \cdot i = -j \cdot i \cdot i = -j \cdot (-1) = j,$$

$$-i \cdot k = -i \cdot i \cdot j = -(-j) = j.$$

Система равенств $k \cdot i = -i \cdot k = j$ доказана.

XIV.5. Лемма о вложении тела кватернионов в F

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Лемма 5. Если $\exists i, j \in \mathbf{I} \quad i^2 = j^2 = -1 \quad \& \quad i \cdot j \in I$, то $\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad k = i \cdot j \right\}$ — ^{тело} **кватернионов**.

Доказательство. $k^2 = -1$, $k = -j \cdot i$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.
 $j \cdot i = (i \cdot j)^{-1}$. $\underbrace{i \cdot j}_{\in I} + \underbrace{(i \cdot j)^{-1}}_{\in I} = i \cdot j + j \cdot i \in \mathbb{R} \cap I = \{0\}$. $i \cdot j = -(i \cdot j)^{-1}$.

Лемма доказана.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — *тело*, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело *кватернионов*.

Доказательство. Если $\mathbf{I} = \{0\}$, то $F =$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — *тело*, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело *кватернионов*.

Доказательство. Если $\mathbf{I} = \{0\}$, то $F = \mathbb{R}$.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Если $\mathbf{I} = \{0\}$, то $F = \mathbb{R}$.

Если размерность **подпространства I** равна 1, то $F =$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — *тело*, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело *кватернионов*.

Доказательство. Если $\mathbf{I} = \{0\}$, то $F = \mathbb{R}$.

Если размерность *подпространства I* равна 1, то $F = \mathbb{C}$.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — *тело*, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело *кватернионов*.

Доказательство. Пусть теперь размерность *подпространства* I , большей 1.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

Возьмем линейно независимую систему векторов $\{u, v\}$ линейного пространства **I**.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u,$$

то

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad \text{то}$$

$$i^2 =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}} u,$$

то

$$i^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}} u \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}} u \right) =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad \text{то}$$

$$i^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u \right) = \frac{1}{-u^2}(u^2) =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad \text{то}$$

$$i^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u \right) = \frac{1}{-u^2}(u^2) = -1.$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad \text{то } i^2 = -1.$$

$$i^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{-u^2}}u \right) = \frac{1}{-u^2}(u^2) = -1.$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad \text{то } i^2 = -1.$$

По **лемме о разложении элементов из F в сумму...**

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad \text{то } i^2 = -1.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

По **лемме о разложении элементов из F в сумму...**

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad \text{то } i^2 = -1.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

Согласно **формуле (18)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, поэтому

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad \text{то } i^2 = -1.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

Согласно **формуле (18)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, поэтому $(\alpha i + v)^2 < 0$.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

Согласно **формуле (18)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, поэтому $(\alpha i + v)^2 < 0$.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

Согласно **формуле (18)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, поэтому $(\alpha i + v)^2 < 0$.

$$j^2 =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

Согласно **формуле (18)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, поэтому $(\alpha i + v)^2 < 0$.

$$j^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) \right)^2 =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

Согласно **формуле (18)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, поэтому $(\alpha i + v)^2 < 0$.

$$j^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) \right)^2 = \frac{(\alpha i + v)^2}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

Согласно **формуле (18)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, поэтому $(\alpha i + v)^2 < 0$.

$$j^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) \right)^2 = \frac{(\alpha i + v)^2}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} = -\frac{-(\alpha i + v)^2}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

Согласно **формуле (18)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, поэтому $(\alpha i + v)^2 < 0$.

$$j^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) \right)^2 = \frac{(\alpha i + v)^2}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} = -\frac{-(\alpha i + v)^2}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} = -1.$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2.$$
$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

Согласно **формуле (18)** $(\alpha i + v) \in \mathbf{I}$, поэтому $(\alpha i + v)^2 < 0$.

$$j^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) \right)^2 = \frac{(\alpha i + v)^2}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} = -\frac{-(\alpha i + v)^2}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} = -1.$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot j =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot j = i \cdot \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot j = i \cdot \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i^2 + i \cdot v) =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot j = i \cdot \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i^2 + i \cdot v) =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot j = i \cdot \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i^2 + i \cdot v) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (-\alpha + \alpha + x) =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

$$\begin{aligned} i \cdot j &= i \cdot \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i^2 + i \cdot v) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (-\alpha + \alpha + x) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} x \end{aligned}$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in I.$$

$$\begin{aligned} i \cdot j &= i \cdot \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i^2 + i \cdot v) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (-\alpha + \alpha + x) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} x \end{aligned}$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x \in I.}$$

$$\begin{aligned} i \cdot j &= i \cdot \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i^2 + i \cdot v) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (-\alpha + \alpha + x) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} x \in \mathbf{I.} \end{aligned}$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2,$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

$$\begin{aligned} i \cdot j &= i \cdot \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i^2 + i \cdot v) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (-\alpha + \alpha + x) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} x \in \mathbf{I}. \end{aligned}$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

$$\text{Если } i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u, \quad j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v), \text{ то } i^2 = -1 = j^2, \quad i \cdot j \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot v = \alpha + x, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbf{I}.$$

$$\begin{aligned} i \cdot j &= i \cdot \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (\alpha i^2 + i \cdot v) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} (-\alpha + \alpha + x) = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}} x \in \mathbf{I}. \end{aligned}$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

Если $i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u$, $j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$, то $i^2 = -1 = j^2$, $i \cdot j \in \mathbf{I}$.
 $i \cdot v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{I}$.

Значит, по **лемме о вложении тела кватернионов в F** ,

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

Если $i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u$, $j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$, то $i^2 = -1 = j^2$, $i \cdot j \in \mathbf{I}$.
 $i \cdot v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{I}$.

Значит, по **лемме о вложении тела кватернионов в F** ,

$\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta i \cdot j \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$ — тело кватернионов.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Пусть теперь размерность **подпространства I** , большей 1. Пусть $\{u, v\}$ линейно независима.

Если $i = \frac{1}{\sqrt{-u^2}}u$, $j = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha i + v)^2}}(\alpha i + v)$, то $i^2 = -1 = j^2$, $i \cdot j \in \mathbf{I}$.
 $i \cdot v = \alpha + x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{I}$.

Значит, по **лемме о вложении тела кватернионов в F** ,

$$\left\{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta i \cdot j \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \text{ — тело кватернионов.}$$

Значит, если **линейное пространство I** имеет размерность, большую 1, но не превосходящую 3, то F — это тело кватернионов.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму...**

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad \begin{cases} \alpha & \in \mathbb{R}, \\ x & \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму...**

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad \begin{cases} \alpha, \beta & \in \mathbb{R}, \\ x, y & \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму...**

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

В силу **леммы о разложении элементов из F в сумму...**

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

В силу **леммы о подпространстве I** ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k$$

В силу **леммы о подпространстве I** ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

В силу **леммы о подпространстве I** ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

Из **линейной независимости** системы векторов $\{i; j; k; m\}$ следует, что $t \neq 0$.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

Из **линейной независимости** системы векторов $\{i; j; k; m\}$ следует, что $t \neq 0$.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

По **лемме о подпространстве** I ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot t =$$

По **лемме о подпространстве I** ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot t = i \cdot m + \alpha i^2 + \beta i \cdot j - \gamma i \cdot k =$$

По **лемме о подпространстве I** ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot t = i \cdot m + \alpha i^2 + \beta i \cdot j - \gamma i \cdot k =$$

По **лемме о подпространстве** I ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot t = i \cdot m + \alpha i^2 + \beta i \cdot j - \gamma i \cdot k = i \cdot m - \alpha + \beta k - \gamma j =$$

По **лемме о подпространстве I** ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot t = i \cdot m + \alpha i^2 + \beta i \cdot j - \gamma i \cdot k = i \cdot m - \alpha + \beta k - \gamma j = x + \beta k - \gamma j$$

По **лемме о подпространстве** I ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства I** , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}.$$

$$i \cdot t = i \cdot m + \alpha i^2 + \beta i \cdot j - \gamma i \cdot k = i \cdot m - \alpha + \beta k - \gamma j = x + \beta k - \gamma j \in I.$$

По **лемме о подпространстве I** ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot t = i \cdot m + \alpha i^2 + \beta i \cdot j - \gamma i \cdot k = i \cdot m - \alpha + \beta k - \gamma j = x + \beta k - \gamma j \in I.$$

По **лемме о подпространстве** I ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t \quad \quad \quad \} \subset I.$$

Аналогично получаем...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t\} \subset I.$$

Аналогично получаем...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; m\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot m = \alpha + x, \quad j \cdot m = \beta + y, \quad k \cdot m = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

Аналогично получаем...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$i \cdot t = \alpha + x$, $j \cdot t = \beta + y$, $k \cdot t = \gamma + z$, $\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$ Положим $n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t$.

$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$. $\{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I$.

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$i \cdot t = \alpha + x$, $j \cdot t = \beta + y$, $k \cdot t = \gamma + z$, $\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases}$ Положим $n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t$.
 $0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}$. $\{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I$.

По **лемме о вложении тела кватернионов в F** ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i,$$

По **лемме о вложении тела кватернионов в** F ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j,$$

По **лемме о вложении тела кватернионов в F** ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0.$$

По **лемме о вложении тела кватернионов в** F ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

По **лемме о вложении тела кватернионов в** F ...

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n = -n \cdot k =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n = -n \cdot k = -n \cdot i \cdot j =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n = -n \cdot k = -n \cdot i \cdot j = i \cdot n \cdot j =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n = -n \cdot k = -n \cdot i \cdot j = i \cdot n \cdot j = i \cdot (-j \cdot n) =$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n = -n \cdot k = -n \cdot i \cdot j = i \cdot n \cdot j = i \cdot (-j \cdot n) = -k \cdot n \Rightarrow$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n = -n \cdot k = -n \cdot i \cdot j = i \cdot n \cdot j = i \cdot (-j \cdot n) = -k \cdot n \Rightarrow 2k \cdot n = 0,$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n = -n \cdot k = -n \cdot i \cdot j = i \cdot n \cdot j = i \cdot (-j \cdot n) = -k \cdot n \Rightarrow 2k \cdot n = 0,$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n = -n \cdot k = -n \cdot i \cdot j = i \cdot n \cdot j = i \cdot (-j \cdot n) = -k \cdot n \Rightarrow 2k \cdot n = 0, \quad \text{противоречие.}$$

XIV.6. Доказательство теоремы Фробениуса

$$I = \left\{ x \mid x \in F \quad \& \quad x^2 \in \mathbb{R} \quad \& \quad x^2 \leq 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть F — **тело**, причем $\mathbb{R} \subseteq F$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in F \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (20)$$

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad \forall z \in F \quad \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad z = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_n i_n. \quad (21)$$

Тогда F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо тело **кватернионов**.

Доказательство. Остался случай размерности **подпространства** I , большей 3.

Мы доказали, что тогда F включает в себя тело кватернионов.

Возьмем **линейно независимую** систему векторов $\{i; j; k; t\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

$$i \cdot t = \alpha + x, \quad j \cdot t = \beta + y, \quad k \cdot t = \gamma + z, \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x, y, z \in \mathbf{I}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Положим} \\ n = (1/\sqrt{-t^2}) \cdot t. \end{array}$$

$$0 \neq t = m + \alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbf{I}. \quad \{i \cdot t, j \cdot t, k \cdot t\} \subset I.$$

$$i \cdot n = -n \cdot i, \quad j \cdot n = -n \cdot j, \quad k \cdot n = -n \cdot k \neq 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$k \cdot n = -n \cdot k = -n \cdot i \cdot j = i \cdot n \cdot j = i \cdot (-j \cdot n) = -k \cdot n \Rightarrow 2k \cdot n = 0, \quad \text{противоречие.}$$

Теорема доказана.

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение.

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) =$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и}$$

$$(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = + ()i + \\ & + ()j + \\ & + ()k = \end{aligned}$$

$$\frac{(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)}{(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)} \quad u$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (\hspace{10em})i + \\ & + (\hspace{10em})j + \\ & + (\hspace{10em})k = \end{aligned}$$

$$\frac{(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)}{(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)} \quad u$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned}
 & (\textcolor{violet}{2} - 3i + j - 4k)(1 - \textcolor{violet}{3}i - j + 2k) = \\
 & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (\hspace{1.5cm})i + \\
 & + (\hspace{1.5cm})j + \\
 & + (\hspace{1.5cm})k =
 \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и}$$

$$(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{2} - 3i + j - 4k)(1 - \mathbf{3i} - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) +)i + \\ & + ()j + \\ & + ()k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и}$$

$$(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) +)i + \\ & + (+)j + \\ & + (+)k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 +)i + \\ & + ()j + \\ & + ()k = \end{aligned}$$

$$\frac{(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)}{(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)} \quad u$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) &= \\ = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + \underline{\hspace{1cm}} - \hspace{1cm})i + & \\ + (\hspace{1cm})j + & \\ + (\hspace{1cm})k = & \end{aligned}$$

$$\frac{(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)}{(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)} \quad u$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + \textcolor{red}{j} - 4k)(1 - 3i - j + \textcolor{red}{2}k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + \underline{\hspace{1cm}} - \hspace{1cm})i + \\ & + (\hspace{1cm})j + \\ & + (\hspace{1cm})k = \end{aligned}$$

$$\frac{(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)}{(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)} \quad u$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + \textcolor{violet}{j} - 4k)(1 - 3i - j + \textcolor{violet}{2}k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - \\ & + ()j + \\ & + ()k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - \underline{\hspace{2cm}})i + \\ & + (\underline{\hspace{2cm}})j + \\ & + (\underline{\hspace{2cm}})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и}$$

$$(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - \underline{\hspace{2cm}})i + \\ & + (\underline{\hspace{2cm}})j + \\ & + (\underline{\hspace{2cm}})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (\hspace{10em})j + \\ & + (\hspace{10em})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + \mathbf{j} - 4k)(1 - 3i - \mathbf{j} + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (\hspace{10em})j + \\ & + (\hspace{10em})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + \mathbf{j} - 4k)(1 - 3i - \mathbf{j} + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 +)j + \\ & + (+)k = \end{aligned}$$

$$\frac{(2-3i+j-4k)+(1-3i-j+2k)}{(2-3i+j-4k)(1-3i-j+2k)} \quad u$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + \underline{\hspace{2cm}} - \hspace{2cm})j + \\ & + (\hspace{2cm} - \hspace{2cm})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + \underline{\hspace{2cm}} - \hspace{2cm})j + \\ & + (\hspace{2cm} \hspace{2cm} \hspace{2cm} \hspace{2cm} \hspace{2cm})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - \quad \quad \quad)j + \\ & + (\quad \quad \quad)k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - \underline{\hspace{2cm}})j + \\ & + (\underline{\hspace{2cm}})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - \underline{\hspace{2cm}})j + \\ & + (\underline{\hspace{2cm}})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (\quad \quad \quad)k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (\quad \quad \quad)k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 +)k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + \underline{\hspace{2cm}} - \hspace{2cm})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + \underline{\hspace{2cm}} - \hspace{2cm})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + (-3)(-1) - \underline{\hspace{2cm}})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + (-3)(-1) - \underline{\hspace{2cm}})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + \mathbf{j} - 4k)(1 - \mathbf{3i} - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + (-3)(-1) - \underline{\hspace{2cm}})k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + \mathbf{j} - 4k)(1 - \mathbf{3i} - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + (-3)(-1) - 1 \cdot (-3))k = \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислите *по определению*

$$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) \quad \text{и} \\ (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k).$$

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k,$

$$\begin{aligned} & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\ & = 2 + 9i^2 - j^2 - 8k^2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + \\ & + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + \\ & + (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + (-3)(-1) - 1 \cdot (-3))k = \\ & = 2 - 11i + 17j + 6k. \end{aligned}$$

Вернёмся к лекции?

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) =$

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) =$
 $= \left(\begin{pmatrix} 2 - 3i & 1 - 4i \\ -1 - 4i & 2 + 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 & (2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = \\
 & = \left(\begin{pmatrix} 2 - 3i & 1 - 4i \\ -1 - 4i & 2 + 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\
 & = \begin{pmatrix} 3 - 6i & -2i \\ -2i & 3 + 6i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 & (2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = \\
 & = \left(\begin{pmatrix} 2 - 3i & 1 - 4i \\ -1 - 4i & 2 + 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\
 & = \begin{pmatrix} 3 - 6i & -2i \\ -2i & 3 + 6i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 3 - 6i - 2k,
 \end{aligned}$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) =$

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) =$
 $= \left(\begin{pmatrix} 2 - 3i & 1 - 4i \\ -1 - 4i & 2 + 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\
 & = \left(\begin{pmatrix} 2 - 3i & 1 - 4i \\ -1 - 4i & 2 + 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\
 & = \begin{pmatrix} 2 - 11i & 17 + 6i \\ -17 + 6i & 2 + 11i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Пример 11. Вычислите с помощью **матричной интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) =$
 $= \left(\begin{pmatrix} 2 - 3i & 1 - 4i \\ -1 - 4i & 2 + 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$
 $= \begin{pmatrix} 2 - 11i & 17 + 6i \\ -17 + 6i & 2 + 11i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 2 - 11i + 17j + 6k,$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Вернёмся к лекции?

Пример 12. Найдите *обратный* к кватерниону $2 - i + 2j - 4k$.

Решение.

Пример 12. Найдите **обратный** к кватерниону $2 - i + 2j - 4k$.

Решение.

$$\frac{1}{4 + 1 + 4 + 16} \left(\overline{2 - i + 2j - 4k} \right) =$$

Пример 12. Найдите **обратный** к кватерниону $2 - i + 2j - 4k$.

Решение.

$$\frac{1}{4 + 1 + 4 + 16} \left(\overline{2 - i + 2j - 4k} \right) = \frac{1}{25} (2 + i - 2j + 4k).$$

Пример 12. Найдите **обратный** к кватерниону $2 - i + 2j - 4k$.

Решение. В **матричной интерпретации** получаем

$$(2 - i + 2j - 4k)^{-1} =$$

Пример 12. Найдите **обратный** к кватерниону $2 - i + 2j - 4k$.

Решение. В **матричной интерпретации** получаем

$$(2 - i + 2j - 4k)^{-1} = \left(\left(\begin{array}{cc} 2 - i & 2 - 4i \\ -2 - 4i & 2 + i \end{array} \right)^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Пример 12. Найдите **обратный** к кватерниону $2 - i + 2j - 4k$.

Решение. В **матричной интерпретации** получаем

$$\begin{aligned}(2 - i + 2j - 4k)^{-1} &= \left(\left(\begin{pmatrix} 2 - i & 2 - 4i \\ -2 - 4i & 2 + i \end{pmatrix} \right)^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \\ &= \left(\frac{1}{4 + 1 + 4 + 16} \begin{pmatrix} 2 + i & -2 + 4i \\ 2 + 4i & 2 - i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =\end{aligned}$$

Пример 12. Найдите **обратный** к кватерниону $2 - i + 2j - 4k$.

Решение. В **матричной интерпретации** получаем

$$\begin{aligned}(2 - i + 2j - 4k)^{-1} &= \left(\left(\begin{pmatrix} 2 - i & 2 - 4i \\ -2 - 4i & 2 + i \end{pmatrix} \right)^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \\&= \left(\frac{1}{4 + 1 + 4 + 16} \begin{pmatrix} 2 + i & -2 + 4i \\ 2 + 4i & 2 - i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\&= \frac{1}{25} (2 + i - 2j + 4k) .\end{aligned}$$

Пример 12. Найдите **обратный** к кватерниону $2 - i + 2j - 4k$.

Решение. В **матричной интерпретации** получаем

$$\begin{aligned}(2 - i + 2j - 4k)^{-1} &= \left(\left(\begin{array}{cc} 2 - i & 2 - 4i \\ -2 - 4i & 2 + i \end{array} \right)^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \\&= \left(\frac{1}{4 + 1 + 4 + 16} \begin{pmatrix} 2 + i & -2 + 4i \\ 2 + 4i & 2 - i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\&= \frac{1}{25} (2 + i - 2j + 4k) .\end{aligned}$$

Проверим:

$$(2 - i + 2j - 4k) \cdot \frac{1}{25} (2 + i - 2j + 4k) = 1.$$

Вернёмся к лекции?

Пример 13. Вычислите с помощью *геометрической интерпретации кватерниона* $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

Пример 13. Вычислите с помощью *геометрической интерпретации кватерниона* $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) =$

Пример 13. Вычислите с помощью *геометрической интерпретации кватерниона* $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) =$
 $= \left((2 - 3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}}) + (1 - 3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}}) \right)^{\psi^{-1}} =$

Пример 13. Вычислите с помощью *геометрической интерпретации кватерниона* $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 & (2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = \\
 & = \left((2 - 3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}}) + (1 - 3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}}) \right)^{\psi^{-1}} = \\
 & = \left(3 - 6 \vec{\mathbf{i}} - 2 \vec{\mathbf{k}} \right)^{\psi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Пример 13. Вычислите с помощью **геометрической интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) =$
 $= \left((2 - 3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}}) + (1 - 3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}}) \right)^{\psi^{-1}} =$
 $= \left(3 - 6 \vec{\mathbf{i}} - 2 \vec{\mathbf{k}} \right)^{\psi^{-1}} = 3 - 6i - 2k,$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Пример 13. Вычислите с помощью *геометрической интерпретации кватерниона* $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) =$

Пример 13. Вычислите с помощью *геометрической интерпретации кватерниона* $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение. $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) =$
 $= 2 - \left(-3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}}, -3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}} \right) +$

Пример 13. Вычислите с помощью *геометрической интерпретации кватерниона* $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\
 & = 2 - \left(-3 \vec{i} + \vec{j} - 4 \vec{k}, -3 \vec{i} - \vec{j} + 2 \vec{k} \right) + \\
 & + \left(2 \left(-3 \vec{i} - \vec{j} + 2 \vec{k} \right) + 1 \cdot \left(-3 \vec{i} + \vec{j} - 4 \vec{k} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

Пример 13. Вычислите с помощью *геометрической интерпретации кватерниона* $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\
 &= 2 - \left(-3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}}, -3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}} \right) + \\
 &+ \left(2 \left(-3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}} \right) + 1 \cdot \left(-3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}} \right) + \right. \\
 &\left. + \left[-3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}}, -3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}} \right] \right)^{\psi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Пример 13. Вычислите с помощью *геометрической интерпретации кватерниона* $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 & (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\
 & = 2 - \left(-3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}}, -3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}} \right) + \\
 & + \left(2 \left(-3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}} \right) + 1 \cdot \left(-3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}} \right) + \right. \\
 & \left. + \left[-3 \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 4 \vec{\mathbf{k}}, -3 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2 \vec{\mathbf{k}} \right] \right)^{\psi^{-1}} = \\
 & = 2 + \left(-9 \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + \left| \begin{array}{ccc} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -3 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{array} \right| \right)^{\psi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Пример 13. Вычислите с помощью **геометрической интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Решение. } (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\
 &= 2 - \left(-3 \vec{i} + \vec{j} - 4 \vec{k}, -3 \vec{i} - \vec{j} + 2 \vec{k} \right) + \\
 &+ \left(2 \left(-3 \vec{i} - \vec{j} + 2 \vec{k} \right) + 1 \cdot \left(-3 \vec{i} + \vec{j} - 4 \vec{k} \right) + \right. \\
 &\left. + \left[-3 \vec{i} + \vec{j} - 4 \vec{k}, -3 \vec{i} - \vec{j} + 2 \vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} = \\
 &= 2 + \left(-9 \vec{i} - \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} = 2 - 11i + 17j + 6k,
 \end{aligned}$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Пример 13. Вычислите с помощью **геометрической интерпретации кватерниона** $(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Решение. } (2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = \\
 &= 2 - \left(-3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\
 &+ \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + 1 \cdot \left(-3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \right) + \right. \\
 &\left. + \left[-3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} = \\
 &= 2 + \left(-9\vec{i} - \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} = 2 - 11i + 17j + 6k.
 \end{aligned}$$

Вернёмся к лекции?

Задачи для самостоятельного решения

XV. Операции алгебры кватернионов

Задача XV.14. (Ответ приведен на стр.1615.)

Вычислите, ис-

пользуя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$;

5) $(j - i)(k - j)$; 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$;

8) $(i + j + k)^3$.

Задача XV.15.

(Ответ приведен на стр.1632.)

Вы-

числите, используя **определение операции деления** в **алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$;
2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

XVI. Матричное представление кватернионов

Задача XVI.16. (Ответ приведен на стр.1646.)

Вычисли-

те, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$;

5) $(j - i)(k - j)$; 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$;

8) $(i + j + k)^3$.

Задача XVI.17. (Ответ приведен на стр.1695.) Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$;
2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

XVII. *Геометрическая интерпретация кватернионов*

Задача XVII.18. (Ответ приведен на стр.1724.) Вычислите, ис-

пользуя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$;

5) $(j - i)(k - j)$; 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$;

8) $(i + j + k)^3$.

XVIII. *Решение уравнений в алгебре кватернионов*

Задача XVIII.19. (Ответ приведен на стр.1787.) Решите уравнения

$$(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i \quad \text{и}$$
$$y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i.$$

XIX. *Применения кватернионов*

Задача XIX.20. (Ответ приведен на стр.1805.) Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Задача XIX.21. (Ответ приведен на стр.1841.)

Используя

алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите

$$\left[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} \right], \quad \left[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j} \right],$$
$$\left[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i} \right], \quad \left[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j} \right],$$

с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Задача XIX.22.

(Ответ приведен на стр.1854.)

Использ-

зуя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите

$$\begin{pmatrix} \vec{j} - 3\vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\vec{i} - \vec{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \vec{i} - \vec{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\vec{j} - \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\vec{i} \end{pmatrix}, \quad \vec{k} \begin{pmatrix} \vec{i} - \vec{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \end{pmatrix},$$

с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) =$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,
 $2i(1 - i) =$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,
 $2i(1 - i) = 2 + 2i$,

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$2i(1 - i) = 2 + 2i$,

$3 - 2i + 5 - i =$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) =$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) = (15 - 2) + i(-3 - 10) = 13 - 13i,$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) = (15 - 2) + i(-3 - 10) = 13 - 13i,$$

$$(2 - 3i)(5 - 2i) =$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) = (15 - 2) + i(-3 - 10) = 13 - 13i,$$

$$(2 - 3i)(5 - 2i) = (10 - 6) + i(-4 - 15) = 4 - 19i,$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) = (15 - 2) + i(-3 - 10) = 13 - 13i,$$

$$(2 - 3i)(5 - 2i) = (10 - 6) + i(-4 - 15) = 4 - 19i,$$

$$(3 - i)(3 + i) =$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) = (15 - 2) + i(-3 - 10) = 13 - 13i,$$

$$(2 - 3i)(5 - 2i) = (10 - 6) + i(-4 - 15) = 4 - 19i,$$

$$(3 - i)(3 + i) = 10,$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) = (15 - 2) + i(-3 - 10) = 13 - 13i,$$

$$(2 - 3i)(5 - 2i) = (10 - 6) + i(-4 - 15) = 4 - 19i,$$

$$(3 - i)(3 + i) = 10,$$

$$(3 - 2i)(-3 - 2i) =$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) = (15 - 2) + i(-3 - 10) = 13 - 13i,$$

$$(2 - 3i)(5 - 2i) = (10 - 6) + i(-4 - 15) = 4 - 19i,$$

$$(3 - i)(3 + i) = 10,$$

$$(3 - 2i)(-3 - 2i) = -13,$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) = (15 - 2) + i(-3 - 10) = 13 - 13i,$$

$$(2 - 3i)(5 - 2i) = (10 - 6) + i(-4 - 15) = 4 - 19i,$$

$$(3 - i)(3 + i) = 10,$$

$$(3 - 2i)(-3 - 2i) = -13,$$

$$(4 + i)(2 - i) =$$

Задача 1. Вычислите $(3 + 2i)(1 - i)$, $2i(1 - i)$, $3 - 2i + 5 - i$, $(3 - 2i)(5 - i)$,
 $(2 - 3i)(5 - 2i)$, $(3 - i)(3 + i)$, $(3 - 2i)(-3 - 2i)$, $(4 + i)(2 - i)$.

Ответ. $(3 + 2i)(1 - i) = (3 + 2) + i(-3 + 2) = 5 - i$,

$$2i(1 - i) = 2 + 2i,$$

$$3 - 2i + 5 - i = 8 - 3i,$$

$$(3 - 2i)(5 - i) = (15 - 2) + i(-3 - 10) = 13 - 13i,$$

$$(2 - 3i)(5 - 2i) = (10 - 6) + i(-4 - 15) = 4 - 19i,$$

$$(3 - i)(3 + i) = 10,$$

$$(3 - 2i)(-3 - 2i) = -13,$$

$$(4 + i)(2 - i) = 9 - 2i.$$

Решение задачи 2.

Задача 2. Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,
 $\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}$.

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i$,

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i$,
 $\frac{11-2i}{4-3i} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i$,
 $\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i$,
 $\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i$,
 $\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i$,

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i$,
 $\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i$,
 $\frac{10-10i}{1-3i} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i$,
 $\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i$,
 $\frac{10-10i}{1-3i} = \frac{(10-10i)(1+3i)}{10} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,
 $\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i$ или $\overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i$,
 $\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i$ или $\overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i$,
 $\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i$,
 $\frac{10-10i}{1-3i} = \frac{(10-10i)(1+3i)}{10} = \frac{40+20i}{10} =$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,

$$\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i \text{ или } \overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i,$$

$$\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i \text{ или } \overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i,$$

$$\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i,$$

$$\frac{10-10i}{1-3i} = \frac{(10-10i)(1+3i)}{10} = \frac{40+20i}{10} = 4+2i,$$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,

$$\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i \text{ или } \overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i,$$

$$\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i \text{ или } \overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i,$$

$$\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i,$$

$$\frac{10-10i}{1-3i} = \frac{(10-10i)(1+3i)}{10} = \frac{40+20i}{10} = 4+2i,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \\ \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \end{array} \right.$$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,

$$\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i \text{ или } \overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i,$$

$$\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i \text{ или } \overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i,$$

$$\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i,$$

$$\frac{10-10i}{1-3i} = \frac{(10-10i)(1+3i)}{10} = \frac{40+20i}{10} = 4+2i,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{3+11i}{7+4i} = \\ \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{(3+11i)(2-3i)}{13(2-i)} = \end{array} \right.$$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,

$$\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i \text{ или } \overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i,$$

$$\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i \text{ или } \overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i,$$

$$\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i,$$

$$\frac{10-10i}{1-3i} = \frac{(10-10i)(1+3i)}{10} = \frac{40+20i}{10} = 4+2i,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{3+11i}{7+4i} = \frac{(3+11i)(7-4i)}{49+16} = \\ \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{(3+11i)(2-3i)}{13(2-i)} = \frac{39+13i}{13(2-i)} = \end{array} \right.$$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,

$$\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i \text{ или } \overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i,$$

$$\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i \text{ или } \overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i,$$

$$\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i,$$

$$\frac{10-10i}{1-3i} = \frac{(10-10i)(1+3i)}{10} = \frac{40+20i}{10} = 4+2i,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{3+11i}{7+4i} = \frac{(3+11i)(7-4i)}{49+16} = \frac{21+44+(77-12)i}{65} = \\ \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{(3+11i)(2-3i)}{13(2-i)} = \frac{39+13i}{13(2-i)} = \frac{(3+i)(2+i)}{5} = \end{array} \right.$$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,

$$\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i \text{ или } \overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i,$$

$$\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i \text{ или } \overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i,$$

$$\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i,$$

$$\frac{10-10i}{1-3i} = \frac{(10-10i)(1+3i)}{10} = \frac{40+20i}{10} = 4+2i,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{3+11i}{7+4i} = \frac{(3+11i)(7-4i)}{49+16} = \frac{21+44+(77-12)i}{65} = 1+i, \\ \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{(3+11i)(2-3i)}{13(2-i)} = \frac{39+13i}{13(2-i)} = \frac{(3+i)(2+i)}{5} = \frac{5+5i}{5} = \end{array} \right.$$

Задача 2.

Вычислите $\overline{1-i}$, $\overline{(3-i)(2+i)}$, $\overline{(4+3i)(3+i)}$, $\frac{11-2i}{4-3i}$, $\frac{10-10i}{1-3i}$,

$$\frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)}.$$

Ответ. $\overline{1-i} = 1+i$,

$$\overline{(3-i)(2+i)} = \overline{7+i} = 7-i \text{ или } \overline{(3-i)(2+i)} = (3+i)(2-i) = 7-i,$$

$$\overline{(4+3i)(3+i)} = \overline{9+13i} = 9-13i \text{ или } \overline{(4+3i)(3+i)} = (4-3i)(3-i) = 9-13i,$$

$$\frac{11-2i}{4-3i} = \frac{(11-2i)(4+3i)}{25} = \frac{50+25i}{25} = 2+i,$$

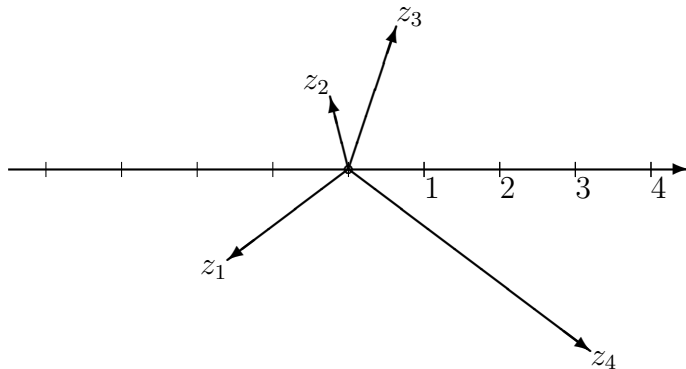
$$\frac{10-10i}{1-3i} = \frac{(10-10i)(1+3i)}{10} = \frac{40+20i}{10} = 4+2i,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{3+11i}{7+4i} = \frac{(3+11i)(7-4i)}{49+16} = \frac{21+44+(77-12)i}{65} = 1+i, \\ \frac{3+11i}{(2-i)(2+3i)} = \frac{(3+11i)(2-3i)}{13(2-i)} = \frac{39+13i}{13(2-i)} = \frac{(3+i)(2+i)}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i. \end{array} \right.$$

Решение задачи 3.

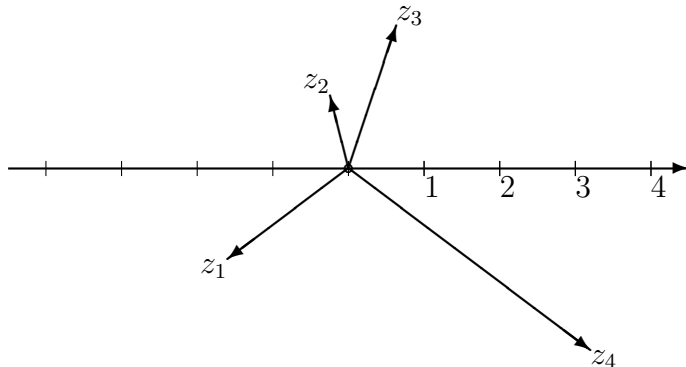
Задача 3.

Найдите с помощью **операций комплексной плоскости** $(z_1 + z_2)$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $(z_1 + z_3)$, $z_1 z_3$, $\frac{z_1}{z_3}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_3}$, $(z_2 + z_4)$, $z_2 z_4$, $\frac{z_4}{z_1}$, $\overline{z_4}$, $\sqrt[3]{z_2}$.



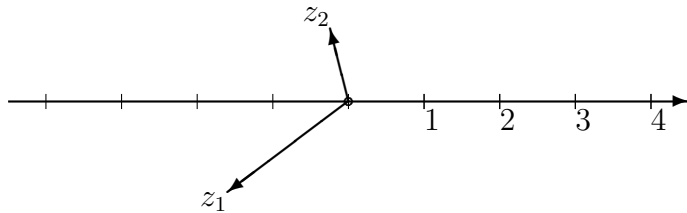
Задача 3.

Найдите с помощью **операций комплексной плоскости** $(z_1 + z_2)$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $(z_1 + z_3)$, $z_1 z_3$, $\frac{z_1}{z_3}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_3}$, $(z_2 + z_4)$, $z_2 z_4$, $\frac{z_4}{z_1}$, $\overline{z_4}$, $\sqrt[3]{z_2}$.

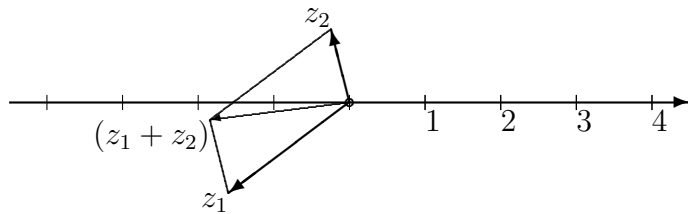


Ответ. Ответ естественно представить в графической форме.

Задача 3.
 $(z_1 + z_2) = ?$

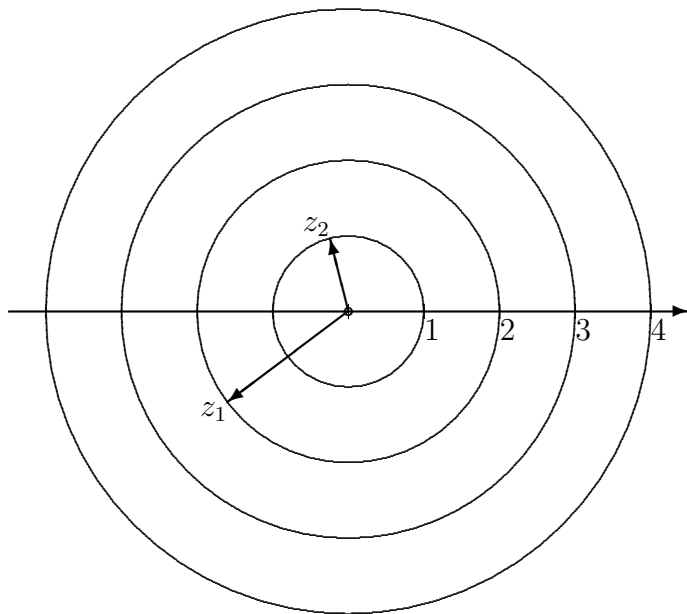


Задача 3.
 $(z_1 + z_2) = ?$



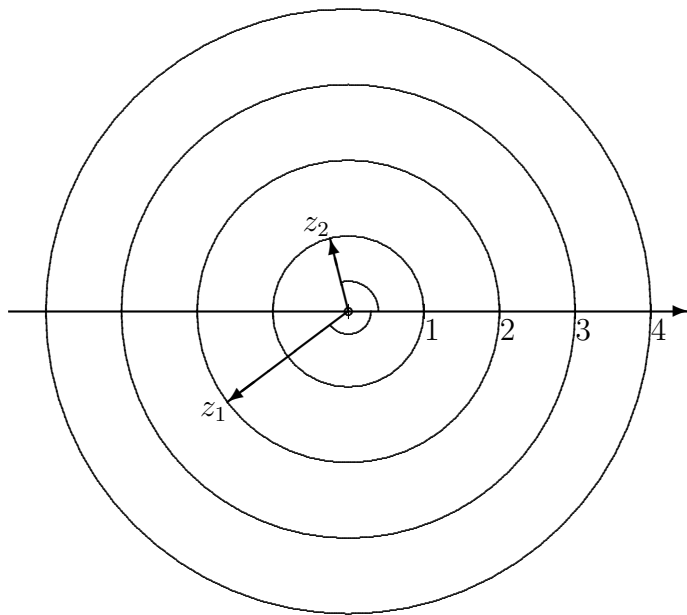
Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,
 $z_1 z_2 = ?$



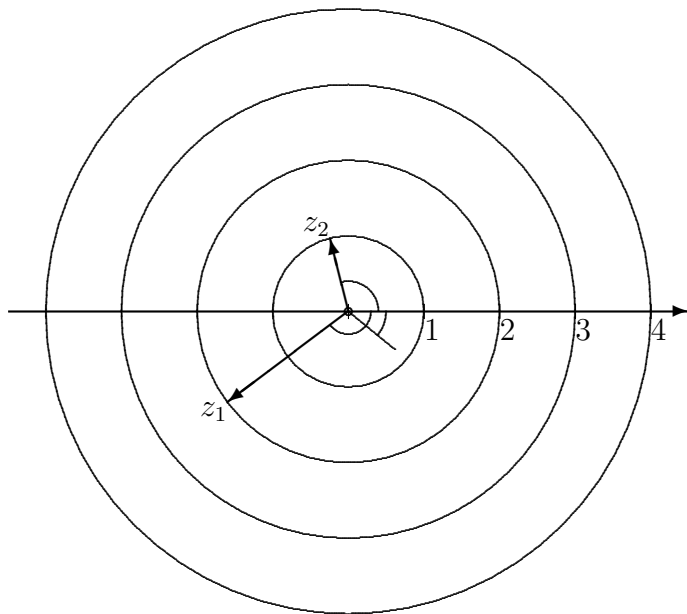
Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,
 $z_1 z_2 = ?$



Задача 3.

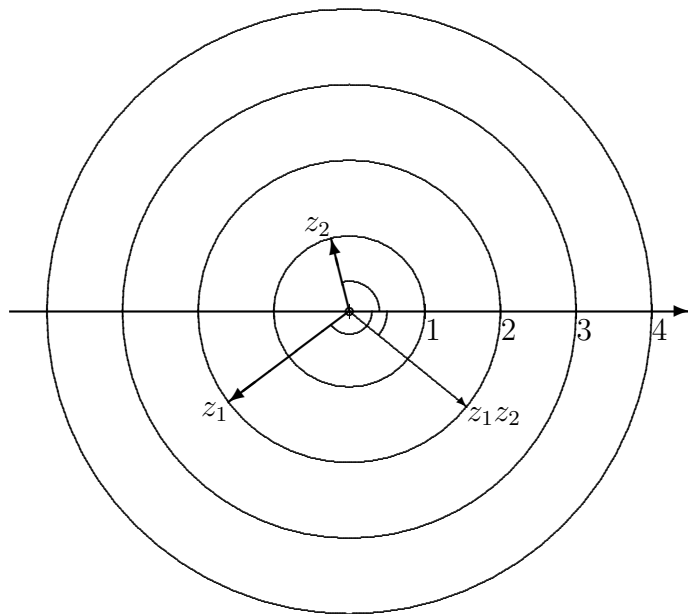
$(z_1 + z_2)$ — был изображен,
 $z_1 z_2 = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

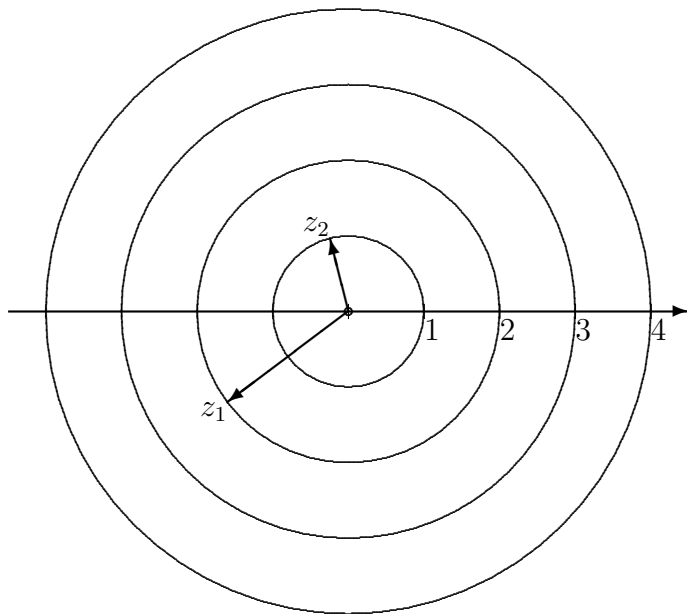


Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2} = ?$

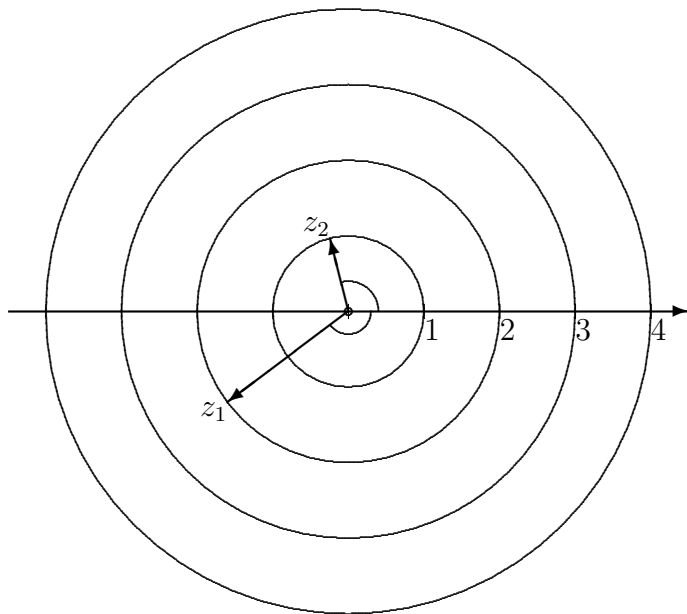


Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2} = ?$

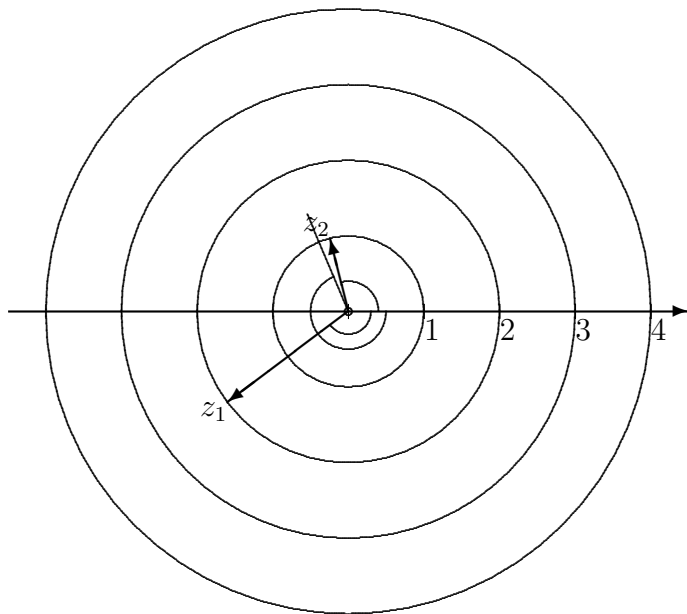


Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2} = ?$

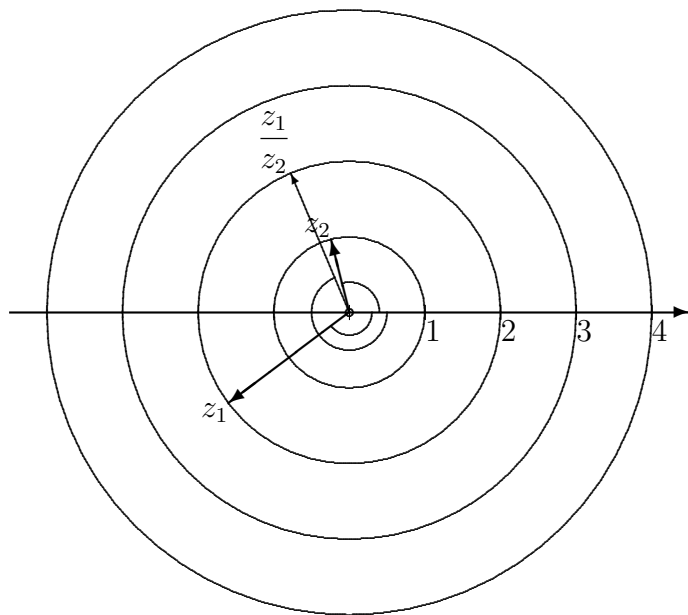


Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2} = ?$



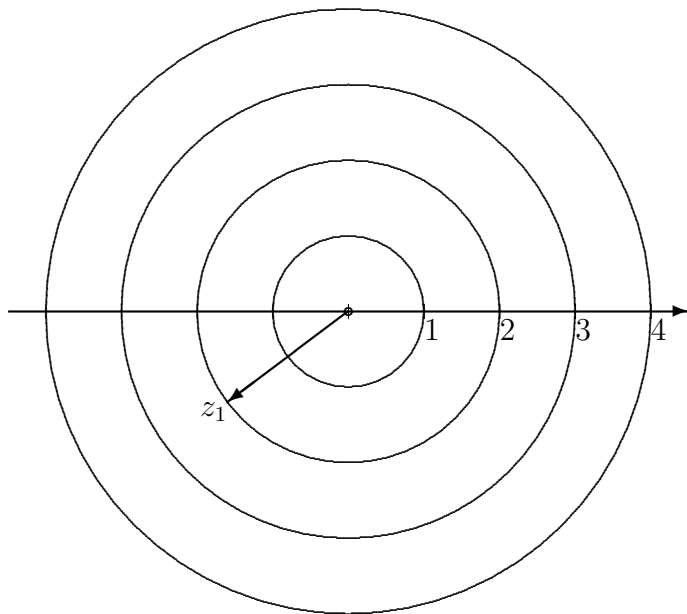
Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1} = ?$



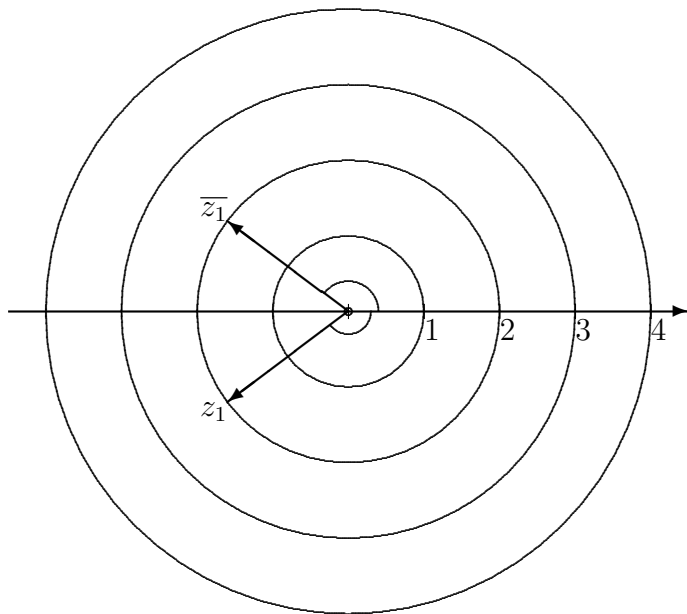
Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1} = ?$



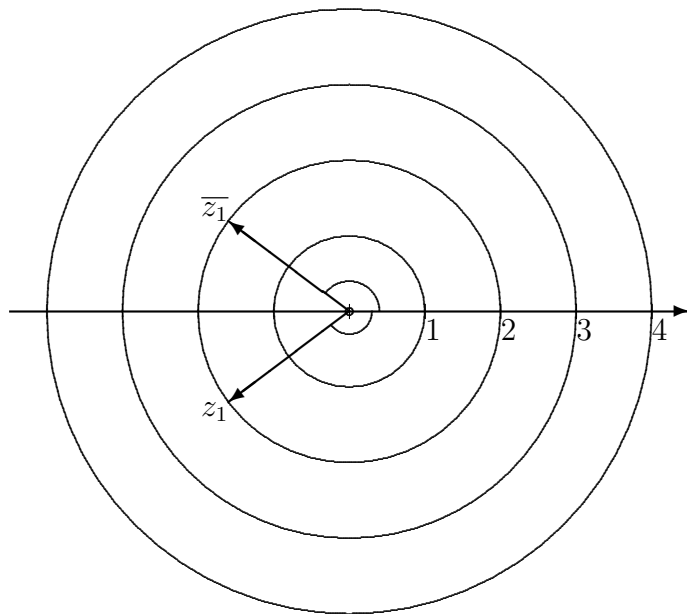
Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,



Задача 3.

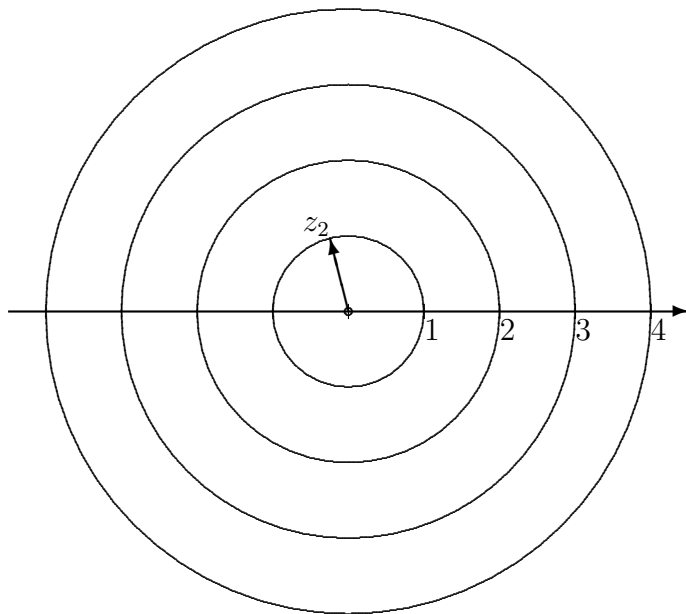
$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2} = ?$



Задача 3.

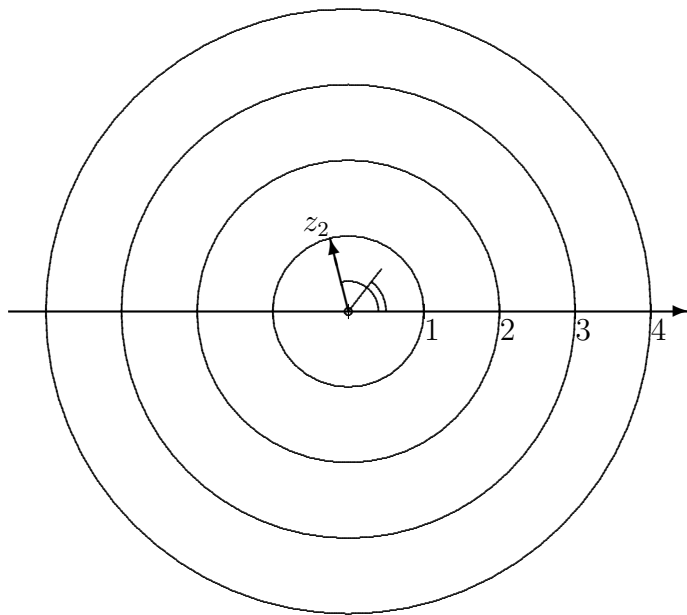
$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2} = ?$



Задача 3.

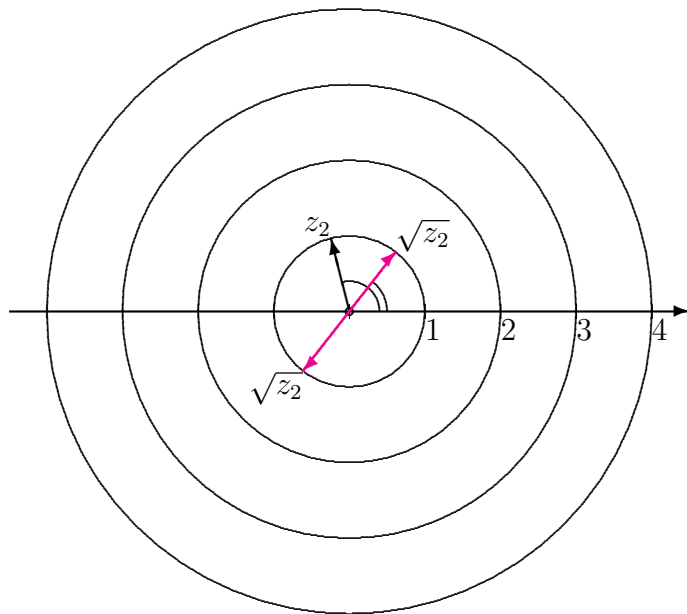
$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

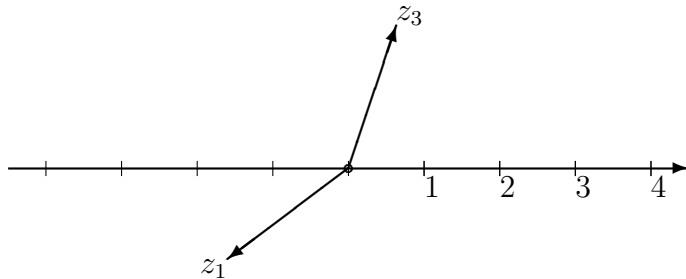
$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3) = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

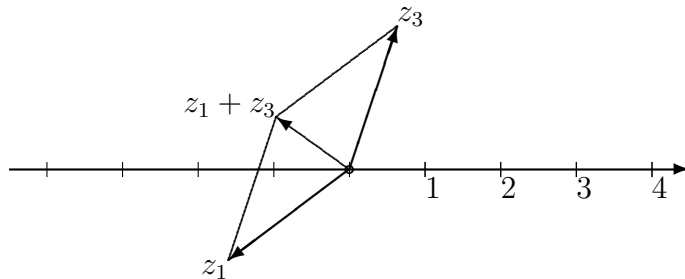
$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

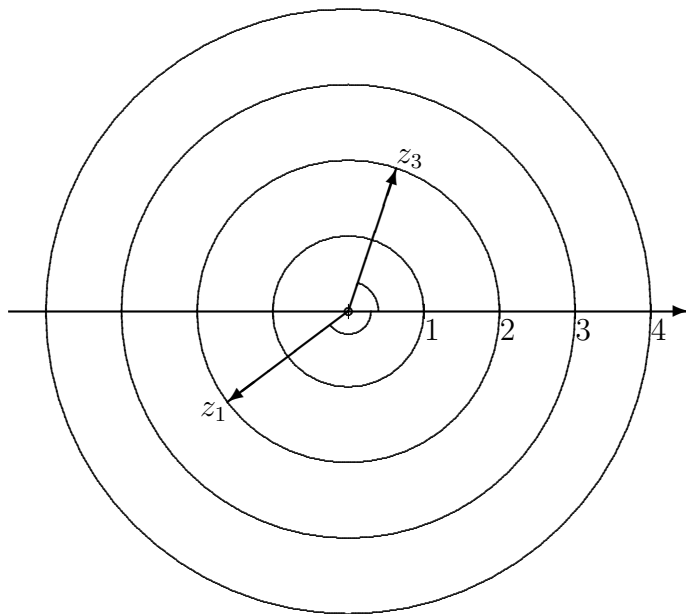
$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3 = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

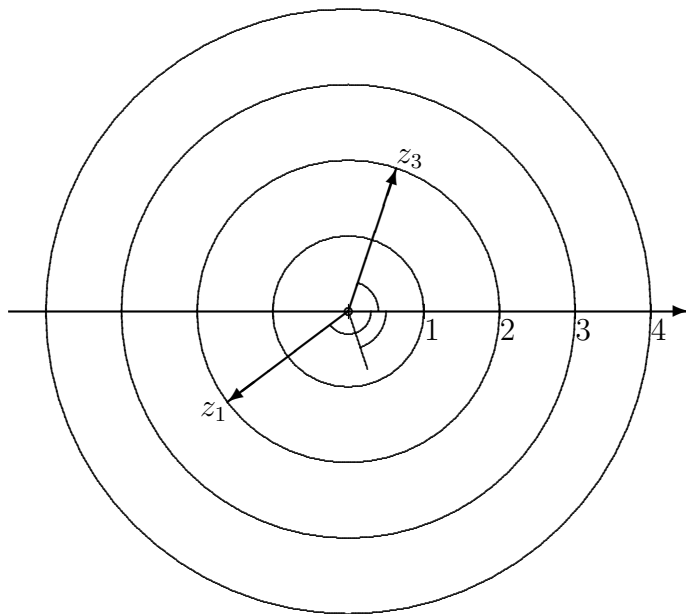
$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3 = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

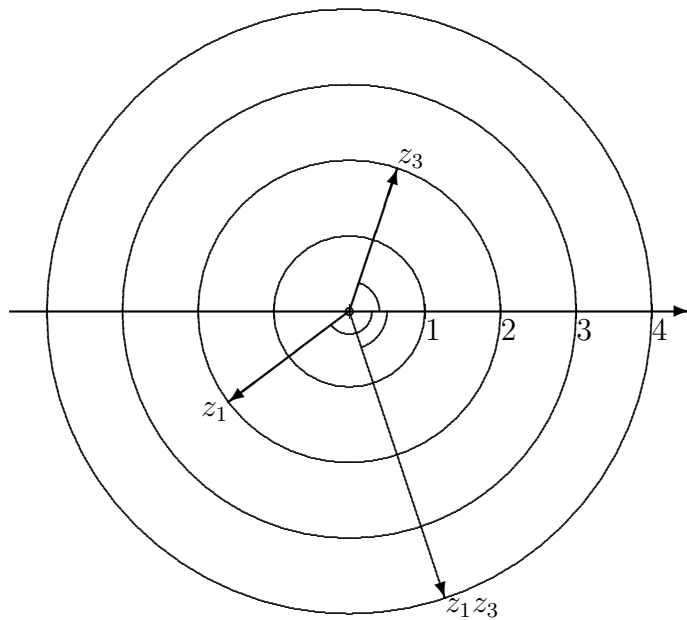
$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

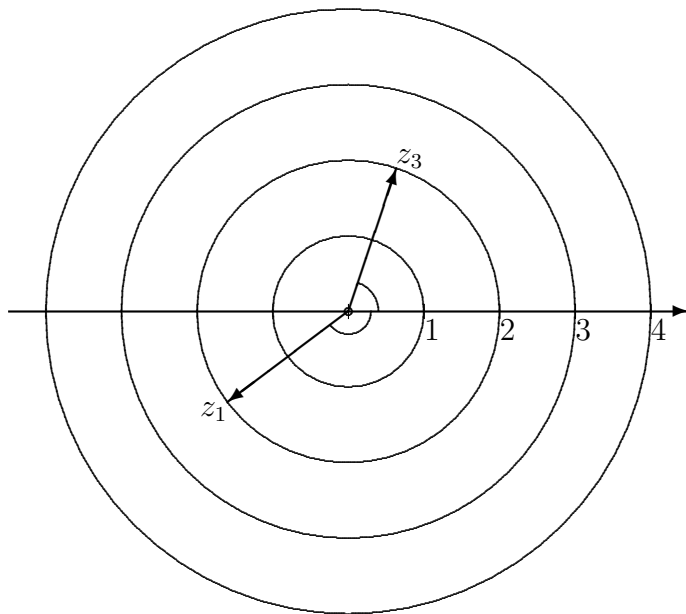
$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

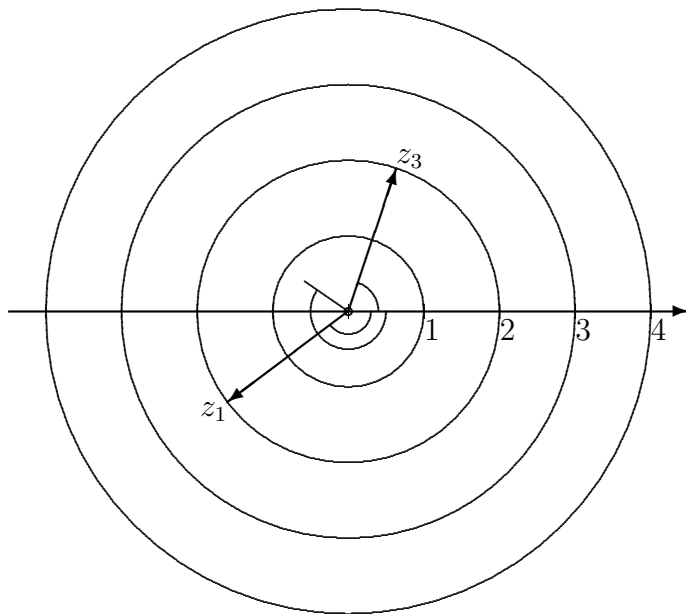
$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

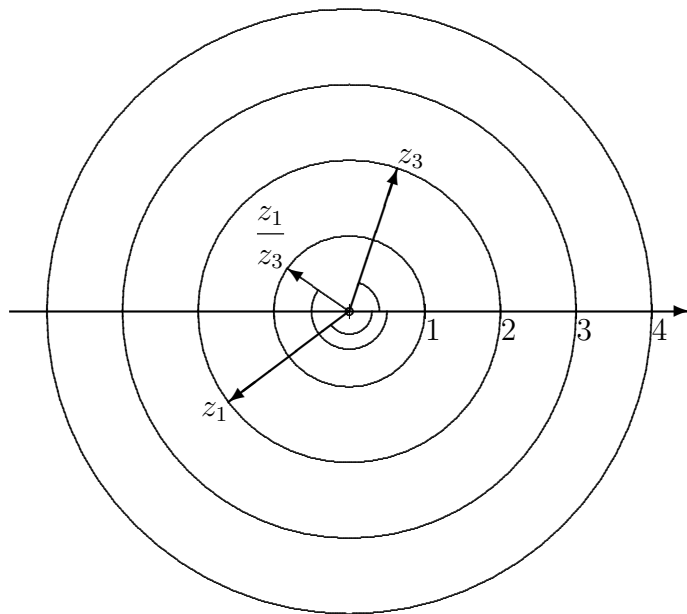
$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

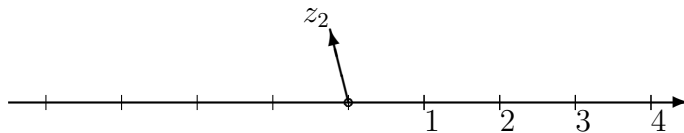
$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

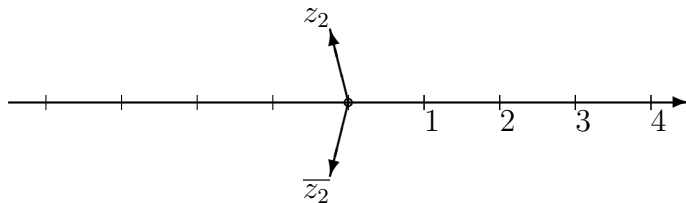
$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

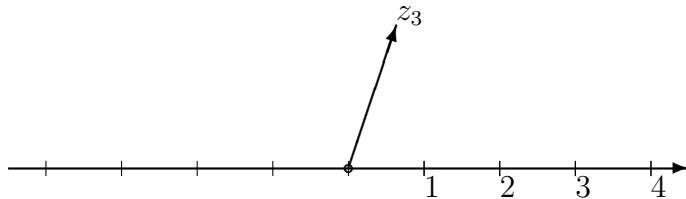
$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

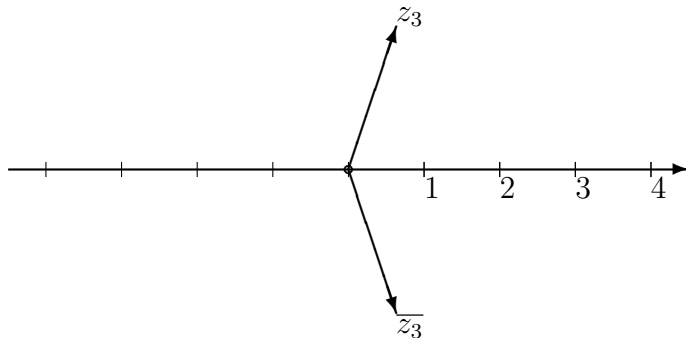
$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

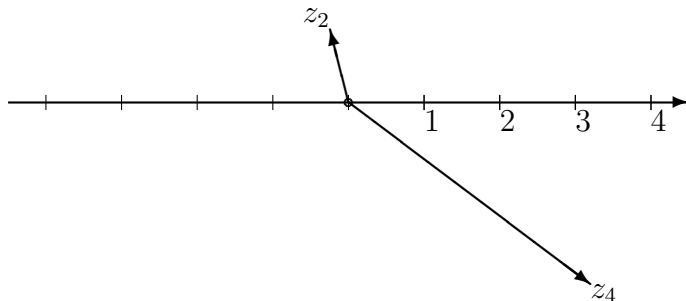
$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4) = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

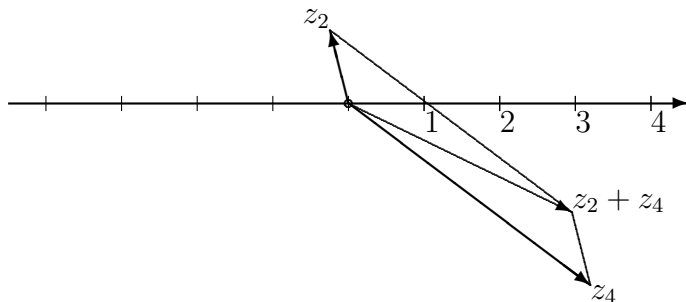
$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

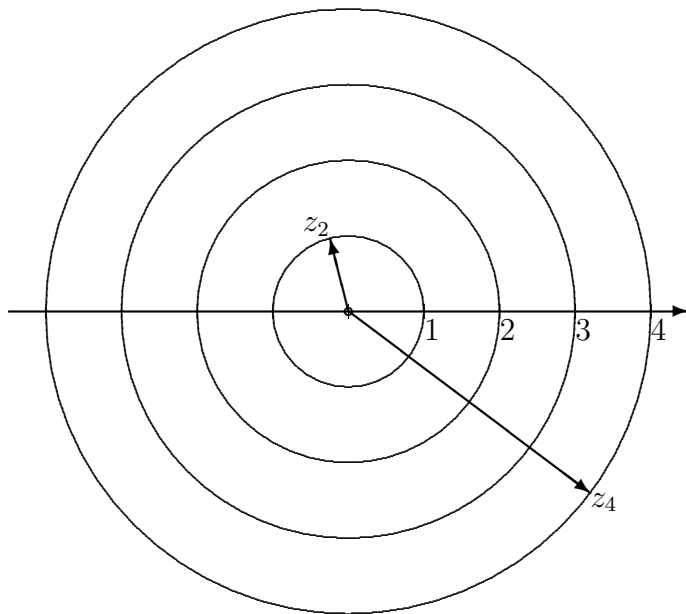
$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4 = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

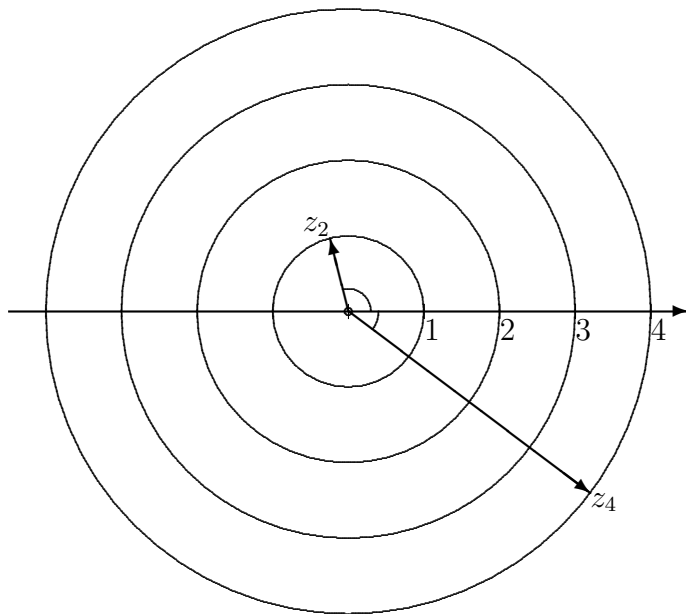
$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4 = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

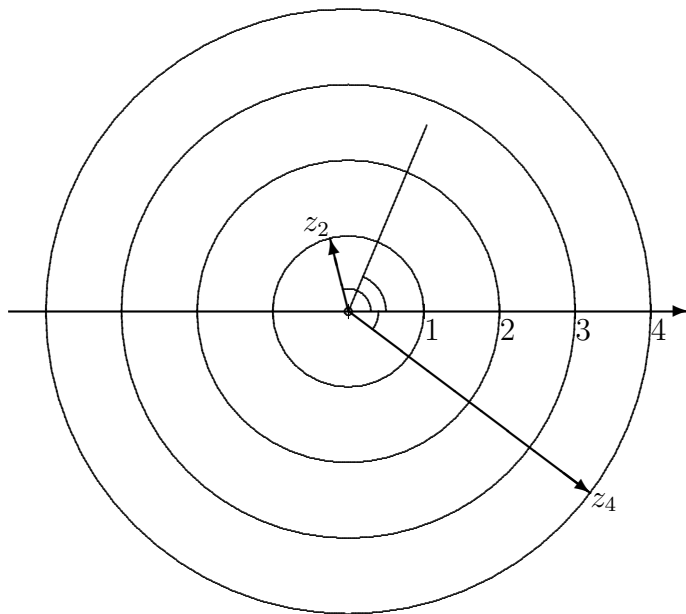
$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4 = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

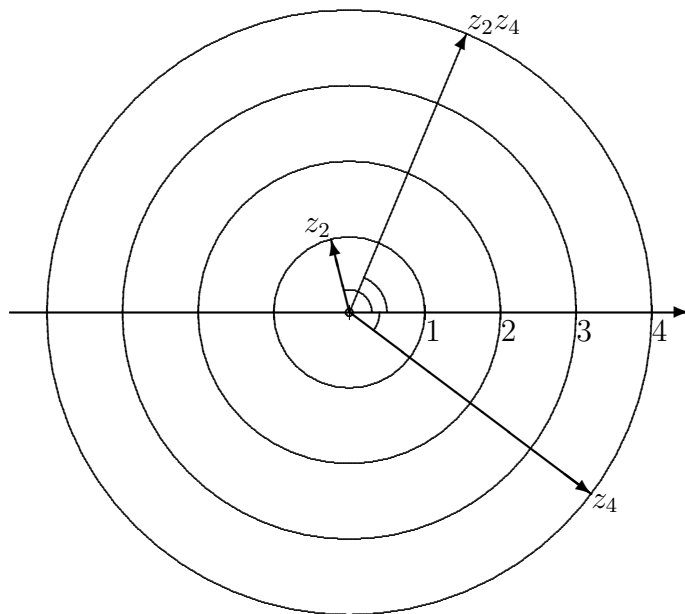
$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

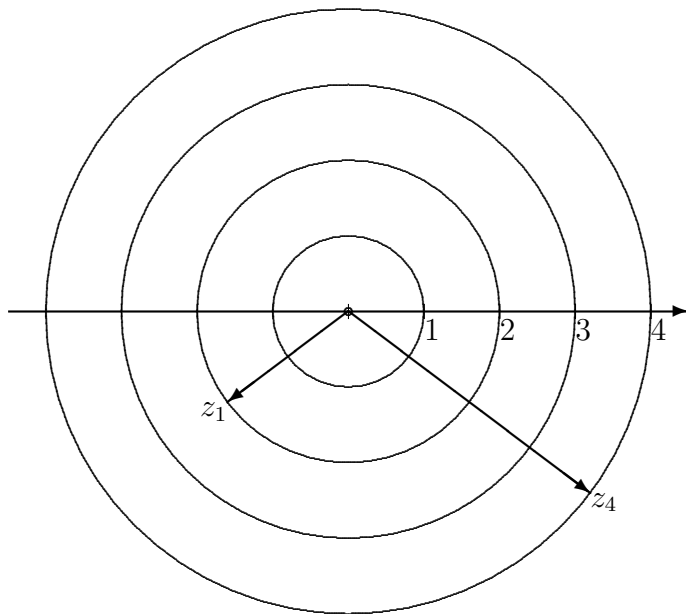
$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

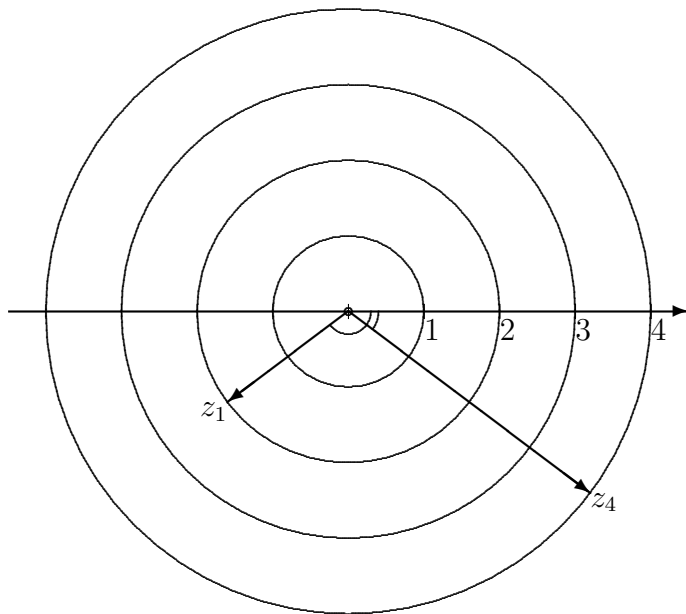
$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

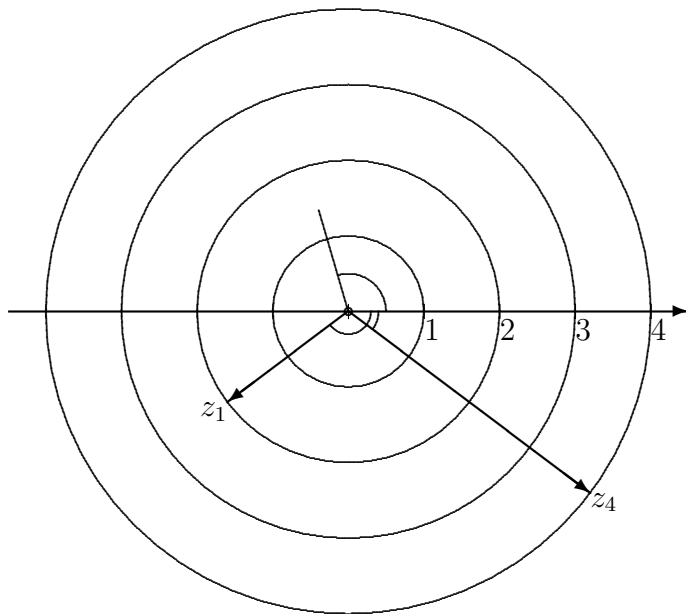
$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

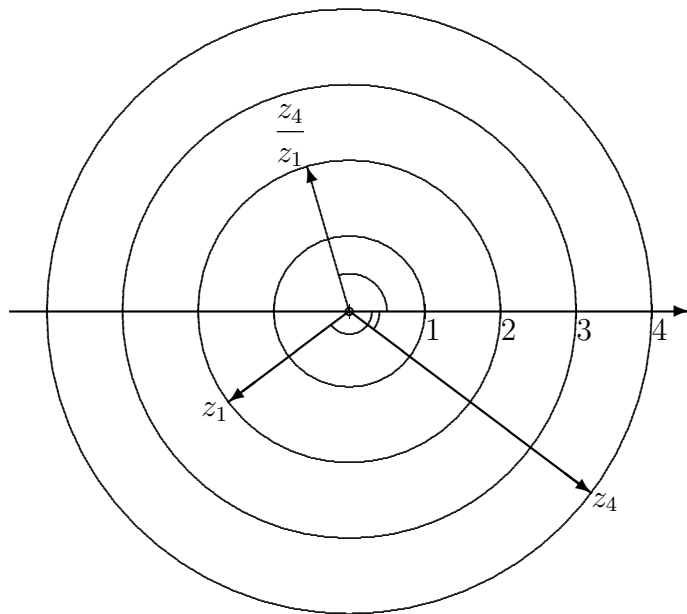
$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1}$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

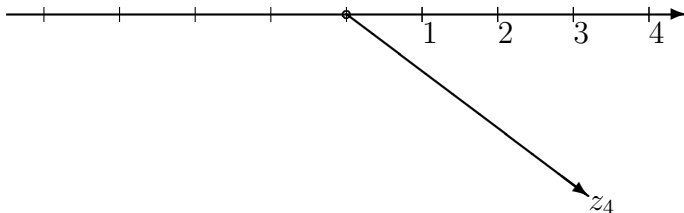
$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1}$ — был изображен,

$\overline{z_4} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

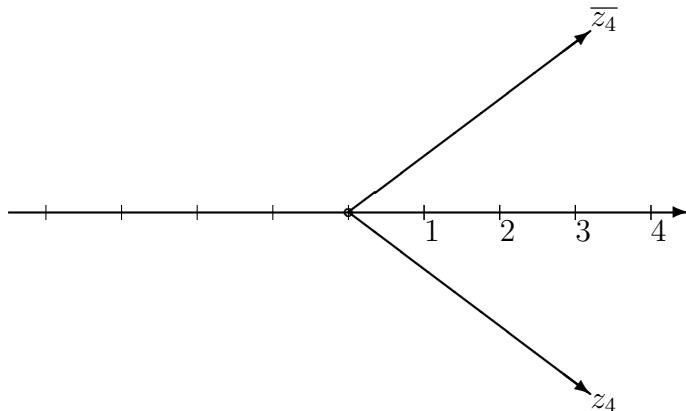
$\overline{z_3}$ — был изображен,

$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1}$ — был изображен,

$\overline{z_4}$ — был изображен,



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

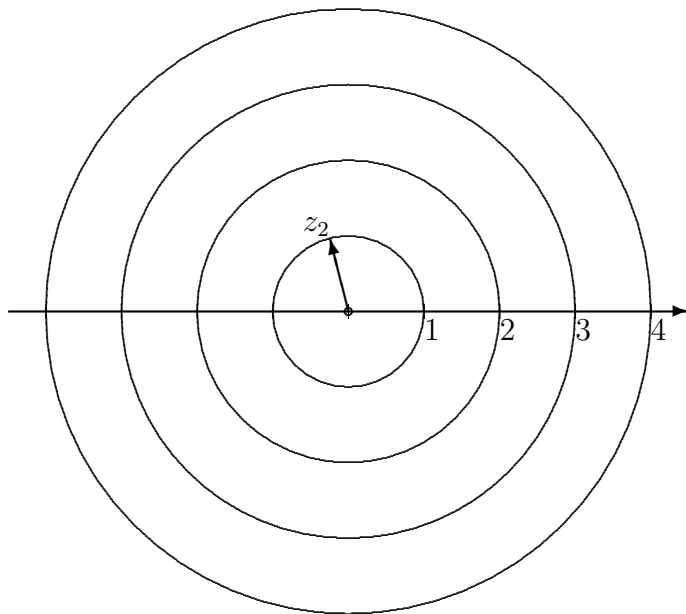
$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1}$ — был изображен,

$\overline{z_4}$ — был изображен,

$\sqrt[3]{z_2} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

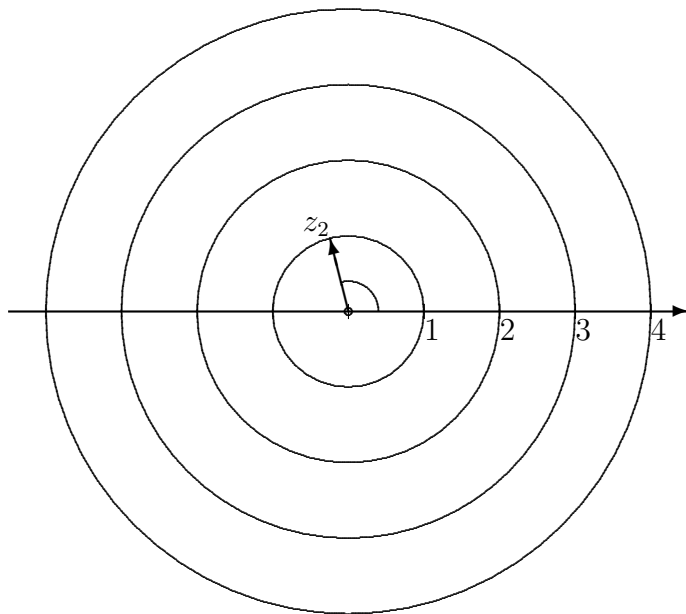
$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1}$ — был изображен,

$\overline{z_4}$ — был изображен,

$\sqrt[3]{z_2} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

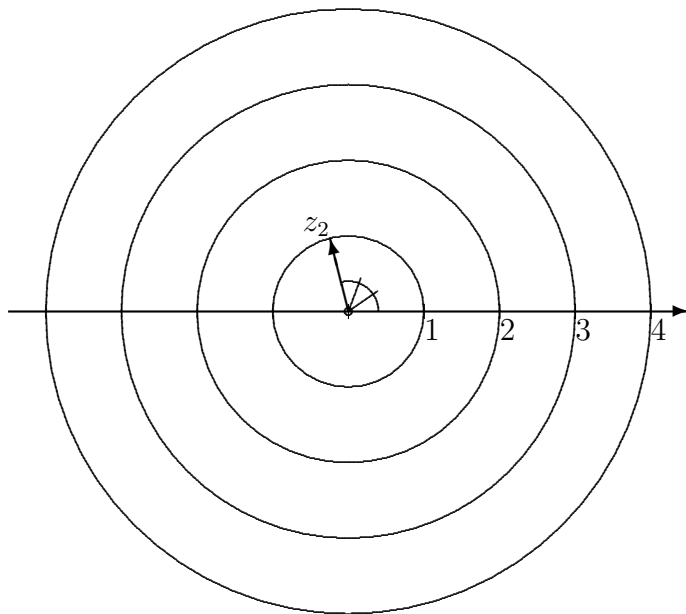
$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1}$ — был изображен,

$\overline{z_4}$ — был изображен,

$\sqrt[3]{z_2} = ?$



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

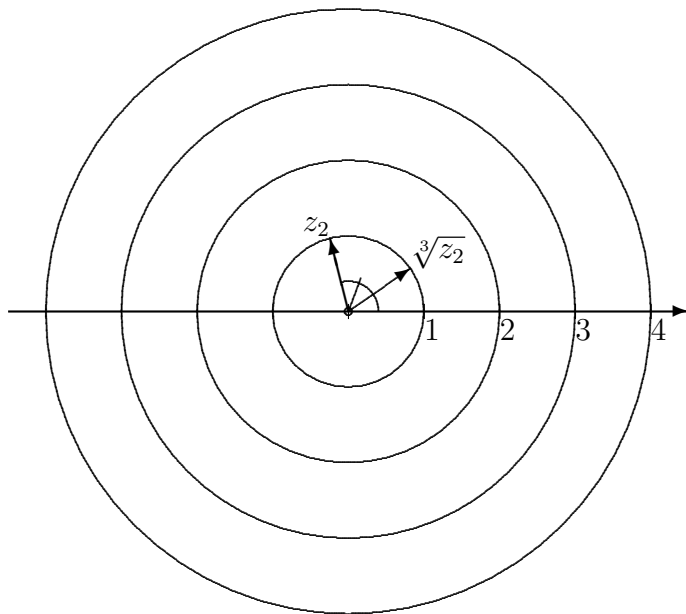
$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1}$ — был изображен,

$\overline{z_4}$ — был изображен,

$\sqrt[3]{z_2}$ — пока еще не все!



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

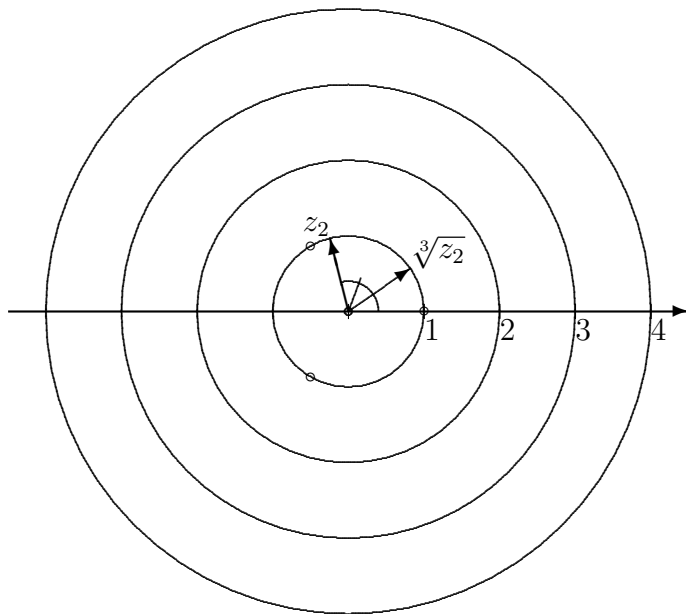
$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1}$ — был изображен,

$\overline{z_4}$ — был изображен,

$\sqrt[3]{z_2}$ — пока еще не все!



Задача 3.

$(z_1 + z_2)$ — был изображен,

$z_1 z_2$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_1}$ — был изображен,

$\sqrt{z_2}$ — был изображен,

$(z_1 + z_3)$ — был изображен,

$z_1 z_3$ — был изображен,

$\frac{z_1}{z_3}$ — был изображен,

$\overline{z_2}$ — был изображен,

$\overline{z_3}$ — был изображен,

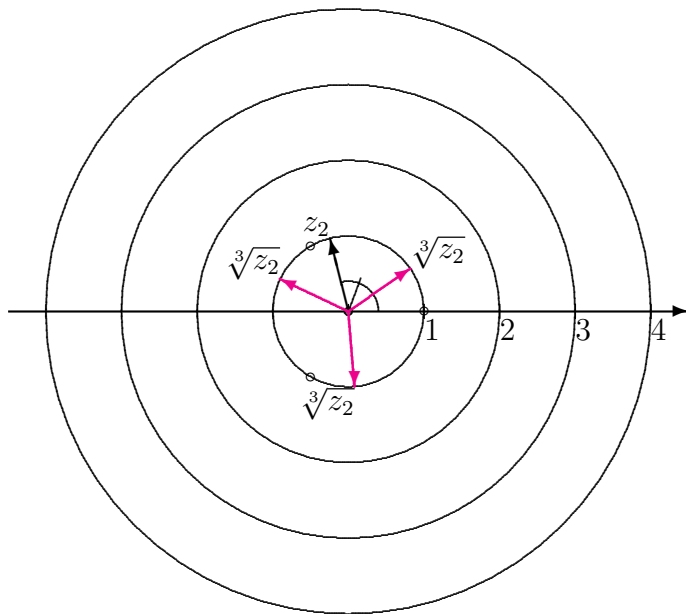
$(z_2 + z_4)$ — был изображен,

$z_2 z_4$ — был изображен,

$\frac{z_4}{z_1}$ — был изображен,

$\overline{z_4}$ — был изображен,

$\sqrt[3]{z_2}$ — был изображен.



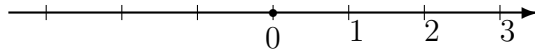
Решение задачи 4.

Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

а) $(1 + i\sqrt{3}) =$

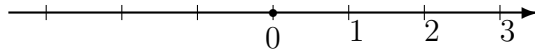


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

а) $(1 + i\sqrt{3}) =$

$\rho =$

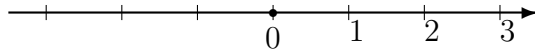


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

а) $(1 + i\sqrt{3}) =$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

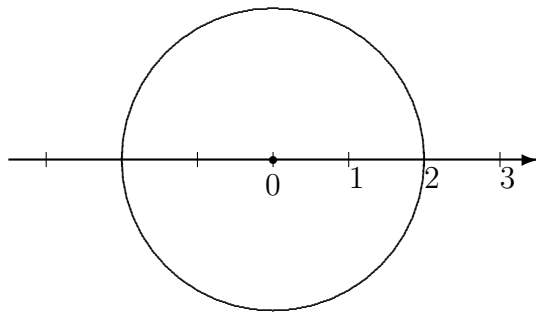


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{а) } (1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2,$$



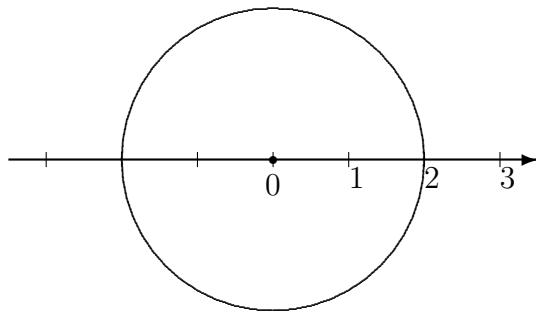
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

а) $(1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$

$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2,$

$\operatorname{tg} \varphi =$



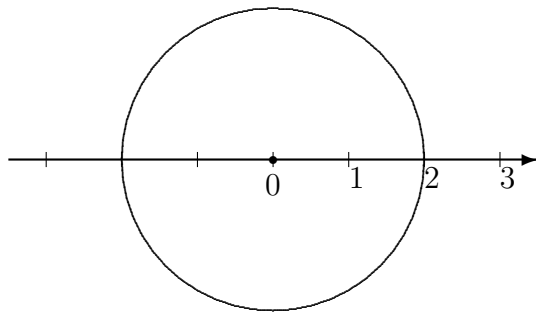
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{а) } (1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} =$$



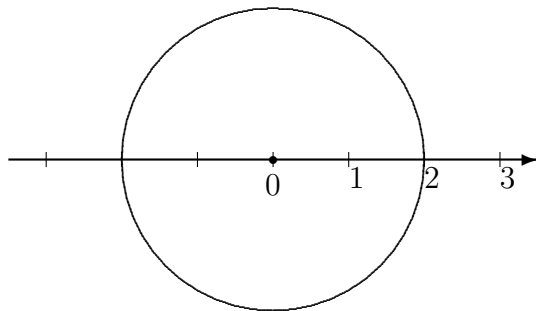
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{а) } (1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{-2\pi}{3}.$$



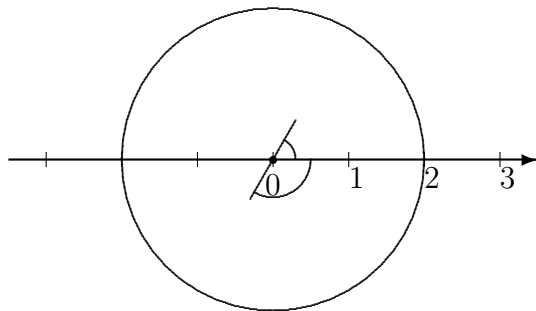
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{а) } (1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{-2\pi}{3}.$$



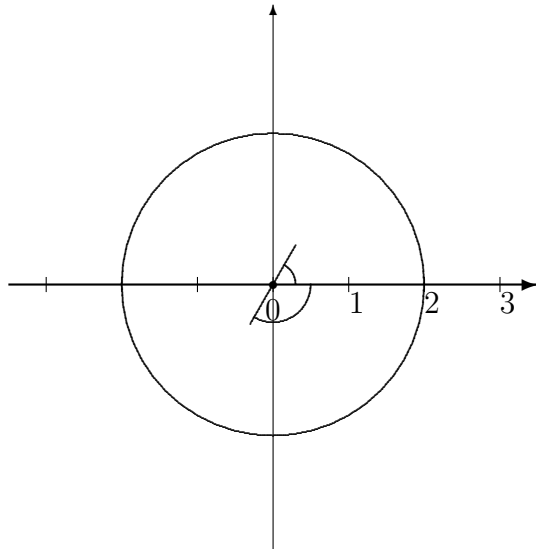
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{а) } (1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{-2\pi}{3}.$$



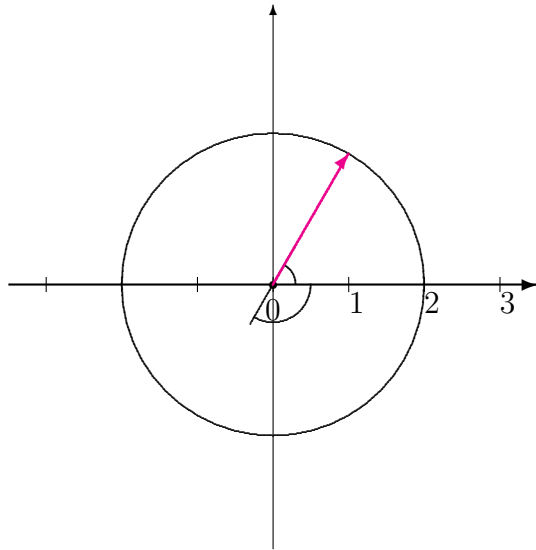
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{а) } (1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{-2\pi}{3}.$$



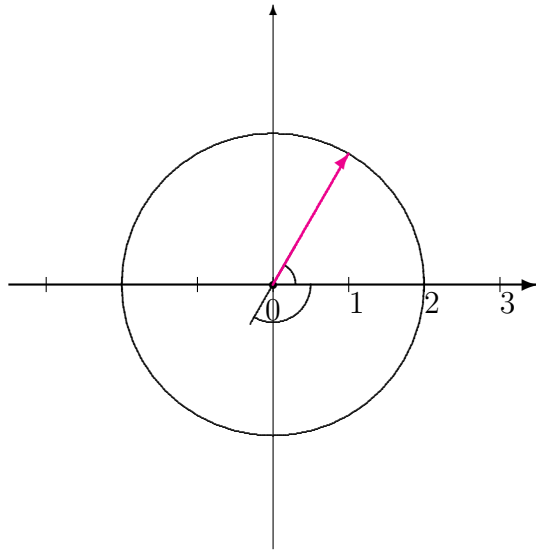
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1, 6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1, 6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{а) } (1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

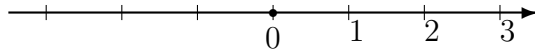
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{-2\pi}{3}.$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

б) $(-1 + i) =$

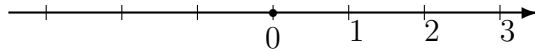


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

б) $(-1 + i) =$

$\rho =$

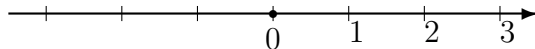


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) =$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

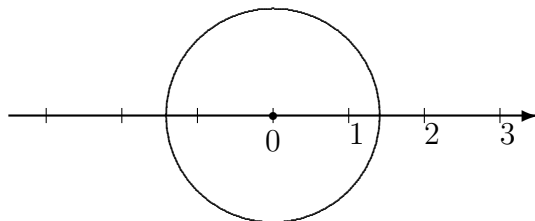


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) =$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

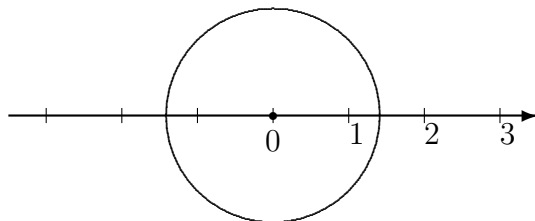


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$



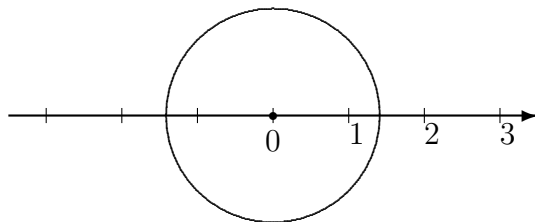
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\varphi =$$



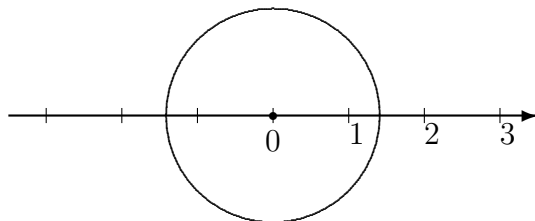
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \frac{1}{-1} =$$



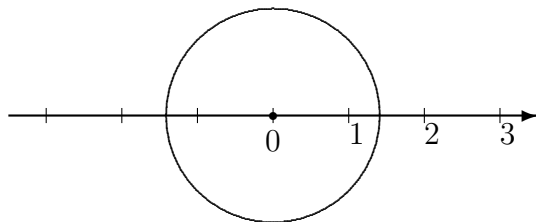
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \frac{1}{-1} = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} \right).$$



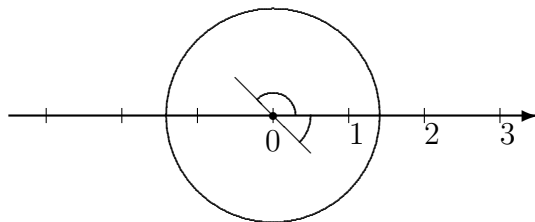
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \frac{1}{-1} = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} \right).$$



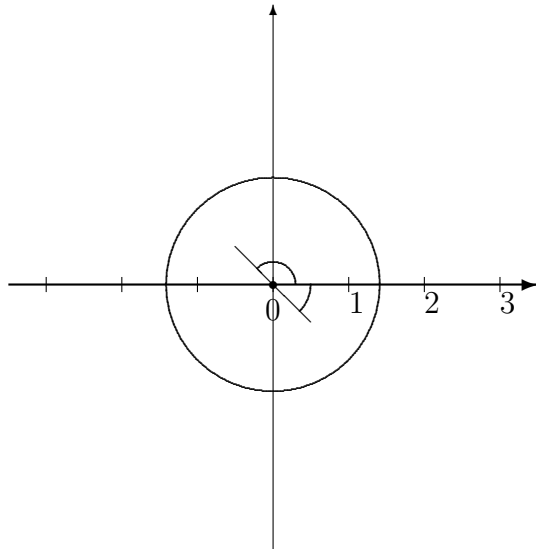
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \frac{1}{-1} = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} \right).$$



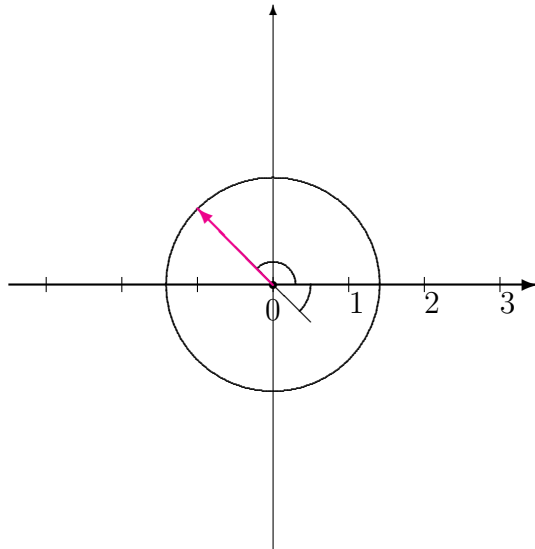
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\rho = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \frac{1}{-1} = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} \right).$$



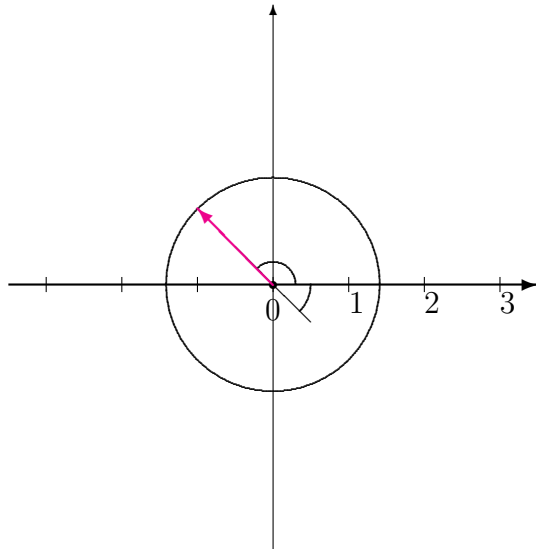
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{б) } (-1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

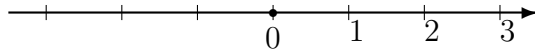
$$\varphi = \frac{1}{-1} = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

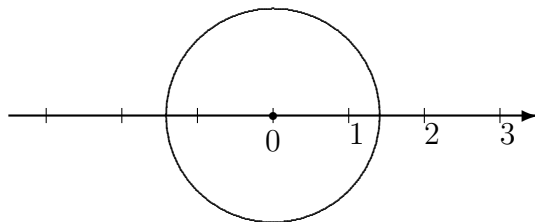
в) $(1 - i) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

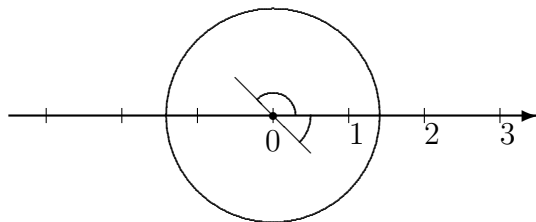
в) $(1 - i) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

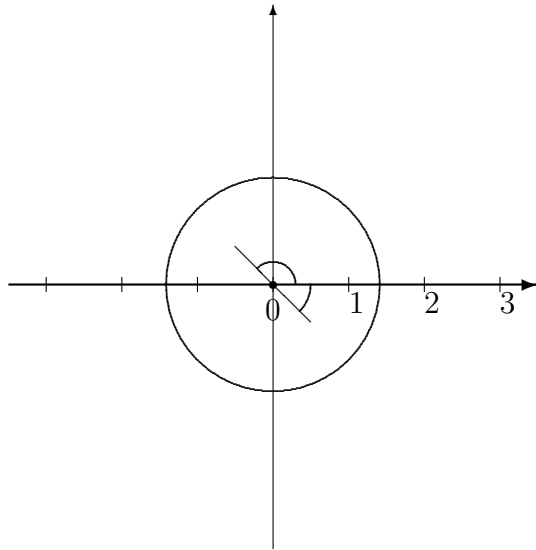
$$\text{в) } (1 - i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

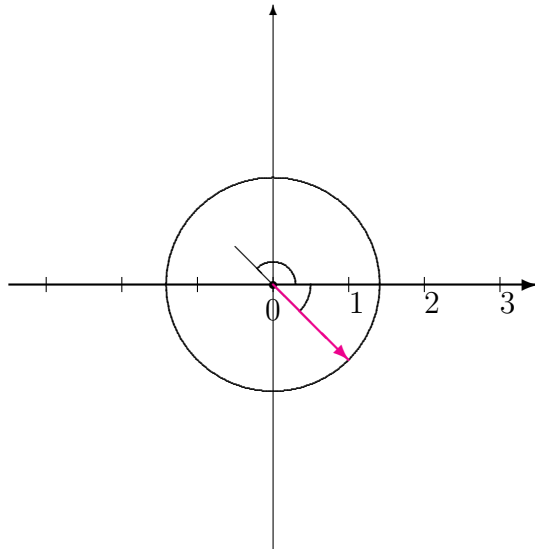
$$\text{в) } (1 - i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

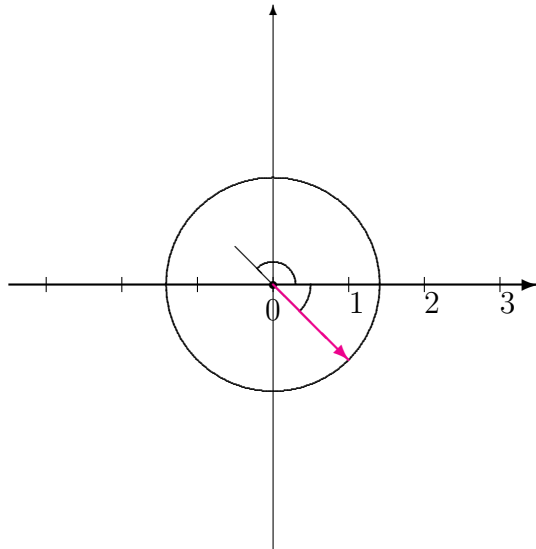
$$\text{в) } (1 - i) = \sqrt{2} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

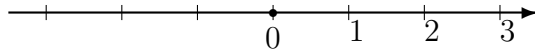
в) $(1 - i) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right).$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

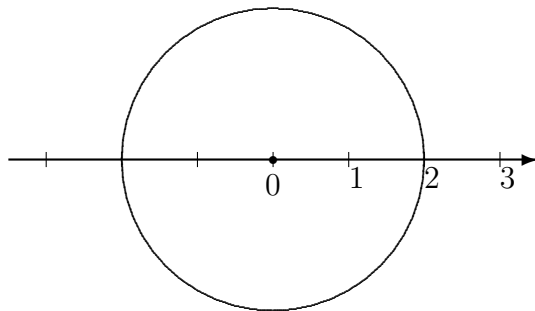
г) $(-1 + i\sqrt{3}) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

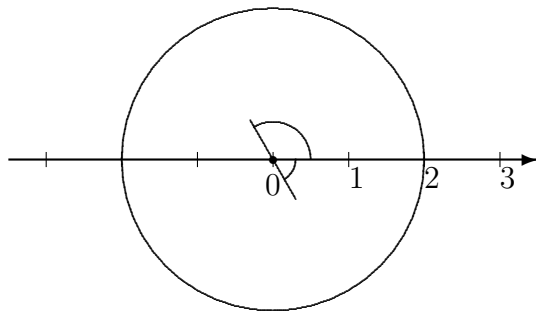
г) $(-1 + i\sqrt{3}) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

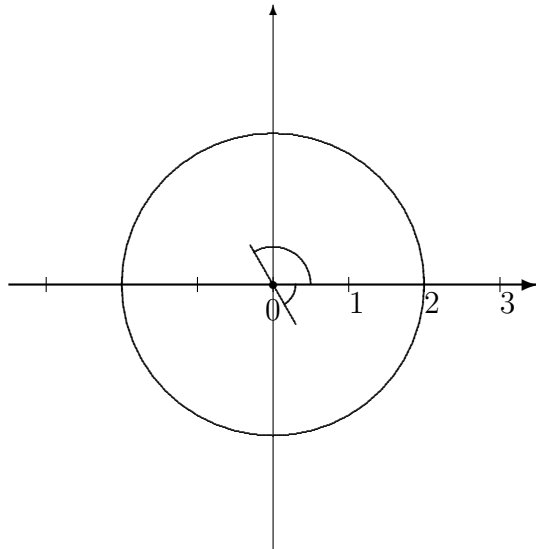
$$\text{г) } (-1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

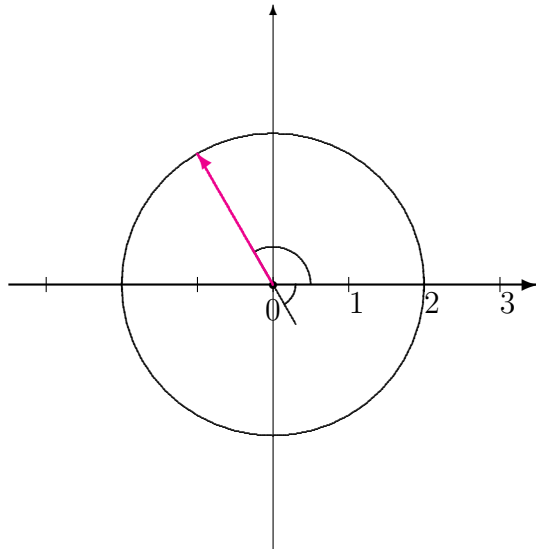
$$\text{г) } (-1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

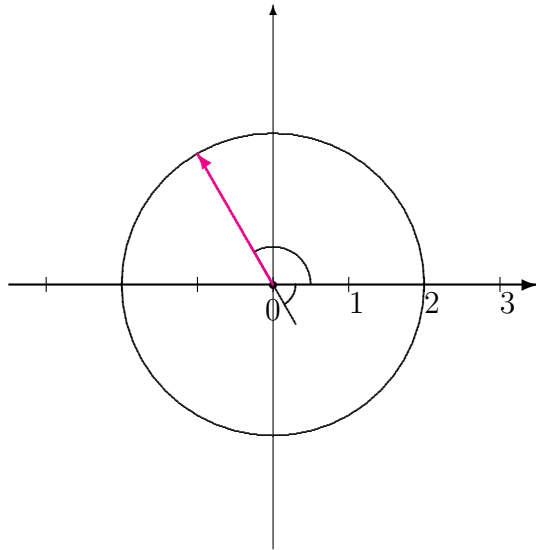
$$\text{г) } (-1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

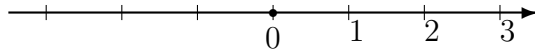
$$\text{г) } (-1 + i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

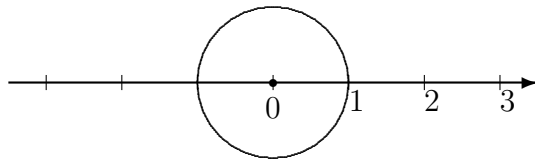
д) $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{д)} \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

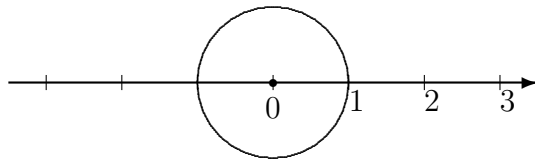


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{д)} \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\operatorname{tg} \varphi =$$

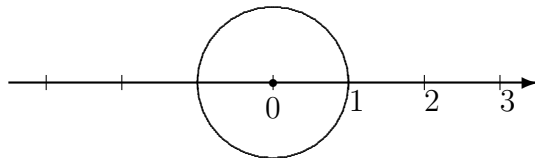


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{д)} \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} =$$

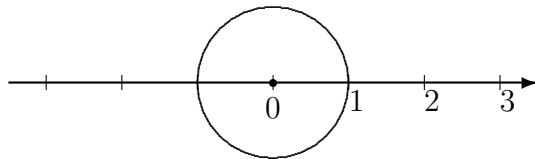


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{д)} \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \operatorname{tg} \frac{-\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}.$$

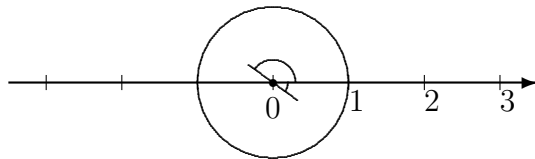


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1, 6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1, 6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{д)} \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \operatorname{tg} \frac{-\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}.$$

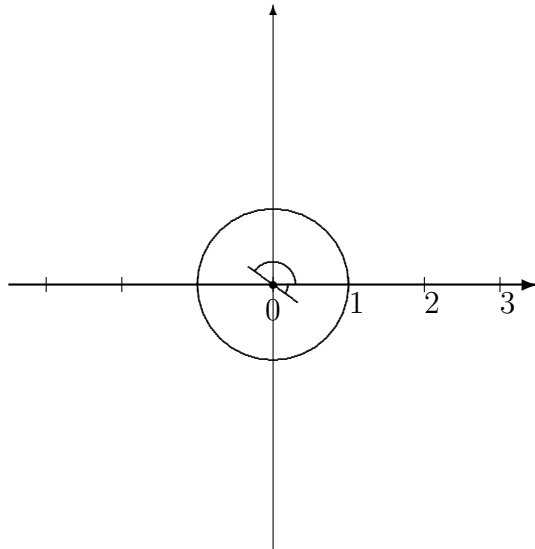


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{д)} \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \operatorname{tg} \frac{-\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}.$$

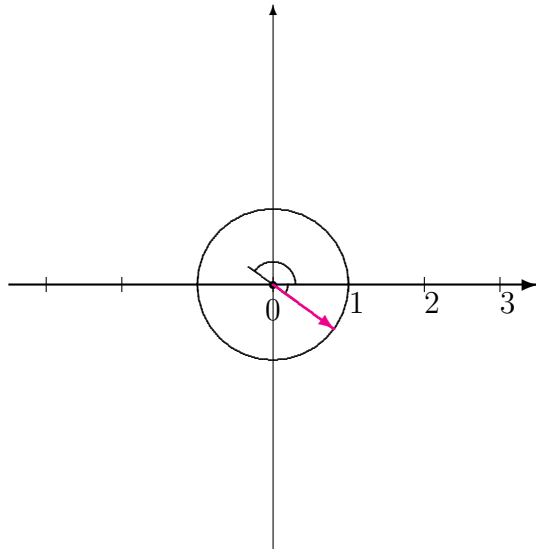


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1, 6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1, 6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{д)} \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \operatorname{tg} \frac{-\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}.$$

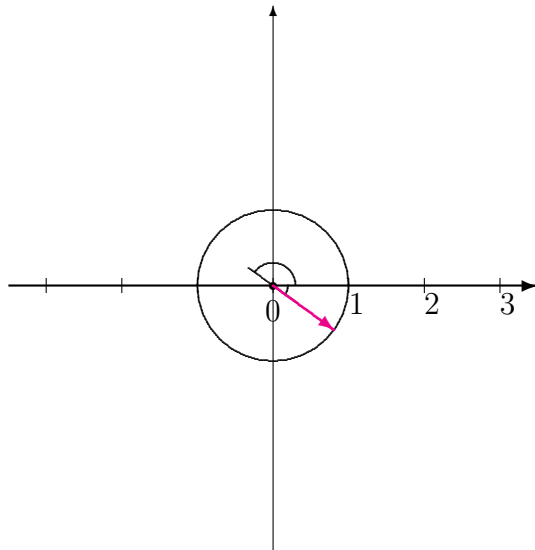


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{д)} \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = \left(\cos \frac{-\pi}{5} + i \sin \frac{-\pi}{5} \right).$$

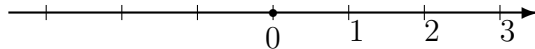
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \operatorname{tg} \frac{-\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}.$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

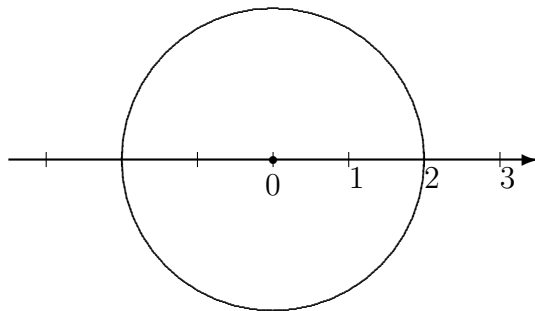
е) $(1 - i\sqrt{3}) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

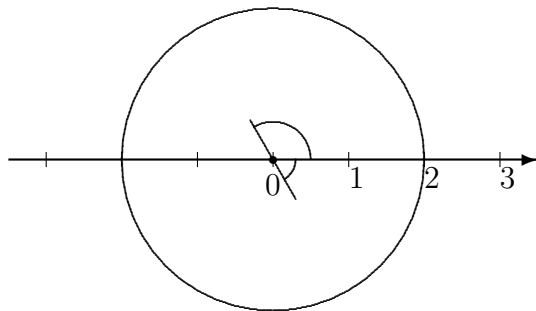
е) $(1 - i\sqrt{3}) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

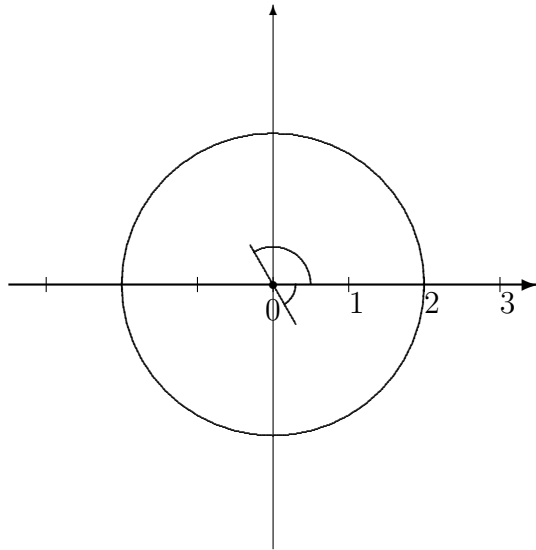
$$\text{е) } (1 - i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

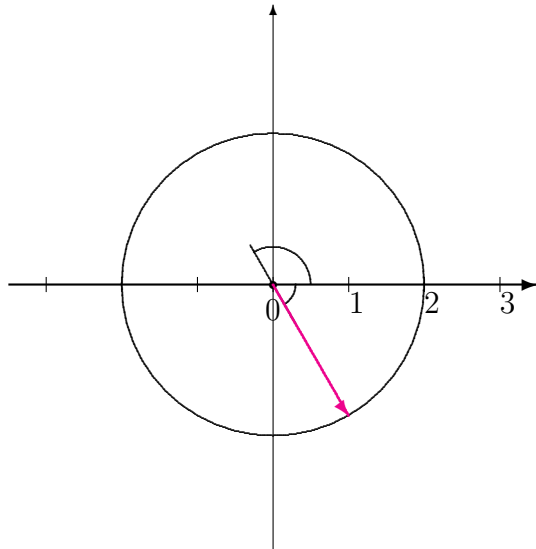
$$\text{е) } (1 - i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

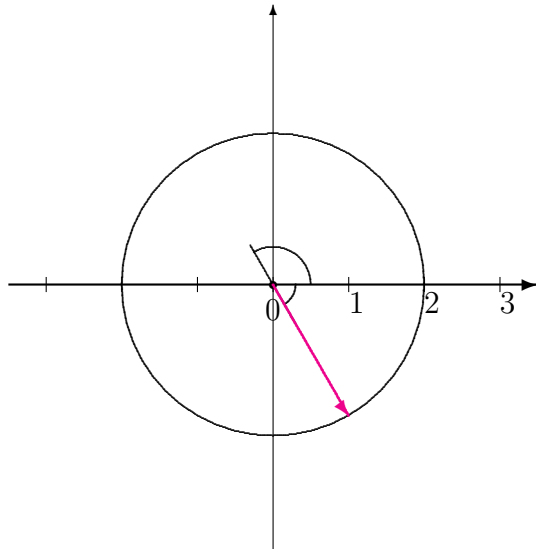
$$\text{е) } (1 - i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

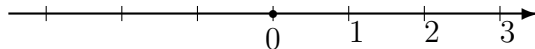
$$\text{е) } (1 - i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

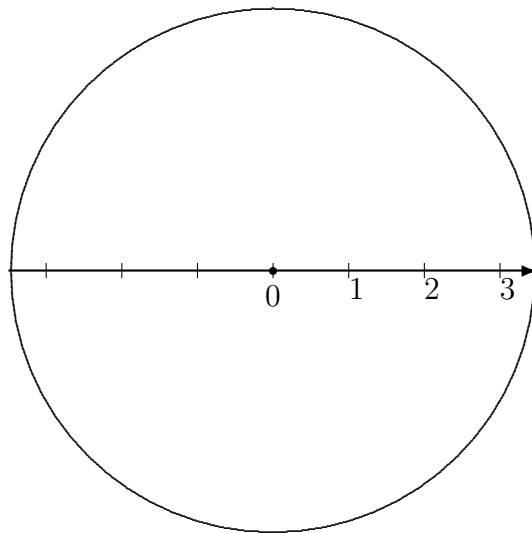
ё) $(-3 - i\sqrt{3}) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

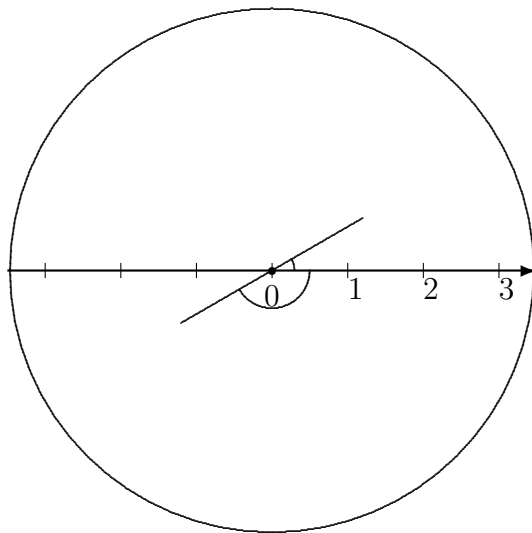
ё) $(-3 - i\sqrt{3}) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

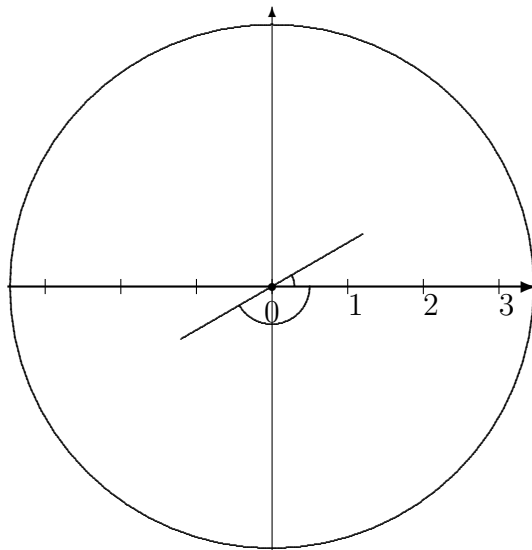
$$\text{ё)} (-3 - i\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

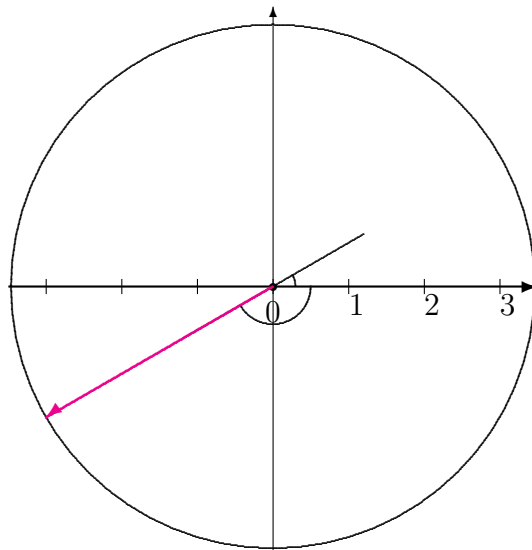
$$\text{ё)} (-3 - i\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

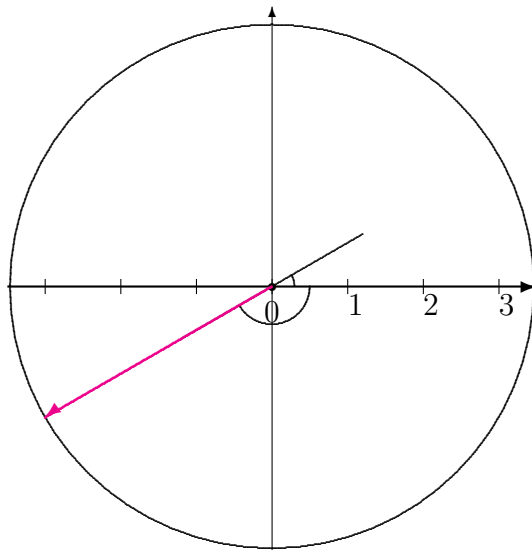
$$\text{ё)} (-3 - i\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

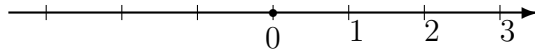
$$\text{ё)} (-3 - i\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{-5\pi}{6} + i \sin \frac{-5\pi}{6} \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

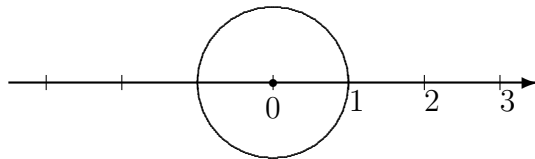
ж) $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

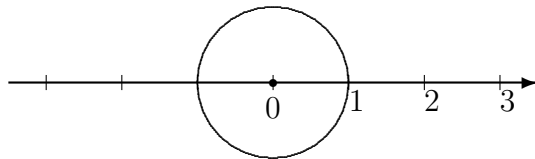
ж) $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

ж) $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi = (\cos \quad + i \sin \quad)$.

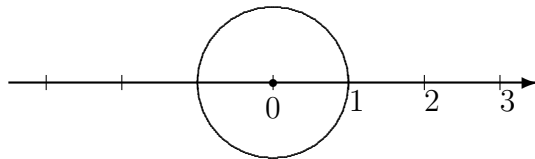


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

ж) $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi = (\cos \quad + i \sin \quad)$.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \sin 0,6\pi = \\ \sin \varphi = \cos 0,6\pi = \end{cases}$$

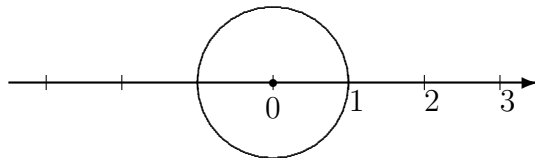


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

ж) $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi = (\cos \quad + i \sin \quad)$.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \sin 0,6\pi = \cos(0,5\pi - 0,6\pi), \\ \sin \varphi = \cos 0,6\pi = \sin(0,5\pi - 0,6\pi). \end{cases}$$

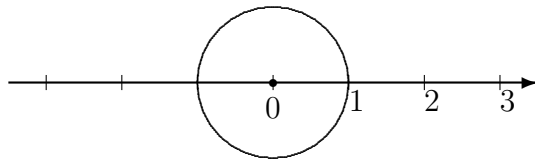


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

ж) $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi = (\cos(-0,1\pi) + i \sin(-0,1\pi))$.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \sin 0,6\pi = \cos(0,5\pi - 0,6\pi), \\ \sin \varphi = \cos 0,6\pi = \sin(0,5\pi - 0,6\pi). \end{cases}$$

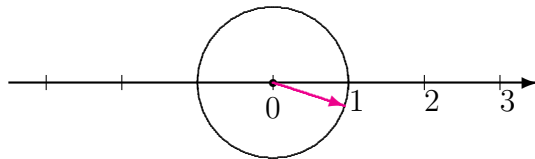


Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

ж) $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi = (\cos(-0,1\pi) + i \sin(-0,1\pi))$.

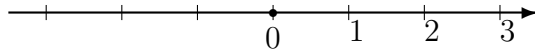
$$\begin{cases} \cos \varphi = \sin 0,6\pi = \cos(0,5\pi - 0,6\pi), \\ \sin \varphi = \cos 0,6\pi = \sin(0,5\pi - 0,6\pi). \end{cases}$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

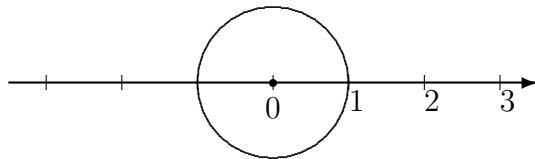
з) $\sin 2 + i \cos 2 =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

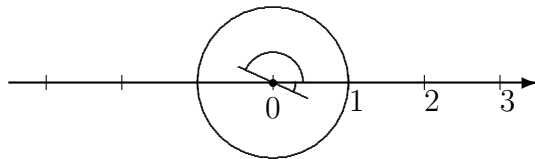
з) $\sin 2 + i \cos 2 =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

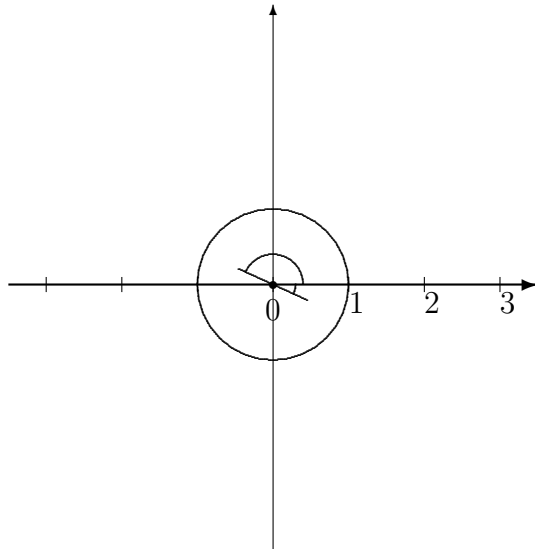
$$\text{з) } \sin 2 + i \cos 2 = \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

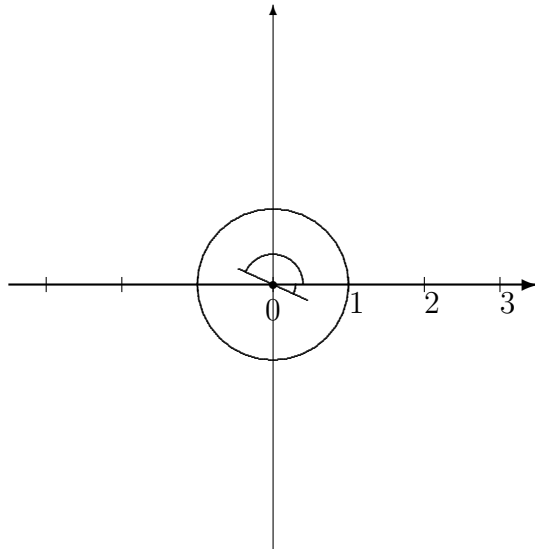
$$\text{з) } \sin 2 + i \cos 2 = \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

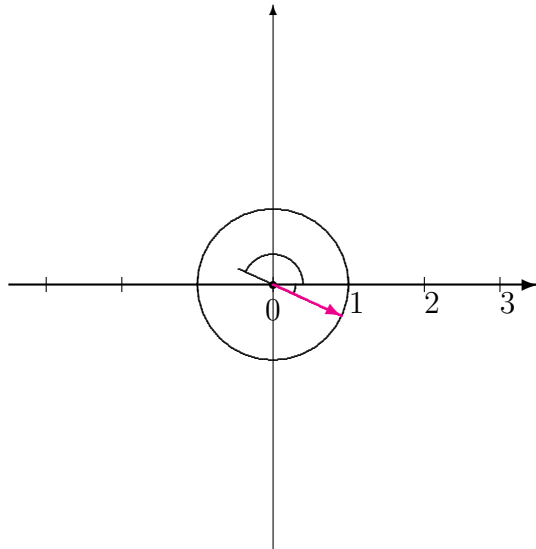
$$\text{з) } \sin 2 + i \cos 2 = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right) \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1, 6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1, 6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

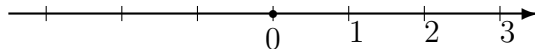
$$\text{з) } \sin 2 + i \cos 2 = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right) \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

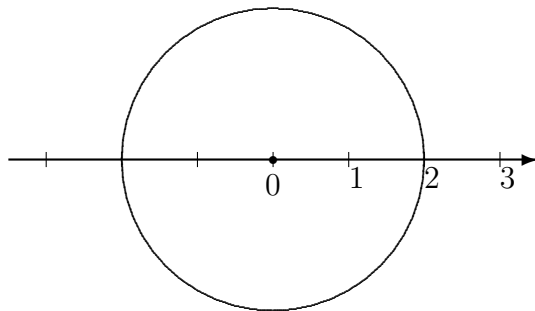
и) $(-1 - i\sqrt{3}) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

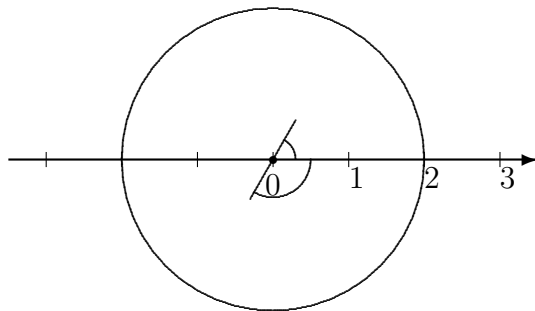
и) $(-1 - i\sqrt{3}) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

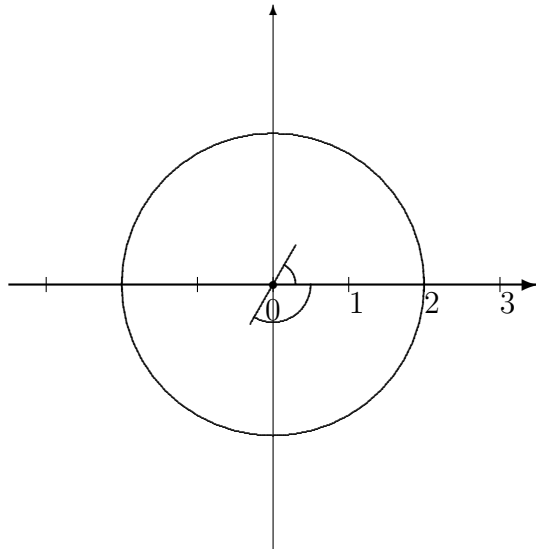
$$\text{и)} (-1 - i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

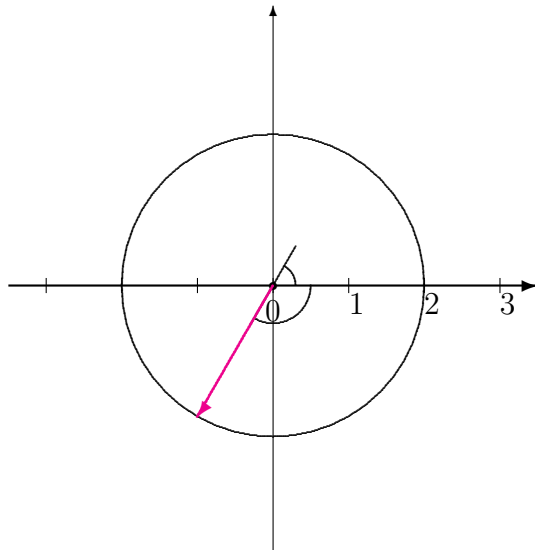
$$\text{и)} (-1 - i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

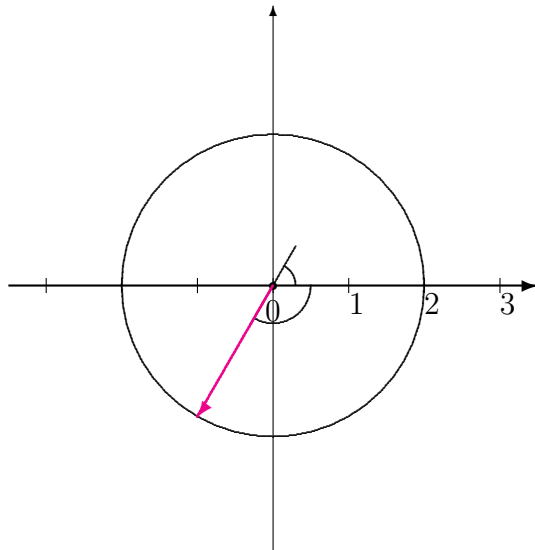
$$\text{и)} (-1 - i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

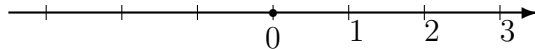
Ответ.

$$\text{и)} (-1 - i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3} \right).$$



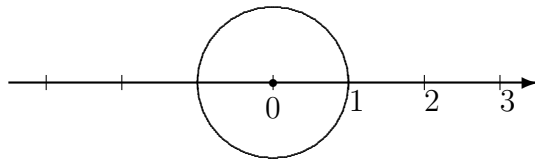
Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.
к) $\cos 3 - i \sin 3 =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

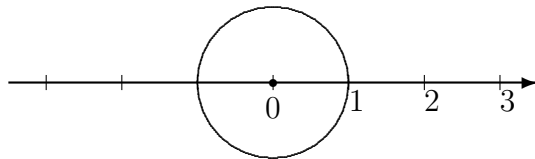
Ответ.
к) $\cos 3 - i \sin 3 =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

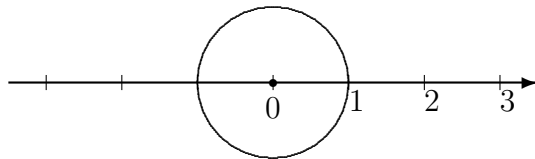
к) $\cos 3 - i \sin 3 = (\cos \quad + i \sin \quad)$.



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

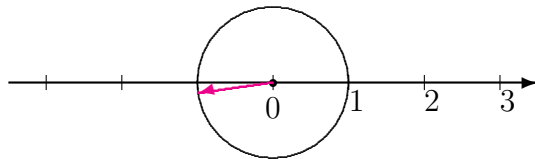
к) $\cos 3 - i \sin 3 = (\cos(-3) + i \sin(-3))$.



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

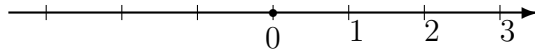
к) $\cos 3 - i \sin 3 = (\cos(-3) + i \sin(-3))$.



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1, 6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1, 6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

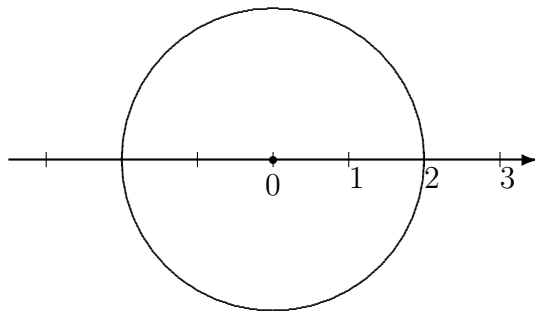
л) $(1, 2 - 1, 6i) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

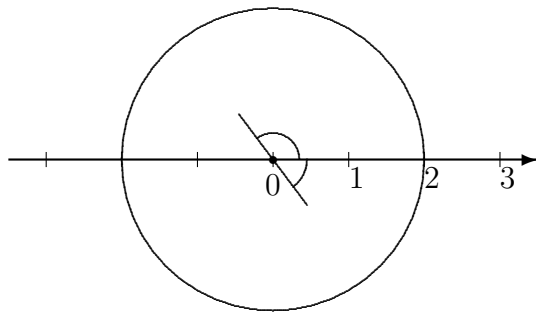
л) $(1, 2 - 1,6i) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1, 6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1, 6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

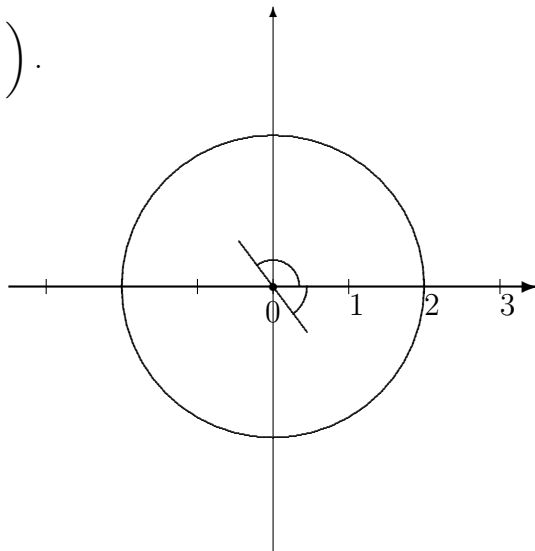
$$\text{л) } (1, 2 - 1, 6i) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1, 6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1, 6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

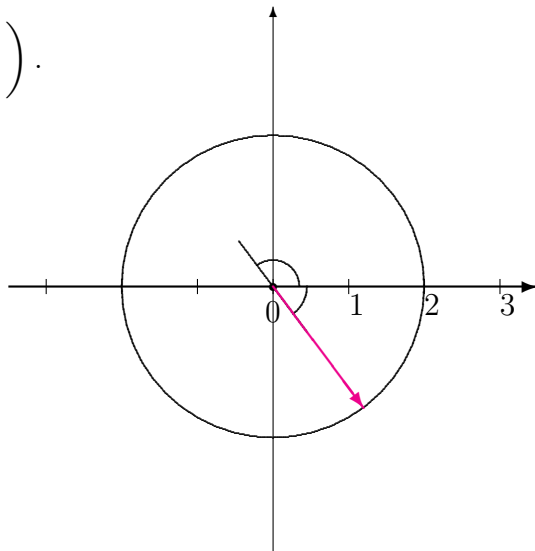
$$\text{л)} (1, 2 - 1, 6i) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

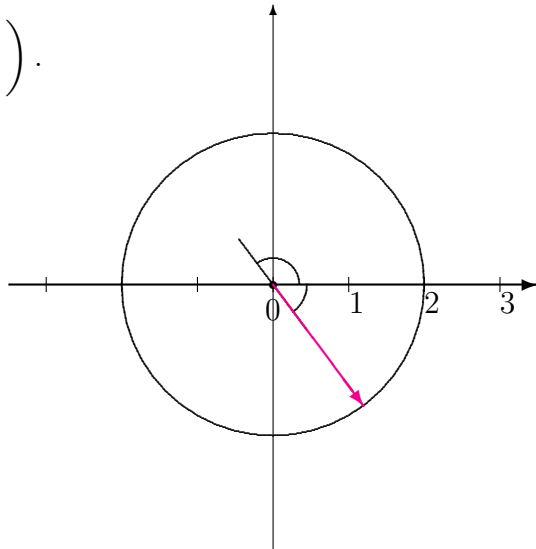
$$\text{л) } (1, 2 - 1,6i) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

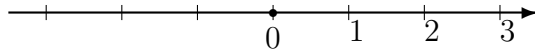
$$\text{л) } (1, 2 - 1,6i) = 2 \left(\cos \left(-\arctg \frac{4}{3} \right) + i \sin \left(-\arctg \frac{4}{3} \right) \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

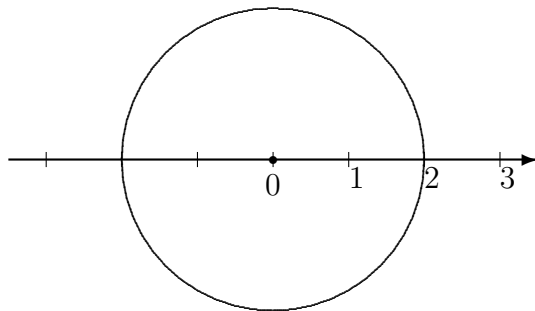
м) $(-1,2 + 1,6i) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

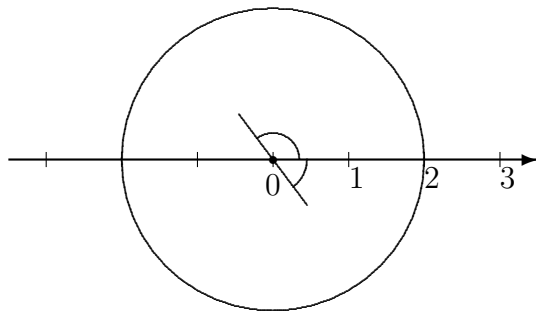
м) $(-1,2 + 1,6i) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

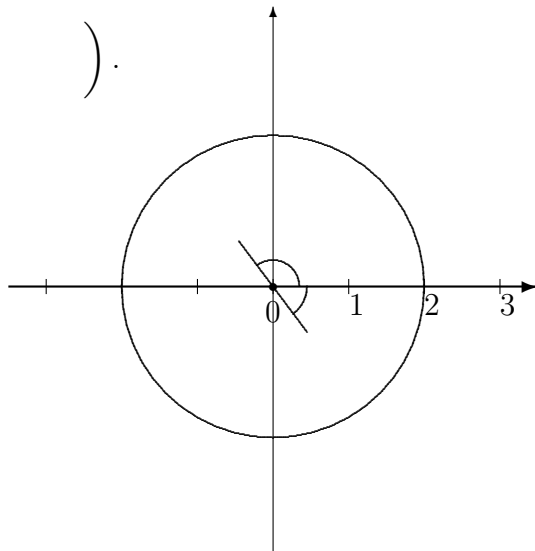
$$\text{м)} (-1,2 + 1,6i) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

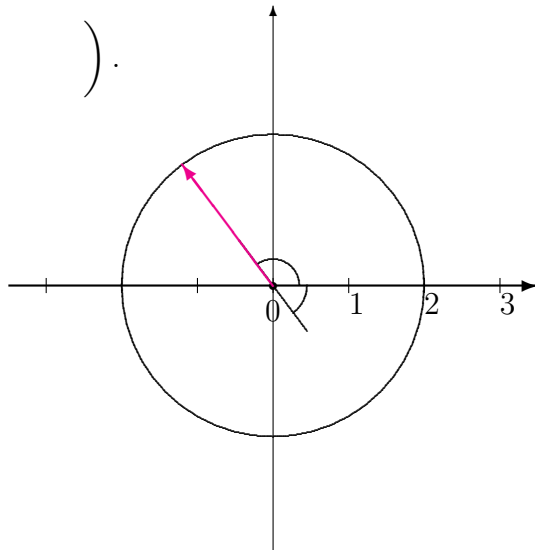
$$\text{м)} (-1,2 + 1,6i) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

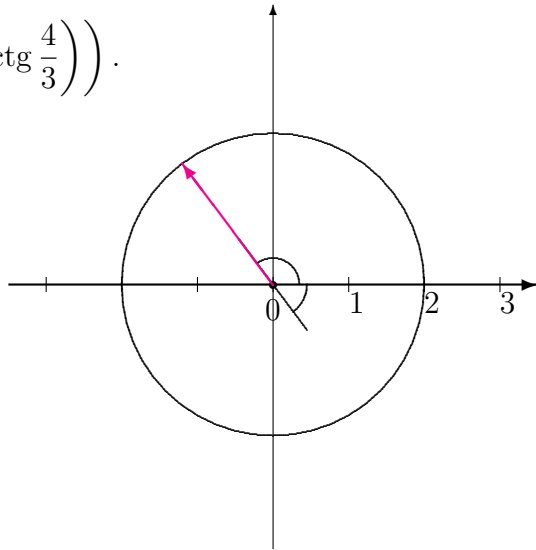
$$\text{м)} (-1,2 + 1,6i) = 2 \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

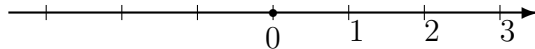
$$\text{м)} (-1,2 + 1,6i) = 2 \left(\cos \left(\pi - \arctg \frac{4}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \arctg \frac{4}{3} \right) \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

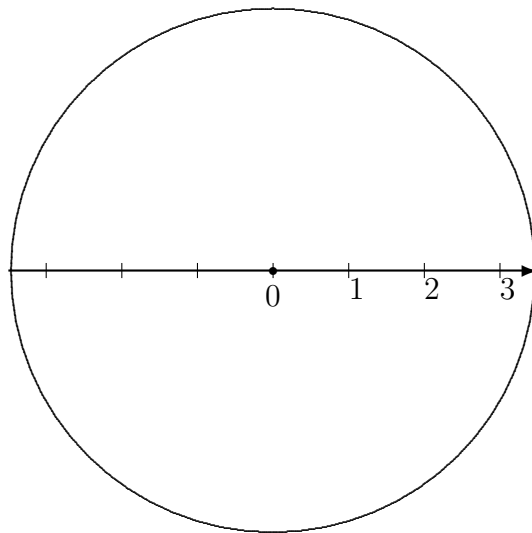
н) $(-\sqrt{3} + 3i) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1,2 - 1,6i)$; **м)** $(-1,2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

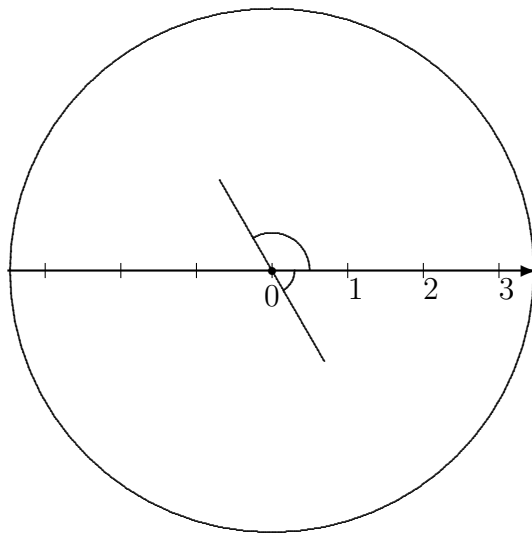
н) $(-\sqrt{3} + 3i) =$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

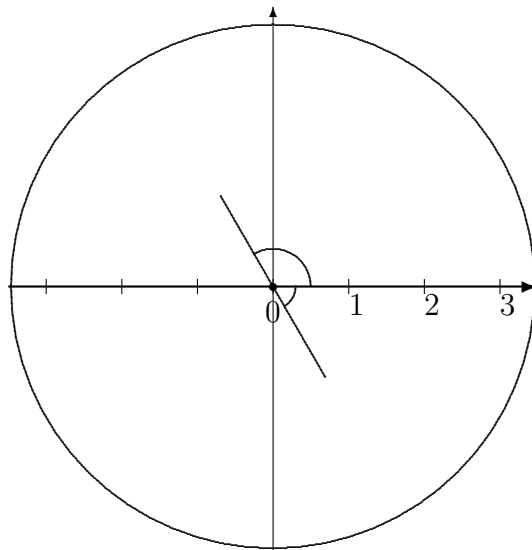
$$\text{н)} (-\sqrt{3} + 3i) = 2\sqrt{3} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

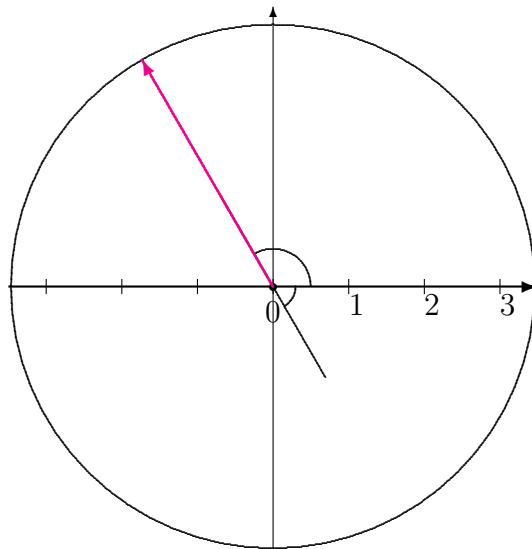
$$\text{н)} (-\sqrt{3} + 3i) = 2\sqrt{3} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

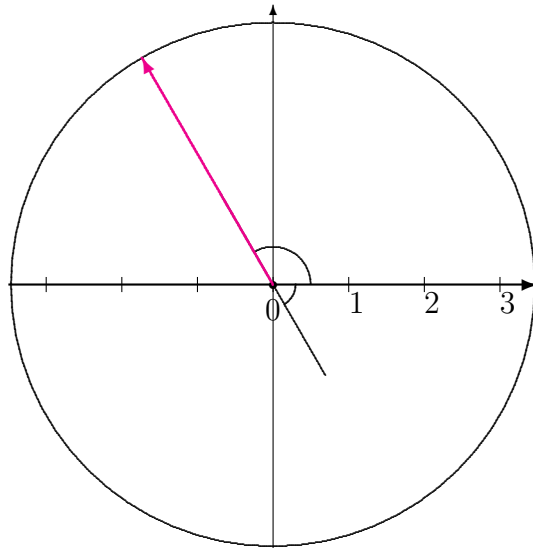
$$\text{н)} (-\sqrt{3} + 3i) = 2\sqrt{3} \left(\cos \quad + i \sin \quad \right).$$



Задача 4. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и изобразите их на комплексной плоскости: **а)** $(1 + i\sqrt{3})$; **б)** $(-1 + i)$; **в)** $(1 - i)$; **г)** $(-1 + i\sqrt{3})$; **д)** $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$; **е)** $(1 - i\sqrt{3})$; **ё)** $(-3 - i\sqrt{3})$; **ж)** $\sin 0,6\pi + i \cos 0,6\pi$; **з)** $\sin 2 + i \cos 2$; **и)** $(-1 - i\sqrt{3})$; **к)** $\cos 3 - i \sin 3$; **л)** $(1, 2 - 1,6i)$; **м)** $(-1, 2 + 1,6i)$; **н)** $(-\sqrt{3} + 3i)$.

Ответ.

$$\text{н) } (-\sqrt{3} + 3i) = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$



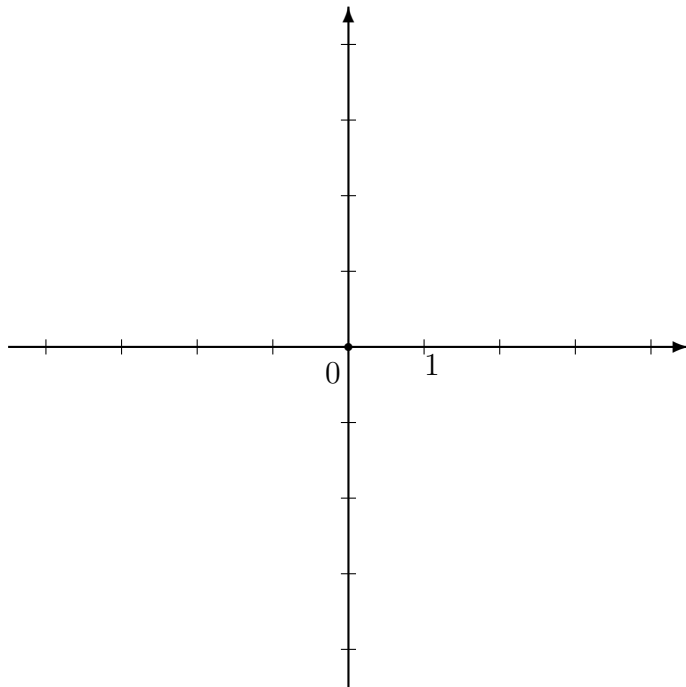
Решение задачи 5.

Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$. Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

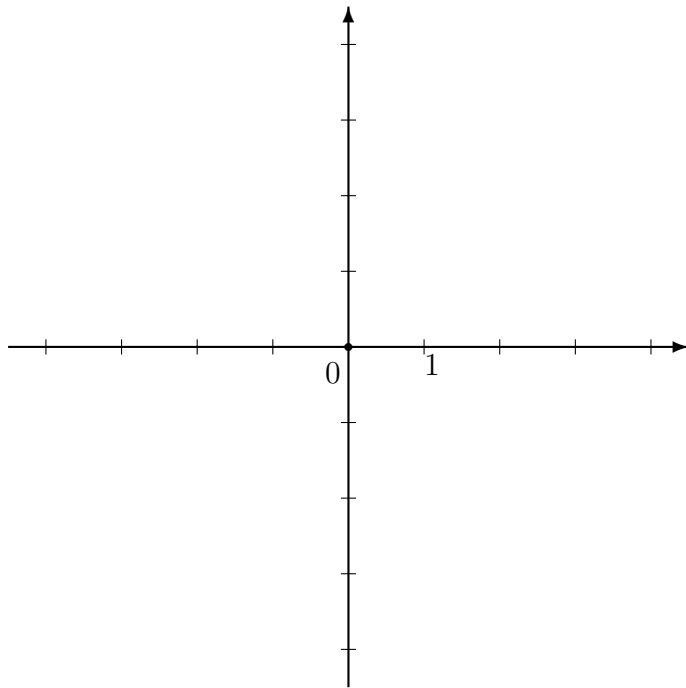
Ответ.
а) $(1 - i) \cdot 2i =$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
а) $(1 - i) \cdot 2i = 2i - 2(-1) =$

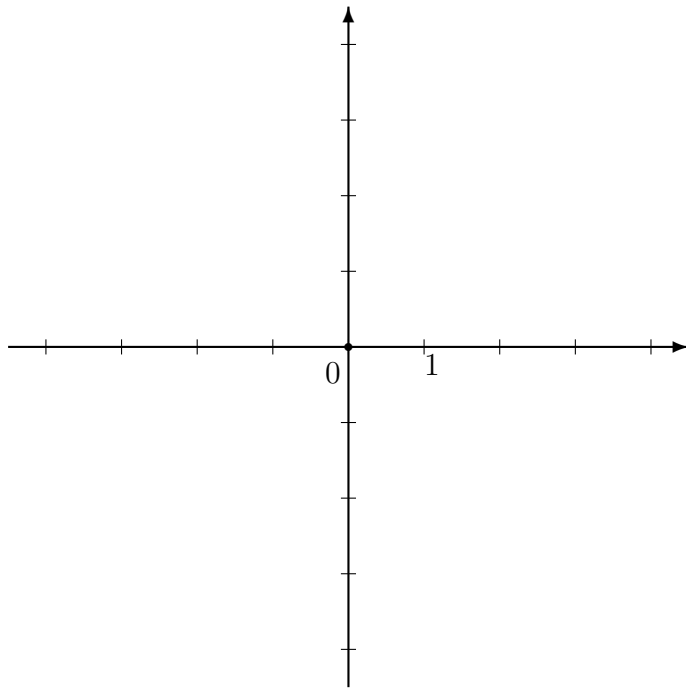


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

а) $(1 - i) \cdot 2i = 2i - 2(-1) = 2 + 2i,$

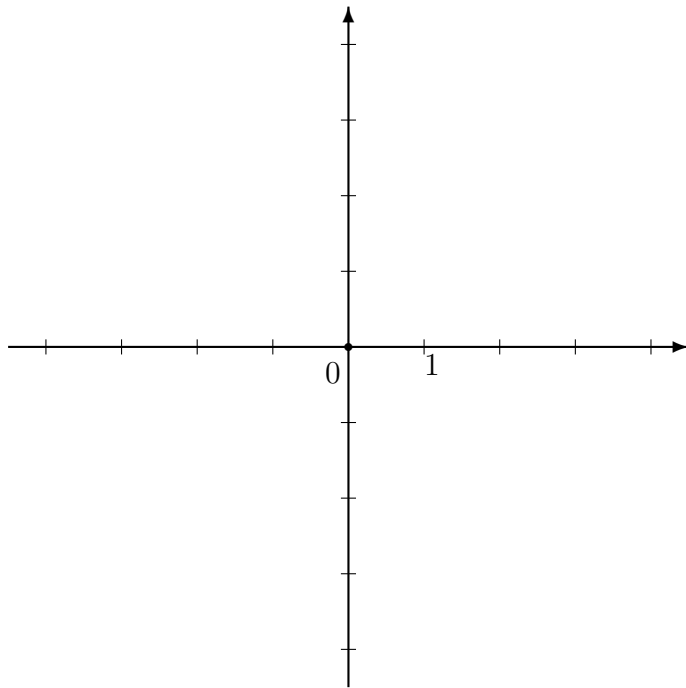


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

а) $(1 - i) \cdot 2i = 2i - 2(-1) = 2 + 2i$,
 $(1 - i) \cdot 2i =$

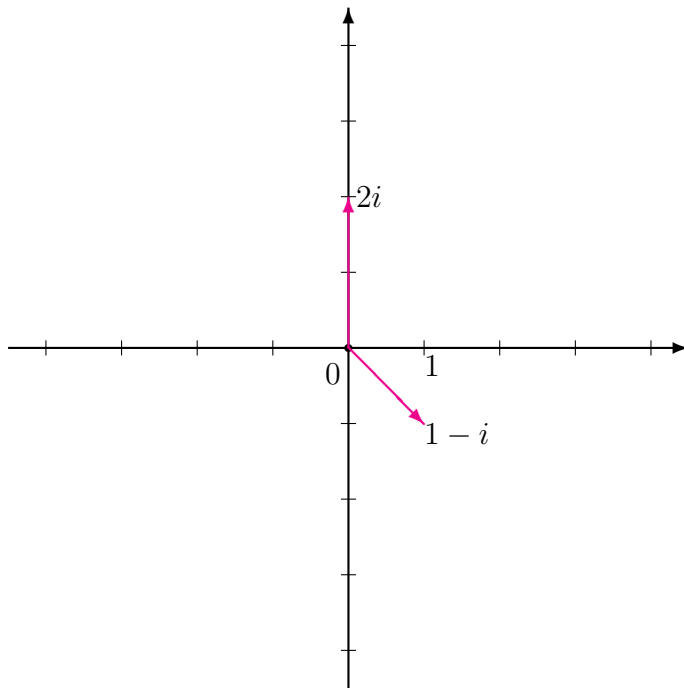


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

а) $(1 - i) \cdot 2i = 2i - 2(-1) = 2 + 2i$,
 $(1 - i) \cdot 2i =$

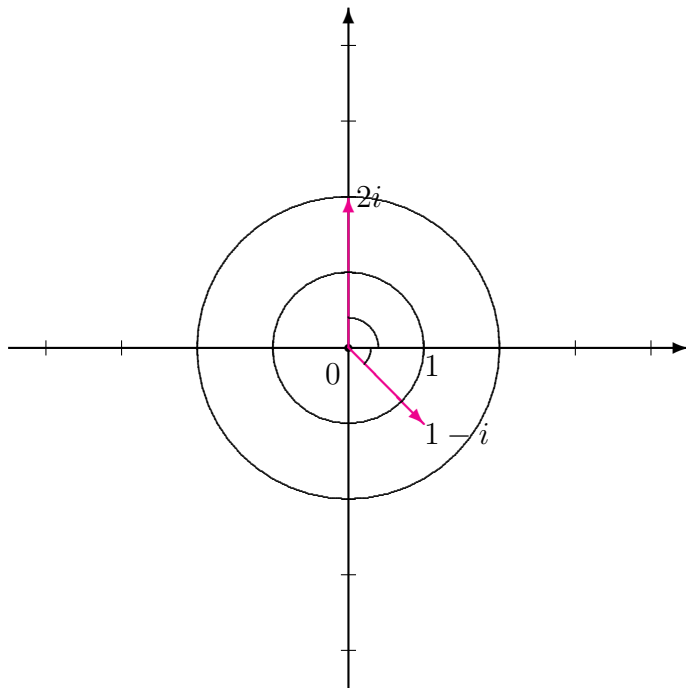


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

а) $(1 - i) \cdot 2i = 2i - 2(-1) = 2 + 2i$,
 $(1 - i) \cdot 2i =$

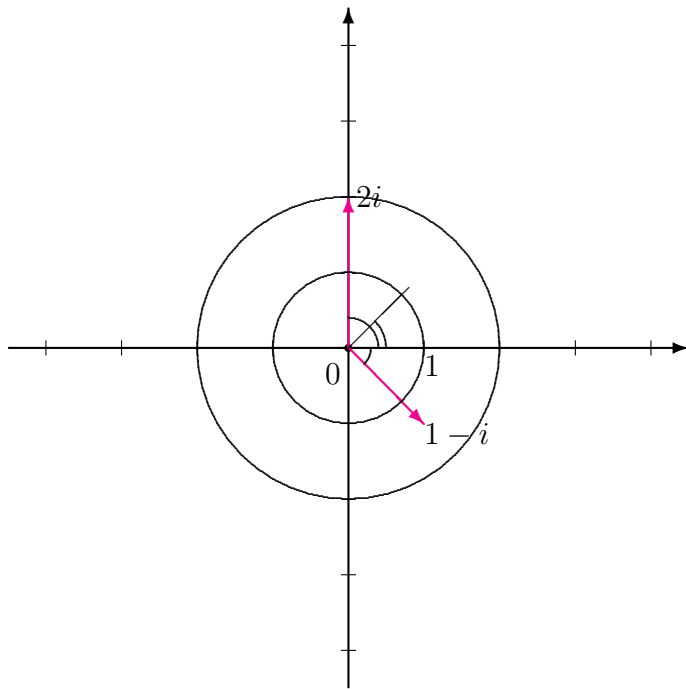


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

а) $(1 - i) \cdot 2i = 2i - 2(-1) = 2 + 2i$,
 $(1 - i) \cdot 2i =$

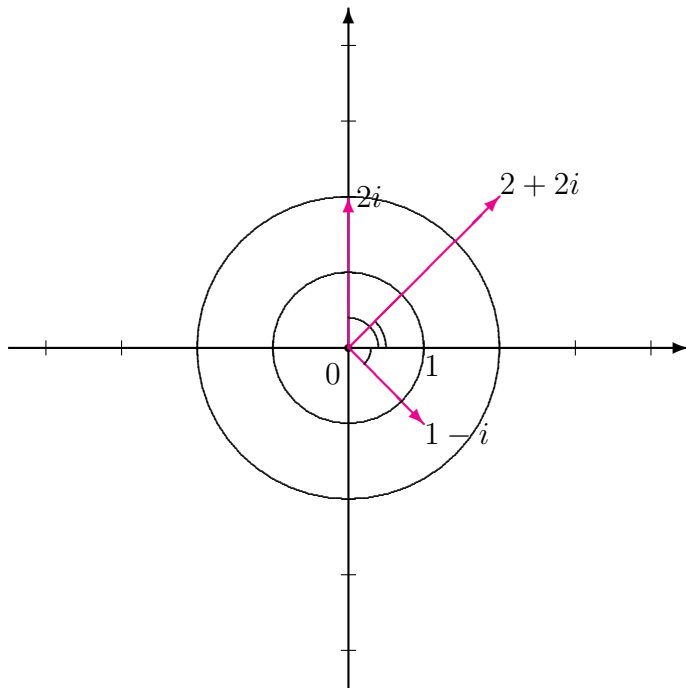


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

а) $(1 - i) \cdot 2i = 2i - 2(-1) = 2 + 2i$,
 $(1 - i) \cdot 2i =$

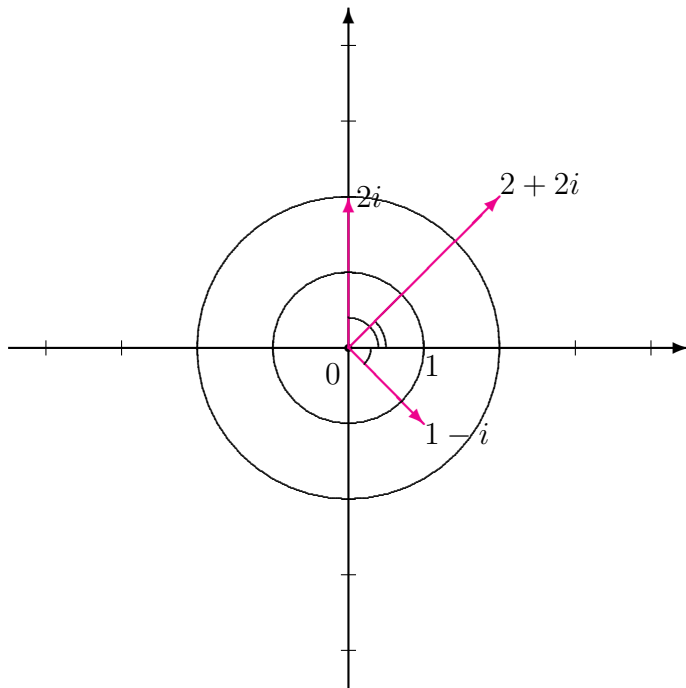


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{а) } (1 - i) \cdot 2i &= 2i - 2(-1) = 2 + 2i, \\ (1 - i) \cdot 2i &= \sqrt{2}e^{(2k\pi - \pi/4)i} \cdot 2e^{(2m\pi + \pi/2)i} = \end{aligned}$$

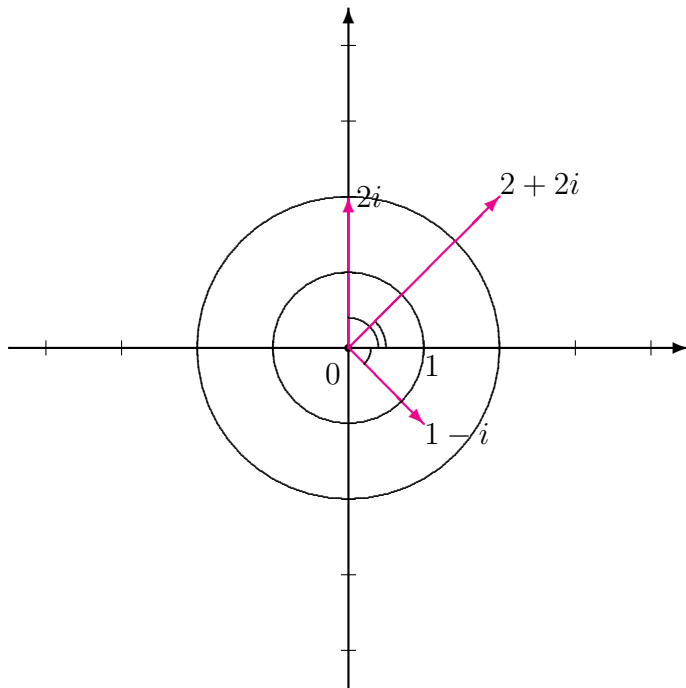


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{а) } (1 - i) \cdot 2i &= 2i - 2(-1) = 2 + 2i, \\ (1 - i) \cdot 2i &= \sqrt{2}e^{(2k\pi - \pi/4)i} \cdot 2e^{(2m\pi + \pi/2)i} = \\ &= 2\sqrt{2}e^{(2(k+m)\pi + \pi/4)i} = \end{aligned}$$

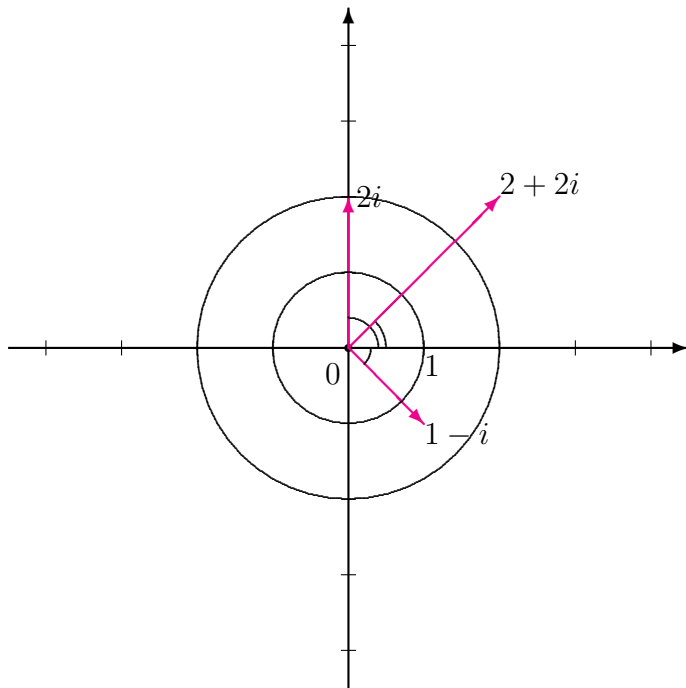


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

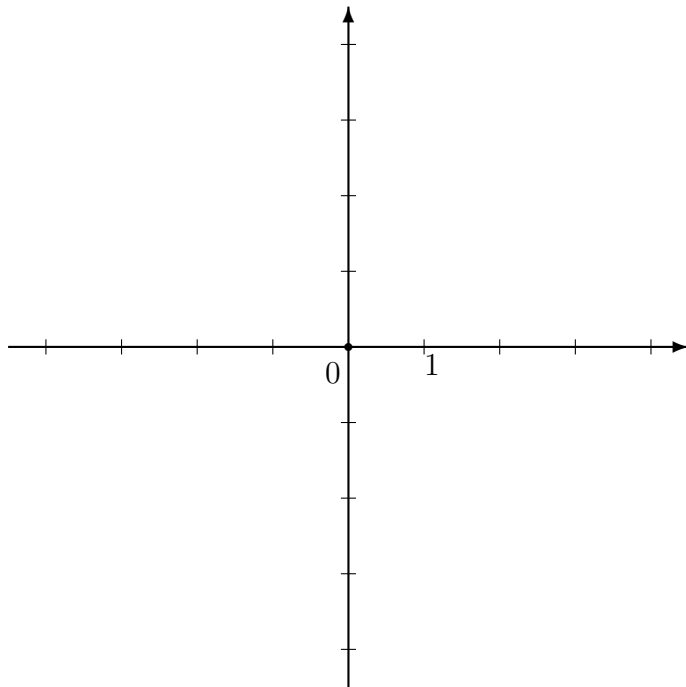
$$\begin{aligned} \text{а) } (1 - i) \cdot 2i &= 2i - 2(-1) = 2 + 2i, \\ (1 - i) \cdot 2i &= \sqrt{2}e^{(2k\pi - \pi/4)i} \cdot 2e^{(2m\pi + \pi/2)i} = \\ &= 2\sqrt{2}e^{(2(k+m)\pi + \pi/4)i} = 2 + 2i. \end{aligned}$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 =$

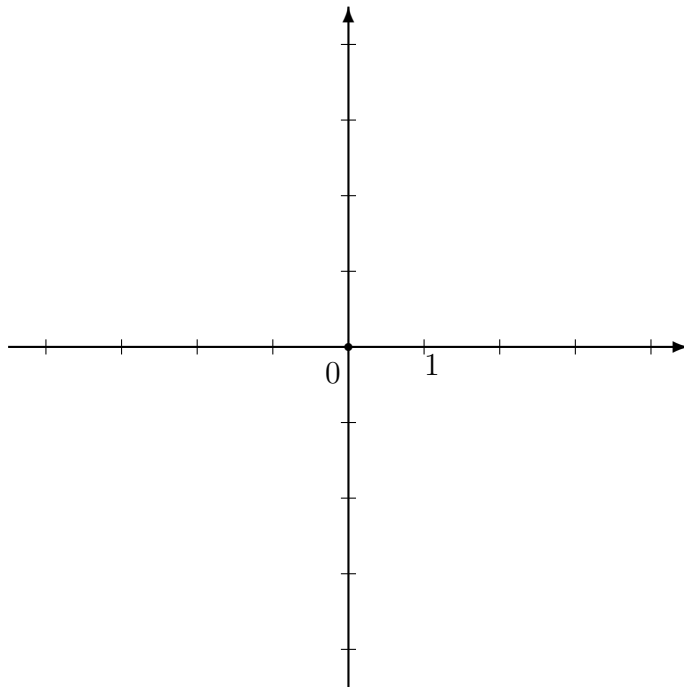


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 =$

Согласно **формуле для куба суммы** получаем...

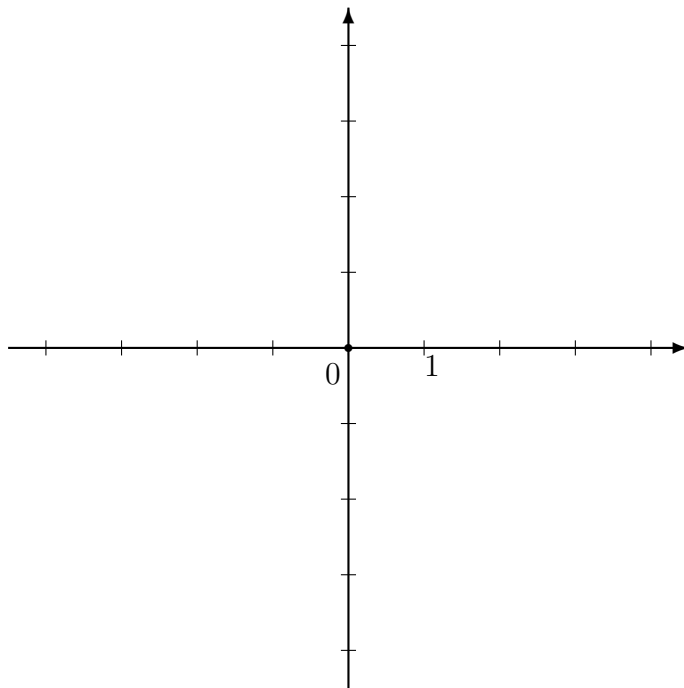


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i =$

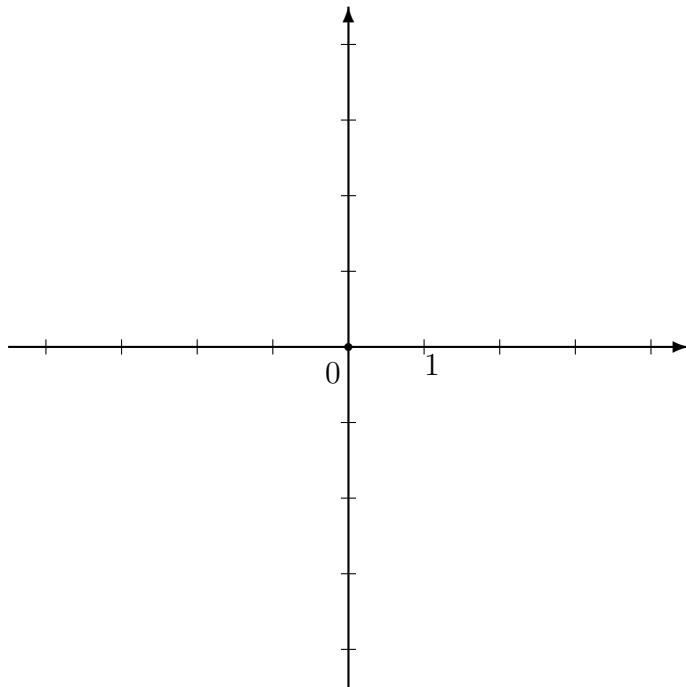
Согласно **формуле для куба суммы** получаем...



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.

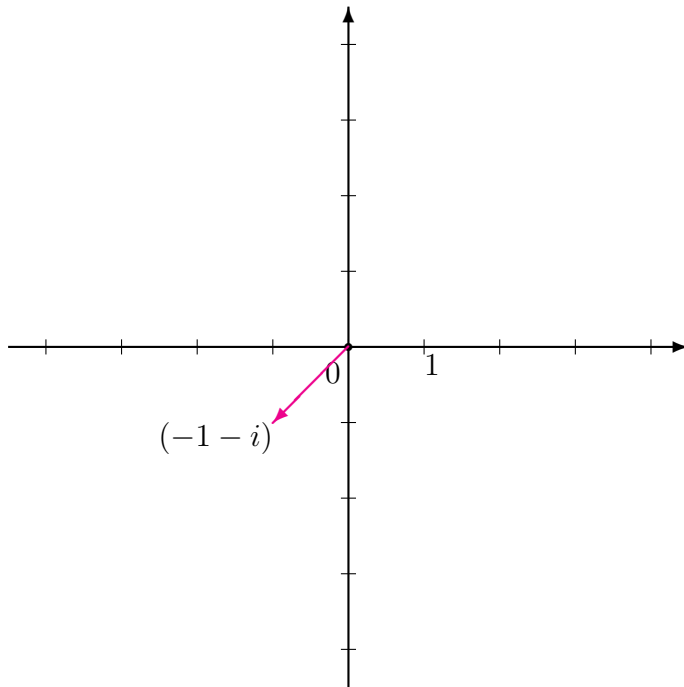


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.

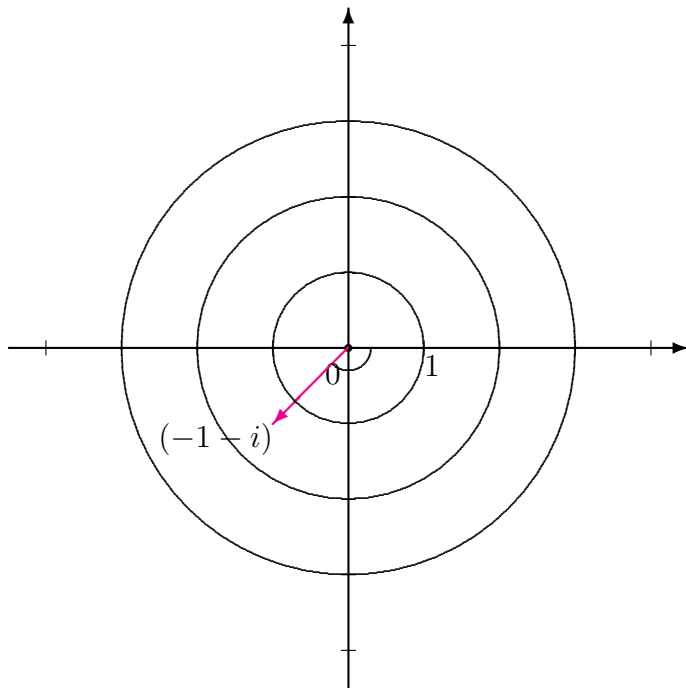
$$(-1 - i)^3 =$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.
 $(-1 - i)^3 =$

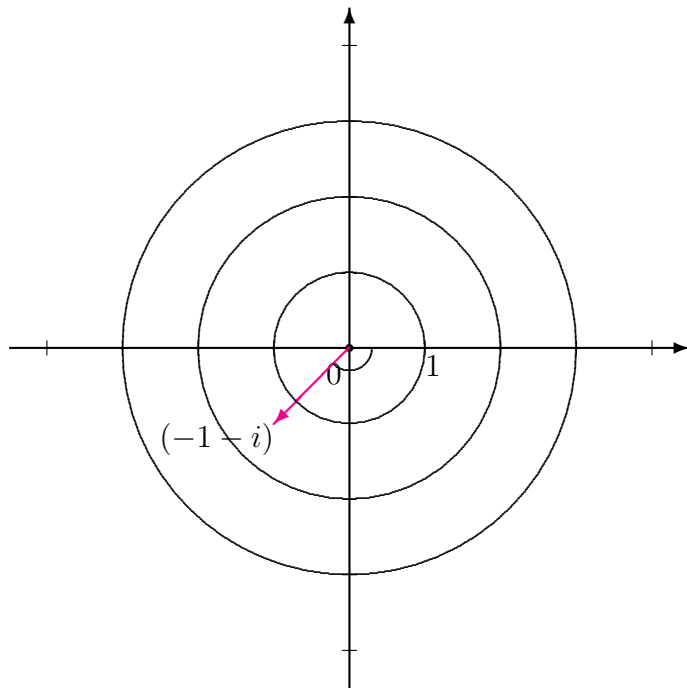


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.

$$(-1 - i)^3 = (\sqrt{2}e^{(2k\pi - 3\pi/4)i})^3 =$$

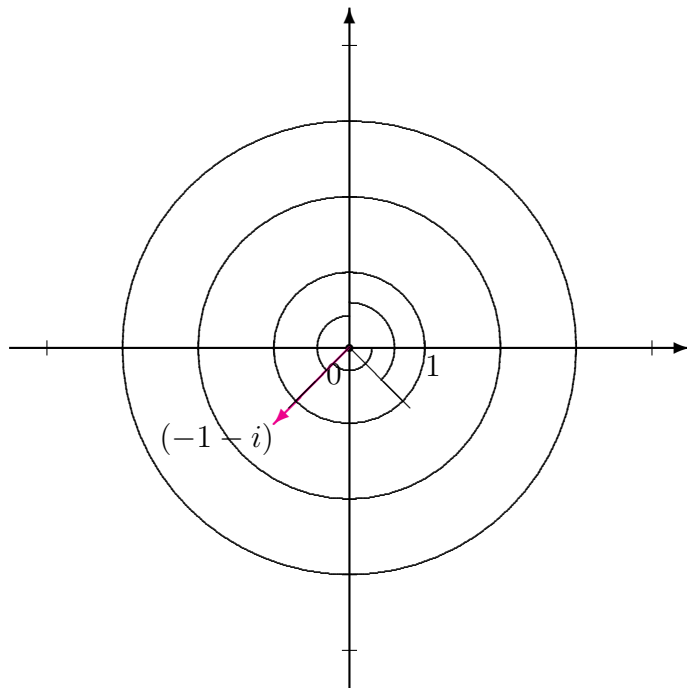


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.

$$(-1 - i)^3 = (\sqrt{2}e^{(2k\pi - 3\pi/4)i})^3 =$$

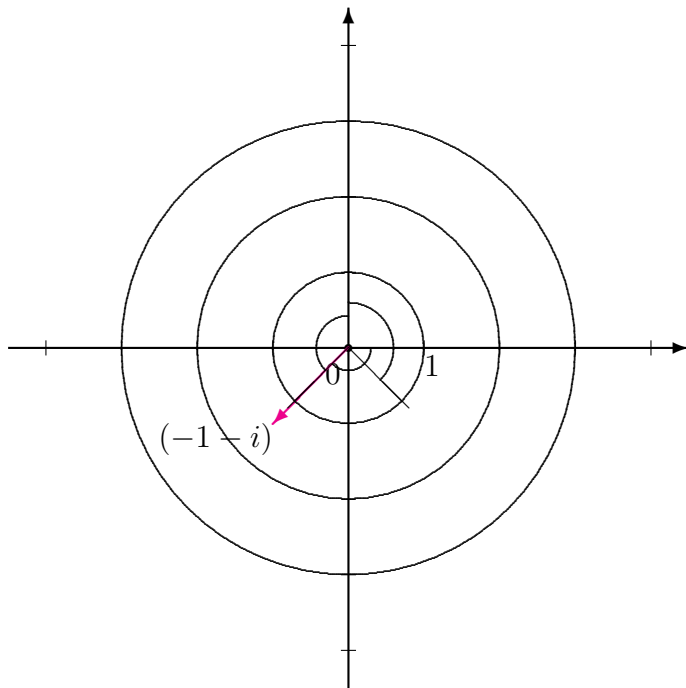


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.

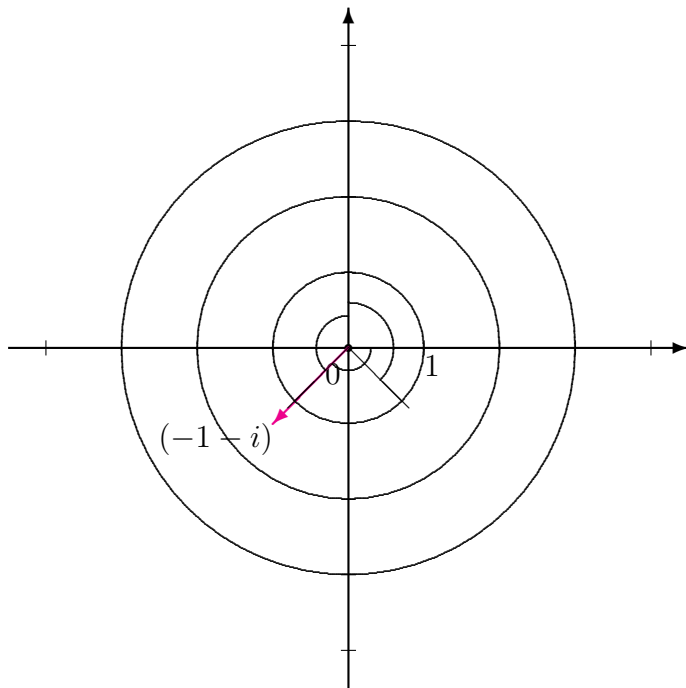
$$\begin{aligned} (-1 - i)^3 &= (\sqrt{2}e^{(2k\pi - 3\pi/4)i})^3 = \\ &= 2\sqrt{2}e^{(6k\pi - 9\pi/4)i} = \end{aligned}$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.
 $(-1 - i)^3 = (\sqrt{2}e^{(2k\pi - 3\pi/4)i})^3 =$
 $= 2\sqrt{2}e^{(6k\pi - 9\pi/4)i} = 2\sqrt{2}e^{((6k-2)\pi - \pi/4)i} =$

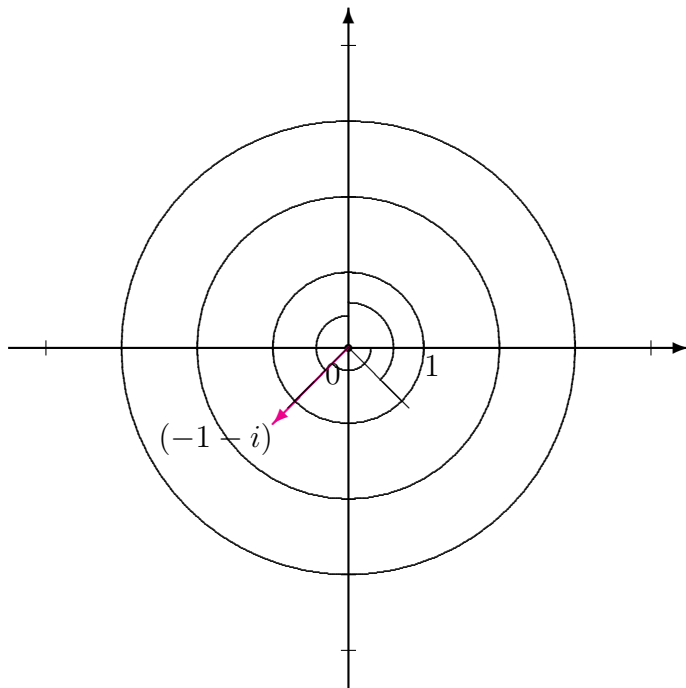


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.

$$\begin{aligned} (-1 - i)^3 &= (\sqrt{2}e^{(2k\pi - 3\pi/4)i})^3 = \\ &= 2\sqrt{2}e^{(6k\pi - 9\pi/4)i} = 2\sqrt{2}e^{((6k-2)\pi - \pi/4)i} = \\ &= 2\sqrt{2}e^{(-\pi/4)i} = \end{aligned}$$

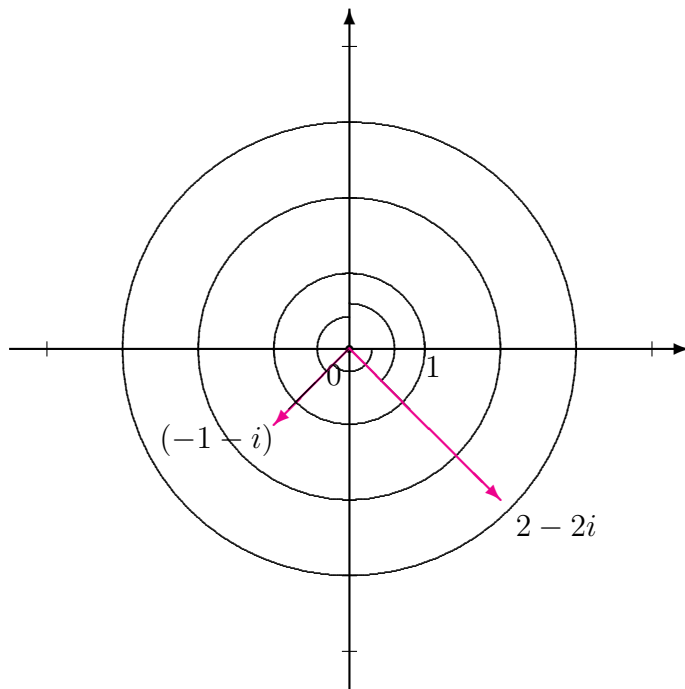


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.

$$\begin{aligned} (-1 - i)^3 &= (\sqrt{2}e^{(2k\pi - 3\pi/4)i})^3 = \\ &= 2\sqrt{2}e^{(6k\pi - 9\pi/4)i} = 2\sqrt{2}e^{((6k-2)\pi - \pi/4)i} = \\ &= 2\sqrt{2}e^{(-\pi/4)i} = \end{aligned}$$

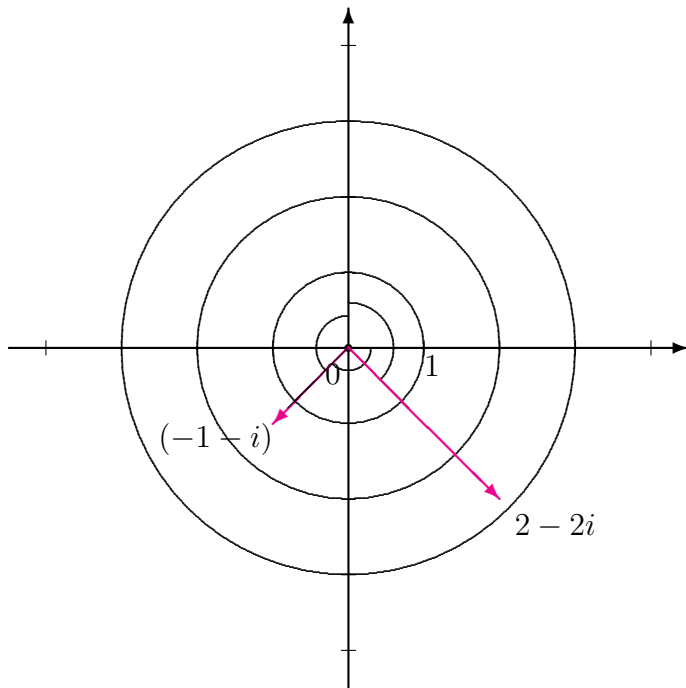


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
б) $(-1 - i)^3 = -1 - 3i + 3 + i = 2 - 2i$.

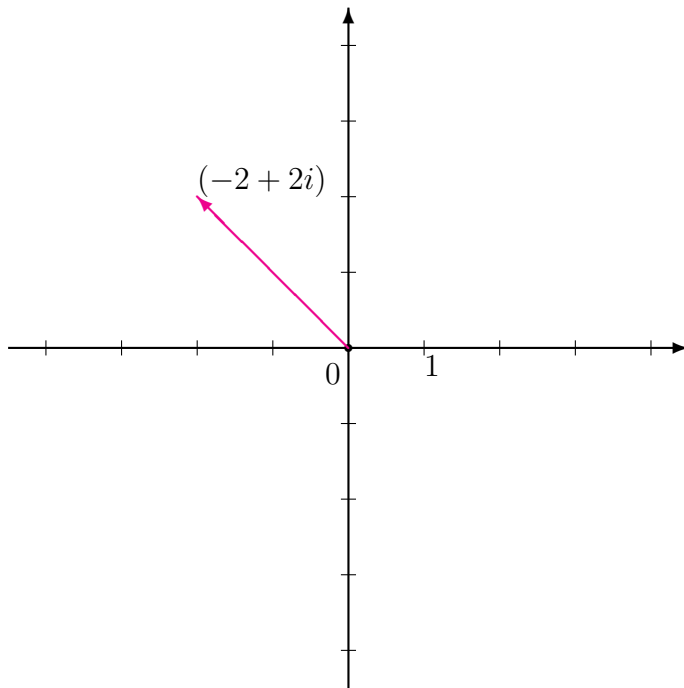
$$\begin{aligned} (-1 - i)^3 &= (\sqrt{2}e^{(2k\pi - 3\pi/4)i})^3 = \\ &= 2\sqrt{2}e^{(6k\pi - 9\pi/4)i} = 2\sqrt{2}e^{((6k-2)\pi - \pi/4)i} = \\ &= 2\sqrt{2}e^{(-\pi/4)i} = 2 - 2i. \end{aligned}$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

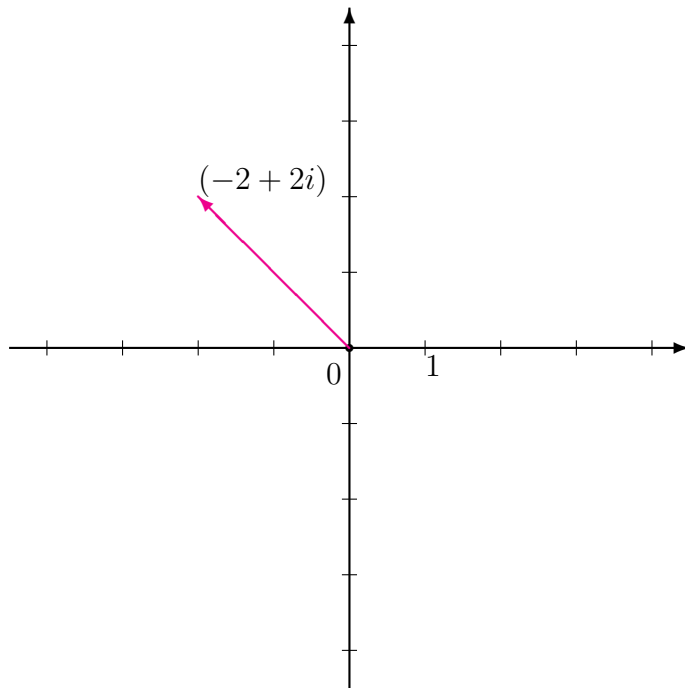


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

Вычисление алгебраическим методом состоит в представлении результата в виде

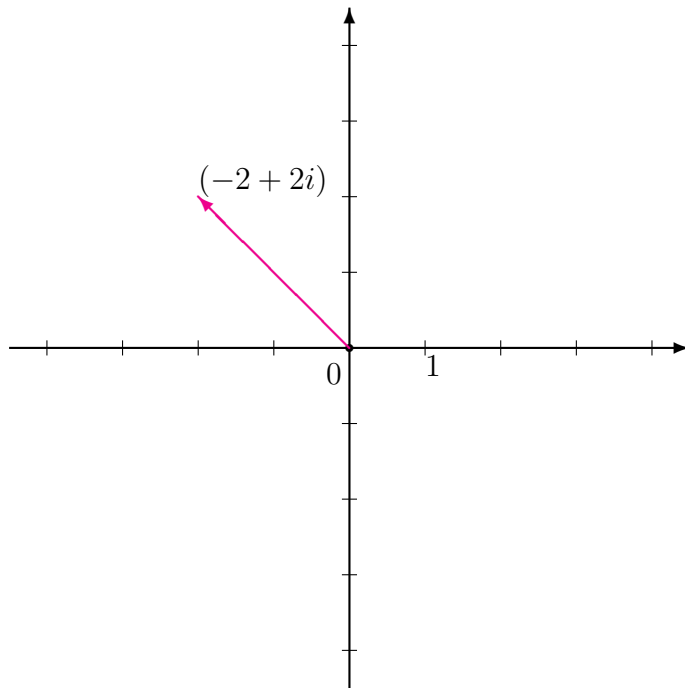


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

Вычисление алгебраическим методом состоит в представлении результата в виде $\sqrt[3]{-2 + 2i} = x + yi$,



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

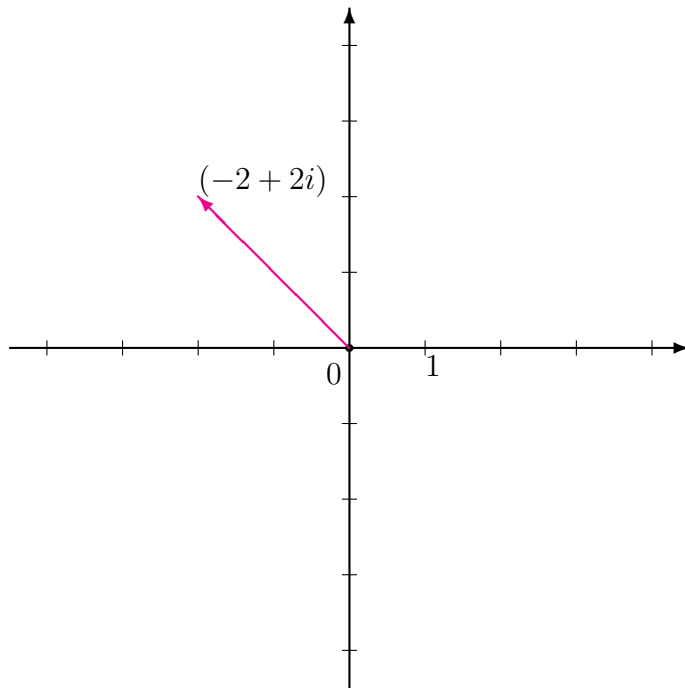
Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ = ?

Вычисление алгебраическим методом состоит в представлении результата в виде

$$\sqrt[3]{-2 + 2i} = x + yi,$$

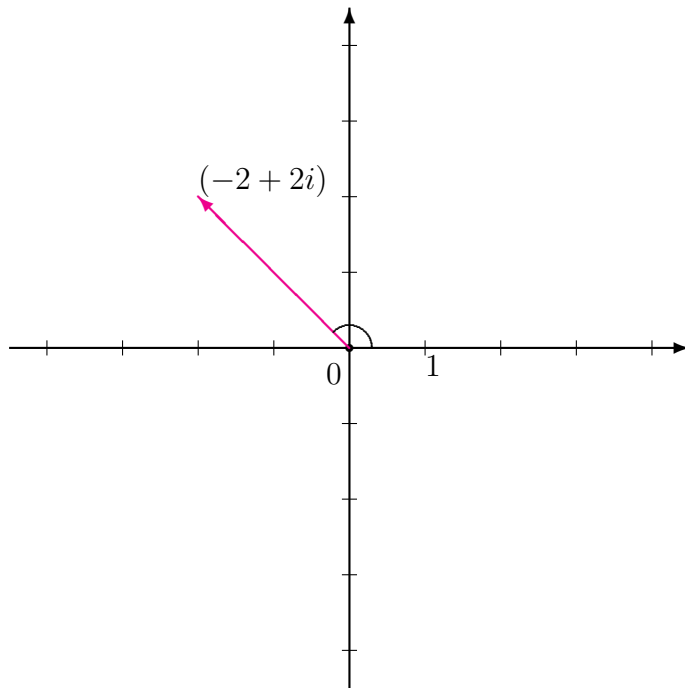
что приводит к системе из двух уравнений третьего порядка (по каждой из переменных) с двумя неизвестными.



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

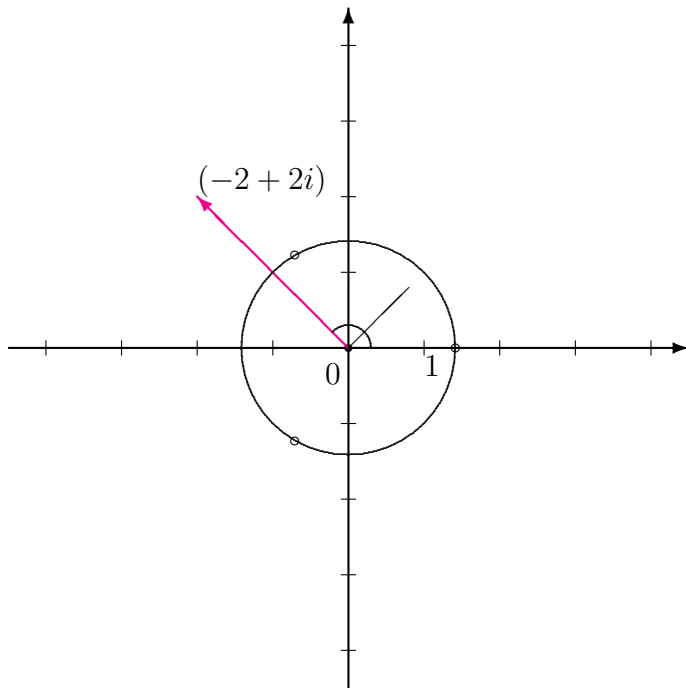
Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

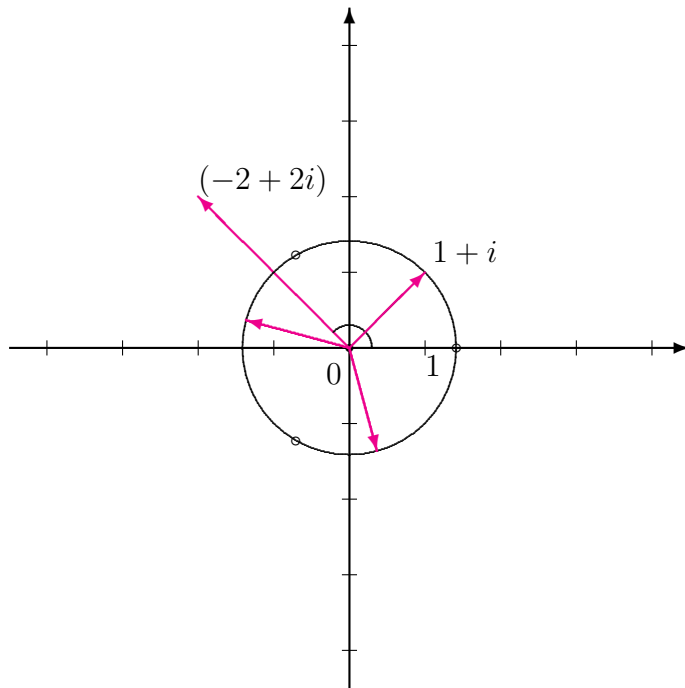
Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

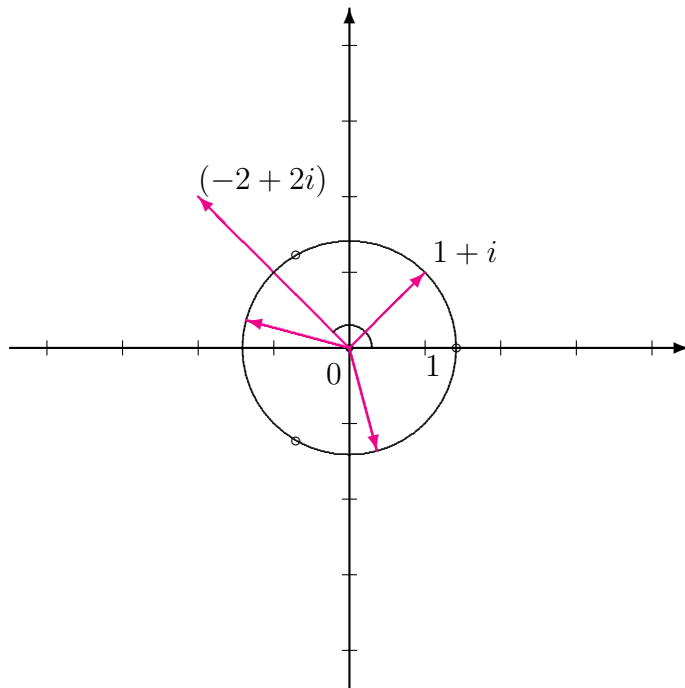
Поэтому один из корней равен $(1 + i)$. Как вычислить остальные корни?



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

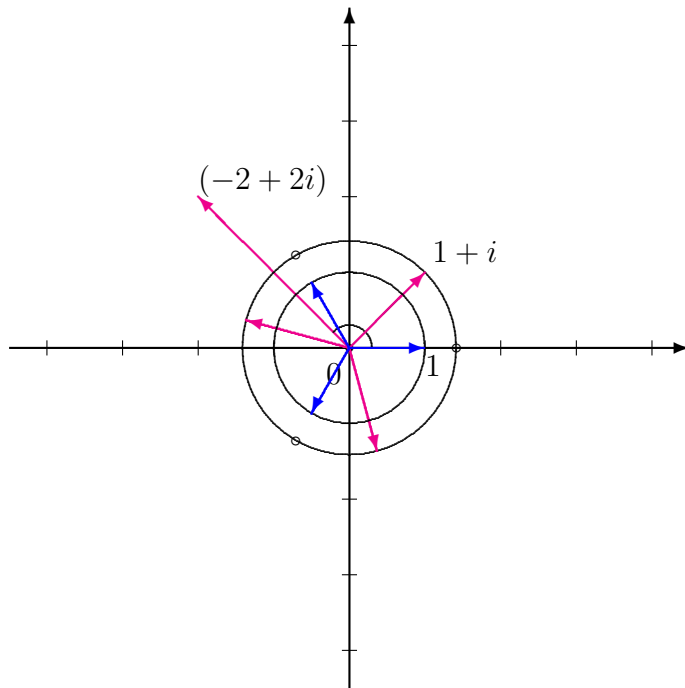
Поэтому один из корней равен $(1 + i)$. Как вычислить остальные корни?
 Умножим этот корень на $\sqrt[3]{1}$:



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

Поэтому один из корней равен $(1 + i)$. Как вычислить остальные корни?
 Умножим этот корень на $\sqrt[3]{1}$:



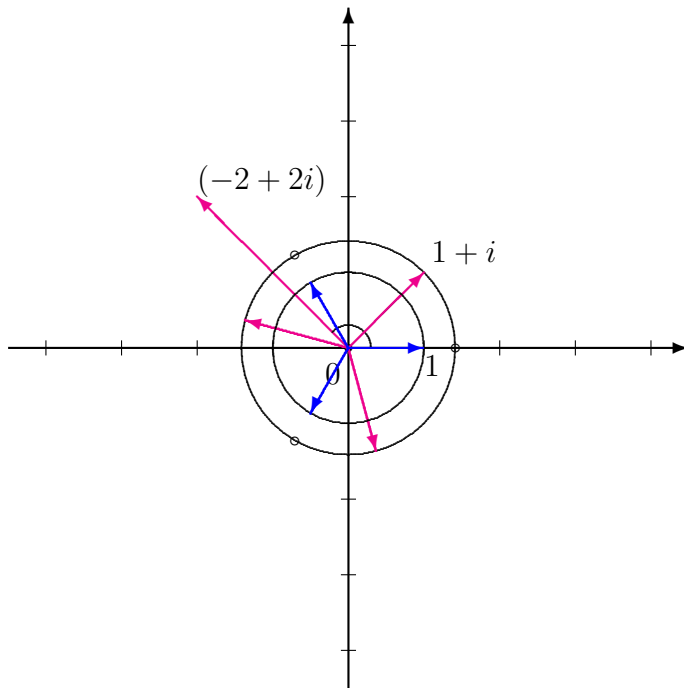
Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

Поэтому один из корней равен $(1 + i)$. Как вычислить остальные корни?

Умножим этот корень на $\sqrt[3]{1}$:

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

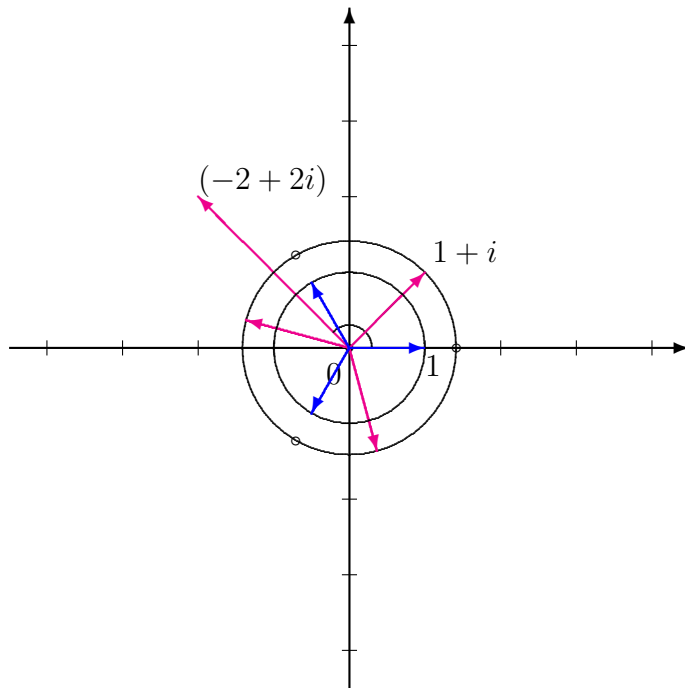
Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

Поэтому один из корней равен $(1 + i)$. Как вычислить остальные корни?

Умножим этот корень на $\sqrt[3]{1}$:

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{-2 + 2i} = 1 + i, \\ \sqrt[3]{-2 + 2i} = (1 + i) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ = \\ \sqrt[3]{-2 + 2i} = (1 + i) \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ = \end{array} \right.$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

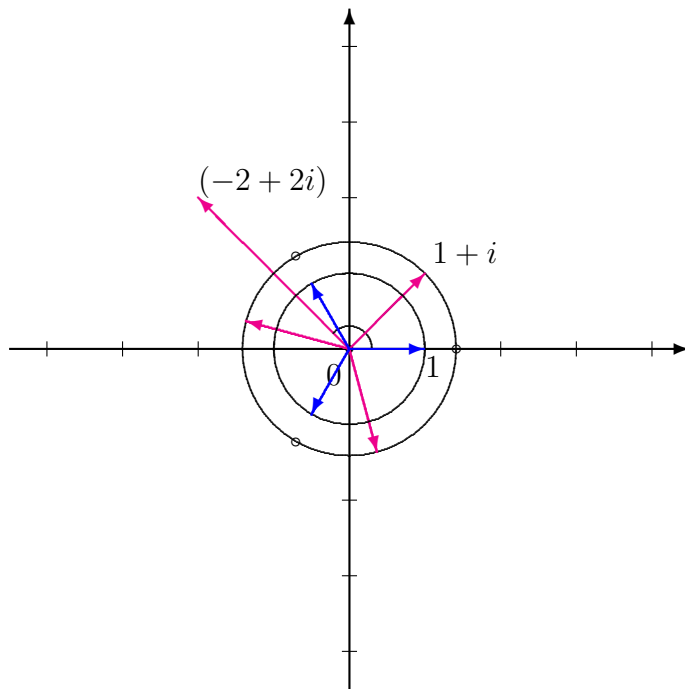
Ответ.
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

Поэтому один из корней равен $(1 + i)$. Как вычислить остальные корни?

Умножим этот корень на $\sqrt[3]{1}$:

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\left[\begin{aligned} \sqrt[3]{-2 + 2i} &= 1 + i, \\ \sqrt[3]{-2 + 2i} &= (1 + i) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) + \frac{i}{2} (\sqrt{3} - 1), \\ \sqrt[3]{-2 + 2i} &= (1 + i) \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \end{aligned} \right.$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

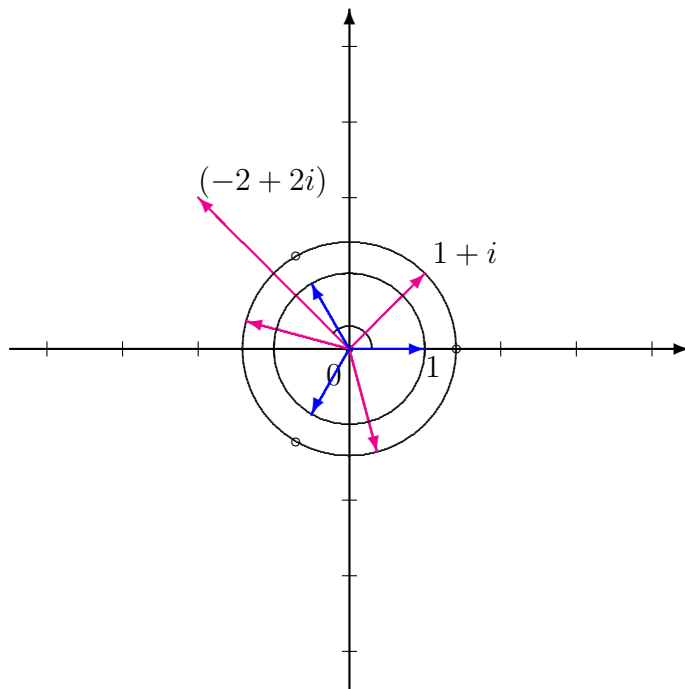
в) $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

Поэтому один из корней равен $(1 + i)$. Как вычислить остальные корни?

Умножим этот корень на $\sqrt[3]{1}$:

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

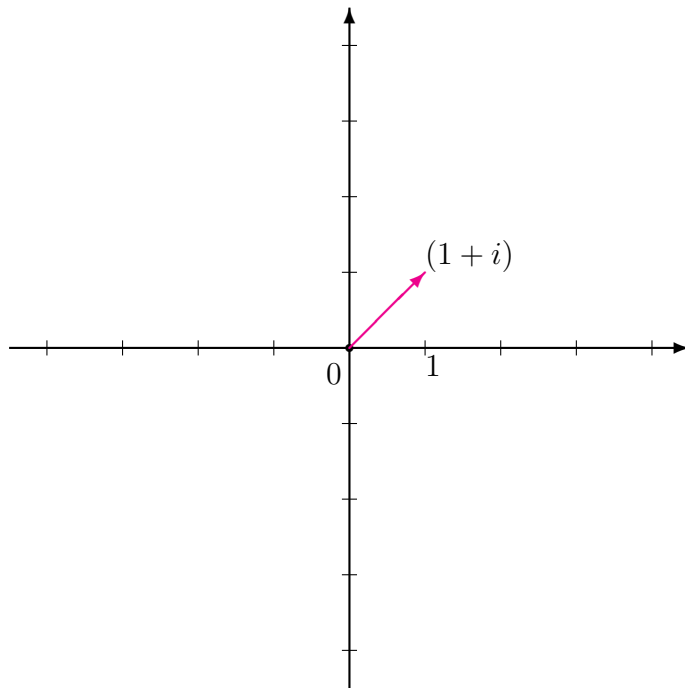
$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{-2 + 2i} = 1 + i, \\ \sqrt[3]{-2 + 2i} = (1 + i) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ \quad = -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) + \frac{i}{2} (\sqrt{3} - 1), \\ \sqrt[3]{-2 + 2i} = (1 + i) \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ \quad = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) - \frac{i}{2} (\sqrt{3} + 1). \end{array} \right.$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
г) $(1 + i)^4 =$

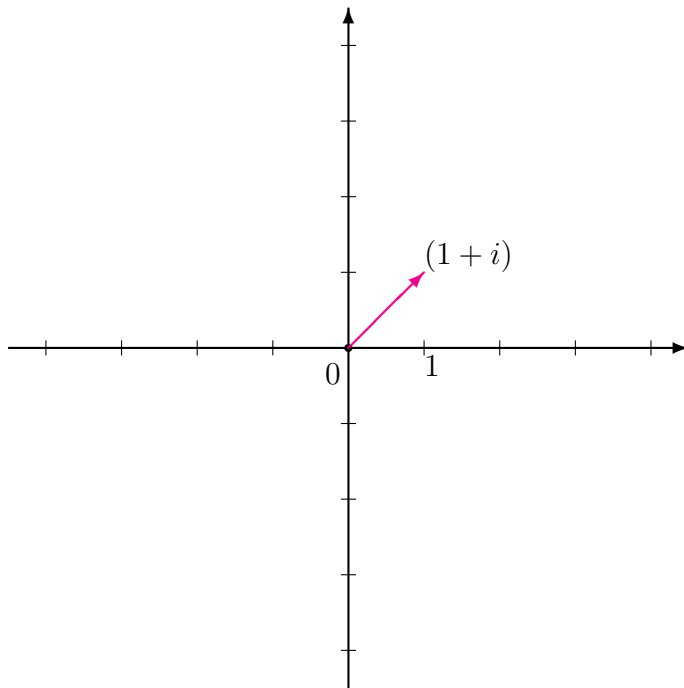


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
г) $(1 + i)^4 =$

Используя, **формулу бинома Ньютона**
или **треугольник Паскаля**, получаем...

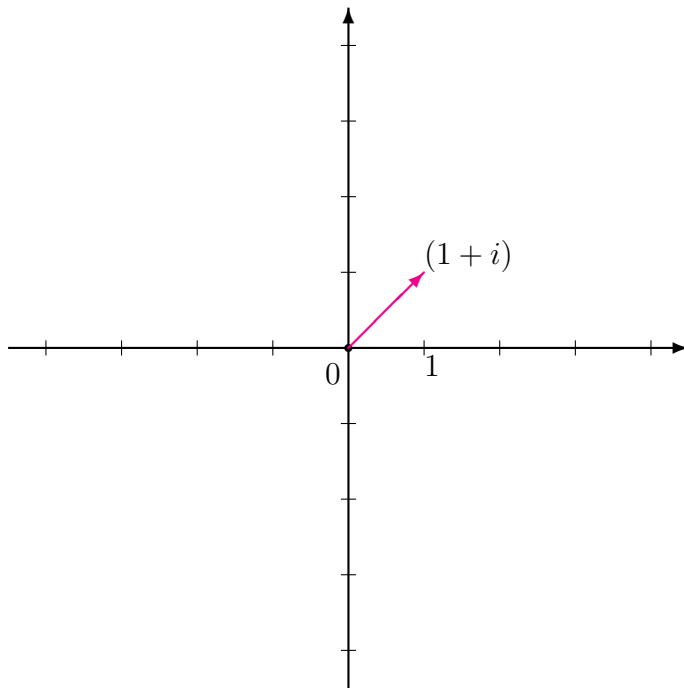


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
г) $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 =$

Используя, **формулу бинома Ньютона**
или **треугольник Паскаля**, получаем...

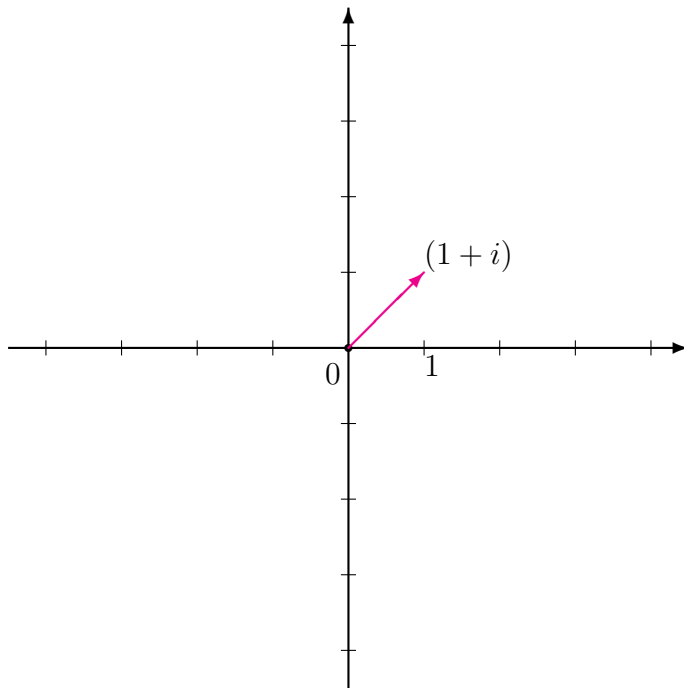


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
г) $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 =$
 $= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 =$

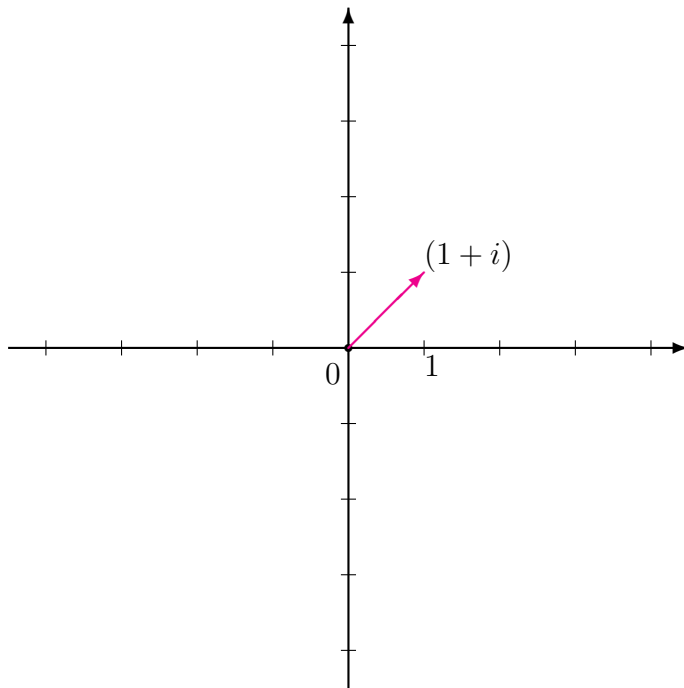
Используя, **формулу бинома Ньютона**
или **треугольник Паскаля**, получаем...



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

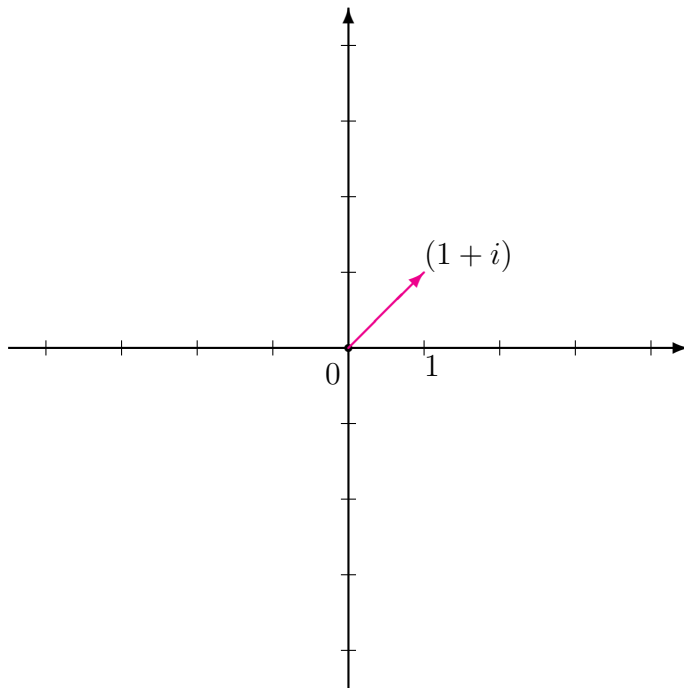
Ответ.
г) $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 =$
 $= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4,$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

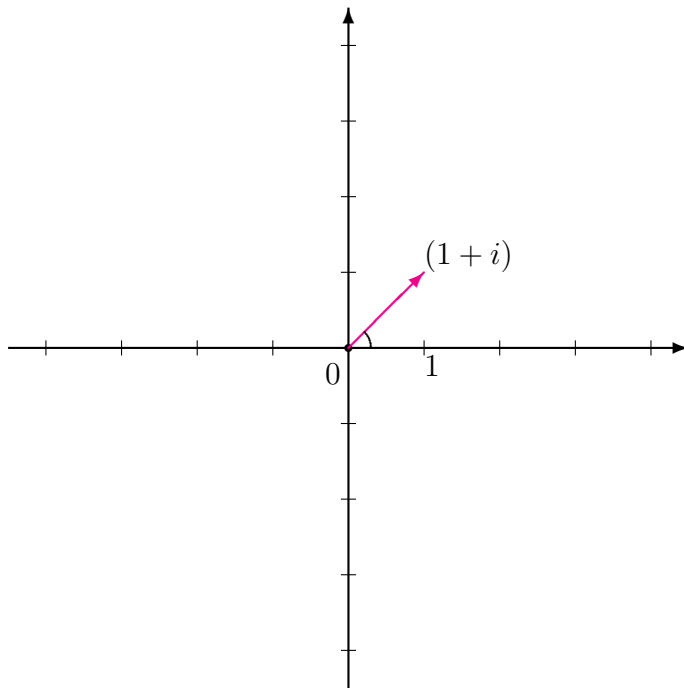
Ответ.
г) $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 =$
 $= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4,$
 $(1 + i)^4 =$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

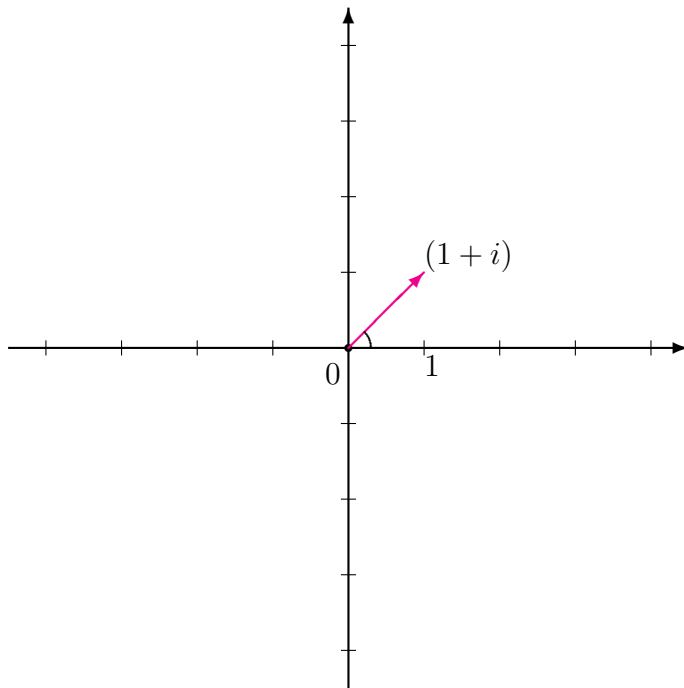
Ответ.
г) $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 =$
 $= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4,$
 $(1 + i)^4 =$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

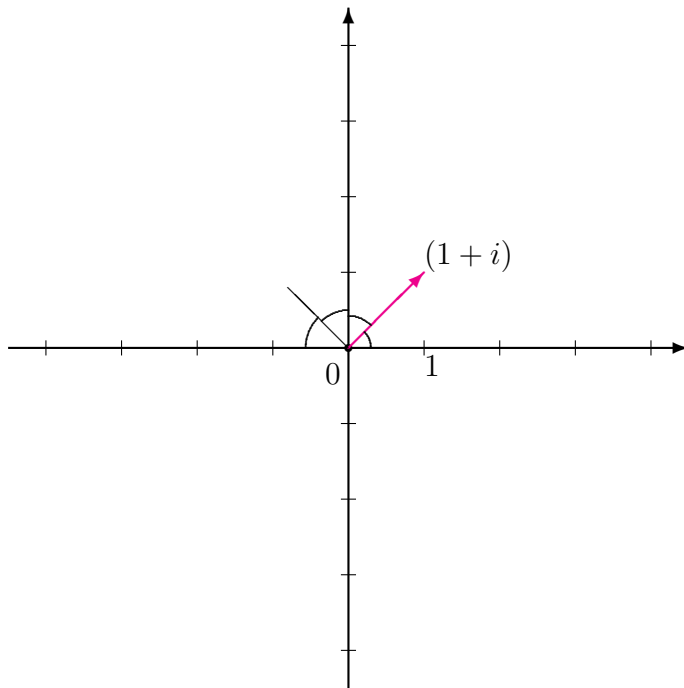
Ответ.
г) $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 =$
 $= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4,$
 $(1 + i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i(2k\pi + \pi/4)}\right)^4 =$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
г) $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 =$
 $= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4,$
 $(1 + i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i(2k\pi + \pi/4)}\right)^4 =$

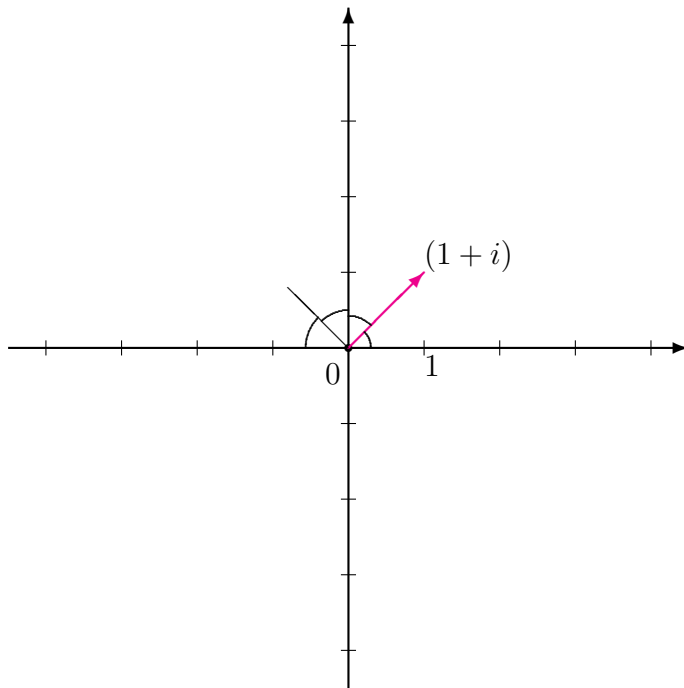


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad (1 + i)^4 &= 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = \\ &= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4, \\ (1 + i)^4 &= \left(\sqrt{2}e^{i(2k\pi + \pi/4)}\right)^4 = 4e^{i(8k\pi + \pi)} = \end{aligned}$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

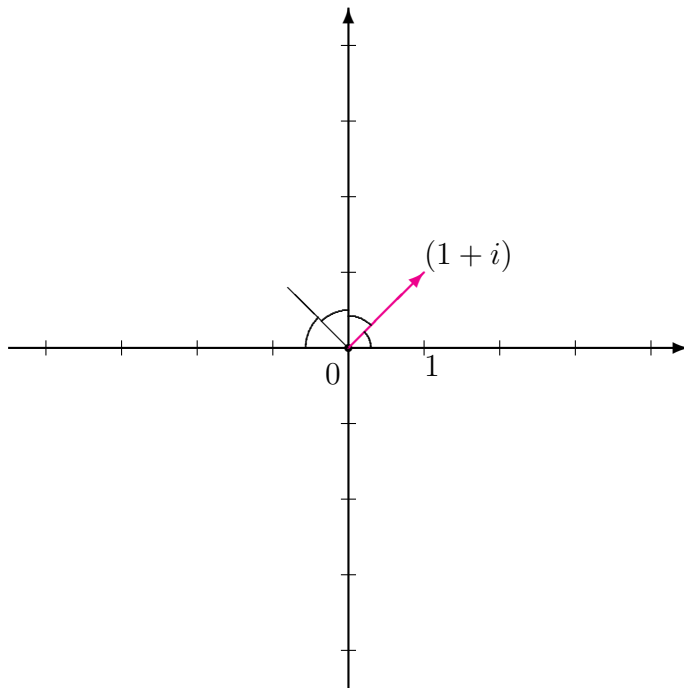
Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\text{г)} (1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 =$$

$$= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4,$$

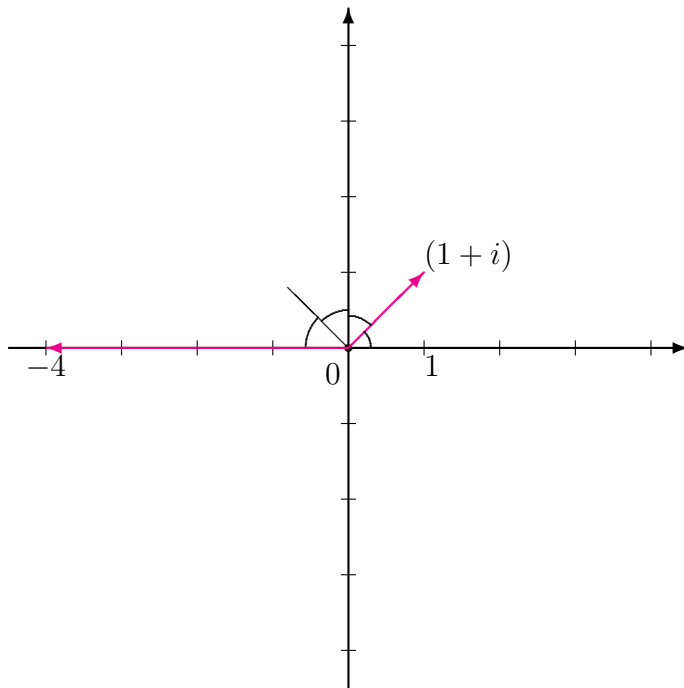
$$(1 + i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i(2k\pi + \pi/4)}\right)^4 = 4e^{i(8k\pi + \pi)} = -4.$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.
г) $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 =$
 $= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4,$
 $(1 + i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i(2k\pi + \pi/4)}\right)^4 = 4e^{i(8k\pi + \pi)} = -4.$

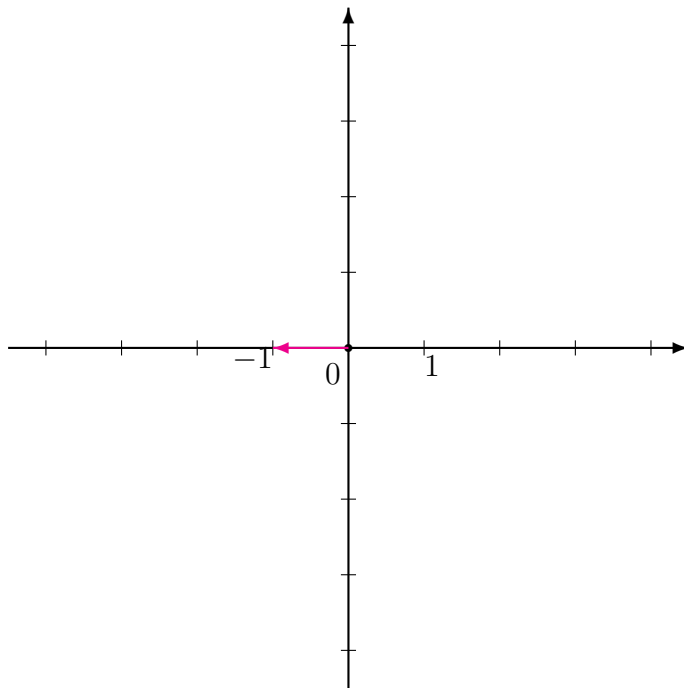


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

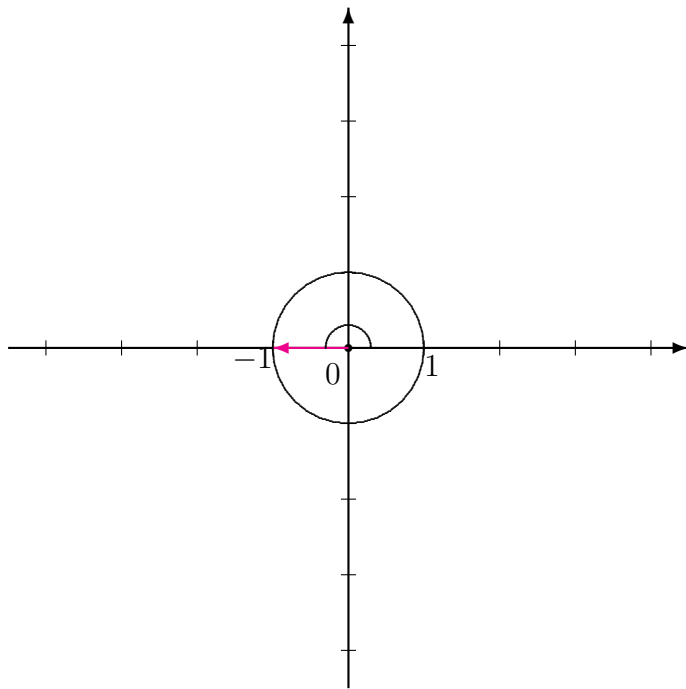
д) $\sqrt[4]{-1} =$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

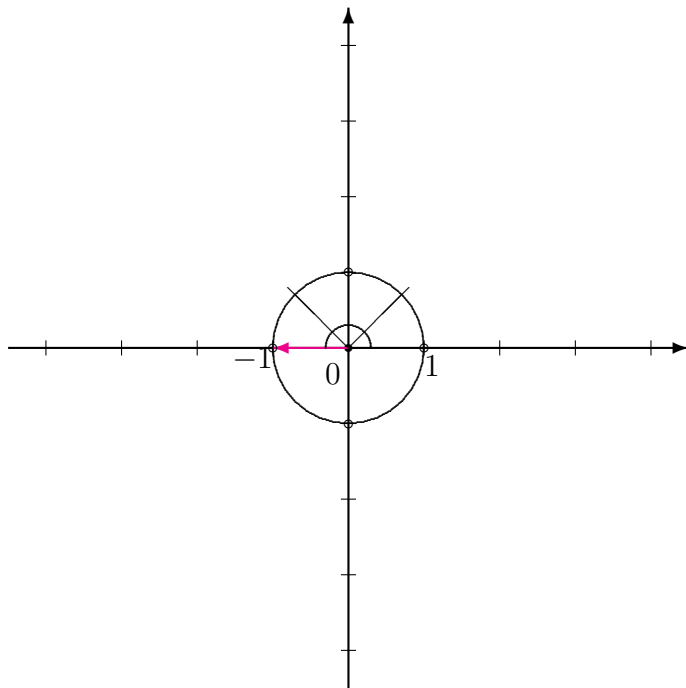
д) $\sqrt[4]{-1} =$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

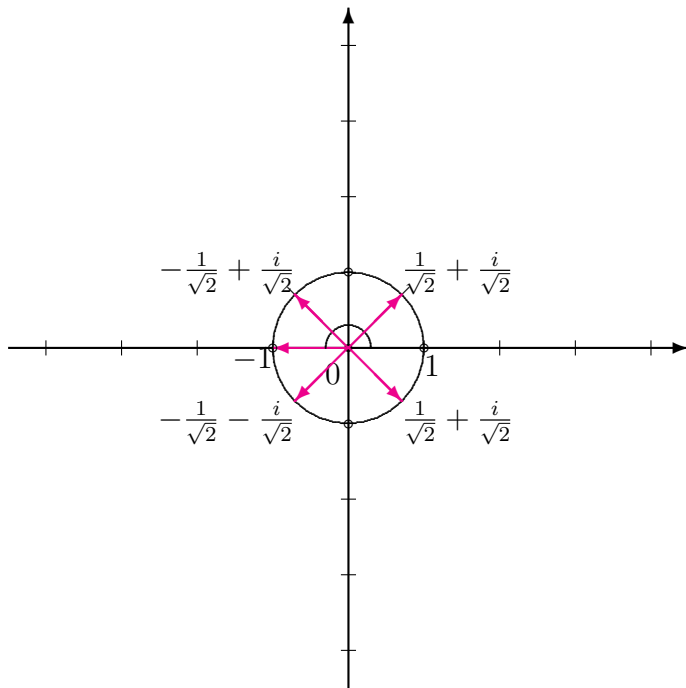
д) $\sqrt[4]{-1} =$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

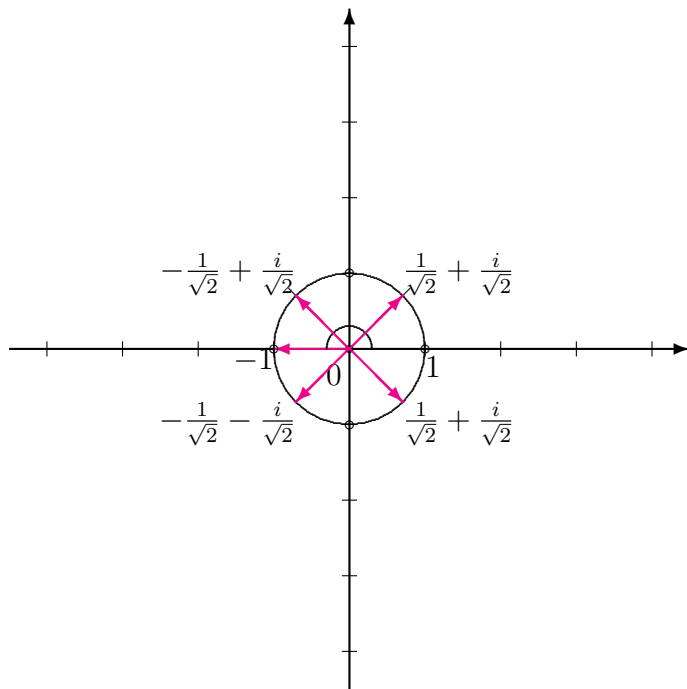
д) $\sqrt[4]{-1} =$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\text{д) } \sqrt[4]{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{bmatrix}$$

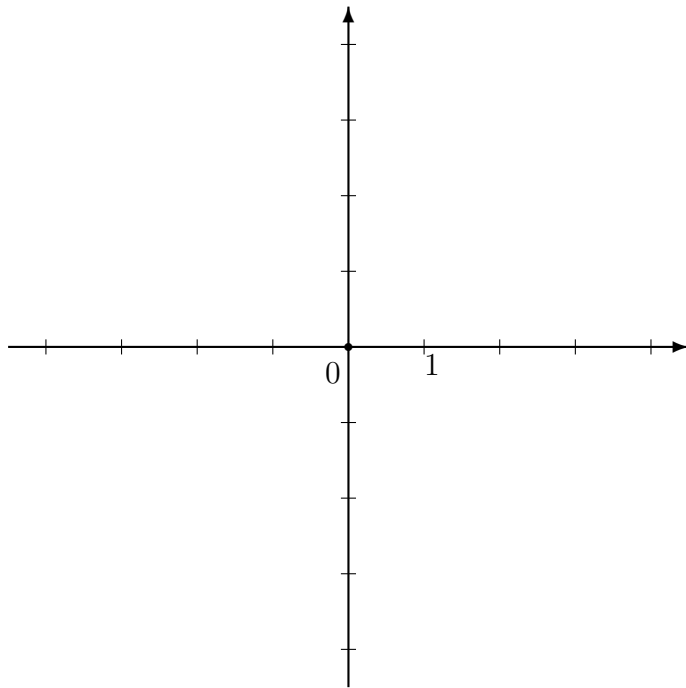


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

е) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 =$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

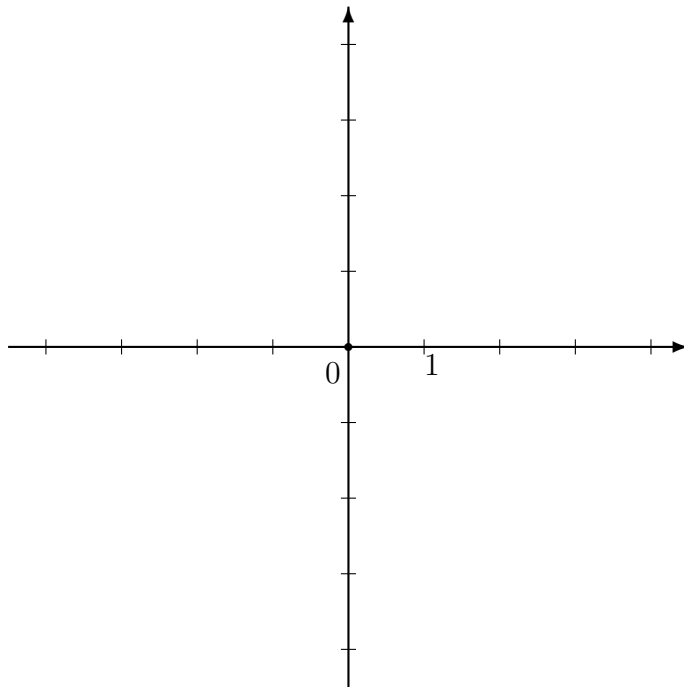
Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

е) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 =$

$=$

Используя **треугольник Паскаля** или **формулу бинома Ньютона**, получаем...



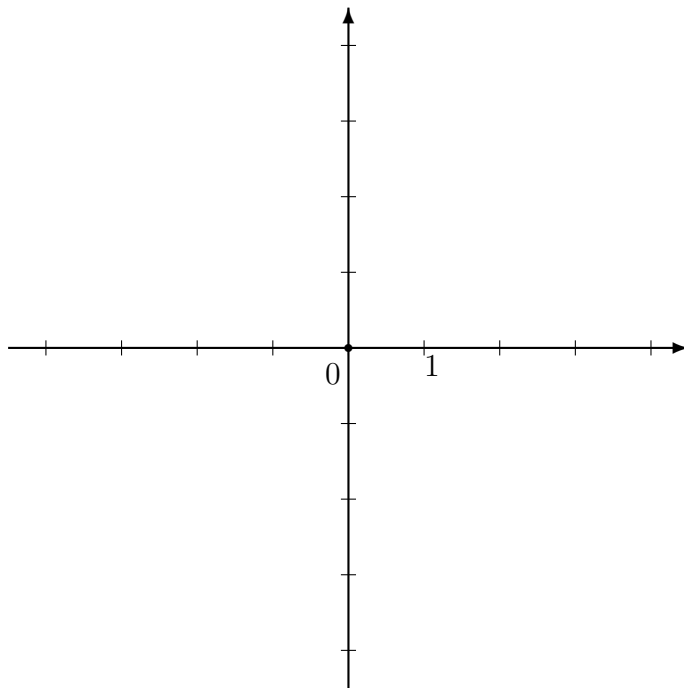
Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{е)} \quad & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\ & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = \end{aligned}$$

Используя **треугольник Паскаля** или **формулу бинома Ньютона**, получаем...

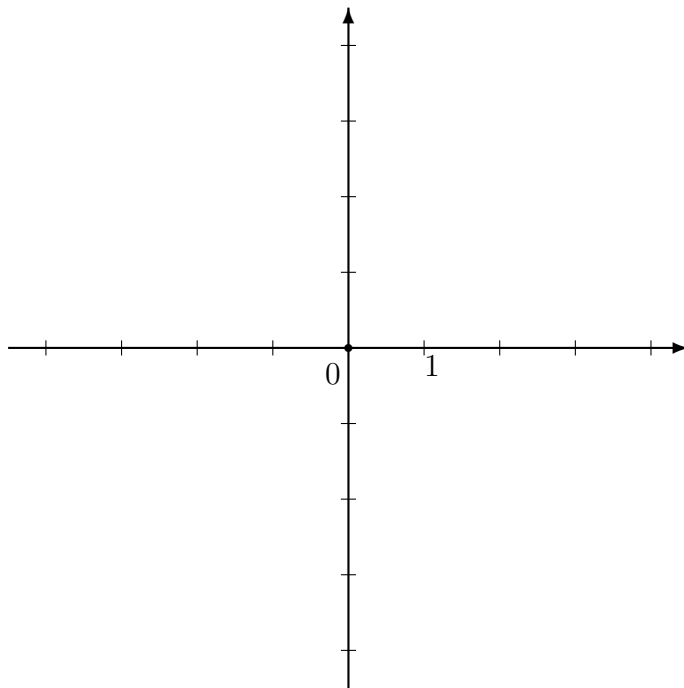


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{е)} \quad & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\ & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

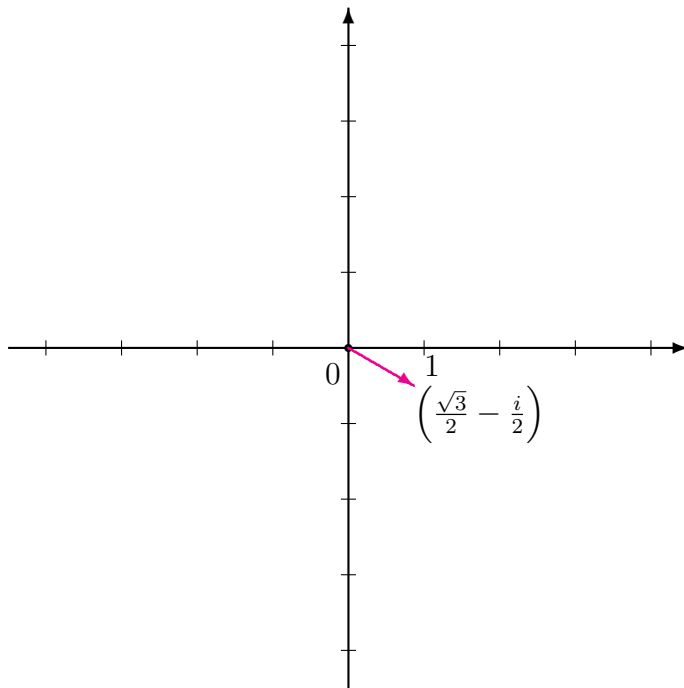


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{е)} \quad & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\ & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \\ & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \end{aligned}$$

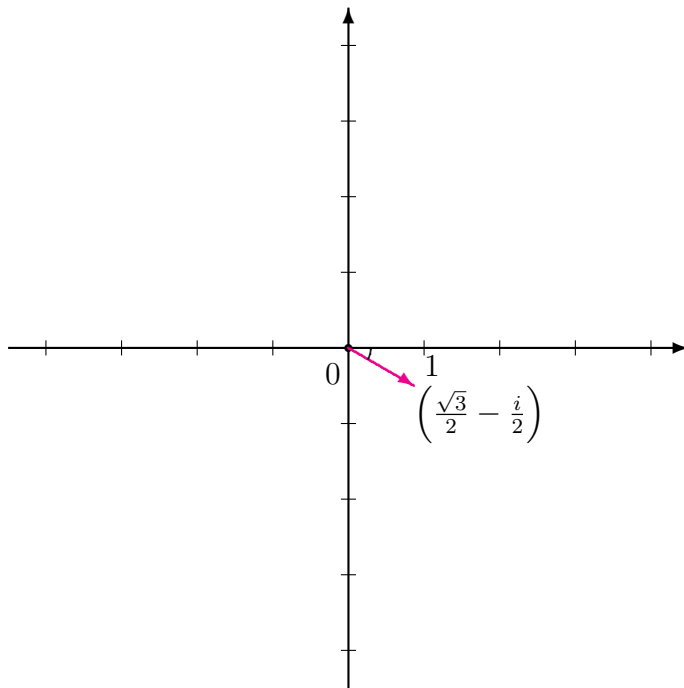


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{е)} \quad & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\ & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \\ & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \end{aligned}$$

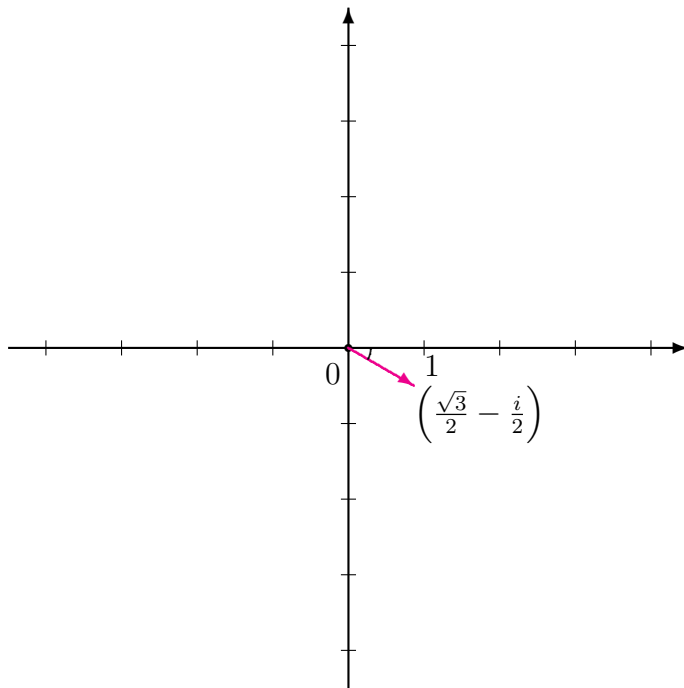


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

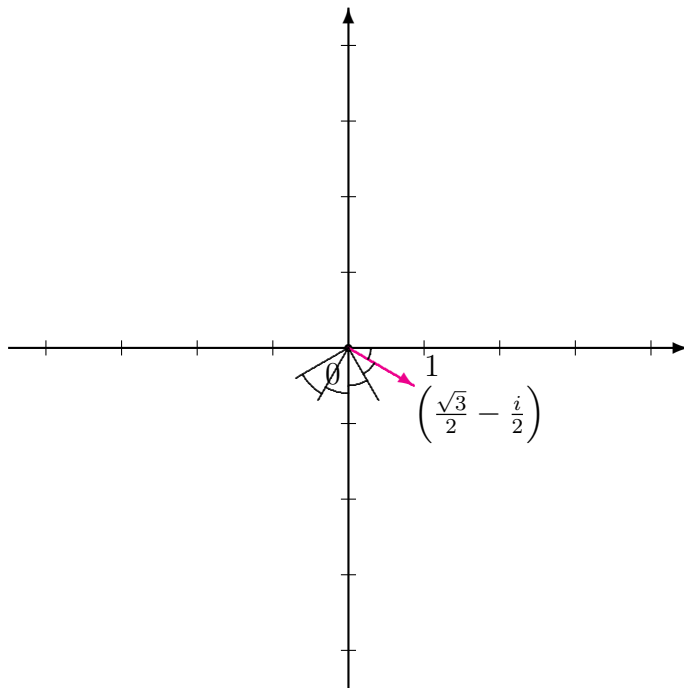
$$\begin{aligned} \text{е)} \quad & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\ & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \\ & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \left(e^{i(2k\pi - \pi/6)}\right)^5 = \end{aligned}$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
 Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

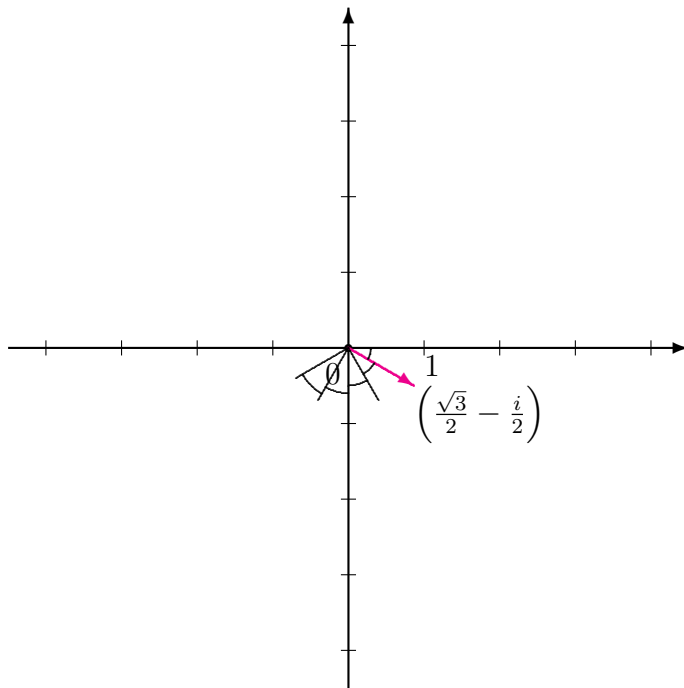
$$\begin{aligned}
 \text{е) } & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\
 & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\
 & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\
 & = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \\
 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \left(e^{i(2k\pi - \pi/6)}\right)^5 =
 \end{aligned}$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{е)} \quad & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\ & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \\ & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \left(e^{i(2k\pi - \pi/6)}\right)^5 = \\ & = e^{i(10k\pi - 5\pi/6)} = \end{aligned}$$

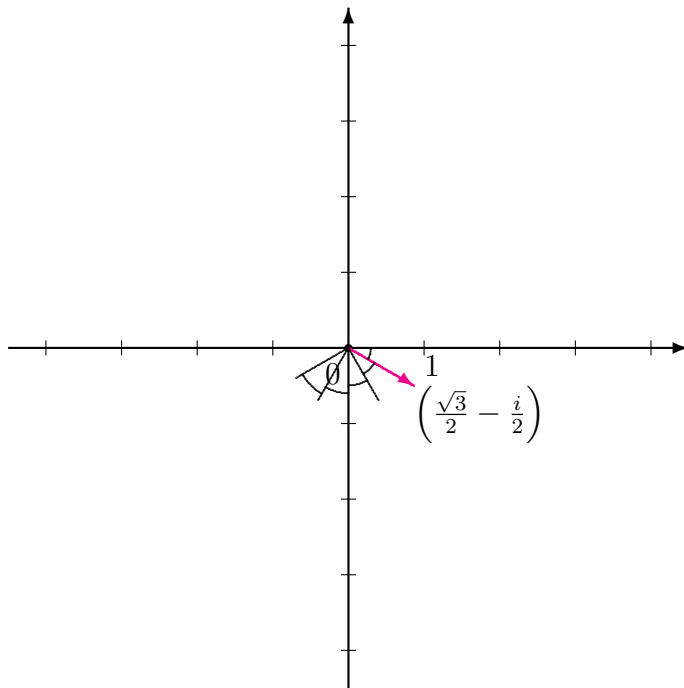


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned}
 \text{е)} \quad & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\
 & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\
 & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\
 & = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \\
 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \left(e^{i(2k\pi - \pi/6)}\right)^5 = \\
 & = e^{i(10k\pi - 5\pi/6)} = e^{-5i\pi/6} =
 \end{aligned}$$

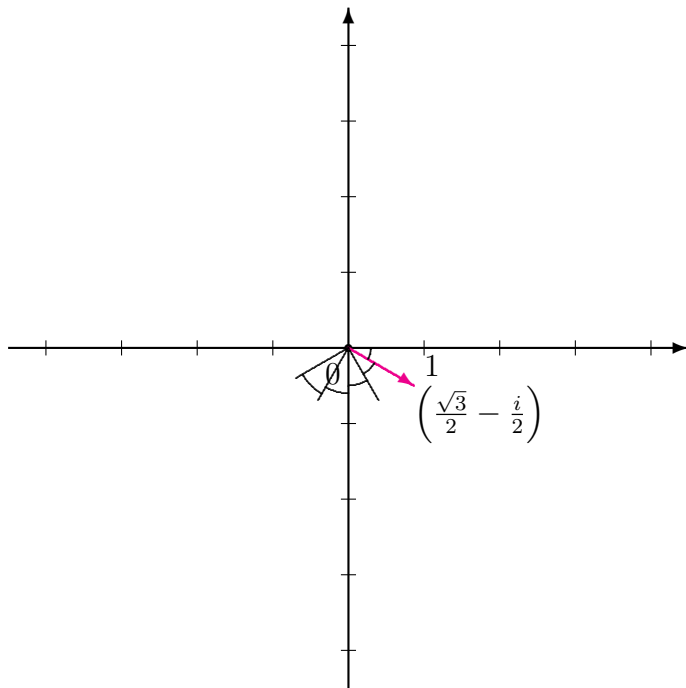


Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.

Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

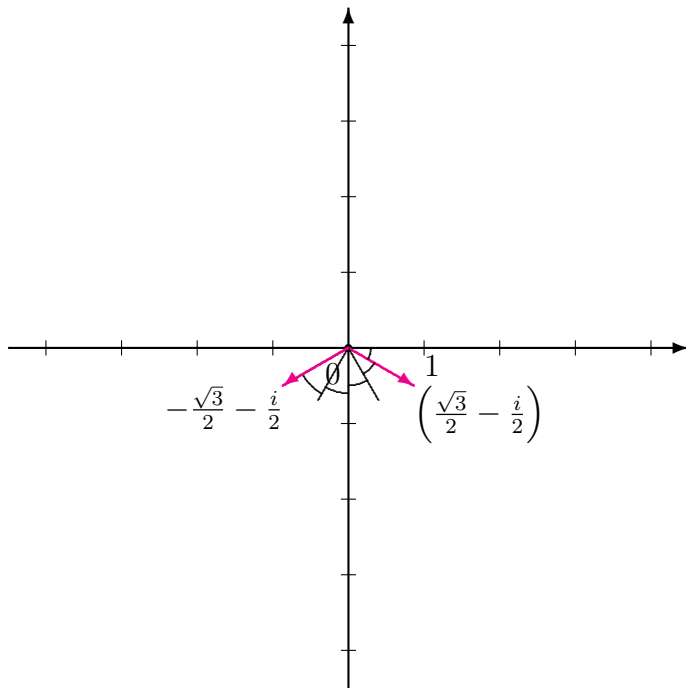
$$\begin{aligned}
 \text{е) } & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\
 & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\
 & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\
 & = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \\
 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \left(e^{i(2k\pi - \pi/6)}\right)^5 = \\
 & = e^{i(10k\pi - 5\pi/6)} = e^{-5i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$



Задача 5. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической и показательной формах: **а)** $(1 - i) \cdot 2i$; **б)** $(-1 - i)^3$; **в)** $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; **г)** $(1 + i)^4$; **д)** $\sqrt[4]{-1}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$.
Для каждого из этих случаев изобразите значения операндов и результат операции на комплексной плоскости.

Ответ.

$$\begin{aligned} \text{е)} \quad & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \frac{i}{2} + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \\ & \quad - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^4 + \left(\frac{i}{2}\right)^5 = \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \\ & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = \left(e^{i(2k\pi - \pi/6)}\right)^5 = \\ & = e^{i(10k\pi - 5\pi/6)} = e^{-5i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Решение задачи 6.

Задача 6. Найти $\sqrt{3-4i}$ в **алгебраической** **форме**.

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ.

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Естественный путь состоит в том, чтобы представить выражение под знаком корня в тригонометрической форме, тогда корень найдём так же, как в **примере 7**.

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Естественный путь состоит в том, чтобы представить выражение под знаком корня в тригонометрической форме, тогда корень найдём так же, как в **примере 7**.

Но сейчас мы найдём корень в алгебраической форме «по-честному».

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти?

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ?

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные.

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно, вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = \\ -4 = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = \\ b = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = \\ b = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \end{array} \right.$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \\ a^2 = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 = (3 + \sqrt{3^2 + 16}) / 2, \\ a^2 = \end{array} \right.$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = (3 + \sqrt{3^2 + 16}) / 2, \\ a^2 = (3 - \sqrt{3^2 + 16}) / 4. \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = (3 + \sqrt{3^2 + 16}) / 2, \\ a^2 = (3 - \sqrt{3^2 + 16}) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = \\ b = \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = (3 + \sqrt{3^2 + 16}) / 2, \\ a^2 = (3 - \sqrt{3^2 + 16}) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = 2, \\ b = \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = (3 + \sqrt{3^2 + 16}) / 2, \\ a^2 = (3 - \sqrt{3^2 + 16}) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = 2, \\ b = -1, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = (3 + \sqrt{3^2 + 16}) / 2, \\ a^2 = (3 - \sqrt{3^2 + 16}) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = 2, \\ b = -1, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -2, \\ b = 1. \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = (3 + \sqrt{3^2 + 16}) / 2, \\ a^2 = (3 - \sqrt{3^2 + 16}) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = 2, \\ b = -1, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -2, \\ b = 1, \end{cases}$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = (3 + \sqrt{3^2 + 16}) / 2, \\ a^2 = (3 - \sqrt{3^2 + 16}) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = 2, \\ b = -1, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -2, \\ b = 1, \end{cases}$$

$$\text{т.е. } \sqrt{3 - 4i} =$$

Задача 6. Найти $\sqrt{3 - 4i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3 = a^2 - b^2, \\ -4 = 2ab, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 3 = a^2 - b^2, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2}, \\ b = \frac{-2}{a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} a^4 - 3a^2 - 4 = 0, \\ b = \frac{-2}{a}. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 = (3 + \sqrt{3^2 + 16}) / 2, \\ a^2 = (3 - \sqrt{3^2 + 16}) / 4. \end{array} \right.$$

$$\text{Итак, либо } \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ b = -1, \end{array} \right. \quad \text{либо } \left[\begin{array}{l} a = -2, \\ b = 1, \end{array} \right.$$

$$\text{т.е. } \sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i).$$

Решение задачи 7.

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ.

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Естественный путь состоит в том, чтобы представить выражение под знаком корня в тригонометрической форме, тогда корень найдём так же, как в **примере 7**.

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Естественный путь состоит в том, чтобы представить выражение под знаком корня в тригонометрической форме, тогда корень найдём так же, как в **примере 7**.
Но сейчас мы найдём корень в алгебраической форме «по-честному».

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти?

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ?

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные.

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами?

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно, вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = \\ \beta = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \\ b = \end{cases},$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \\ b = \end{array} \right.$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \end{array} \right.$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 = \\ a^2 = \end{array} \right.$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

Итак, либо $\begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

либо $\begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в **алгебраической форме**.

Ответ. Применим **стратегию составления уравнений**.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? **алгебраической форме**.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2} \right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2} \right) / 4. \end{array} \right.$$

$$\text{Итак, либо} \quad \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \end{array} \right. \quad \text{либо} \quad \left[\begin{array}{l} a = \\ b = \end{array} \right.$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо} \quad \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо} \quad \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} a = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо} \quad \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} a = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}, \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}, \end{cases}$$

т.е., умножая знаменатели выражений для b на $\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}$, получаем

$$\text{либо } \begin{cases} a = \\ b = \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}, \end{cases}$$

т.е., умножая знаменатели выражений для b на $\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}$, получаем

$$\text{либо } \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}, \end{cases}$$

т.е., умножая знаменатели выражений для b на $\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}$, получаем

$$\text{либо } \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}, \end{cases}$$

т.е., умножая знаменатели выражений для b на $\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}$, получаем

$$\text{либо } \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \end{cases}$$

Задача 7. Найти $\sqrt{\alpha + \beta i}$ в алгебраической форме.

Ответ. Применим стратегию составления уравнений.

Что надо найти? Комплексное число.

В каком виде представим ответ? алгебраической форме.

Сведём к числовым параметрам и введём переменные. Пусть искомый корень равен $a + bi$.

Составим уравнение. Значение какой величины вычислим двумя способами? Естественно,

вещественную и мнимую части квадрата искомого числа $a + bi$:

$$(a + bi)^2 = \alpha + \beta i, \quad \text{т.е.} \quad a^2 - b^2 + 2abi = \alpha + \beta i.$$

$$\begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ \beta = 2ab, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - b^2, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a^2 - \frac{\beta^2}{4a^2}, \\ b = \frac{\beta}{2a}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^4 - 4\alpha a^2 - \beta^2 = 0, \\ b = \frac{\beta}{2a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4, \\ a^2 = \left(2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}\right) / 4. \end{cases}$$

$$\text{Итак, либо } \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}, \end{cases}$$

т.е., умножая знаменатели выражений для b на $\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}$, получаем

$$\text{либо } \begin{cases} a = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha} / \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} / \sqrt{2}, \\ b = -\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha} / \sqrt{2}. \end{cases}$$

Решение задачи 8.

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2 - i)x + (1 + 2i)y = 12 + 4i, \\ (-1 + i)x + (3 - 2i)y = 2 - 11i. \end{cases}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2 - i)x + (1 + 2i)y = 12 + 4i, \\ (-1 + i)x + (3 - 2i)y = 2 - 11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2-i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & 1+2i & | & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & | & 2-11i \end{pmatrix} =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2-i}{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & 1+2i & \big| & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & \big| & 2-11i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+2i}{2-i} & \big| & \frac{12+4i}{2-i} \\ -1+i & 3-2i & \big| & 2-11i \end{pmatrix}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-i & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+2i}{2-i} & \frac{12+4i}{2-i} \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-i & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5i}{5} & \frac{20+20i}{5} \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{pmatrix}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+2i}{2-i} & \frac{12+4i}{2-i} \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5i}{5} & \frac{20+20i}{5} \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{pmatrix}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-i & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1+i & 3-2i \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{pmatrix}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 2-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 1-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) \end{aligned}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-i & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1+i & 3-2i \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 4+4i \\ 2-11i \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 4-i \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 4+4i \\ 10-11i \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4-i} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4-i \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 2-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 1-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right)$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 2-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 1-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса закончен.

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 2-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 1-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Проведем обратный ход:

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 2-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 1-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Проведем обратный ход:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right)$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 2-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 1-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Проведем обратный ход:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right) =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 2-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 1-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Проведем обратный ход:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 2+i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right).$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 2-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 1-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Проведем обратный ход:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 2+i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right).$$

Следовательно, $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Сначала применим **метод Гаусса**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12+4i \\ 2-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 1+2i & 12+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 1-i & 1 & 2-11i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ -1+i & 3-2i & 2-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+4i \\ 0 & \frac{1}{4-i} & \frac{(10-11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 4-i & 10-11i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Проведем обратный ход:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 2+i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 4+4i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 3-2i \end{array} \right).$$

Следовательно,
$$\begin{cases} x = 2+i, \\ y = 3-2i. \end{cases}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2 - i)x + (1 + 2i)y = 12 + 4i, \\ (-1 + i)x + (3 - 2i)y = 2 - 11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} = (44-12i) - (24-7i) =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} = (44-12i) - (24-7i) = 20-5i,$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} = (44-12i) - (24-7i) = 20-5i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2-i & 12+4i \\ -1+i & 2-11i \end{vmatrix} =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} = (44-12i) - (24-7i) = 20-5i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2-i & 12+4i \\ -1+i & 2-11i \end{vmatrix} = (-7-24i) - (-16+8i) =$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} = (44-12i) - (24-7i) = 20-5i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2-i & 12+4i \\ -1+i & 2-11i \end{vmatrix} = (-7-24i) - (-16+8i) = 9-32i.$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} = (44-12i) - (24-7i) = 20-5i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2-i & 12+4i \\ -1+i & 2-11i \end{vmatrix} = (-7-24i) - (-16+8i) = 9-32i.$$

Следовательно, по **формулам Крамера** $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} = (44-12i) - (24-7i) = 20-5i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2-i & 12+4i \\ -1+i & 2-11i \end{vmatrix} = (-7-24i) - (-16+8i) = 9-32i.$$

Следовательно, по **формулам Крамера**
$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \end{cases}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} = (44-12i) - (24-7i) = 20-5i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2-i & 12+4i \\ -1+i & 2-11i \end{vmatrix} = (-7-24i) - (-16+8i) = 9-32i.$$

Следовательно, по **формулам Крамера**
$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20-5i}{7-6i} = \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{9-32i}{7-6i} = \end{cases}$$

Задача 8. Решите **методом Гаусса** и с помощью **формул Крамера** систему уравнений

$$\begin{cases} (2-i)x + (1+2i)y = 12+4i, \\ (-1+i)x + (3-2i)y = 2-11i. \end{cases}$$

Ответ. Теперь решим с помощью **формул Крамера**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 1+2i \\ -1+i & 3-2i \end{vmatrix} = (4-7i) - (-3-i) = 7-6i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12+4i & 1+2i \\ 2-11i & 3-2i \end{vmatrix} = (44-12i) - (24-7i) = 20-5i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2-i & 12+4i \\ -1+i & 2-11i \end{vmatrix} = (-7-24i) - (-16+8i) = 9-32i.$$

Следовательно, по **формулам Крамера**
$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20-5i}{7-6i} = 2+i, \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{9-32i}{7-6i} = 3-2i, \end{cases}$$

что совпадает с **результатами расчетов методом Гаусса**.

Решение задачи 9.

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20 - 12i}{8 + 2i} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20 - 12i}{8 + 2i} = \frac{(20 - 12i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20 - 12i}{8 + 2i} = \frac{(20 - 12i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{136 - 136i}{68} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20 - 12i}{8 + 2i} = \frac{(20 - 12i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{136 - 136i}{68} = 2 - 2i,$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20 - 12i}{8 + 2i} = \frac{(20 - 12i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{136 - 136i}{68} = 2 - 2i,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20 - 12i}{8 + 2i} = \frac{(20 - 12i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{136 - 136i}{68} = 2 - 2i,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2 + 8i}{8 + 2i} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20 - 12i}{8 + 2i} = \frac{(20 - 12i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{136 - 136i}{68} = 2 - 2i,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2 + 8i}{8 + 2i} = \frac{(-2 + 8i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20 - 12i}{8 + 2i} = \frac{(20 - 12i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{136 - 136i}{68} = 2 - 2i,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2 + 8i}{8 + 2i} = \frac{(-2 + 8i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{68i}{68} =$$

Задача 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2 - 3i)x + (1 - 2i)y = -9i, \\ 3ix + (1 + 4i)y = 2 + 7i. \end{cases}$

Ответ. Используем **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - 3i & 1 - 2i \\ 3i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 8 + 2i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & 1 + 4i \end{vmatrix} = 20 - 12i,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - 3i & -9i \\ 3i & 2 + 7i \end{vmatrix} = -2 + 8i,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20 - 12i}{8 + 2i} = \frac{(20 - 12i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{136 - 136i}{68} = 2 - 2i,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2 + 8i}{8 + 2i} = \frac{(-2 + 8i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{68i}{68} = i.$$

Решение задачи 10.

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1 - i)x + (1 + 3i)y = 8 - 2i, \\ (2 - 3i)x + (2 + i)y = 5 - 11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} =$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x =$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} =$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20,$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_y =$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1-i & 8-2i \\ 2-3i & 5-11i \end{vmatrix} =$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1-i & 8-2i \\ 2-3i & 5-11i \end{vmatrix} = 1-2i,$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1-i & 8-2i \\ 2-3i & 5-11i \end{vmatrix} = 1-2i,$$

$x =$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1-i & 8-2i \\ 2-3i & 5-11i \end{vmatrix} = 1-2i,$$

$$x = \frac{-20}{-8-4i} =$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1-i & 8-2i \\ 2-3i & 5-11i \end{vmatrix} = 1-2i,$$

$$x = \frac{-20}{-8-4i} = 2-i,$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1-i & 8-2i \\ 2-3i & 5-11i \end{vmatrix} = 1-2i,$$

$$x = \frac{-20}{-8-4i} = 2-i, \quad y =$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1-i & 8-2i \\ 2-3i & 5-11i \end{vmatrix} = 1-2i,$$

$$x = \frac{-20}{-8-4i} = 2-i, \quad y = \frac{-16+12i}{-8-4i} =$$

Задача 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} (1-i)x + (1+3i)y = 8-2i, \\ (2-3i)x + (2+i)y = 5-11i. \end{cases}$

Ответ. Применим **формулы Крамера**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+3i \\ 2-3i & 2+i \end{vmatrix} = -8-4i,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8-2i & 1+3i \\ 5-11i & 2+i \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1-i & 8-2i \\ 2-3i & 5-11i \end{vmatrix} = 1-2i,$$

$$x = \frac{-20}{-8-4i} = 2-i, \quad y = \frac{-16+12i}{-8-4i} = 1-2i.$$

Решение задачи 11.

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ.

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{\quad}}{2} =$$

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 36}}{2} =$$

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25-4 \cdot 9}}{2} =$$

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} =$$

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} =$$

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} =$$

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{2}.$$

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{2}.$$

Значит,

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{2}.$$

Значит, $\left[\begin{array}{l} x = \\ x = \end{array} \right.$

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{2}.$$

Значит,
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{5 + i\sqrt{11}}{2}, \\ x = \end{array} \right.$$

Задача 11. Решить уравнение $x^2 - 5x + 9 = 0$.

Ответ. Попробуем «по-честному»:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{2}.$$

Значит,
$$\begin{cases} x = \frac{5 + i\sqrt{11}}{2}, \\ x = \frac{5 - i\sqrt{11}}{2}. \end{cases}$$

Решение задачи 12.

Задача 12. Выразить $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Задача 12. Выразить $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. Рассмотрим комплексное число $\cos 4x + i \sin 4x$. Согласно **формулам Муавра**, используя формулу «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»

Задача 12. Выразить $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. Рассмотрим комплексное число $\cos 4x + i \sin 4x$. Согласно **формулам Муавра**, используя формулу «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»

$$\cos 4x + i \sin 4x = (\cos x + i \sin x)^4 =$$

Задача 12. Выразить $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. Рассмотрим комплексное число $\cos 4x + i \sin 4x$. Согласно **формулам Муавра**, используя формулу «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»

$$\begin{aligned}\cos 4x + i \sin 4x &= (\cos x + i \sin x)^4 = \\ &= \cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x + 6i^2 \cos^2 x \sin^2 x + 4i^3 \cos x \sin^3 x + i^4 \sin^4 x =\end{aligned}$$

Задача 12. Выразить $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. Рассмотрим комплексное число $\cos 4x + i \sin 4x$. Согласно **формулам Муавра**, используя формулу «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»

$$\begin{aligned}\cos 4x + i \sin 4x &= (\cos x + i \sin x)^4 = \\&= \cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x + 6i^2 \cos^2 x \sin^2 x + 4i^3 \cos x \sin^3 x + i^4 \sin^4 x = \\&= \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + i (4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x),\end{aligned}$$

Задача 12. Выразить $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. Рассмотрим комплексное число $\cos 4x + i \sin 4x$. Согласно **формулам Муавра**, используя формулу «**бинома Ньютона**» или «**треугольник Паскаля**»

$$\begin{aligned}\cos 4x + i \sin 4x &= (\cos x + i \sin x)^4 = \\&= \cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x + 6i^2 \cos^2 x \sin^2 x + 4i^3 \cos x \sin^3 x + i^4 \sin^4 x = \\&= \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + i (4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x), \\ \text{откуда } \sin 4x &= 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x.\end{aligned}$$

Задача 12. Выразить $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. Получили, что $\sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$.

Решение задачи 13.

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$

$=$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$

$=$

$$\begin{matrix} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ & & & & \end{matrix}$$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$

$=$

$$\begin{matrix} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{matrix}$$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$

$=$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$

$=$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1
 \end{array}$$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$

$=$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & 1 & \\
 & & & & 2 & & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$

$=$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 1 & 1 & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$

$=$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\ 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & \end{array}$$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$
 $= \cos^7 x - 21 \cos^5 x \sin^2 x + 35 \cos^3 x \sin^4 x - 7 \cos x \sin^6 x + i(\dots).$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 1 \\
 1 & & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
 \end{array}$$

Задача 13. Выразить $\cos 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ. $\cos 7x + i \sin 7x = (\cos x + i \sin x)^7 =$
 $= \cos^7 x - 21 \cos^5 x \sin^2 x + 35 \cos^3 x \sin^4 x - 7 \cos x \sin^6 x + i (\dots).$
Значит, $\cos 7x = \cos^7 x - 21 \cos^5 x \sin^2 x + 35 \cos^3 x \sin^4 x - 7 \cos x \sin^6 x.$

Решение задачи 14.

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) =$

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) =$

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) =$

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) =$

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;
8) $(i + j + k)^3 =$

Задача 14. Вычислите, используя **определение операций алгебры кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;
8) $(i + j + k)^3 = -3i - 3j - 3k$.

Решение задачи 15.

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} =$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{(2 + i) \cdot (3 + j)}{3^2 + (-1)^2} =$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{(2 + i) \cdot (3 + j)}{3^2 + (-1)^2} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} =$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;
2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{(i + 2j - k) \cdot (i + j)}{1^2 + 1^2} =$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;
2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{(i + 2j - k) \cdot (i + j)}{1^2 + 1^2} = \frac{-1 + i + j + 3k}{2}$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{-1 + i + j + 3k}{2}$;

3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1} =$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;
2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{-1 + i + j + 3k}{2}$;
3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1} = \frac{(3 - i + 2j - k) \cdot (2 - i + k)}{2^2 + 1^2 + (-1)^2} =$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ.

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{-1 + i + j + 3k}{2}$;

3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1} = \frac{(3 - i + 2j - k) \cdot (2 - i + k)}{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{6 - 3i + 6j + 3k}{6}$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;
2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{-1 + i + j + 3k}{2}$;
3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1} = \frac{6 - 3i + 6j + 3k}{6}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1} =$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
 4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ.

$$1) (2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10};$$

$$2) (i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{-1 + i + j + 3k}{2};$$

$$3) (3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1} = \frac{6 - 3i + 6j + 3k}{6};$$

$$4) (1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1} = \frac{(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)}{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} =$$

Задача 15. Вычислите, используя **определение операции деления в алгебре кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;
4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ.

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$;

2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2}$;

3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} = \frac{6-3i+6j+3k}{6}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1} = \frac{(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)}{2^2+(-1)^2+(-1)^2+3^2} = \frac{-7+9i-j-7k}{15}$.

Решение задачи 16.

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) =$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление квантернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) =$
 $= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & i \\ i & 2 + i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & i \\ i & 2 + i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 3 - 4i & -1 + 3i \\ 1 + 3i & 3 + 4i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) =$
 $= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & i \\ i & 2 + i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 3 - 4i & -1 + 3i \\ 1 + 3i & 3 + 4i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 3 - 4i - j + 3k;$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & i \\ i & 2 + i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 3 - 4i & -1 + 3i \\ 1 + 3i & 3 + 4i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 3 - 4i - j + 3k;$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление квантионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & i \\ i & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} -3 - 6i & -3 + 6i \\ 3 + 6i & -3 + 6i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & i \\ i & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} -3 - 6i & -3 + 6i \\ 3 + 6i & -3 + 6i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = -3 - 6i - 3j + 6k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k =$
 $= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & i \\ i & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} -3 - 6i & -3 + 6i \\ 3 + 6i & -3 + 6i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = -3 - 6i - 3j + 6k$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление квантионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & -1 + 3i \\ 1 + 3i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 - i \\ 1 - i & -2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & -1 + 3i \\ 1 + 3i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 - i \\ 1 - i & -2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 4i & 7 + i \\ -7 + i & -4i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & -1 + 3i \\ 1 + 3i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 - i \\ 1 - i & -2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 4i & 7 + i \\ -7 + i & -4i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 4i + 7j + k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & -1 + 3i \\ 1 + 3i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 - i \\ 1 - i & -2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 4i & 7 + i \\ -7 + i & -4i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 4i + 7j + k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & -1 - i \\ 1 - i & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 3 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & -1 - i \\ 1 - i & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 3 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 4 - 12i & -i \\ -i & 4 + 12i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & -1 - i \\ 1 - i & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 3 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 4 - 12i & -i \\ -i & 4 + 12i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 4 - 12i - k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & -1 - i \\ 1 - i & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 3 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 4 - 12i & -i \\ -i & 4 + 12i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 4 - 12i - k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) =$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 1 + i + j + k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$

$$= \left(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 1 + i + j + k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) =$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 5$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 5$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) =$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление** **ква-**
тернионов 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & 0 \\ 0 & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление** **ква-**
тернионов 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
 6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
 7) $(2 - i)(2 + j) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & 0 \\ 0 & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 4 - 2i & 2 - i \\ -2 - i & 4 + 2i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & 0 \\ 0 & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 4 - 2i & 2 - i \\ -2 - i & 4 + 2i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 4 - 2i + 2j - k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - i & 0 \\ 0 & 2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 4 - 2i & 2 - i \\ -2 - i & 4 + 2i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 4 - 2i + 2j - k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;
8) $(i + j + k)^3 =$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
 6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
 7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;
 8) $(i + j + k)^3 =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^2 \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;

8) $(i + j + k)^3 =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;

8) $(i + j + k)^3 =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3i & -3-3i \\ 3-3i & 3i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;

8) $(i + j + k)^3 =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3i & -3-3i \\ 3-3i & 3i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = -3i - 3j - 3k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;

8) $(i + j + k)^3 = -3i - 3j - 3k =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3i & -3-3i \\ 3-3i & 3i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = -3i - 3j - 3k$$

Задача 16. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;
8) $(i + j + k)^3 = -3i - 3j - 3k$.

Сравнить с результатами непосредственного вычисления?

Решение задачи 17.

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;

4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} =$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$
$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6+3i & 2+i \\ -2+i & 6-3i \end{pmatrix} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} =$

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6+3i & 2+i \\ -2+i & 6-3i \end{pmatrix} = \frac{6+3i+2j+k}{10} \end{aligned}$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10} =$

$$= \left(\left(\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\left(\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6+3i & 2+i \\ -2+i & 6-3i \end{pmatrix} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

- 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;
4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;

4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} =$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;

4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & 2 - i \\ -2 - i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$;

2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$;

2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+i & 1+3i \\ -1+3i & -1-i \end{pmatrix} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$;

2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} =$

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+i & 1+3i \\ -1+3i & -1-i \end{pmatrix} = \frac{-1+i+j+3k}{2} \end{aligned}$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

$$1) (2+i) \cdot (3-j)^{-1}; \quad 2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}; \quad 3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}.$$

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10};$

$$2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+i & 1+3i \\ -1+3i & -1-i \end{pmatrix} = \frac{-1+i+j+3k}{2}$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$;

2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2}$;

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$;

2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2}$;

3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} =$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$;

2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2}$;

3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 3-i & 2-i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & -i \\ -i & 2-i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$;

2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2}$;

3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 3-i & 2-i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & -i \\ -i & 2-i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} 3-i & 2-i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2-i & i \\ i & 2+i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

$$1) (2+i) \cdot (3-j)^{-1}; \quad 2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}; \quad 3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}.$$

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10};$

$$2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2};$$

$$3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 3-i & 2-i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & -i \\ -i & 2-i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} 3-i & 2-i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2-i & i \\ i & 2+i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6-3i & 6+3i \\ -6+3i & 6+3i \end{pmatrix} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

$$1) (2+i) \cdot (3-j)^{-1}; \quad 2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}; \quad 3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}.$$

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10};$

$$2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2};$$

$$3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 3-i & 2-i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & -i \\ -i & 2-i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\begin{pmatrix} 3-i & 2-i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2-i & i \\ i & 2+i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6-3i & 6+3i \\ -6+3i & 6+3i \end{pmatrix} = \frac{6-3i+6j+3k}{6}$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

$$1) (2+i) \cdot (3-j)^{-1}; \quad 2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}; \quad 3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}.$$

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10};$

$$2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2};$$

$$3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} = \frac{6-3i+6j+3k}{6} =$$

$$= \left(\left(\begin{pmatrix} 3-i & 2-i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & -i \\ -i & 2-i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} = \left(\left(\begin{pmatrix} 3-i & 2-i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2-i & i \\ i & 2+i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6-3i & 6+3i \\ -6+3i & 6+3i \end{pmatrix} = \frac{6-3i+6j+3k}{6}$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;

4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{-1 + i + j + 3k}{2}$;

3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1} = \frac{6 - 3i + 6j + 3k}{6}$;

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;

4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{-1 + i + j + 3k}{2}$;

3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1} = \frac{6 - 3i + 6j + 3k}{6}$;

4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1} =$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1}$; 2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}$; 3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10}$;

2) $(i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2}$;

3) $(3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} = \frac{6-3i+6j+3k}{6}$;

4) $(1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1} =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1+i & -1-3i \\ 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -1+3i \\ 1+3i & 2+i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

$$1) (2+i) \cdot (3-j)^{-1}; \quad 2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}; \quad 3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}.$$

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10};$

$$2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2};$$

$$3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} = \frac{6-3i+6j+3k}{6};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1+i & -1-3i \\ 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -1+3i \\ 1+3i & 2+i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1+i & -1-3i \\ 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2+i & 1-3i \\ -1-3i & 2-i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

$$1) (2+i) \cdot (3-j)^{-1}; \quad 2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}; \quad 3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}.$$

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10};$

$$2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2};$$

$$3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} = \frac{6-3i+6j+3k}{6};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1+i & -1-3i \\ 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -1+3i \\ 1+3i & 2+i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1+i & -1-3i \\ 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2+i & 1-3i \\ -1-3i & 2-i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -7+9i & -1-7i \\ 1-7i & -7-9i \end{pmatrix} =$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

$$1) (2+i) \cdot (3-j)^{-1}; \quad 2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}; \quad 3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}.$$

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10};$

$$2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2};$$

$$3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} = \frac{6-3i+6j+3k}{6};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1+i & -1-3i \\ 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -1+3i \\ 1+3i & 2+i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1+i & -1-3i \\ 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2+i & 1-3i \\ -1-3i & 2-i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -7+9i & -1-7i \\ 1-7i & -7-9i \end{pmatrix} = \frac{-7+9i-j-7k}{15}$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

$$1) (2+i) \cdot (3-j)^{-1}; \quad 2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1}; \quad 3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1}.$$

Ответ. 1) $(2+i) \cdot (3-j)^{-1} = \frac{6+3i+2j+k}{10};$

$$2) (i+2j-k) \cdot (i-j)^{-1} = \frac{-1+i+j+3k}{2};$$

$$3) (3-i+2j-k) \cdot (2+i-k)^{-1} = \frac{6-3i+6j+3k}{6};$$

$$4) (1+i-j-3k) \cdot (2-i-j+3k)^{-1} = \frac{-7+9i-j-7k}{15} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1+i & -1-3i \\ 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -1+3i \\ 1+3i & 2+i \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1+i & -1-3i \\ 1-3i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2+i & 1-3i \\ -1-3i & 2-i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -7+9i & -1-7i \\ 1-7i & -7-9i \end{pmatrix} = \frac{-7+9i-j-7k}{15}$$

Задача 17. Вычислите, используя **матричное представление кватернионов**

1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1}$; 2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1}$; 3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1}$;

4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1}$.

Ответ. 1) $(2 + i) \cdot (3 - j)^{-1} = \frac{6 + 3i + 2j + k}{10}$;

2) $(i + 2j - k) \cdot (i - j)^{-1} = \frac{-1 + i + j + 3k}{2}$;

3) $(3 - i + 2j - k) \cdot (2 + i - k)^{-1} = \frac{6 - 3i + 6j + 3k}{6}$;

4) $(1 + i - j - 3k) \cdot (2 - i - j + 3k)^{-1} = \frac{-7 + 9i - j - 7k}{15}$.

Сравнить с результатами непосредственного вычисления?

Решение задачи 18.

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) =$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$\begin{aligned}
 & 1) (2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = \\
 & = 2 + 1 + \left(-\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$\begin{aligned}
 & 1) (2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = \\
 & = 2 + 1 + \left(-\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = \\
 & = 3 + \left(-4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$\begin{aligned}
 & 1) (2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = \\
 & = 2 + 1 + \left(-\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = \\
 & = 3 + \left(-4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = 3 - 4i - j + 3k
 \end{aligned}$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$\begin{aligned}
 1) \quad & (2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = \textcolor{violet}{3} - \textcolor{violet}{4}i - \textcolor{violet}{j} + \textcolor{violet}{3}k = \\
 & = 2 + 1 + \left(-\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{k}} - 3\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}} \right)^{\psi^{-1}} = \\
 & = 3 + \left(-4\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}} \right)^{\psi^{-1}} = \textcolor{violet}{3} - \textcolor{violet}{4}i - \textcolor{violet}{j} + \textcolor{violet}{3}k
 \end{aligned}$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. Получили

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 - \left(-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) +$$

$$+ \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \left(-\vec{i} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 - \left(-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) +$$

$$+ \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \left(-\vec{i} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 - \left(-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \left(-\vec{i} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 2 - ((-1)(-3) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) + \left(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 - \left(-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \left(-\vec{i} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 2 - ((-1)(-3) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) + \left(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} = \\ = 2 - 5 + \left(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} + \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 - \left(-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \left(-\vec{i} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 2 - ((-1)(-3) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) + \left(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} = \\ = 2 - 5 + \left(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} + \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = \\ = -3 + \left(-6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 - \left(-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \left(-\vec{i} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 2 - ((-1)(-3) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) + \left(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} = \\ = 2 - 5 + \left(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} + \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = \\ = -3 + \left(-6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = -3 - 6i - 3j + 6k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 - \left(-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \left(-\vec{i} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 2 - ((-1)(-3) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) + \left(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} = \\ = 2 - 5 + \left(-7\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} + \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = \\ = -3 + \left(-6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = -3 - 6i - 3j + 6k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{\psi^{-1}} =$$

$$= 0 + \left(4\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{\psi^{-1}} =$$

$$= 0 + \left(4\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = 4i + 7j + k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{\psi^{-1}} =$$

$$= 0 + \left(4\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = 4i + 7j + k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 \cdot 3 - \left(-\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}, -3\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}} \right) +$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 \cdot 3 - \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) +$$

$$+ \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + 3 \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 \cdot 3 - \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) +$$

$$+ \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + 3 \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 \cdot 3 - \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + 3 \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 6 - ((-1)(-3) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2) + \left(-9\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 \cdot 3 - \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + 3 \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 6 - ((-1)(-3) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2) + \left(-9\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 6 - 2 + \left(-9\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 \cdot 3 - \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + 3 \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 6 - ((-1)(-3) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2) + \left(-9\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 6 - 2 + \left(-9\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 4 + \left(-12\vec{i} - \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 \cdot 3 - \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + 3 \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 6 - ((-1)(-3) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2) + \left(-9\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 6 - 2 + \left(-9\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 4 + \left(-12\vec{i} - \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = 4 - 12i - k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 2 \cdot 3 - \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \\ + \left(2 \left(-3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right) + 3 \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= 6 - ((-1)(-3) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2) + \left(-9\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 6 - 2 + \left(-9\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 4 + \left(-12\vec{i} - \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = 4 - 12i - k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) =$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= -(-1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= -(-1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{\psi^{-1}} =$$

$$= 1 + \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= -(-1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{\psi^{-1}} =$$

$$= 1 + \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = 1 + i + j + k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= - \left(-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right) + \left[-\vec{i} + \vec{j}, -\vec{j} + \vec{k} \right]^{\psi^{-1}} =$$

Согласно **формулам векторной алгебры**

$$= -(-1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{\psi^{-1}} =$$

$$= 1 + \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)^{\psi^{-1}} = 1 + i + j + k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) =$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
 6) $(2 - i)(2 + i) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 4 - \left(-\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{i}} \right) + \left(2\vec{\mathbf{i}} + 2\left(-\vec{\mathbf{i}} \right) + \left[-\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{i}} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
 6) $(2 - i)(2 + i) =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 4 - \left(-\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{i}} \right) + \left(2\vec{\mathbf{i}} + 2\left(-\vec{\mathbf{i}} \right) + \left[-\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{i}} \right] \right)^{\psi^{-1}} = 5$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
 6) $(2 - i)(2 + i) = 5 =$

В силу **геометрической интерпретации произведения кватернионов** получим

$$= 4 - \left(-\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{i}} \right) + \left(2\vec{\mathbf{i}} + 2\left(-\vec{\mathbf{i}} \right) + \left[-\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{i}} \right] \right)^{\psi^{-1}} = 5$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) =$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) =$

$$= 4 - \left(-\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}} \right) + \left(2\overrightarrow{\mathbf{j}} + 2 \left(-\overrightarrow{\mathbf{i}} \right) + \left[\overrightarrow{\mathbf{i}}, -\overrightarrow{\mathbf{j}} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) =$

$$= 4 - \left(-\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}} \right) + \left(2\vec{\mathbf{j}} + 2 \left(-\vec{\mathbf{i}} \right) + \left[\vec{\mathbf{i}}, -\vec{\mathbf{j}} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 4 + \left(-2\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}} \right)^{\psi^{-1}} =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) =$

$$= 4 - \left(-\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}} \right) + \left(2\vec{\mathbf{j}} + 2 \left(-\vec{\mathbf{i}} \right) + \left[\vec{\mathbf{i}}, -\vec{\mathbf{j}} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 4 + \left(-2\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}} \right)^{\psi^{-1}} = 4 - 2i + 2j - k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k =$

$$= 4 - \left(-\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}} \right) + \left(2\vec{\mathbf{j}} + 2 \left(-\vec{\mathbf{i}} \right) + \left[\vec{\mathbf{i}}, -\vec{\mathbf{j}} \right] \right)^{\psi^{-1}} =$$

$$= 4 + \left(-2\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}} \right)^{\psi^{-1}} = 4 - 2i + 2j - k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;
8) $(i + j + k)^3 =$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;

8) $(i + j + k)^3 =$

$$\left(- \left(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}} \right) + \left[\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}} \right] \right)^{\psi^{-1}} (i + j + k) =$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
 6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
 7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;
 8) $(i + j + k)^3 =$
 $\left(- \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right) + \left[\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} (i + j + k) =$
 $= (-3)(i + j + k) =$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;

2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;

3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;

4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;

5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;

6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;

7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;

8) $(i + j + k)^3 =$

$$\left(- \left(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}} \right) + \left[\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}} \right] \right)^{\psi^{-1}} (i + j + k) =$$

$$= (-3)(i + j + k) = -3i - 3j - 3k$$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
 6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
 3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
 5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
 6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
 7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;
 8) $(i + j + k)^3 = -3i - 3j - 3k =$
 $\left(- \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right) + \left[\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right] \right)^{\psi^{-1}} (i + j + k) =$
 $= (-3)(i + j + k) = -3i - 3j - 3k$

Задача 18. Вычислите, используя **геометрическую интерпретацию кватернионов**

1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k)$; 2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k)$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k)$; 4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k)$; 5) $(j - i)(k - j)$;
6) $(2 - i)(2 + i)$; 7) $(2 - i)(2 + j)$; 8) $(i + j + k)^3$.

Ответ. 1) $(2 - i + k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 4i - j + 3k$;
2) $(2 - i + k)(1 - 3i - j + 2k) = -3 - 6i - 3j + 6k$;
3) $(i - j + 3k)(2i - j - k) = 4i + 7j + k$;
4) $(2 - i - j - k)(3 - 3i - j + 2k) = 4 - 12i - k$;
5) $(j - i)(k - j) = 1 + i + j + k$;
6) $(2 - i)(2 + i) = 5$;
7) $(2 - i)(2 + j) = 4 - 2i + 2j - k$;
8) $(i + j + k)^3 = -3i - 3j - 3k$.

Решение задачи 19.

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим $(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$.

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим $(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$. Теперь обе части уравнения умножим

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим $(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$. Теперь обе части уравнения умножим *слева* на $(2 - i - j + 2k)^{-1}$:

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим

$(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$. Теперь обе части уравнения умножим *слева* на $(2 - i - j + 2k)^{-1}$:

$$x = (2 - i - j + 2k)^{-1}(-5 - 4i + 10j + 3k)$$

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим $(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$. Теперь обе части уравнения умножим *слева* на $(2 - i - j + 2k)^{-1}$:
 $x = (2 - i - j + 2k)^{-1}(-5 - 4i + 10j + 3k)$.

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим

$(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$. Теперь обе части уравнения умножим *слева* на $(2 - i - j + 2k)^{-1}$:

$x = (2 - i - j + 2k)^{-1}(-5 - 4i + 10j + 3k)$. Согласно **формуле для вычисления обратного кватерниона**

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим

$(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$. Теперь обе части уравнения умножим *слева* на $(2 - i - j + 2k)^{-1}$:

$x = (2 - i - j + 2k)^{-1}(-5 - 4i + 10j + 3k)$. Согласно **формуле для вычисления обратного кватерниона**

$$x = \frac{1}{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}(2 + i + j - 2k)(-5 - 4i + 10j + 3k).$$

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим

$(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$. Теперь обе части уравнения умножим *слева* на $(2 - i - j + 2k)^{-1}$:

$x = (2 - i - j + 2k)^{-1}(-5 - 4i + 10j + 3k)$. Согласно **формуле для вычисления обратного кватерниона**

$$x = \frac{1}{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}(2 + i + j - 2k)(-5 - 4i + 10j + 3k).$$
 Согласно **определению операций алгебры кватернионов** получаем

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим

$(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$. Теперь обе части уравнения умножим *слева* на $(2 - i - j + 2k)^{-1}$:

$x = (2 - i - j + 2k)^{-1}(-5 - 4i + 10j + 3k)$. Согласно **формуле для вычисления обратного кватерниона**

$$x = \frac{1}{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}(2 + i + j - 2k)(-5 - 4i + 10j + 3k)$$
. Согласно **определению операций алгебры кватернионов** получаем

$$x = \frac{1}{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}(-10 + 10i + 20j + 30k),$$

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. Вычтем из обеих частей равенства $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ кватернион $3 + 5i - 8j - 5k$, получим

$(2 - i - j + 2k)x = -5 - 4i + 10j + 3k$. Теперь обе части уравнения умножим *слева* на $(2 - i - j + 2k)^{-1}$:

$x = (2 - i - j + 2k)^{-1}(-5 - 4i + 10j + 3k)$. Согласно **формуле для вычисления обратного кватерниона**

$$x = \frac{1}{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}(2 + i + j - 2k)(-5 - 4i + 10j + 3k)$$
. Согласно **определению операций алгебры кватернионов** получаем

$$x = \frac{1}{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}(-10 + 10i + 20j + 30k),$$
$$x = -1 + i + 2j + 3k.$$

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. $x = -1 + i + 2j + 3k$.

Для второго уравнения получаем

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. $x = -1 + i + 2j + 3k$.

Для второго уравнения получаем

$$y(2 - i - j + 2k) = 2j - 2 - 2k + i - (3 + 5i - 8j - 5k),$$

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. $x = -1 + i + 2j + 3k$.

Для второго уравнения получаем

$$y(2 - i - j + 2k) = 2j - 2 - 2k + i - (3 + 5i - 8j - 5k),$$

$$y(2 - i - j + 2k) = -5 - 4i + 10j + 3k,$$

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. $x = -1 + i + 2j + 3k$.

Для второго уравнения получаем

$$y(2 - i - j + 2k) = 2j - 2 - 2k + i - (3 + 5i - 8j - 5k),$$

$$y(2 - i - j + 2k) = -5 - 4i + 10j + 3k,$$

$$y = (-5 - 4i + 10j + 3k)(2 - i - j + 2k)^{-1},$$

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. $x = -1 + i + 2j + 3k$.

Для второго уравнения получаем

$$y(2 - i - j + 2k) = 2j - 2 - 2k + i - (3 + 5i - 8j - 5k),$$

$$y(2 - i - j + 2k) = -5 - 4i + 10j + 3k,$$

$$y = (-5 - 4i + 10j + 3k)(2 - i - j + 2k)^{-1},$$

$$y = \frac{1}{10}(-5 - 4i + 10j + 3k)(2 + i + j - 2k),$$

Задача 19. Решите уравнения $(2 - i - j + 2k)x + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$ и $y(2 - i - j + 2k) + 3 + 5i - 8j - 5k = 2j - 2 - 2k + i$.

Ответ. $x = -1 + i + 2j + 3k$.

Для второго уравнения получаем

$$y(2 - i - j + 2k) = 2j - 2 - 2k + i - (3 + 5i - 8j - 5k),$$

$$y(2 - i - j + 2k) = -5 - 4i + 10j + 3k,$$

$$y = (-5 - 4i + 10j + 3k)(2 - i - j + 2k)^{-1},$$

$$y = \frac{1}{10}(-5 - 4i + 10j + 3k)(2 + i + j - 2k),$$

$$y = \frac{1}{10}(-10 - 36i + 10j + 2k).$$

Решение задачи 20.

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] =$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (i + 2j + k)(2i - k))^{\psi} =$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right] = \frac{1}{2} ((\mathbf{2i - k})(i + 2j + k) - (i + 2j + k)(2i - k))^\psi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = \frac{1}{2} ((\mathbf{2i} - \mathbf{k}) (i + 2j + k) - (i + 2j + k) (2i - k))^{\psi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 + 2i & 0 - i \\ -0 - i & 0 - 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = \frac{1}{2} ((2i - k)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - (i + 2j + k)(2i - k))^{\psi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (i + 2j + k)(2i - k))^{\psi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})(2i - k))^{\psi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right] = \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})(2i - k))^{\psi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (i + 2j + k)(2i - k))^{\psi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (i + 2j + k)(2i - k))^{\psi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\begin{aligned} \left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right] &= \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (i + 2j + k)(2i - k))^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} -1+2i & -3+4i \\ 3+4i & -1-2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1-2i & 3-4i \\ -3-4i & -1+2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \end{aligned}$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\begin{aligned} \left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] &= \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (i + 2j + k)(2i - k))^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} -1+2i & -3+4i \\ 3+4i & -1-2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1-2i & 3-4i \\ -3-4i & -1+2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 4i & -6+8i \\ 6+8i & -4i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \end{aligned}$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\begin{aligned} \left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] &= \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (i + 2j + k)(2i - k))^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} -1+2i & -3+4i \\ 3+4i & -1-2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1-2i & 3-4i \\ -3-4i & -1+2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 4i & -6+8i \\ 6+8i & -4i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \frac{1}{2} (4i - 6j + 8k)^{\psi} = \end{aligned}$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем

$$\begin{aligned} \left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] &= \frac{1}{2} ((2i - k)(i + 2j + k) - (i + 2j + k)(2i - k))^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+i & 2+i \\ -2+i & 0-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0+2i & 0-i \\ -0-i & 0-2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} -1+2i & -3+4i \\ 3+4i & -1-2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1-2i & 3-4i \\ -3-4i & -1+2i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 4i & -6+8i \\ 6+8i & -4i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi} = \frac{1}{2} (4i - 6j + 8k)^{\psi} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}. \end{aligned}$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| =$$

$$= \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right)}.$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} =$$

$$= \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right)}.$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29} =$$

$$= \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right)}.$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right)} =$$

$$= \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right).$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29} =$$

$$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(2\vec{i} - \vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{(2\vec{i} - \vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}} =$$

$$= \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{(2\vec{i} - \vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}.$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 - 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(2\vec{i} - \vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{(2\vec{i} - \vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}} =$$

$$= \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{(2\vec{i} - \vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}.$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29} = \sqrt{30} \sqrt{\frac{30-1}{30}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(2\vec{i} - \vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{(2\vec{i} - \vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}} =$$

$$= \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{(2\vec{i} - \vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}.$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right)}.$$

Наконец, **проверим**, что получилась **правая тройка векторов**:

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right)}.$$

Наконец, **проверим**, что получилась **правая тройка векторов**:

$$\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right) =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right)}.$$

Наконец, **проверим**, что получилась **правая тройка векторов**:

$$\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Проверим по **определению векторного произведения**:

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k} \right) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0,$$

$$\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$\left| 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right| = \left| 2\vec{i} - \vec{k} \right| \cdot \left| \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right| \cdot \sin \widehat{\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right)}.$$

Наконец, **проверим**, что получилась **правая тройка векторов**:

$$\left(2\vec{i} - \vec{k} \right) \left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right) \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 29 > 0.$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.
Осталось проверить результат с помощью **координатной формулы**:

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.
Осталось проверить результат с помощью **координатной формулы**:

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.
Осталось проверить результат с помощью **координатной формулы**:

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Задача 20. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right]$ с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат по **определению векторного произведения** и с помощью **координатной формулы**.

Ответ. По **формуле для вычисления скалярного и векторного произведения** имеем $\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right] = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Осталось проверить результат с помощью **координатной формулы**:

$$\left[2\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Все подтвердилось.

Решение задачи 21.

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}] =$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}] =$

$$= \left(\left((\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi - (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi (\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi =$$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}] =$

$$= \left(\left((\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi - (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi (\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi =$$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}] =$

$$= \left(\left((\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi - (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi (\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 1-3i & -6-2i \\ 6-2i & 1+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+3i & 6+2i \\ -6+2i & 1-3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi = \begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix}^\psi =$$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}] =$

$$= \left(\left((\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi - (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi (\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 1-3i & -6-2i \\ 6-2i & 1+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+3i & 6+2i \\ -6+2i & 1-3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi = \begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix}^\psi =$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

$$\begin{aligned}
 &\text{Ответ. } [\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}] = \\
 &= \left(\left((\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi - (2\vec{i} - \vec{j})^\varphi (\vec{j} - 3\vec{k})^\varphi \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} 1-3i & -6-2i \\ 6-2i & 1+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+3i & 6+2i \\ -6+2i & 1-3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^\psi = \begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix}^\psi = \\
 &= -3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}] = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k},$
 $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}] =$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}\right]$, $\left[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right]$, $\left[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}\right]$, $\left[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $\left[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}\right] = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k},$
 $\left[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right] = \vec{i} + \vec{j},$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}] = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k},$
 $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}] = \vec{i} + \vec{j},$
 $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}] =$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, $[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}]$, $[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ.

$$[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}] = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k},$$

$$[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}] = \vec{i} + \vec{j},$$

$$[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}] = -2\vec{j} - 6\vec{k},$$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}\right]$, $\left[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right]$, $\left[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}\right]$, $\left[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $\left[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}\right] = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k},$
 $\left[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right] = \vec{i} + \vec{j},$
 $\left[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}\right] = -2\vec{j} - 6\vec{k},$
 $\left[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right] =$

Задача 21. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $\left[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}\right]$, $\left[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right]$, $\left[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}\right]$, $\left[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right]$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ.

$$\left[\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}\right] = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\left[3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right] = \vec{i} + \vec{j},$$

$$\left[3\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i}\right] = -2\vec{j} - 6\vec{k},$$

$$\left[\vec{k}, \vec{i} - \vec{j}\right] = \vec{i} + \vec{j}.$$

Решение задачи 22.

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}), (\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}), \vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$
 $=$

$$([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]^{\psi^{-1}})^{\varphi} =$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}), (\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}), \vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$
 $=$

$$\left([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]^{\psi^{-1}}\right)^{\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}), (\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}), \vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$

$=$

$$\begin{aligned} & \left([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]^{\psi^{-1}} \right)^{\varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1-3i & -6-2i \\ 6-2i & 1+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+3i & 6+2i \\ -6+2i & 1-3i \end{pmatrix} \right) = \end{aligned}$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$

$=$

$$\begin{aligned} & \left([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]^{\psi^{-1}} \right)^{\varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1-3i & -6-2i \\ 6-2i & 1+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+3i & 6+2i \\ -6+2i & 1-3i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$
 $= \left(\left(\begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$

$$\begin{aligned} & \left([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}]^{\psi^{-1}} \right)^{\varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-3i \\ -1-3i & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1-3i & -6-2i \\ 6-2i & 1+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+3i & 6+2i \\ -6+2i & 1-3i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}), (\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}), \vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } & (\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = \\ & = \left(\left(\begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = \\ & = -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \end{aligned}$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

$$\begin{aligned}
 \text{Ответ. } & (\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = \\
 & = \left(\left(\begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = \\
 & = -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\
 & = -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -7-12i & -3+27i \\ 3+27i & -7+12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7+12i & 3-27i \\ -3-27i & -7-12i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

$$\begin{aligned}
 \text{Ответ. } & (\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = \\
 & = \left(\left(\begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = \\
 & = -\frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\
 & = -\frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} -7-12i & -3+27i \\ 3+27i & -7+12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7+12i & 3-27i \\ -3-27i & -7-12i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

$$\begin{aligned}
 \text{Ответ. } & (\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = ([\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}], 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = \\
 & = \left(\left(\begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = \\
 & = -\frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3i & -6-2i \\ 6-2i & 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \\
 & = -\frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} -7-12i & -3+27i \\ 3+27i & -7+12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7+12i & 3-27i \\ -3-27i & -7-12i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 7.
 \end{aligned}$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}), (\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}), \vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7,$
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}), (\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}), \vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7,$
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) =$
 $= \left(\left(\begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi}, 2\vec{i} \right) =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}), (\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}), \vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7,$
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) =$
 $= \left(\left(\begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi}, 2\vec{i} \right) =$
 $= -\frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) =$
 $= \left(\left(\begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi}, 2\vec{i} \right) =$
 $= -\frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$
 $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) =$
 $= \left(\left(\begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} \right)^{\psi}, 2\vec{i} \right) =$
 $= -\frac{1}{2} \left(\left(\begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+3i \\ -1+3i & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$
 $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 2.$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) = 2$.
 $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) = 2$.
 $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$
 $= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) = 2$.
 $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$
 $= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$
 $= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) = 2$.
 $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$
 $= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$
 $= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$
 $= \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

$$\begin{aligned}
 &\text{Ответ. } (\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7, \\
 &(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) = 2. \\
 &\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = \\
 &= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) = \\
 &= \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =
 \end{aligned}$$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) = 2$.
 $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$
 $= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$
 $= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$
 $= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & -1-6i \\ 1-6i & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 1+6i \\ -1+6i & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) = 2$.
 $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$
 $= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$
 $= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$
 $= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & -1-6i \\ 1-6i & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 1+6i \\ -1+6i & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат с помощью координатной формулы.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) = 2$.
 $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) =$
 $= \left(\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}}, 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) =$
 $= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i & -3+i \\ 3+i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$
 $= -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} i & -1-6i \\ 1-6i & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 1+6i \\ -1+6i & i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

Задача 22. Используя алгебру кватернионов в **матричной интерпретации**, вычислите $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i})$, $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$, с помощью соответствующей **формулы для вычисления скалярного и векторного произведения**. Проверьте результат с помощью **координатной формулы**.

Ответ. $(\vec{j} - 3\vec{k})(2\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 7$,
 $(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{j} - \vec{k})(2\vec{i}) = ([\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{j} - \vec{k}], 2\vec{i}) = 2$.
 $\vec{k}(\vec{i} - \vec{j})(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 0$.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: yu.b.melnikov@yandex.ru, UriiMelnikov58@gmail.com

[Вернуться к списку презентаций?](#)

