

Министерство науки и высшего образования РФ
Уральский государственный экономический университет



Ю. Б. Мельников



Алгебра и теория чисел. Идеалы полугрупп и колец

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения занятия

e-mail:
yu.b.melnikov@yandex.ru
UriiMelnikov58@gmail.com

Екатеринбург
2021

I. Инструкция к пособию	9
II. Полугруппа	18
II.1. Идеал полугруппы	19
II.2. Теорема об идеале полугруппы	30
II.3. Алгебра идеалов полугруппы	36
II.4. Произведение идеалов полугруппы	37
II.5. Пересечение идеалов полугруппы	55
II.6. Объединение идеалов полугруппы	61
III. Кольцо	68
III.1. Определение кольца	69
III.2. Элементарные теоремы теории колец	83
III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце	84

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент	94
III.5. Частные виды колец	113
III.6. Конечные кольца	114
III.7. Кольцо с единицей	115
III.8. Коммутативные кольца	118
III.9. Целостные кольца	120
III.10. Евклидовы кольца	129
III.11. Идеал кольца	137
III.11.1. Определение левого, правого, двустороннего идеалов кольца	138
III.11.2. Теорема об идеалах кольца	142
III.12. Алгебра идеалов кольца	147
III.13. Произведение идеалов кольца	148
III.13.1. Пересечение идеалов кольца	164
III.13.2. Сумма идеалов кольца	180

III.14. Главные идеалы кольца	194
III.14.1. Теорема о главных идеалах кольца	222
III.14.2. Определение главного идеала кольца	224
III.15. Евклидовы кольца и кольца главных идеалов	227
III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах глав- ных идеалов	229
III.15.2. Следствие из доказательства теоремы 12	247
III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце	248
III.16. Алгебра идеалов евклидова кольца	257
III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца	258
III.16.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца	270
III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца . .	278
III.17. Идеалы и конгруенции кольца	292

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца . . .	293
III.17.2. Фактор-кольцо по идеалу	329
III.17.3. Теорема о кольце вычетов	330
III.17.4. Определение кольца вычетов	393
III.17.5. Сравнения по идеалу	394
III.17.6. Свойства сравнений по идеалу	395

IV. Кольцо целых чисел 415

IV.1. Простые числа	417
IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел	421
IV.3. Бесконечность множества простых чисел	442

V. Функция Эйлера 447

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера	449
V.2. Следствие о $\varphi(p^\alpha)$	465

Пример 1 идеалов полугруппы	467
Пример 2 построения идеала в полугруппе	497
Пример 3 произведения и пересечения идеалов полугруппы	518
Пример 4 объединения идеалов в полугруппе	534
Пример 5 произведения и пересечения идеалов кольца	543
Пример 6 суммы идеалов в кольце	559
Пример 7 нахождения главного идеала кольца	570
Пример 8 представления НОД в виде линейной комбинации	590

<i>Идеалы полугрупп</i>	615
Задача VI.1	616
Задача VI.2	617
Задача VI.3	618
<i>Понятие «кольцо»</i>	618
Задача VII.4	619
<i>Идеалы колец</i>	619
Задача VIII.5	620
Задача VIII.6	621

Задача VIII.7	622
Задача VIII.8	623
<i>Применения к НОД, НОК</i>	623
Задача IX.9	624
Задача IX.10	625
Пример 9 вычисления функции Эйлера	626
Задача IX.11	644
Задача IX.12	645
Ответы и решения	646

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с Intel x-86.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с Intel x-86.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла 0000Spisok.pdf со ссылками на файлы 00Set.pdf, 00Matrix.pdf, 00AnalGeom.pdf, 00LinAlgebra.pdf, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы Adobe Reader.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с Intel x-86.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла 0000Spisok.pdf со ссылками на файлы 00Set.pdf, 00Matrix.pdf, 00AnalGeom.pdf, 00LinAlgebra.pdf, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы Adobe Reader.

Кроме того, имеются гиперссылки на пособия «Математический анализ» и «Элементарная математика».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения. Имеются гиперссылки на тесты для самообучения и самоконтроля.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

В программе Adobe Reader и Acrobat Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для того, чтобы **вызвать панель навигации** в Acrobat Reader надо, во-первых, выйти из полноэкранного режима (например, нажатием **Esc**), и, во-вторых, нажать клавишу **F4** и выбрать на левой вертикальной панели вертикальный флажок «Закладки» .

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и ← (в Adobe Reader X может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и ← (в Adobe Reader X может не работать).

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Полугруппа

Определение 1. *Группоид $\langle A, \{*\} \rangle$ называется полугруппой, если $*$ — ассоциативная операция, то есть выполняется тождество $(x * y) * z = x * (y * z)$.*

Иногда говорят, что A — полугруппа **относительно операции $*$** . При этом равенство $(x * y) * z = x * (y * z)$ называют **аксиомой полугруппы**.

II.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование полугрупп?

II.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полу-
групп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, например, таблицей Кэли. У этого способа есть ряд недостатков:

II.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полу-
групп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, например, таблицей Кэли. У этого способа есть ряд недостатков:

- можно применить только для конечных полугрупп;

II.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полу-групп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, например, таблицей Кэли. У этого способа есть ряд недостатков:

- можно применить только для конечных полугрупп;
- громоздкость задания для полугрупп большого порядка;

II.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полугрупп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, например, таблицей Кэли. У этого способа есть ряд недостатков:

- можно применить только для конечных полугрупп;
- громоздкость задания для полугрупп большого порядка;
- непрозрачность «структуры» **полугруппы**, ее устройства и т.д.

II.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полугрупп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, например, таблицей Кэли.

Другой вариант — «конструирование» **полугруппы** с помощью других полугрупп и специальных преобразований. Этот способ представляется более перспективным. В частности, таким образом исследование сводится к изучению «более простых» полугрупп.

II.1. Идеал полугруппы

В каких направлениях нам следует развивать исследование **полу-групп**?

В первую очередь следует позаботиться о стандартных способах задания **полугруппы**. Один из вариантов — задание полугрупповой операции, например, таблицей Кэли.

Другой вариант — «конструирование» **полугруппы** с помощью других полугрупп и специальных преобразований. Этот способ представляется более перспективным. В частности, таким образом исследование сводится к изучению «более простых» полугрупп.

Итак, надо выбрать подполугруппы, наиболее перспективные для изучения.

II.1. Идеал полугруппы

Определение **2**. Подмножество I **полугруппы** P называется **левым идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow x * y \in I. \quad (0)$$

II.1. Идеал полугруппы

Определение 2. Подмножество I **полугруппы** P называется **левым идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow x * y \in I. \quad (0)$$

Определение 3. Подмножество I **полугруппы** P называется **правым идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $I * x \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow y * x \in I. \quad (0)$$

II.1. Идеал полугруппы

Определение 4. Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (1)$$

II.1. Идеал полугруппы

Определение 4. Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (1)$$

В частности, идеал **полугруппы** является одновременно ее левым и правым идеалом.

Рассмотреть пример?

II.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 1. Идеал I **полугруппы** P есть подполугруппа **полу-группы** P .

Доказательство.

II.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 1. Идеал I **полугруппы** P есть подполугруппа **полу-группы** P .

Доказательство. Если a и b — элементы из I , то, по **формуле (1)**

II.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 1. Идеал I **полугруппы** P есть подполугруппа **полу-группы** P .

Доказательство. Если a и b — элементы из I , то, по **формуле (1)**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow$$

II.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 1. Идеал I **полугруппы** P есть подполугруппа **полу-группы** P .

Доказательство. Если a и b — элементы из I , то, по **формуле (1)**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow a * b \in I.$$

II.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 1. Идеал I **полугруппы** P есть подполугруппа **полу-группы** P .

Доказательство. Если a и b — элементы из I , то, по **формуле (1)**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow a * b \in I.$$

Ассоциативность ограничения операции $*$ на I следует из ассоциативности операции $*$ в P .

II.2. Теорема об идеале полугруппы

Определение 4. Подмножество I **полугруппы** P называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из P выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 1. Идеал I **полугруппы** P есть подполугруппа **полугруппы** P .

Доказательство. Если a и b — элементы из I , то, по **формуле (1)**

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow a * b \in I.$$

Ассоциативность ограничения операции $*$ на I следует из ассоциативности операции $*$ в P . Теорема доказана.

II.3. Алгебра идеалов полугруппы

В соответствии со стратегией перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов напрашивается ввести операции и отношения на множестве идеалов.

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема **2**. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема **2**. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Рассмотрим пример?

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (1)**:

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (1)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{по (2)}}$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (1)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right. \xRightarrow{\text{по (2)}} \exists a \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right. \Rightarrow$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \begin{cases} a \in I, \\ b \in J \end{cases} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (1)**:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I * J \end{cases} &\stackrel{\text{по (2)}}{\Rightarrow} \exists a \exists b \begin{cases} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x * (a * b) = \\ (a * b) * x = \end{cases} \end{aligned}$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (1)**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right\} &\stackrel{\text{по (2)}}{\Rightarrow} \exists a \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a * b) = (x * a) * b = \\ (a * b) * x = \end{array} \right. \end{aligned}$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \begin{cases} a \in I, \\ b \in J \end{cases} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (1)**:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I * J \end{cases} &\stackrel{\text{по (2)}}{\Rightarrow} \exists a \exists b \begin{cases} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x * (a * b) = (x * a) * b = a' * b \in I * J, \\ (a * b) * x = \end{cases} \end{aligned}$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \begin{cases} a \in I, \\ b \in J \end{cases} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (1)**:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I * J \end{cases} &\stackrel{\text{по (2)}}{\Rightarrow} \exists a \exists b \begin{cases} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x * (a * b) = (x * a) * b = a' * b \in I * J, \\ (a * b) * x = a * (b * x) = \end{cases} \end{aligned}$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \begin{cases} a \in I, \\ b \in J \end{cases} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (1)**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ y \in I * J \end{array} \right. & \xRightarrow{\text{по (2)}} \exists a \exists b \left\{ \begin{array}{l} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x * (a * b) = (x * a) * b = a' * b \in I * J, \\ (a * b) * x = a * (b * x) = a * b' \in \end{array} \right. \end{aligned}$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \begin{cases} a \in I, \\ b \in J \end{cases} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Естественно, воспользуемся **формулой (1)**:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I * J \end{cases} &\stackrel{\text{по (2)}}{\Rightarrow} \exists a \exists b \begin{cases} x \in P, \\ a \in I, \\ b \in J, \\ y = a * b \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x * (a * b) = (x * a) * b = a' * b \in I * J, \\ (a * b) * x = a * (b * x) = a * b' \in I * J. \end{cases} \end{aligned}$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \begin{cases} a \in I, \\ b \in J \end{cases} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \right. \Rightarrow \left\{ \right.$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \right. \Rightarrow \left. \left\{ a * b \in I, \right. \right.$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \\ a * b = a * \underbrace{b}_{\in J} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ a * b \in I, \right.$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \begin{cases} a \in I, \\ b \in J \end{cases} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\begin{cases} a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \\ a * b = a * \underbrace{b}_{\in J} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a * b \in I, \\ a * b \in J \end{cases}$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \\ a * b = a * \underbrace{b}_{\in J} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a * b \in I, \\ a * b \in J \end{array} \right\} \Rightarrow a * b \in I \cap J.$$

II.4. Произведение идеалов полугруппы

Теорема 2. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то множество

$$I * J = \left\{ a * b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (2)$$

является идеалом полугруппы P , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} a * b = \underbrace{a}_{\in I} * b, \\ a * b = a * \underbrace{b}_{\in J} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a * b \in I, \\ a * b \in J \end{array} \right\} \Rightarrow a * b \in I \cap J.$$

Теорема доказана.

II.5. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема **3**. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P .

II.5. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow$$

II.5. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow$$

II.5. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cap J, \\ y * x \in I \cap J. \end{cases}$$

II.5. Пересечение идеалов полугруппы

Теорема 3. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cap J, \\ y * x \in I \cap J. \end{cases}$$

Теорема доказана.

II.6. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P .

II.6. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Рассмотрим пример?

II.6. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

II.6. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cup J \end{cases} \Rightarrow$$

II.6. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cup J \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \\ x \in P, \\ y \in J \end{cases} \Rightarrow \right.$$

II.6. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

$$\begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cup J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in P, \\ y \in J \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I, \end{cases} \\ \begin{cases} x * y \in J, \\ y * x \in J \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

II.6. Объединение идеалов полугруппы

Теорема 4. Если I и J — **идеалы** полугруппы P , то их объединение $(I \cup J)$ является идеалом **полугруппы** P .

Доказательство. Согласно **формуле (1)**:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I \cup J \end{cases} &\Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x \in P, \\ y \in I, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in P, \\ y \in J \end{cases} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I, \end{cases} \\ \begin{cases} x * y \in J, \\ y * x \in J \end{cases} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cup J, \\ y * x \in I \cup J. \end{cases} \end{aligned}$$

III. Кольцо

Примером переноса понятия на усложненный математический объект является введение понятия *идеала кольца*.

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (аксиомы кольца):

1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (**аксиомы кольца**):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (аксиомы кольца):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);

Значит, $\langle K, \{+\} \rangle$ — **полугруппа**.

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (**аксиомы кольца**):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);
- 3) в K существует элемент, который мы обозначим 0 , такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (аксиомы кольца):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);
- 3) в K существует элемент, который мы обозначим 0 , такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);

Значит, $\langle K, \{+\} \rangle$ — **полугруппа** с нейтральным элементом (с «единицей»).

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (**аксиомы кольца**):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);
- 3) в K существует элемент, который мы обозначим 0 , такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);
- 4) для любого x из K существует такой элемент $(-x)$, что $(-x) + x = 0$ (элемент, обратный относительно $+$);

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (аксиомы кольца):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);
- 3) в K существует элемент, который мы обозначим 0 , такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);
- 4) для любого x из K существует такой элемент $(-x)$, что $(-x) + x = 0$ (элемент, обратный относительно $+$);

Значит, $\langle K, \{+\} \rangle$ — группа.

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (аксиомы кольца):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);
- 3) в K существует элемент, который мы обозначим 0 , такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);
- 4) для любого x из K существует такой элемент $(-x)$, что $(-x) + x = 0$ (элемент, обратный относительно $+$);

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (аксиомы кольца):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);
- 3) в K существует элемент, который мы обозначим 0 , такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);
- 4) для любого x из K существует такой элемент $(-x)$, что $(-x) + x = 0$ (элемент, обратный относительно $+$);

Значит, $\langle K, \{+\} \rangle$ — абелева (коммутативная) группа — аддитивная группа кольца.

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (**аксиомы кольца**):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);
- 3) в K существует элемент, который мы обозначим 0 , такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);
- 4) для любого x из K существует такой элемент $(-x)$, что $(-x) + x = 0$ (элемент, обратный относительно $+$);
- 5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ассоциативность «умножения»);

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (аксиомы кольца):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);
- 3) в K существует элемент, который мы обозначим 0 , такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);
- 4) для любого x из K существует такой элемент $(-x)$, что $(-x) + x = 0$ (элемент, обратный относительно $+$);
- 5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ассоциативность «умножения»);

Значит, $\langle K, \{\cdot\} \rangle$ — **полу группа**.

III.1. Определение кольца

Определение 5. Кольцом или ассоциативным кольцом называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ для которой выполняются следующие утверждения (**аксиомы кольца**):

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность «сложения»);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность «сложения»);
- 3) в K существует элемент, который мы обозначим 0 , такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);
- 4) для любого x из K существует такой элемент $(-x)$, что $(-x) + x = 0$ (элемент, обратный относительно $+$);
- 5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ассоциативность «умножения»);
 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ (левая и правая дистрибутивности).

III.1. Определение кольца

Часто это определение формулируют следующим образом: кольцом называется непустое множество K с операциями, которые мы обозначим $+$ и $\cdot$, в котором имеется элемент, который мы обозначим символом 0 , причем выполняются приведенные выше аксиомы кольца.

III.1. Определение кольца

Иногда в определении кольца отказываются от **аксиомы 5 (ассоциативность «умножения»)** и заменяют ее какой-нибудь другой. В этом случае говорят о **неассоциативных кольцах**.

Выполнение аксиом 2-4 говорит о том, что K является **группой** относительно сложения, а выполнение при этом аксиомы 1 говорит о том, что это абелева или, иными словами, коммутативная **группа**.

III.2. Элементарные теоремы теории колец

Рассмотрим несколько следствий из определений.

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x *кольца* K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство.

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$= x \cdot (y + 0) =$$

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) =$$

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

По **критерию нейтрального элемента** $x \cdot 0$ является нейтральным элементом аддитивной группы кольца, т.е.

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

По **критерию нейтрального элемента** $x \cdot 0$ является нейтральным элементом аддитивной группы кольца, т.е.

$$x \cdot 0 = 0.$$

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **критерия нейтрального элемента**:

$$x \cdot y = x \cdot y + x \cdot 0 \Rightarrow$$

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **критерия нейтрального элемента**:

$$x \cdot y = x \cdot y + x \cdot 0 \Rightarrow \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_0 = \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_0 + x \cdot 0 \Rightarrow$$

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **критерия нейтрального элемента**:

$$x \cdot y = x \cdot y + x \cdot 0 \Rightarrow \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_0 = \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_0 + x \cdot 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0.$$

III.3. Теорема об умножении на 0 в кольце

Теорема 5. Для любого элемента x **кольца** K имеют место равенства $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot y = x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **критерия нейтрального элемента**:

$$x \cdot y = x \cdot y + x \cdot 0 \Rightarrow \underbrace{(-x * y) + x \cdot y}_0 = \underbrace{(-x * y) + x \cdot y + x \cdot 0}_0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0.$$

Утверждение $0 \cdot x = 0$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y *кольца* K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство.

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y =$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y =$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y =$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

По **теореме об однозначности g'** элемент $(-x) \cdot y$ является противоположным к элементу $-(x \cdot y)$, т.е.

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

По **теореме об однозначности g'** элемент $(-x) \cdot y$ является противоположным к элементу $-(x \cdot y)$, т.е.

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **теоремы об однозначности g'** :

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = 0 \Rightarrow$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **теоремы об однозначности g'** :

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = 0 \Rightarrow (-x) \cdot y + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = 0 + (-(x \cdot y)) \Rightarrow$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Согласно **аксиомам кольца**

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство **теоремы об однозначности g'** :

$$\begin{aligned} (-x) \cdot y + x \cdot y = 0 &\Rightarrow (-x) \cdot y + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = 0 + (-(x \cdot y)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-x) \cdot y = -(x \cdot y). \end{aligned}$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y =$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) =$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 =$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

По **теореме об однозначности g'** элемент $x \cdot (-y)$ является противоположным к элементу $-(x \cdot y)$, т.е.

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = 0 \Rightarrow$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = 0 \Rightarrow x \cdot (-y) + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = -(x \cdot y) \Rightarrow$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство:

$$\begin{aligned} x \cdot (-y) + x \cdot y = 0 &\Rightarrow x \cdot (-y) + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = -(x \cdot y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \cdot (-y) = -(x \cdot y). \end{aligned}$$

III.4. Теорема об умножении на противоположный элемент

Теорема 6. Для любых элементов x и y **кольца** K имеет место равенство $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Доказательство. Наконец, согласно **аксиомам кольца**

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

Можно воспроизвести доказательство:

$$\begin{aligned} x \cdot (-y) + x \cdot y = 0 &\Rightarrow x \cdot (-y) + x \cdot y + (-(x \cdot y)) = -(x \cdot y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \cdot (-y) = -(x \cdot y). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

III.5. Частные виды колец

Для развития теории следует обогатить понятийный аппарат. В частности, следует выделить некоторые частные виды колец. Для выделения этих типов применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

III.6. Конечные кольца

Определение 6. *Кольцо K называется конечным кольцом, если множество K является конечным.*

III.7. Кольцо с единицей

Определение **7. Кольцо** $\mathcal{K} = \langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ называется **кольцом с единицей**, если в **мультипликативной полугруппе кольца** имеется элемент e такой, что для любого ненулевого элемента x выполняются равенства $x \cdot e = e \cdot x = x$.

III.7. Кольцо с единицей

Определение **7. Кольцо** $\mathcal{K} = \langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ называется **кольцом с единицей**, если в **мультипликативной полугруппе кольца** имеется элемент e такой, что для любого ненулевого элемента x выполняются равенства $x \cdot e = e \cdot x = x$.

Кольцами с единицей являются кольцо целых чисел и кольцо матриц размерности $n \times n$ (при фиксированном n).

III.7. Кольцо с единицей

Определение **7. Кольцо** $\mathcal{K} = \langle K, \{+, \cdot, 0\} \rangle$ называется **кольцом с единицей**, если в **мультипликативной полугруппе кольца** имеется элемент e такой, что для любого ненулевого элемента x выполняются равенства $x \cdot e = e \cdot x = x$.

Кольцами с единицей являются кольцо целых чисел и кольцо матриц размерности $n \times n$ (при фиксированном n).

Кольцо всех четных целых чисел является кольцом без 1.

III.8. Коммутативные кольца

Определение 8. *Кольцо* K называется коммутативным кольцом, если операция $*$ является коммутативной, т.е. $x * y = y * x$ для любых x, y из K .

III.8. Коммутативные кольца

Определение 8. ***Кольцо** K называется коммутативным кольцом, если операция $*$ является коммутативной, т.е. $x * y = y * x$ для любых x, y из K .*

Примерами коммутативных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле.

Примером некоммутативного кольца является кольцо матриц размерности $n \times n$.

III.9. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо** K называется целостным кольцом или областью целостности, если в кольце K нет делителей нуля, т.е.*

$$x * y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Иными словами, в целостном кольце произведение ненулевых элементов не может быть равно 0.

III.9. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо** K называется целостным кольцом или областью целостности, если в кольце K нет делителей нуля, т.е.*

$$x * y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$

III.9. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо** K называется целостным кольцом или областью целостности, если в кольце K нет делителей нуля, т.е.*

$$x * y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например,
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} =$$

III.9. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо** K называется целостным кольцом или областью целостности, если в кольце K нет делителей нуля, т.е.*

$$x * y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например,
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III.9. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо** K называется целостным кольцом или областью целостности, если в кольце K нет делителей нуля, т.е.*

$$x * y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того,

III.9. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо** K называется целостным кольцом или областью целостности, если в кольце K нет делителей нуля, т.е.*

$$x * y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

III.9. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо** K называется целостным кольцом или областью целостности, если в кольце K нет делителей нуля, т.е.*

$$x * y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} =$$

III.9. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо** K называется целостным кольцом или областью целостности, если в кольце K нет делителей нуля, т.е.*

$$x * y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

III.9. Целостные кольца

Определение 9. ***Кольцо** K называется целостным кольцом или областью целостности, если в кольце K нет делителей нуля, т.е.*

$$x * y = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

Примерами целостных колец являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов, поле. Не является целостным кольцо матриц размерности $n \times n$ для $n > 1$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Более того,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq \mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

III.10. Евклидовы кольца

Понятие евклидова кольца обусловлено желанием выделить основные свойства, позволяющие гарантировать выполнение в кольце теоремы о делении с остатком, доказанную для целых чисел и **много-членов**.

III.10. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо** K называется евклидовым кольцом тогда и только тогда, когда,*
во-первых,

III.10. Евклидовы кольца

Определение 10. **Кольцо** K называется евклидовым кольцом тогда и только тогда, когда,
во-первых, K — коммутативное кольцо,
во-вторых,

III.10. Евклидовы кольца

Определение 10. **Кольцо** K называется евклидовым кольцом тогда и только тогда, когда,

- во-первых, K — коммутативное кольцо,
- во-вторых, K является **целостным кольцом**,
- в-третьих,

III.10. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо** K называется евклидовым кольцом тогда и только тогда, когда,*
во-первых, K — коммутативное кольцо,
*во-вторых, K является **целостным кольцом**,*
в-третьих, на K определена функция g , удовлетворяющая условиям:

1)

III.10. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо** K называется евклидовым кольцом тогда и только тогда, когда,*
во-первых, K — коммутативное кольцо,
*во-вторых, K является **целостным кольцом**,*
в-третьих на K определена функция g , удовлетворяющая условиям:

- 1) если x — ненулевой элемент из K , то $g(x)$ является неотрицательным целым числом, т.е. $g(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;*
- 2)*

III.10. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо** K называется евклидовым кольцом тогда и только тогда, когда,*
во-первых, K — коммутативное кольцо,
*во-вторых, K является **целостным кольцом**,*
в-третьих на K определена функция g , удовлетворяющая условиям:

- 1) если x — ненулевой элемент из K , то $g(x)$ является неотрицательным целым числом, т.е. $g(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;*
- 2) для $a \neq 0$ и $b \neq 0$ имеем $g(a * b) \geq g(a)$;*
- 3)*

III.10. Евклидовы кольца

Определение 10. ***Кольцо** K называется евклидовым кольцом тогда и только тогда, когда,*
во-первых, K — коммутативное кольцо,
*во-вторых, K является **целостным кольцом**,*
в-третьих на K определена функция g , удовлетворяющая условиям:

- 1) если x — ненулевой элемент из K , то $g(x)$ является неотрицательным целым числом, т.е. $g(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;*
- 2) для $a \neq 0$ и $b \neq 0$ имеем $g(a * b) \geq g(a)$;*
- 3) если $a \neq 0$, то для любого $b \in K$ найдутся такие s, r из K , что $b = sa + r$, где $g(r) < g(a)$ или $r = 0$.*

Здесь элемент s называется **частным от деления** b на a , а элемент r — **остатком от деления** b на a .

III.11. Идеал кольца

Множество элементов кольца с операцией умножения образует **полугруппу**. Поэтому понятие **идеала** естественным образом переносится в теорию колец.

III.11.1. Определение левого, правого, двустороннего идеалов кольца

Определение 11. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **левым идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow x * y \in I. \quad (3)$$

III.11.1. Определение левого, правого, двустороннего идеалов кольца

Определение 11. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **левым идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow x * y \in I. \quad (3)$$

Определение 12. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **правым идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $I * x \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow y * x \in I. \quad (4)$$

III.11.1. Определение левого, правого, двустороннего идеалов кольца

Определение 13. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (5)$$

III.11.1. Определение левого, правого, двустороннего идеалов кольца

Определение 13. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (5)$$

В частности, идеал кольца является одновременно его левым и правым идеалом.

III.11.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). Идеал I кольца K является подкольцом кольца K .

III.11.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). Идеал I кольца K является подкольцом кольца K .

Доказательство. Из **определения идеала** следует, что остается доказать замкнутость I относительно умножения.

III.11.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). Идеал I кольца K является подкольцом кольца K .

Доказательство. Согласно **формуле (5)**

III.11.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). Идеал I кольца K является подкольцом кольца K .

Доказательство. Согласно **формуле (5)**

$$\begin{cases} x \in I, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.11.2. Теорема об идеалах кольца

Определение 13. Подгруппа I аддитивной группы кольца K называется **идеалом** или **двусторонним идеалом**, если для любого x из K выполняется включение $x * I \subseteq I$, т.е.

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 7 (об идеалах кольца). Идеал I кольца K является подкольцом кольца K .

Доказательство. Согласно **формуле (5)**

$$\begin{cases} x \in I, \\ y \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ y * x \in I. \end{cases}$$

III.12. Алгебра идеалов кольца

По аналогии с идеалами полугруппы и в соответствии со **стратегией перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов** напрашивается ввести операции и отношения на множестве идеалов.

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K , то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

*является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.*

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K , то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

*является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.*

Рассмотрим пример?

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K , то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

*является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.*

Доказательство. Сначала проверим, что $I * J$ является подгруппой аддитивной группы кольца:

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Сначала проверим, что $I * J$ является подгруппой аддитивной группы кольца:

$$\underbrace{(a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p)}_{\in I * J} + \underbrace{(a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \dots + a'_q * b'_q)}_{\in I * J} =$$

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Сначала проверим, что $I * J$ является подгруппой аддитивной группы кольца:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p)}_{\in I * J} + \underbrace{(a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \dots + a'_q * b'_q)}_{\in I * J} = \\ & = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p + a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \dots + a'_q * b'_q \in I * J. \end{aligned}$$

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \begin{cases} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{cases} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Сначала проверим, что $I * J$ является подгруппой аддитивной группы кольца:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p)}_{\in I * J} + \underbrace{(a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \dots + a'_q * b'_q)}_{\in I * J} = \\ & = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p + a'_1 * b'_1 + a'_2 * b'_2 + \dots + a'_q * b'_q \in I * J. \end{aligned}$$

Значит, произведение идеалов $I * J$ замкнуто относительно операции $*$ кольца K .

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. *Если I и J — идеалы кольца K , то множество*

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

*является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.*

Доказательство. Произведение идеалов $I * J$ замкнуто относительно операции $*$ кольца K . Ассоциативность выполняется для любых элементов из K , тем более равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$ выполняется на подмножестве $I * J$ множества K .

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Произведение идеалов $I * J$ замкнуто относительно операции $*$ кольца K . Ассоциативность выполняется для любых элементов из K , тем более равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$ выполняется на подмножестве $I * J$ множества K .

Обратным к элементу $a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p$ является элемент $(-a_1) * b_1 + (-a_2) * b_2 + \dots + (-a_p) * b_p$.

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Произведение идеалов $I * J$ замкнуто относительно операции $*$ кольца K . Ассоциативность выполняется для любых элементов из K , тем более равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$ выполняется на подмножестве $I * J$ множества K .

Обратным к элементу $a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p$ является элемент $(-a_1) * b_1 + (-a_2) * b_2 + \dots + (-a_p) * b_p$.

Нейтральным (нулевым) элементом является элемент $0 * 0$.

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I * J \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{по (6)}}$$

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I * J \end{array} \right. \xRightarrow{\text{по (6)}} \exists a_i \exists b_i \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p \end{array} \right. \Rightarrow$$

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I * J \end{array} \right. &\stackrel{\text{по (6)}}{\Rightarrow} \exists a_i \exists b_i \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p) = \\ (a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p) * x = \end{array} \right. \end{aligned}$$

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I * J \end{array} \right\} &\stackrel{\text{по (6)}}{\Rightarrow} \exists a_i \exists b_i \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p) = (x * a_1) * b_1 + \dots + (x * a_p) * b_p \in I * J, \\ (a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p) * x = \end{array} \right. \end{aligned}$$

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I * J \end{array} \right. &\stackrel{\text{по (6)}}{\Rightarrow} \exists a_i \exists b_i \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p) = (x * a_1) * b_1 + \dots + (x * a_p) * b_p \in I * J, \\ (a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p) * x = a_1 * (b_1 * x) + \dots + a_p * (b_p * x) \in I * J. \end{array} \right. \end{aligned}$$

III.13. Произведение идеалов кольца

Теорема 8. Если I и J — идеалы кольца K , то множество

$$I * J = \left\{ a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_p * b_p \mid \left\{ \begin{array}{l} a_i \in I, \\ b_i \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (6)$$

является идеалом кольца K , причем $I * J \subseteq I \cap J$.

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I * J \end{array} \right. \xRightarrow{\text{по (6)}} \exists a_i \exists b_i \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ a_i \in I, \\ b_i \in J, \\ y = a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p) = (x * a_1) * b_1 + \dots + (x * a_p) * b_p \in I * J, \\ (a_1 * b_1 + \dots + a_p * b_p) * x = a_1 * (b_1 * x) + \dots + a_p * (b_p * x) \in I * J. \end{array} \right.$$

Теорема доказана.

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K , очевиден:

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K , очевиден:

$$\begin{cases} x \in I \cap J, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K , очевиден:

$$\begin{cases} x \in I \cap J, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ y \in I, \\ x \in J, \\ y \in J \end{cases} \Rightarrow$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K , очевиден:

$$\begin{cases} x \in I \cap J, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ y \in I, \\ x \in J, \\ y \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \in I, \\ x + y \in J \end{cases} \Rightarrow$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Тот факт, что $(I \cap J)$ — это подгруппа аддитивной группы кольца K , очевиден:

$$\begin{cases} x \in I \cap J, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ y \in I, \\ x \in J, \\ y \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \in I, \\ x + y \in J \end{cases} \Rightarrow x + y \in I \cap J.$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow 0 \in I \cap J,$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow 0 \in I \cap J,$$

$$x \in I \cap J \Rightarrow$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow 0 \in I \cap J,$$

$$x \in I \cap J \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ x \in J \end{cases} \Rightarrow$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow 0 \in I \cap J,$$

$$x \in I \cap J \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-x) \in I, \\ (-x) \in J \end{cases} \Rightarrow$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство.

$$\begin{cases} 0 \in I, \\ 0 \in J \end{cases} \Rightarrow 0 \in I \cap J,$$

$$x \in I \cap J \Rightarrow \begin{cases} x \in I, \\ x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-x) \in I, \\ (-x) \in J \end{cases} \Rightarrow (-x) \in I \cap J.$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. *Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cap J, \\ y * x \in I \cap J. \end{cases}$$

III.13.1. Пересечение идеалов кольца

Теорема 9. Если I и J — идеалы кольца K , то их пересечение $(I \cap J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I \cap J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K, \\ y \in I, \\ y \in J, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I, \\ x * y \in J, \\ y * x \in I, \\ y * x \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in I \cap J, \\ y * x \in I \cap J. \end{cases}$$

Теорема доказана.

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Определение 14. Суммой идеалов I и J кольца K называется множество

$$I + J = \left\{ a + b \mid \left\{ \begin{array}{l} a \in I, \\ b \in J \end{array} \right\} \right\} \quad (7)$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема **10**. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Рассмотрим пример?

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Очевидно, что $(I + J)$ является подгруппой аддитивной группы кольца K :

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Очевидно, что $(I + J)$ является подгруппой аддитивной группы кольца K :

$$\underbrace{(a_1 + b_1)}_{I+J} + \underbrace{(a_2 + b_2)}_{I+J} =$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Очевидно, что $(I + J)$ является подгруппой аддитивной группы кольца K :

$$\underbrace{(a_1 + b_1)}_{I+J} + \underbrace{(a_2 + b_2)}_{I+J} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Очевидно, что $(I + J)$ является подгруппой аддитивной группы кольца K :

$$\underbrace{(a_1 + b_1)}_{I+J} + \underbrace{(a_2 + b_2)}_{I+J} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \in I + J.$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{cases} x \in K, \\ y \in I + J \end{cases} \Rightarrow$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I + J \end{array} \right\} \Rightarrow \exists u \exists v \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u + v \end{array} \right\} \Rightarrow$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I + J \end{array} \right. \Rightarrow \exists u \exists v \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * u \in I, \\ x * v \in J, \\ u * x \in I, \\ v * x \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I + J \end{array} \right. &\Rightarrow \exists u \exists v \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * u \in I, \\ x * v \in J, \\ u * x \in I, \\ v * x \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * u + x * v \in I + J, \\ u * x + v * x \in I + J, \\ y = u + v \end{array} \right. &\Rightarrow \end{aligned}$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I + J \end{array} \right. &\Rightarrow \exists u \exists v \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * u \in I, \\ x * v \in J, \\ u * x \in I, \\ v * x \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * u + x * v \in I + J, \\ u * x + v * x \in I + J, \\ y = u + v \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (u + v) \in I + J, \\ (u + v) * x \in I + J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \end{aligned}$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I + J \end{array} \right. &\Rightarrow \exists u \exists v \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * u \in I, \\ x * v \in J, \\ u * x \in I, \\ v * x \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * u + x * v \in I + J, \\ u * x + v * x \in I + J, \\ y = u + v \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (u + v) \in I + J, \\ (u + v) * x \in I + J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * y \in I + J, \\ y * x \in I + J. \end{array} \right. \end{aligned}$$

III.13.2. Сумма идеалов кольца

Теорема 10. Если I и J — идеалы кольца K , то их **сумма** $(I + J)$ является идеалом кольца K .

Доказательство. Осталось проверить **формулу (5)**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in I + J \end{array} \right. &\Rightarrow \exists u \exists v \left\{ \begin{array}{l} x \in K, \\ u \in I, \\ v \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * u \in I, \\ x * v \in J, \\ u * x \in I, \\ v * x \in J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * u + x * v \in I + J, \\ u * x + v * x \in I + J, \\ y = u + v \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * (u + v) \in I + J, \\ (u + v) * x \in I + J, \\ y = u + v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * y \in I + J, \\ y * x \in I + J. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Рассмотрим идеал, порожденный минимальным числом элементов. Попробуем рассмотреть случай, когда идеал порожден *единственным* элементом.

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a . Тогда

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a . Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a . Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

$$x * a \in K,$$

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a . Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

$$x * a \in K, \quad a * y \in K,$$

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a . Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

$$x * a \in K, \quad a * y \in K, \quad x * a * y \in K,$$

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Допустим, идеал I кольца K порожден единственным элементом a . Тогда **по определению идеала кольца** для любых x, y из K

$$x * a \in K, \quad a * y \in K, \quad x * a * y \in K, \quad \underbrace{a + a + \dots + a}_{t \text{ слагаемых}}.$$

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Следовательно, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_r$ из K имеем

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Следовательно, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p + \underbrace{a + a + \dots + a}_{t \text{ слагаемых}} \in I,$$

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Следовательно, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p + \underbrace{a + a + \dots + a}_{t \text{ слагаемых}} \in I,$$

то есть

III.14. Главные идеалы кольца

Какие идеалы наиболее перспективны для изучения? Разумеется, воспользуемся **исследовательскими стратегиями**.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения «экстремальных ситуаций»** напрашивается в первую очередь обратить внимание на «экстремальные» идеалы.

Следовательно, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p + \underbrace{a + a + \dots + a}_{t \text{ слагаемых}} \in I,$$

то есть

$$x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p + ta \in I.$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку,

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K :

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K :

$$ta + x' * a + a * y' + u'_1 * a * v'_1 + u'_2 * a * v'_2 + \dots + u'_p * a * v'_p +$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K :

$$\begin{aligned} & ta + x' * a + a * y' + u'_1 * a * v'_1 + u'_2 * a * v'_2 + \dots + u'_p * a * v'_p + \\ & + na + x'' * a + a * y'' + u''_1 * a * v''_1 + u''_2 * a * v''_2 + \dots + u''_q * a * v''_q = \end{aligned}$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K :

$$\begin{aligned} & ta + x' * a + a * y' + u'_1 * a * v'_1 + u'_2 * a * v'_2 + \dots + u'_p * a * v'_p + \\ & + na + x'' * a + a * y'' + u''_1 * a * v''_1 + u''_2 * a * v''_2 + \dots + u''_q * a * v''_q = \\ & = (m + n)a + \end{aligned}$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K :

$$\begin{aligned} & ta + x' * a + a * y' + u'_1 * a * v'_1 + u'_2 * a * v'_2 + \dots + u'_p * a * v'_p + \\ & + na + x'' * a + a * y'' + u''_1 * a * v''_1 + u''_2 * a * v''_2 + \dots + u''_q * a * v''_q = \\ & = (m + n)a + (x' + x'') * a + \end{aligned}$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K :

$$\begin{aligned} & ta + x' * a + a * y' + u'_1 * a * v'_1 + u'_2 * a * v'_2 + \dots + u'_p * a * v'_p + \\ & + na + x'' * a + a * y'' + u''_1 * a * v''_1 + u''_2 * a * v''_2 + \dots + u''_q * a * v''_q = \\ & = (m + n)a + (x' + x'') * a + a * (y' + y'') + \end{aligned}$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K :

$$\begin{aligned} & ta + x' * a + a * y' + u'_1 * a * v'_1 + u'_2 * a * v'_2 + \dots + u'_p * a * v'_p + \\ & + na + x'' * a + a * y'' + u''_1 * a * v''_1 + u''_2 * a * v''_2 + \dots + u''_q * a * v''_q = \\ & = (m + n)a + (x' + x'') * a + a * (y' + y'') + \\ & + u'_1 * a * v'_1 + \dots + u'_p * a * v'_p + u''_1 * a * v''_1 + \dots + u''_q * a * v''_q \in I. \end{aligned}$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K , и, во-вторых, для любого z из K

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K , и, во-вторых, для любого z из K

$$z * (ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p) =$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K , и, во-вторых, для любого z из K

$$\begin{aligned} z * (ma + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p) &= \\ = (mz) * a + (z * x) * a + z * a * y + (z * u_1) * a * v_1 + \dots + (z * u_p) * a * v_p &\in I. \end{aligned}$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K , и, во-вторых, для любого z из K

$$(ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p) * z =$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K , и, во-вторых, для любого z из K

$$\begin{aligned} (ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p) * z = \\ = a * (tz) + x * a * z + a * (y * z) + u_1 * a * (v_1 * z) + \dots + u_p * a * (v_p * z) \in I. \end{aligned}$$

III.14. Главные идеалы кольца

Итак, если идеал I кольца K порожден единственным элементом a , то **по определению идеала кольца** для любых $x, y, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ из K имеем

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p \in I.$$

С другой стороны, очевидно, что множество элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p$$

образует идеал кольца K , поскольку, во-первых, I является подгруппой аддитивной группы кольца K , и, во-вторых, I выдерживает умножение на z из K слева и справа.

III.14.1. Теорема о главных идеалах кольца

Мы доказали теорему:

Теорема 11. *Подкольцо $I(a)$, состоящее из элементов вида*

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p,$$

где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{x, y, u_1, v_1, \dots, u_p, v_p\} \subseteq K$, является идеалом кольца K .

III.14.1. Теорема о главных идеалах кольца

Теорема 11. *Подкольцо $I(a)$, состоящее из элементов вида*

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p,$$

где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{x, y, u_1, v_1, \dots, u_p, v_p\} \subseteq K$, является идеалом кольца K .

Следствие 1. *В **коммутативном кольце** K элементы главного идеала $I(a)$ можно представить в виде $ta + x * a$, где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x \in K$.*

III.14.2. Определение главного идеала кольца

Определение 15. Главным идеалом кольца K , порожденным элементом a из K , называется подкольцо $I(a)$, состоящее из элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p,$$

где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{x, y, u_1, v_1, \dots, u_p, v_p\} \subseteq K$.

Рассмотрим пример?

III.14.2. Определение главного идеала кольца

Определение 15. Главным идеалом кольца K , порожденным элементом a из K , называется подкольцо $I(a)$, состоящее из элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p,$$

где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{x, y, u_1, v_1, \dots, u_p, v_p\} \subseteq K$.

Согласно **следствию о главных идеалах коммутативного кольца** главный идеал $I(a)$ коммутативного кольца K состоит из элементов вида

III.14.2. Определение главного идеала кольца

Определение 15. Главным идеалом кольца K , порожденным элементом a из K , называется подкольцо $I(a)$, состоящее из элементов вида

$$ta + x * a + a * y + u_1 * a * v_1 + u_2 * a * v_2 + \dots + u_p * a * v_p,$$

где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{x, y, u_1, v_1, \dots, u_p, v_p\} \subseteq K$.

Согласно **следствию о главных идеалах коммутативного кольца** главный идеал $I(a)$ коммутативного кольца K состоит из элементов вида $ta + x * a$.

III.15. Евклидовы кольца и кольца главных идеалов

Сосредоточим наше внимание на введенных ранее **евклидовых кольцах** и кольцах, все идеалы которых являются **главными**.

III.15. Евклидовы кольца и кольца главных идеалов

Сосредоточим наше внимание на введенных ранее **евклидовых кольцах** и кольцах, все идеалы которых являются **главными**.

Определение 16. *Кольцо*, все идеалы которого являются *главными идеалами*, называется **кольцом главных идеалов**.

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Если $I = \{0\}$, то I является **главным идеалом**.

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Если $I = \{0\}$, то I является **главным идеалом**.

Значит, можно считать, что в I имеется ненулевой элемент.

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца**

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - c * \underbrace{a}_{\in I}$

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I}$

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$.

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ **минимально**.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, **по выбору** a

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ **минимально**.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, **по выбору** a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ **минимально**.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что **значение $g(a)$ минимально**.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, **по выбору a** имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому $r = 0$.

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому $r = 0$.

Следовательно, $x = c * a$

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому $r = 0$.

Следовательно, $x = c * a \in I(a)$.

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — идеал **евклидова кольца** K . Обозначим через a такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально.

Пусть x — произвольный элемент из I . По **определению евклидова кольца** $x = c * a + r$, где
$$\begin{cases} r = 0, \\ g(r) < g(a). \end{cases}$$

По определению **идеала кольца** имеем $r = \underbrace{x}_{\in I} - \underbrace{c * a}_{\in I} \in I$. Следовательно, по выбору a имеем $g(a) \leq g(r)$, поэтому $r = 0$.

Следовательно, $x = c * a \in I(a)$. Теорема доказана.

III.15.1. Теорема о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Мы показали, что если a — такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально, то для любого $x \in I$ имеет место $x = c * a \in I(a)$. Теорема доказана.

III.15.2. Следствие из доказательства теоремы 12

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство. Мы показали, что если a — такой ненулевой элемент из I , что значение $g(a)$ минимально, то для любого $x \in I$ имеет место $x = c * a \in I(a)$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3. *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3. *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Согласно теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов кольцо K как идеал, является главным идеалом, т.е. $K = I(a)$ для некоторого a .

III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3. *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Согласно теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов кольцо K как идеал, является главным идеалом, т.е. $K = I(a)$ для некоторого a .

В силу следствия из доказательства теоремы 12 $a = a * e$ для некоторого $e \in K$.

III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3. *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a , причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3. *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a , причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

$$b = d * a =$$

III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3. *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a , причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

$$b = d * a = d * (a * e) =$$

III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3. *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a , причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

$$b = d * a = d * (a * e) = (d * a) * e =$$

III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3. *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство. Итак, $K = I(a)$ для некоторого a , причем $a = a * e$. Согласно **следствию из доказательства теоремы 12** любой ненулевой элемент b из K представим в виде $b = d * a$, откуда

$$b = d * a = d * (a * e) = (d * a) * e = b * e.$$

III.15.3. Следствие о существовании 1 в евклидовом кольце

Теорема 12. *Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Следствие 2. *Всякий ненулевой элемент идеала евклидова кольца кратен элементу, порождающему этот идеал.*

Следствие 3. *Евклидово кольцо содержит единичный элемент.*

Доказательство.

$$b = d * a = d * (a * e) = (d * a) * e = b * e.$$

Следовательно, e — нейтральный элемент мультипликативной полу-группы кольца, т.е. $e = 1$.

III.16. Алгебра идеалов евклидова кольца

Рассмотрим конкретизацию **операций алгебры идеалов евклидова кольца**.

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство.

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2** из доказательства **теоремы 12** имеем

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2** из доказательства **теоремы 12** имеем

$$I(a) =$$

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2** из доказательства **теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{ a * x \mid x \in K \right\},$$

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{ a * x \mid x \in K \right\}, \quad I(b) =$$

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \left\{ a * x \mid x \in K \right\}, \quad I(b) = \left\{ b * y \mid y \in K \right\}.$$

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \{a * x \mid x \in K\}, \quad I(b) = \{b * y \mid y \in K\}.$$

Поэтому согласно **теореме 8 о произведении идеалов кольца** элементы кольца $I(a) * I(b)$ можно представить в виде

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \{a * x \mid x \in K\}, \quad I(b) = \{b * y \mid y \in K\}.$$

Поэтому согласно **теореме 8 о произведении идеалов кольца** элементы кольца $I(a) * I(b)$ можно представить в виде

$$(a * x_1) * (b * y_1) + (a * x_2) * (b * y_2) + \dots + (a * x_m) * (b * y_m) =$$

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \{a * x \mid x \in K\}, \quad I(b) = \{b * y \mid y \in K\}.$$

Поэтому согласно **теореме 8 о произведении идеалов кольца** элементы кольца $I(a) * I(b)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} (a * x_1) * (b * y_1) + (a * x_2) * (b * y_2) + \dots + (a * x_m) * (b * y_m) = \\ = a * b * (x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + \dots + x_m * y_m) = a * b * z, \end{aligned}$$

где $z \in K$.

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. В силу **следствия 2 из доказательства теоремы 12** имеем

$$I(a) = \{a * x \mid x \in K\}, \quad I(b) = \{b * y \mid y \in K\}.$$

Поэтому согласно **теореме 8 о произведении идеалов кольца** элементы кольца $I(a) * I(b)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} (a * x_1) * (b * y_1) + (a * x_2) * (b * y_2) + \dots + (a * x_m) * (b * y_m) = \\ = a * b * (x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + \dots + x_m * y_m) = a * b * z, \end{aligned}$$

где $z \in K$. Следовательно, $I(a) * I(b) = I(a * b)$.

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. Мы доказали равенство $I(a) * I(b) = I(a * b)$. Включение $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$ следует из

III.16.1. Теорема о произведении идеалов евклидова кольца

Теорема 13. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.

Доказательство. Мы доказали равенство $I(a) * I(b) = I(a * b)$. Включение $I(a) * I(b) = I(a * b) \subseteq I(a) \cap I(b)$ следует из **теоремы 8 о произведении идеалов кольца**.

III.16.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a; b\})$.

Доказательство.

III.16.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a; b\})$.

Доказательство. В силу **теоремы 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K .

III.16.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *, 0\} \rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a; b\})$.

Доказательство. В силу **теоремы 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K .

III.16.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a; b\})$.

Доказательство. В силу **теоремы 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K .

Следовательно, для любого элемента $z * c$ из K найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = z * c.$$

III.16.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a; b\})$.

Доказательство. Итак, доказано, что $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K , причем для любого элемента $z * c$ из K найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = z * c.$$

Положим $z = 1$, тогда $x * a = y * b = c$.

III.16.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a; b\})$.

Доказательство. Итак, доказано, что $I(a) \cap I(b) = I(c)$ для некоторого c из K , причем для любого элемента $z * c$ из K найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = z * c.$$

Положим $z = 1$, тогда $x * a = y * b = c$. Значит, c делится нацело на a и b . Осталось проверить минимальность c .

III.16.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a; b\})$.

Доказательство. Итак, доказано, что $I(a) \cap I(b) = I(c)$, причем найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = c.$$

Осталось проверить минимальность c . Если d делится нацело на a и b , то $d = p * a = q * b$.

III.16.2. Теорема о пересечении идеалов евклидова кольца

Теорема 14. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) \cap I(b) = I(\text{Н.О.К.}\{a; b\})$.

Доказательство. Итак, доказано, что $I(a) \cap I(b) = I(c)$, причем найдутся такие x, y из K

$$x * a = y * b = c.$$

Осталось проверить минимальность c . Если d делится нацело на a и b , то $d = p * a = q * b$. Значит, $d \in I(a) \cap I(b)$, значит, по **следствию из доказательства теоремы 12**, d делится нацело на c . Теорема доказана.

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство.

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Согласно **теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) + I(b) = I(c)$ для некоторого c из K .

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Согласно **теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) + I(b) = I(c)$ для некоторого c из K .

Согласно **следствию 2 из доказательства теоремы 12** всякий элемент из идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Согласно **теореме 12 о евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов** $I(a) + I(b) = I(c)$ для некоторого c из K .

Согласно **следствию 2 из доказательства теоремы 12** всякий элемент из идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c. \quad (8)$$

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Итак, каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x, y, z\} \subseteq K.$$

Положим $y = 0$. Тогда $x * a + 0 * b = z * c$.

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Итак, каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x, y, z\} \subseteq K.$$

Положим $x = 1$ и $y = 0$. Тогда $1 * a + 0 * b = z * c$. Согласно **следствию о существовании 1 в евклидовом кольце** и **теореме 5 об умножении на 0 в кольце** имеем $0 * y = 0$, поэтому

$$1 * a + 0 * b = z * c \Rightarrow a = z * c.$$

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Итак, каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x, y, z\} \subseteq K.$$

Положим $x = 1$ и $y = 0$. Тогда $1 * a + 0 * b = z * c$. Согласно **следствию о существовании 1 в евклидовом кольце** и **теоремы ?? об умножении на 0 в кольце** имеем $0 * y = 0$, поэтому

$$1 * a + 0 * b = z * c \Rightarrow a = z * c.$$

Следовательно, c является делителем элемента a .

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x, y, z\} \subseteq K,$$

и c является делителем элемента a . Полагая $(x; y) = (0; 1)$ можно доказать, что c является делителем элемента b .

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x, y, z\} \subseteq K,$$

и c является делителем элементов a и b .

Осталось показать, что любой общий делитель элементов a и b делит нацело элемент c .

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x, y, z\} \subseteq K,$$

и c является делителем элементов a и b .

Осталось показать, что любой общий делитель элементов a и b делит нацело элемент c .

Если $a = p * d$ и $b = q * d$, то полагая в **формуле (8)** $z = 1$, получаем $x * p * d + y * q * d = c$, откуда $(x * p + y * q) * d = c$, т.е. общий множитель d делит нацело элемент c .

III.16.3. Теорема о сумме идеалов евклидова кольца

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Доказательство. Каждый элемент идеала $I(a) + I(b) = I(c)$ представим в виде

$$x * a + y * b = z * c, \quad \{x, y, z\} \subseteq K,$$

и c является делителем элементов a и b .

Осталось показать, что любой общий делитель элементов a и b делит нацело элемент c .

Если $a = p * d$ и $b = q * d$, то полагая в **формуле (8)** $z = 1$, получаем $x * p * d + y * q * d = c$, откуда $(x * p + y * q) * d = c$, т.е. общий множитель d делит нацело элемент c . Теорема доказана.

III.16.3. Следствие о представлении Н.О.Д.

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Следствие 4. Для любых ненулевых элементов a и b евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$ для некоторых элементов x и y из K имеет место равенство

$$x * a + y * b = \text{Н.О.Д.}\{a; b\}. \quad (9)$$

Доказательство.

III.16.3. Следствие о представлении Н.О.Д.

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Следствие 4. Для любых ненулевых элементов a и b евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$ для некоторых элементов x и y из K имеет место равенство

$$x * a + y * b = \text{Н.О.Д.}\{a; b\}. \quad (10)$$

Доказательство. Достаточно в **формуле (8)** положить $z = 1$.
Следствие доказано.

III.16.3. Следствие о представлении Н.О.Д.

Теорема 15. Если $I(a)$ и $I(b)$ — идеалы евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, то $I(a) + I(b) = I(\text{Н.О.Д.}\{a; b\})$.

Следствие 4. Для любых ненулевых элементов a и b евклидова кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$ для некоторых элементов x и y из K имеет место равенство

$$x * a + y * b = \text{Н.О.Д.}\{a; b\}. \quad (11)$$

Доказательство. Достаточно в **формуле (8)** положить $z = 1$.
Следствие доказано.

Рассмотрим пример?

III.17. Идеалы и конгруэнции кольца

Конкретизируем некоторые результаты **теории алгебраических систем**.

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство.

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть T — конгруенция кольца K . Определению идеала кольца надо проверить, во-первых, что

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть T — конгруенция кольца K . Определению идеала кольца надо проверить,

во-первых, что I — подгруппа аддитивной группы кольца;

во-вторых, выполнение формулы (5).

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K : по определению конгруенции

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K : по определению конгруенции

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a; 0) \in T, \\ (b; 0) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K : по определению конгруенции

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a; 0) \in T, \\ (b; 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (a + b; 0 + 0) \in T \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K : по определению конгруенции

$$\begin{cases} a \in I, \\ b \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a; 0) \in T, \\ (b; 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (a + b; 0 + 0) \in T \Rightarrow (a + b) \in I.$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I .

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I . По определению конгруенции

$$a \in I \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I . По определению конгруенции

$$a \in I \Rightarrow \begin{cases} (a; 0) \in T, \\ (-a; -a) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I . По определению конгруенции

$$a \in I \Rightarrow \begin{cases} (a; 0) \in T, \\ (-a; -a) \in T \end{cases} \Rightarrow (a + (-a); 0 + (-a)) \in T \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I . По определению конгруенции

$$\begin{aligned} a \in I \Rightarrow \begin{cases} (a; 0) \in T, \\ (-a; -a) \in T \end{cases} &\Rightarrow (a + (-a); 0 + (-a)) \in T \Rightarrow \\ &\Rightarrow (0; (-a)) \in T \Rightarrow \end{aligned}$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Сначала докажем, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось доказать, что противоположный к элементу из I принадлежит I . По определению конгруенции

$$\begin{aligned} a \in I \Rightarrow \begin{cases} (a; 0) \in T, \\ (-a; -a) \in T \end{cases} &\Rightarrow (a + (-a); 0 + (-a)) \in T \Rightarrow \\ &\Rightarrow (0; (-a)) \in T \Rightarrow (-a) \in I. \end{aligned}$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось проверить выполнение формулы (5).

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось проверить выполнение формулы (5).

По определению конгруенции

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось проверить выполнение формулы (5).

По определению конгруенции

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x; x) \in T, \\ (a; 0) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось проверить выполнение формулы (5).

По определению конгруенции

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x; x) \in T, \\ (a; 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (x \cdot a; x \cdot 0) \in T \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось проверить выполнение формулы (5).

По определению конгруенции

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x; x) \in T, \\ (a; 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (x \cdot a; x \cdot 0) \in T \Rightarrow$$

по теореме об умножении на ноль в кольце

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось проверить выполнение формулы (5).

По определению конгруенции

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x; x) \in T, \\ (a; 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (x \cdot a; x \cdot 0) \in T \Rightarrow$$

по теореме об умножении на ноль в кольце

$$\Rightarrow (x \cdot a; 0) \in T \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось проверить выполнение формулы (5).

По определению конгруенции

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x; x) \in T, \\ (a; 0) \in T \end{cases} \Rightarrow (x \cdot a; x \cdot 0) \in T \Rightarrow$$

по теореме об умножении на ноль в кольце

$$\Rightarrow (x \cdot a; 0) \in T \Rightarrow (x \cdot a) \in I.$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Итак, доказано, что I — подгруппа аддитивной группы кольца K . Осталось проверить выполнение формулы (5).

По определению конгруенции

$$\begin{cases} x \in K, \\ a \in I \end{cases} \Rightarrow (x \cdot a) \in I.$$

Доказано, что если T — конгруенция, то I — идеал кольца K .

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Осталось доказать обратное утверждение: если I — идеал кольца K , то T — конгруенция.

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для сложения в кольце K имеем:

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \in I \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \in I \Rightarrow (x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)) \in I \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для сложения в кольце K имеем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \in I &\Rightarrow (x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)) \in I \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \in T. \end{aligned}$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} &\Rightarrow \end{aligned}$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 \in I \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2) \in I \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2) \in I \Rightarrow (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \in I \Rightarrow$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца K ,
 $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$. Для умножения в кольце K получаем:

$$\begin{cases} (x_1; y_1) \in T, \\ (x_2; y_2) \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \in I, \\ (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - y_1) \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot (x_2 - y_2) \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \in I, \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2) \in I &\Rightarrow (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \in I \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x_1 \cdot x_2; y_1 \cdot y_2) \in T. \end{aligned}$$

III.17.1. Теорема об идеалах и конгруенциях кольца

Теорема 16. *Отношение эквивалентности T на носителе кольца K является конгруенцией тогда и только тогда, когда множество $I = \{t \mid (t, 0) \in T\}$ является идеалом кольца K .*

Доказательство. Итак, мы показали, что если I — идеал кольца K , то отношение $T = \{(a; b) \mid (a + (-b)) \in I\}$ является — конгруенцией.

Теорема доказана.

III.17.2. Фактор-кольцо по идеалу

Определение 17. Если I — идеал кольца K , то, в силу теоремы об идеалах и конгруенциях кольца, отношение $T = \left\{ (a; b) \mid (a + (-b)) \in I \right\}$ является конгруенцией, и фактор-алгебра K/T называется фактор-кольцом по идеалу I и обозначается через K/I .

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

Теорема 17. Пусть I — идеал кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$. На множестве

$$K/I = \left\{ x + I \mid x \in K \right\} = \left\{ \left\{ x + y \mid y \in I \right\} \mid x \in K \right\}$$

операции $\oplus$ и $\odot$, индуцированные операциями $+$ и, соответственно, $*$ определим формулами:

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Тогда K/I с операциями $\oplus$ и $\odot$ и нулевым элементом I является **кольцом**.

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \stackrel{?}{\Rightarrow} (y' + I) \oplus (y'' + I).$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x' + I) \oplus (x'' + I) = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow (x' + I) \oplus (x'' + I) &= \left\{ x' + x'' + r \mid r \in I \right\} = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x' + I) \oplus (x'' + I) = \{x' + x'' + r \mid r \in I\} = \\ &= \{y' + p + y'' + q + r \mid r \in I\} = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x' + I) \oplus (x'' + I) = \{x' + x'' + r \mid r \in I\} = \\ &= \{y' + p + y'' + q + r \mid r \in I\} = \{y' + y'' + (p + q + r) \mid r \in I\} = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x' + I) \oplus (x'' + I) = \{x' + x'' + r \mid r \in I\} = \\ &= \{y' + p + y'' + q + r \mid r \in I\} = \{y' + y'' + (p + q + r) \mid r \in I\} = \\ &= y' + y'' + I = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Сначала проверим, что $\oplus$ и $\odot$ являются операциями. Достаточно доказать их **однозначность**:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x' + I) \oplus (x'' + I) = \{x' + x'' + r \mid r \in I\} = \\ &= \{y' + p + y'' + q + r \mid r \in I\} = \{y' + y'' + (p + q + r) \mid r \in I\} = \\ &= y' + y'' + I = (y' + I) \oplus (y'' + I). \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \stackrel{?}{\Rightarrow} (x' + I) \odot (x'' + I) = (y' + I) \odot (y'' + I).$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x' + I) \odot (x'' + I) = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow (x' + I) \odot (x'' + I) &= \left\{ x' * x'' + r \mid r \in I \right\} = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow (x' + I) \odot (x'' + I) &= \left\{ x' * x'' + r \mid r \in I \right\} = \\ &= \left\{ (y' + p) * (y'' + q) + r \mid r \in I \right\} = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x' + I) \odot (x'' + I) = \{x' * x'' + r \mid r \in I\} =$$

$$= \{(y' + p) * (y'' + q) + r \mid r \in I\} =$$

$$= \{y' * y'' + (x' * p + y' * q + r) \mid r \in I\} =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x' + I) \odot (x'' + I) = \{x' * x'' + r \mid r \in I\} =$$

$$= \{(y' + p) * (y'' + q) + r \mid r \in I\} =$$

$$= \{y' * y'' + (x' * p + y' * q + r) \mid r \in I\} = y' * y'' + I =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Теперь докажем **однозначность** операции $\odot$:

$$\begin{cases} x' + I = y' + I, \\ x'' + I = y'' + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y' + p, \\ x'' = y'' + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x' + I) \odot (x'' + I) = \{x' * x'' + r \mid r \in I\} =$$

$$= \{(y' + p) * (y'' + q) + r \mid r \in I\} =$$

$$= \{y' * y'' + (x' * p + y' * q + r) \mid r \in I\} = y' * y'' + I = (y' + I) \odot (y'' + I).$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.
Для этого надо проверить выполнение

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.
Для этого надо проверить выполнение равенства.

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.
Для этого надо проверить выполнение равенства.
Как доказать равенство?

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.
Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.
Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

- приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;
- доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

- приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;
- доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);
- применение метода «от противного».

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$. Для этого надо проверить выполнение равенства.

Как доказать равенство?

Обычно применяется один из трех способов:

- приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;
- доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);
- применение метода «от противного».

Применим первый метод.

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + I) \oplus (x''' + I) =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$\begin{aligned} L &= ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + I) \oplus (x''' + I) = \\ &= (x' + x'' + x''') + I. \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus ((x'' + I) \oplus (x''' + I)) =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus ((x'' + I) \oplus (x''' + I)) = (x' + I) \oplus (x'' + x''' + I) =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем ассоциативность операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$\begin{aligned} R &= (x' + I) \oplus ((x'' + I) \oplus (x''' + I)) = (x' + I) \oplus (x'' + x''' + I) = \\ &= (x' + x'' + x''') + I. \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus ((x'' + I) \oplus (x''' + I)) = (x' + x'' + x''') + I.$$

Значит,

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus ((x'' + I) \oplus (x''' + I)) = (x' + x'' + x''') + I.$$

Значит,

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus ((x'' + I) \oplus (x''' + I)) = (x' + x'' + x''') + I.$$

Значит,

$$L = (x' + x'' + x''') + I = R,$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем **ассоциативность** операций $\oplus$ и $\odot$.

$$L = ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + x'' + x''') + I.$$

$$R = (x' + I) \oplus ((x'' + I) \oplus (x''' + I)) = (x' + x'' + x''') + I.$$

Значит,

$$L = (x' + x'' + x''') + I = R,$$

т.е.

$$((x' + I) \oplus (x'' + I)) \oplus (x''' + I) = (x' + I) \oplus ((x'' + I) \oplus (x''' + I)).$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Ассоциативность операции $\odot$ можно доказать аналогично:

$$\left((x' + I) \odot (x'' + I) \right) \odot (x''' + I) =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Ассоциативность операции $\odot$ можно доказать аналогично:

$$\left((x' + I) \odot (x'' + I) \right) \odot (x''' + I) = (x' * x'' * x''') + I =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Ассоциативность операции $\odot$ можно доказать аналогично:

$$\begin{aligned} ((x' + I) \odot (x'' + I)) \odot (x''' + I) &= (x' * x'' * x''') + I = \\ &= (x' + I) \odot ((x'' + I) \odot (x''' + I)). \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. **Нейтральным** относительно сложения $\odot$ является элемент

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. **Нейтральным** относительно сложения $\odot$ является элемент $0 + I = I$.

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Обратным (относительно сложения $\oplus$) к элементу $x + I$ является элемент

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Обратным (относительно сложения $\oplus$) к элементу $x + I$ является элемент $(-x) + I$.

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**:

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство*.

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство*.

Для этого применяется один из

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство*.

Для этого применяется один из трех методов:

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство*.

Для этого применяется один из трех методов:

— приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство*.

Для этого применяется один из трех методов:

- приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;
- доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство*.

Для этого применяется один из трех методов:

- приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;
- доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);
- применение метода «от противного».

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**.

Надо доказать *равенство*.

Для этого применяется один из трех методов:

- приведение левой и правой части равенства к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований;
- доказательство двух неравенств $\leq$ и $\geq$ (или включений $\subseteq$ и $\supseteq$);
- применение метода «от противного».

Применим первый метод.

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**:

$$((x' + I) \oplus (x'' + I)) \odot (x''' + I) =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**:

$$((x' + I) \oplus (x'' + I)) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) =$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**:

$$\begin{aligned} & ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) = \\ & = ((x' + x'') * x''') + I = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**:

$$\begin{aligned} & ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) = \\ & = ((x' + x'') * x''') + I = (x' * x''' + x'' * x''') + I = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**:

$$\begin{aligned} & ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) = \\ & = ((x' + x'') * x''') + I = (x' * x''' + x'' * x''') + I = (x' * x''' + I) \oplus (x'' * x''' + I) = \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**:

$$\begin{aligned} & ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) = \\ & = ((x' + x'') * x''') + I = (x' * x''' + x'' * x''') + I = (x' * x''' + I) \oplus (x'' * x''' + I) = \\ & = ((x' + I) \odot (x''' + I)) \oplus ((x'' + I) \odot (x''' + I)). \end{aligned}$$

III.17.3. Теорема о кольце вычетов

$$(x' + I) \oplus (x'' + I) = (x' + x'') + I, \quad (12)$$

$$(x' + I) \odot (x'' + I) = (x' * x'') + I. \quad (13)$$

Доказательство. Осталось доказать **дистрибутивность**:

$$\begin{aligned} & ((x' + I) \oplus (x'' + I)) \odot (x''' + I) = (x' + x'' + I) \odot (x''' + I) = \\ & = ((x' + x'') * x''') + I = (x' * x''' + x'' * x''') + I = (x' * x''' + I) \oplus (x'' * x''' + I) = \\ & = ((x' + I) \odot (x''' + I)) \oplus ((x'' + I) \odot (x''' + I)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

III.17.4. Определение кольца вычетов

Кольцо $\mathcal{K}/I = \langle K/I, \{\oplus, \odot, I\} \rangle$ из доказанной выше **теоремы** называется **кольцом вычетов**.

III.17.5. Сравнения по идеалу

Определение 18. Пусть I — левый, правый или двусторонний идеал кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$. Говорят, что элементы x и y кольца $\mathcal{K}$ **сравнимы по модулю I** , если $x + I = y + I$, т.е. $x - y \in I$.

Сравнимость элементов x и y по модулю I обозначается как $x \equiv y \pmod{I}$. Если $I = I(a)$ — главный идеал, порожденный элементом a , то пишут $x \equiv y \pmod{a}$ вместо $x \equiv y \pmod{I(a)}$.

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Теорема 18 (о сумме и произведении сравнимых элементов).

*Если I — левый (правый) идеал кольца $\mathcal{K} = \langle K, \{+; *; 0\} \rangle$, $n \in \mathbf{N}$, $t \in K$, $a \equiv b \pmod{I}$ и $x \equiv y \pmod{I}$, то*

во-первых, $a + x \equiv b + y \pmod{I}$ и $a - x \equiv b - y \pmod{I}$;

во-вторых, $\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} \equiv \underbrace{b + b + \dots + b}_{n \text{ слагаемых}} \pmod{I}$, т.е.
 $na \equiv nb \pmod{I}$;

в-третьих, если I — левый идеал, то $t * a \equiv t * b \pmod{I}$, а если I — правый идеал, то $a * t \equiv b * t \pmod{I}$.

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ x = y + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{aligned} \begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ x = y + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} a + x = (b + p) + (y + q), \\ \{p, q\} \subseteq I \end{cases} &\Rightarrow \end{aligned}$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = b + p, \\ x = y + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + x = (b + p) + (y + q), \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + x = (b + y) + (p + q), \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \end{aligned}$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-первых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{I}, \\ x \equiv y \pmod{I} \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + I = b + I, \\ x + I = y + I \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = b + p, \\ x = y + q, \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + x = (b + p) + (y + q), \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + x = (b + y) + (p + q), \\ \{p, q\} \subseteq I \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\Rightarrow a + x + I = (b + y) + I. \end{aligned}$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \Rightarrow a + I = b + I \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \Rightarrow a + I = b + I \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \Rightarrow a + I = b + I \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + p + b + p + \dots + b + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \Rightarrow a + I = b + I \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + p + b + p + \dots + b + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + b + \dots + b}_{n \text{ слагаемых}} + \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \Rightarrow a + I = b + I \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + p + b + p + \dots + b + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + b + \dots + b}_{n \text{ слагаемых}} + \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} na = nb + np, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «во-вторых» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

$$a \equiv b \pmod{I} \Rightarrow a + I = b + I \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + p + b + p + \dots + b + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} = \underbrace{b + b + \dots + b}_{n \text{ слагаемых}} + \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ слагаемых}}, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} na = nb + np, \\ p \in I \end{cases} \Rightarrow na + I = nb + I.$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов.**

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t * a = t * b + t * p \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов.**

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t * a = t * b + t * p \Rightarrow \begin{cases} t * a = t * b + t * p, \\ t \in I, \\ t * p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t * a = t * b + t * p \Rightarrow \begin{cases} t * a = t * b + t * p, \\ t \in I, \\ t * p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t * a + I = t * b + I \Rightarrow$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов**.

Пусть I — левый идеал.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{I}, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + I = b + I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + p, \\ p \in I, \\ t \in K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t * a = t * b + t * p \Rightarrow \begin{cases} t * a = t * b + t * p, \\ t \in I, \\ t * p \in I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t * a + I = t * b + I \Rightarrow t * a \equiv t * b \pmod{I}$$

III.17.6. Свойства сравнений по идеалу

Доказательство утверждения «в-третьих» **теоремы о сумме и произведении сравнимых элементов.**

Для правого идеала рассуждения аналогичны.

IV. Кольцо целых чисел

Уточним некоторые полученные выше результаты для случая кольца целых чисел.

IV. Кольцо целых чисел

Уточним некоторые полученные выше результаты для случая кольца целых чисел.

Кольцо целых чисел является **евклидовым кольцом**.

IV.1. Простые числа

Определение 19. *Положительное число, порождающее максимальный (по включению) собственный идеал кольца $\mathbb{Z}$, называется простым числом.*

IV.1. Простые числа

Определение 19. *Положительное число, порождающее максимальный (по включению) собственный идеал кольца $\mathbb{Z}$, называется простым числом.*

Это определение равносильно традиционной «школьной» трактовке этого термина. Максимальность идеала I здесь означает, что

IV.1. Простые числа

Определение 19. *Положительное число, порождающее максимальный (по включению) собственный идеал кольца $\mathbb{Z}$, называется простым числом.*

Это определение равносильно традиционной «школьной» трактовке этого термина. Максимальность идеала I здесь означает, что если для идеала J кольца $\mathbb{Z}$ имеет место включение $I \subset J$, то

IV.1. Простые числа

Определение 19. *Положительное число, порождающее максимальный (по включению) собственный идеал кольца $\mathbb{Z}$, называется простым числом.*

Это определение равносильно традиционной «школьной» трактовке этого термина. Максимальность идеала I здесь означает, что если для идеала J кольца $\mathbb{Z}$ имеет место включение $I \subset J$, то $J = \mathbb{Z}$.

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство проведем, ориентируясь на теорию колец и их идеалов. Пусть n — натуральное число.

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число. Применим метод математической индукции. Будем вести индукцию по

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число. Применим метод математической индукции. Будем вести индукцию по количеству натуральных чисел, на которые делится n .

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

База индукции. Пусть n — простое число, т.е. количество множителей числа n равно

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

База индукции. Пусть n — простое число, т.е. количество множителей числа n равно 2. Тогда утверждение теоремы выполняется.

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда идеал $I(n)$ не является максимальным по включению. Выберем

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда идеал $I(n)$ не является максимальным по включению. Выберем максимальный идеал $I(p)$, включающий в себя $I(n)$ (т.е.

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда идеал $I(n)$ не является максимальным по включению. Выберем максимальный идеал $I(p)$, включающий в себя $I(n)$ (т.е. p является делителем числа n).

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Тогда идеал $I(n)$ не является максимальным по включению. Выберем максимальный идеал $I(p)$, включающий в себя $I(n)$ (т.е. p является делителем числа n).

Обозначим через t **частное от деления** n на p .

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p .

Если это частное равно 1, то $n = p$ и шаг индукции доказан.

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через t **частное от деления** n на p .

Осталось рассмотреть случай, когда $t > 1$.

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p .

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n .

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p .

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n . Поэтому количество делителей числа m меньше количества делителей числа n , поскольку

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p .

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n . Поэтому количество делителей числа m меньше количества делителей числа n , поскольку, например, n не является делителем числа m .

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p .

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n . Поэтому количество делителей числа m меньше количества делителей числа n , поскольку, например, n не является делителем числа m .

По предположению индукции $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, откуда

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p .

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n . Поэтому количество делителей числа m меньше количества делителей числа n , поскольку, например, n не является делителем числа m .

По предположению индукции $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, откуда $n = p \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p .

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n . Поэтому количество делителей числа m меньше количества делителей числа n , поскольку, например, n не является делителем числа m .

По предположению индукции $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, откуда $n = p \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Здесь p может совпадать с одним из p_i .

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.

Доказательство. Пусть n — натуральное число.

Шаг индукции. Пусть n не является простым числом. Обозначим через m **частное от деления** n на p .

Осталось рассмотреть случай, когда $m > 1$. Всякий делитель числа m делит нацело число n . Поэтому количество делителей числа m меньше количества делителей числа n , поскольку, например, n не является делителем числа m .

По предположению индукции $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, откуда $n = p \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Шаг индукции доказан.

IV.2. Разложение натурального числа в произведение простых чисел

Теорема 19. *Любое положительное целое (т.е. натуральное) число представляется в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Поскольку доказаны база и шаг индукции, теорема доказана.

IV.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема **20**. *Множество простых чисел является бесконечным.*

IV.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема **20**. *Множество простых чисел является бесконечным.*

Доказательство. От противного.

IV.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема 20. *Множество простых чисел является бесконечным.*

Доказательство. Пусть множество простых чисел конечно:
 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

IV.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема 20. *Множество простых чисел является бесконечным.*

Доказательство. Пусть множество простых чисел конечно: $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Тогда по **теореме о разложении в произведение простых чисел** число $p_1 \cdot p_2 \cdot p_n + 1$ представимо в виде произведения простых чисел.

IV.3. Бесконечность множества простых чисел

Теорема 20. *Множество простых чисел является бесконечным.*

Доказательство. Пусть множество простых чисел конечно: $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Тогда по **теореме о разложении в произведение простых чисел** число $p_1 \cdot p_2 \cdot p_n + 1$ представимо в виде произведения простых чисел.

Но число $p_1 \cdot p_2 \cdot p_n + 1$ не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$, противоречие.

V. Функция Эйлера

Определение 20. Функция Эйлера φ определяется формулой: для натурального числа n число $\varphi(n)$ равно количеству натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n .

Рассмотрим пример?

V. Функция Эйлера

Определение 20. Функция Эйлера φ определяется формулой: для натурального числа n число $\varphi(n)$ равно количеству натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n .

Задача нахождения значения функции Эйлера возникает, например, при определении количества **первообразных комплексных корней степени n из 1**, см. **критерий первообразности корня**.

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство.

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n , через A_0 .

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n , через A_0 . Пусть B_1 — множество всех тех чисел из A_0 , которые делятся на p_1 . Количество элементов во множестве B_1 равно

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n , через A_0 . Пусть B_1 — множество всех тех чисел из A_0 , которые делятся на p_1 . Количество элементов во множестве B_1 равно $p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n , через A_0 . Пусть B_1 — множество всех тех чисел из A_0 , которые делятся на p_1 . Количество элементов во множестве B_1 равно $p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Значит во множестве A_1 всех чисел из A_0 , не делящихся на p_1 , количество элементов равно

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство. Обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих n , через A_0 . Пусть B_1 — множество всех тех чисел из A_0 , которые делятся на p_1 . Количество элементов во множестве B_1 равно $p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Значит во множестве A_1 всех чисел из A_0 , не делящихся на p_1 , количество элементов равно

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} - p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство.

Доказательство. Итак, количество всех чисел из A_0 , делящихся на p_1 , равно $p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, а количество всех чисел из A_0 , не делящихся на p_1 , равно

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} - p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Напрашивается провести доказательство методом индукции.

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство. Итак, количество всех чисел из A_0 , делящихся на p_1 , равно $p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, а количество всех чисел из A_0 , не делящихся на p_1 , равно

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} - p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Напрашивается провести доказательство методом индукции. База индукции доказана.

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0 , делящихся на $p_1, p_2, \dots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \setminus B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0 , делящихся на $p_1, p_2, \dots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \setminus B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Тогда во множестве $(A_0 \setminus B_m) \cap B_{m+1}$ количество элементов равно

$$\frac{\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}}{p_{m+1}} =$$

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0 , делящихся на $p_1, p_2, \dots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \setminus B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Тогда во множестве $(A_0 \setminus B_m) \cap B_{m+1}$ количество элементов равно

$$\begin{aligned} & \frac{\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}}{p_{m+1}} = \\ & = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}-1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0 , делящихся на $p_1, p_2, \dots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \setminus B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Тогда во множестве $(A_0 \setminus B_m) \cap B_{m+1}$ количество элементов равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}-1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Следовательно, количество элементов во множестве $A_0 \setminus B_{m+1} = A_0 \setminus ((A_0 \setminus B_m) \cap B_{m+1})$ равно

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0 , делящихся на $p_1, p_2, \dots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \setminus B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Тогда во множестве $(A_0 \setminus B_m) \cap B_{m+1}$ количество элементов равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}-1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Следовательно, количество элементов во множестве $A_0 \setminus B_{m+1} = A_0 \setminus ((A_0 \setminus B_m) \cap B_{m+1})$ равно

$$\begin{aligned} & \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} - \\ & - \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}-1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = \end{aligned}$$

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0 , делящихся на $p_1, p_2, \dots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \setminus B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Следовательно, количество элементов во множестве $A_0 \setminus B_{m+1} = A_0 \setminus ((A_0 \setminus B_m) \cap B_{m+1})$ равно

$$\begin{aligned} & \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} - \\ & - \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}-1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = \\ & = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot \left(p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} - p_{m+1}^{\alpha_{m+1}-1}\right) \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Доказательство. Для любого $s \in A_0$ обозначим через B_s множество всех чисел из A_0 , делящихся на $p_1, p_2, \dots, p_s$. Допустим, что $1 \leq m < k$ и для любого $1 \leq s \leq m$ количество всех чисел из $A_0 \setminus B_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1}\right) \cdot p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Следовательно, количество элементов во множестве $A_0 \setminus B_{m+1} = A_0 \setminus ((A_0 \setminus B_m) \cap B_{m+1})$ равно

$$\begin{aligned} & \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} - \\ & - \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}-1} \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = \\ & = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot \left(p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} - p_{m+1}^{\alpha_{m+1}-1}\right) \cdot p_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Шаг индукции доказан.

V.1. Теорема о вычислении функции Эйлера

Теорема 21. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа, то

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство. Итак, мы доказали, что для любого $1 \leq m \leq n$ количество элементов во множестве всех чисел, не превосходящих n и не делящихся на $p_1, p_2, \dots, p_s$, равно

$$\left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}\right) \cdot p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

При $k = m$ получаем **формулу (14)**.

V.2. Следствие о $\varphi(p^\alpha)$

Следствие **5**. Если p — простое число, то

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}, \quad \varphi(p) = p - 1. \quad (15)$$

Доказательство.

V.2. Следствие о $\varphi(p^\alpha)$

Следствие 5. *Если p — простое число, то*

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}, \quad \varphi(p) = p - 1. \quad (15)$$

Доказательство. Это очевидное следствие **формулы (14)**.

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение.

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы. Ясно, что левыми идеалами являются нулевой идеал $I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы. Ясно, что левыми идеалами являются нулевой идеал $I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ и полугруппа P .

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \right.$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \right.$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \right.$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \right.$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \right.$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \right.$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы.

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы. Продолжая в том же духе, получаем

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Найдем левые идеалы. Продолжая в том же духе, получаем

$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Нетрудно проверить, что список левых идеалов имеет вид:

$$I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad P.$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Аналогично получаем список правых идеалов:

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Аналогично получаем список правых идеалов:

$$I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad I_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$I_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad P.$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

с операцией умножения матриц. Найти все левые, правые и двусторонние **идеалы полугруппы** P .

Решение. Двусторонние идеалы:

$$I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad P.$$

Вернёмся к лекции или рассмотрим **другой пример?**

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение.

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. С чего начать?

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I .

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I .

Как задать I ?

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I .

Как задать I ?

I — это подмножество множества $\mathbb{N}$.

Задать множество — значит

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I .

Как задать I ?

I — это подмножество множества $\mathbb{N}$.

Задать множество — значит описать его элементы.

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $m \in I$.

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $m \in I$.

Полугрупповая операция — умножение. Поэтому для чисел m и 6 напрашивается рассмотреть

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $m \in I$.

Полугрупповая операция — умножение. Поэтому для чисел m и 6 напрашивается рассмотреть произведение или частное.

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$. По определению *идеала полугруппы* $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению *идеала полугруппы* $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Пример 2. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

Пример 2. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} =$$

Пример 2. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{6kx \mid \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\} =$$

Пример 2. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{6kx \mid \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\} = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению *идеала полугруппы* $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является *идеалом*: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{6kx \mid \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\} = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq J.$$

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению *идеала полугруппы* $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является *идеалом*: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{6kx \mid \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\} = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq J.$$

Значит, $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является *идеалом*.

Пример 2. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{6kx \mid \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\} = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq J.$$

Значит, $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**.

Ясно, что это минимальный идеал, содержащий 6.

Пример 2. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{6kx \mid \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\} = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq J.$$

Значит, $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**.

Ясно, что это минимальный идеал, содержащий 6.

Все ли в решении оптимально?

Пример 2. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал**, включающий в себя число 6.

Решение. Обозначим искомый идеал через I . Возьмём $t \in I$.

По определению **идеала полугруппы** $\forall k \in \mathbb{N} \quad 6k \in I$.

Поэтому $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq I$.

Проверим, что $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**: если $x \in \mathbb{N}$, то

$$x \cdot J = x \cdot \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{6kx \mid \{k, x\} \subseteq \mathbb{N}\} = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq J.$$

Значит, $J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является **идеалом**.

Ясно, что это минимальный идеал, содержащий 6.

Мы не использовали t , можно его не вводить.

Пример 2. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал*, включающий в себя число 6.

Ответ. Искомый идеал можно представить в виде

$$\{6k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{6; 12; 18; 24; \dots\}.$$

Вернёмся к лекции?

Пример 3. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

Пример 3. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J =$$

Пример 3. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cdot \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} =$$

Пример 3. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cdot \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} = \{54mk \mid \{k, m\} \subseteq \mathbb{N}\} =$$

Пример 3. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} I \cdot J &= \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cdot \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} = \{54mk \mid \{k, m\} \subseteq \mathbb{N}\} = \\ &= \{54n \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Пример 3. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$I \cap J =$$

Пример 3. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} =$$

Пример 3. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} =$$

$$6k = 9m \Rightarrow$$

Пример 3. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} =$$

$$6k = 9m \Rightarrow 2k = 3m \Rightarrow$$

Пример 3. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} =$$

$$6k = 9m \Rightarrow 2k = 3m \Rightarrow \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 3. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} =$$

$$6k = 9m \Rightarrow 2k = 3m \Rightarrow \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \Rightarrow 18s = 6k = 9m = 18t.$$

Пример 3. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} = \{18n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$6k = 9m \Rightarrow 2k = 3m \Rightarrow \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \Rightarrow 18s = 6k = 9m = 18t.$$

Пример 3. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{18n \mid n \in \mathbb{N}\} = I \cap J.$$

Пример 3. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{54; 108; 162; 216; \dots\}$$

$$\{18n \mid n \in \mathbb{N}\} = I \cap J.$$

Пример 3. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{54; 108; 162; 216; \dots\}$$

$$\{18; 36; 54; 72; \dots\} = \{18n \mid n \in \mathbb{N}\} = I \cap J.$$

Пример 3. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} I \cdot J &= \{54n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{54; 108; 162; 216; \dots\} \subseteq \\ &\subseteq \{18; 36; 54; 72; \dots\} = \{18n \mid n \in \mathbb{N}\} = I \cap J. \end{aligned}$$

Вернёмся к лекции?

Пример 4. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал* M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с *идеалом* $K = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9t \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

Пример 4. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал* M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с *идеалом* $K = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9t \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$M =$$

Пример 4. В **полугруппе** $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$M = I ? J =$$

Пример 4. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал* M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с *идеалом* $K = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9t \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$M = I \cup J =$$

Пример 4. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал* M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с *идеалом* $K = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$M = I \cup J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} =$$

$$\{3n \mid n \in \mathbb{N}\} = K.$$

Пример 4. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал* M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с *идеалом* $K = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M &= I \cup J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{6; 12; 18; 24; \dots\} \cup \{9; 18; 27; 36; \dots\} \\ &\quad \{3n \mid n \in \mathbb{N}\} = K. \end{aligned}$$

Пример 4. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал* M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с *идеалом* $K = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M &= I \cup J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{6; 12; 18; 24; \dots\} \cup \{9; 18; 27; 36; \dots\} = \{3; 6; 9; 12; \dots\} = \\ &= \{3n \mid n \in \mathbb{N}\} = K. \end{aligned}$$

Пример 4. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал* M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с *идеалом* $K = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M &= I \cup J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{9m \mid m \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{6; 12; 18; 24; \dots\} \cup \{9; 18; 27; 36; \dots\} \neq \{3; 6; 9; 12; \dots\} = \\ &= \{3n \mid n \in \mathbb{N}\} = K. \end{aligned}$$

Пример 4. В *полугруппе* $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией умножения найдите минимальный *идеал* M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с *идеалом* $K = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $J = \{9t \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M &= I \cup J = \{6k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{9t \mid t \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{6; 12; 18; 24; \dots\} \cup \{9; 18; 27; 36; \dots\} \neq \{3; 6; 9; 12; \dots\} = \\ &= \{3n \mid n \in \mathbb{N}\} = K. \end{aligned}$$

Например, $3 \in K$, но $3 \notin I \cup J$.

Вернёмся к лекции?

Пример 5. В *кольце* $\mathbb{Z}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

Пример 5. В *кольце* $\mathbb{Z}$ найдите *произведение* и пересечение *идеалов* $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J =$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cdot \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} =$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} I \cdot J &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cdot \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{54m_1k_1 + \dots + 54m_sk_s \mid \{k, m\} \subseteq \mathbb{Z}\} = \end{aligned}$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} I \cdot J &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cdot \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{54m_1k_1 + \dots + 54m_s k_s \mid \{k, m\} \subseteq \mathbb{Z}\} = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$I \cap J =$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} =$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} =$$

$$6k = 9m \Rightarrow$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} =$$

$$6k = 9m \Rightarrow 2k = 3m \Rightarrow$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} =$$

$$6k = 9m \Rightarrow 2k = 3m \Rightarrow \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} =$$

$$6k = 9m \Rightarrow 2k = 3m \Rightarrow \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \Rightarrow 18s = 6k = 9m = 18t.$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$I \cap J = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{18n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$6k = 9m \Rightarrow 2k = 3m \Rightarrow \begin{cases} k = 3s, \\ m = 2t \end{cases} \Rightarrow 18s = 6k = 9m = 18t.$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\} ?$$

$$? \quad \{18n \mid n \in \mathbb{Z}\} = I \cap J.$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{54; -54; 108; -108; 162; -162; \dots\} ?$$

$$? \{18n \mid n \in \mathbb{Z}\} = I \cap J.$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$I \cdot J = \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{54; -54; 108; -108; 162; -162; \dots\} ?$$

$$? \{18; -18; 36; -36; 54; -54; 72; -72; \dots\} = \{18n \mid n \in \mathbb{Z}\} = I \cap J.$$

Пример 5. В **кольце** $\mathbb{Z}$ найдите **произведение** и пересечение **идеалов** $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} I \cdot J &= \{54n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{54; -54; 108; -108; 162; -162; \dots\} \subseteq \\ &\subseteq \{18; -18; 36; -36; 54; -54; 72; -72; \dots\} = \{18n \mid n \in \mathbb{Z}\} = I \cap J. \end{aligned}$$

Сравните с результатами **решения** задачи 3.

Вернёмся к лекции?

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9t \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$M =$$

$$= \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K.$$

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9t \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$M =$$

$$= \{\pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 15; \pm 18; \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K.$$

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M = I \cap J &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{\pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 15; \pm 18; \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K. \end{aligned}$$

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 M = I \cap J &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\
 &= \{6; -6; 12; -12; \dots\} \cap \{9; -9; 18; -18; \dots\} = \\
 &= \{\pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 15; \pm 18; \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K.
 \end{aligned}$$

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 M = I \cap J &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\
 &= \{6; -6; 12; -12; \dots\} \cap \{9; -9; 18; -18; \dots\} = \\
 &= \{\pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 15; \pm 18; \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K.
 \end{aligned}$$

$$3 = \underbrace{\quad}_{\in I} + \underbrace{\quad}_{\in J},$$

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M = I \vee J &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \vee \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{6; -6; 12; -12; \dots\} \vee \{9; -9; 18; -18; \dots\} = \\ &= \{\pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 15; \pm 18; \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K. \end{aligned}$$

$$3 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{9}_{\in J} \in M,$$

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M = I \ ? \ J &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \ ? \ \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{6; -6; 12; -12; \dots\} \ ? \ \{9; -9; 18; -18; \dots\} = \\ &= \{\pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 15; \pm 18; \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K. \end{aligned}$$

$$3 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{9}_{\in J} \in M,$$

$$-15 = \underbrace{?}_{\in I} + \underbrace{?}_{\in J},$$

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M = I \cap J &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{6; -6; 12; -12; \dots\} \cap \{9; -9; 18; -18; \dots\} = \\ &= \{\pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 15; \pm 18; \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K. \end{aligned}$$

$$3 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{9}_{\in J} \in M,$$

$$-15 = \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{(-9)}_{\in J} \in M,$$

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M &= I + J = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} + \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{6; -6; 12; -12; \dots\} + \{9; -9; 18; -18; \dots\} = \\ &= \{\pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 15; \pm 18; \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{9}_{\in J} \in M, \\ -15 &= \underbrace{-6}_{\in I} + \underbrace{(-9)}_{\in J} \in M, \dots \end{aligned}$$

Пример 6. В **кольце** $\mathbb{Z}$ натуральных чисел найдите минимальный **идеал** M , включающий в себя числа 6 и 9. Поверьте, совпадает ли M с **идеалом** $K = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Выразите M через $I = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $J = \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Решение.

$$\begin{aligned} M = I + J &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} + \{9m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{6; -6; 12; -12; \dots\} + \{9; -9; 18; -18; \dots\} = \\ &= \{\pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 15; \pm 18; \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K. \end{aligned}$$

Сравните с результатами **решения** задачи 4.

Вернёмся к лекции?

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ слагаемых}} =$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ слагаемых}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ слагаемых}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} =$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ b''_1 & b''_2 & b''_3 \\ c''_1 & c''_2 & c''_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ b''_1 & b''_2 & b''_3 \\ c''_1 & c''_2 & c''_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ b''_1 & b''_2 & b''_3 \\ c''_1 & c''_2 & c''_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} p'_1 & p'_2 & p'_3 \\ q'_1 & q'_2 & q'_3 \\ r'_1 & r'_2 & r'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p''_1 & p''_2 & p''_3 \\ q''_1 & q''_2 & q''_3 \\ r''_1 & r''_2 & r''_3 \end{pmatrix} =$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\dots = \begin{pmatrix} p'_1 & 0 & 0 \\ q'_1 & 0 & 0 \\ r'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p''_1 & p''_2 & p''_3 \\ q''_1 & q''_2 & q''_3 \\ r''_1 & r''_2 & r''_3 \end{pmatrix} =$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\dots = \begin{pmatrix} p'_1 & 0 & 0 \\ q'_1 & 0 & 0 \\ r'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p''_1 & p''_2 & p''_3 \\ q''_1 & q''_2 & q''_3 \\ r''_1 & r''_2 & r''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 p''_1 & p'_1 p''_2 & p'_1 p''_3 \\ q'_1 p''_1 & q'_1 p''_2 & q'_1 p''_3 \\ r'_1 p''_1 & r'_1 p''_2 & r'_1 p''_3 \end{pmatrix},$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p'_1 p''_1 & p'_1 p''_2 & p'_1 p''_3 \\ q'_1 p''_1 & q'_1 p''_2 & q'_1 p''_3 \\ r'_1 p''_1 & r'_1 p''_2 & r'_1 p''_3 \end{pmatrix} =$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p'_1 p''_1 & p'_1 p''_2 & p'_1 p''_3 \\ q'_1 p''_1 & q'_1 p''_2 & q'_1 p''_3 \\ r'_1 p''_1 & r'_1 p''_2 & r'_1 p''_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m + a'_1 + a''_1 + p'_1 p''_1 & a'_2 + p'_1 p''_2 & a'_3 + p'_1 p''_3 \\ b''_1 + q'_1 p''_1 & q'_1 p''_2 & q'_1 p''_3 \\ c''_1 + r'_1 p''_1 & r'_1 p''_2 & r'_1 p''_3 \end{pmatrix} =$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_1 & 0 & 0 \\ b''_1 & 0 & 0 \\ c''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p'_1 p''_1 & p'_1 p''_2 & p'_1 p''_3 \\ q'_1 p''_1 & q'_1 p''_2 & q'_1 p''_3 \\ r'_1 p''_1 & r'_1 p''_2 & r'_1 p''_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m + a'_1 + a''_1 + p'_1 p''_1 & a'_2 + p'_1 p''_2 & a'_3 + p'_1 p''_3 \\ b''_1 + q'_1 p''_1 & q'_1 p''_2 & q'_1 p''_3 \\ c''_1 + r'_1 p''_1 & r'_1 p''_2 & r'_1 p''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v & \alpha & \beta \\ w & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: искомый идеал равен

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: искомый идеал равен

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: искомый идеал равен

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v & \alpha & \beta \\ w & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix} \mid \right\}.$$

Пример 7. В кольце $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размерности 3×3 найти минимальный идеал, содержащий $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: искомый идеал равен

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v & \alpha & \beta \\ w & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix} \mid \{u_i, v, w, \alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \mathbb{R} \right\}.$$

Вернемся к лекции?

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline & \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline & 3 \end{array}$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ 360 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ 360 & 3 \\ \hline 18 & \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ 360 & 3 \\ \hline & 18 \end{array} \Rightarrow 18 =$$

Пример 8. *Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.*

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ 360 & 3 \\ \hline 18 & \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
 378 & 120 \\
 \hline
 360 & 3 \\
 \hline
 18 &
 \end{array}
 \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l}
 120 & 18 \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \\ \hline 18 & \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$
$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline & 6 \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \\ \hline 18 & \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$
$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
 378 & 120 \\
 \hline
 360 & 3 \\
 \hline
 18 &
 \end{array}
 \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l}
 120 & 18 \\
 \hline
 108 & 6 \\
 \hline
 12 &
 \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ 360 & 3 \\ \hline & 18 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ 108 & 6 \\ \hline & 12 \end{array} \Rightarrow 12 =$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ 360 & 3 \\ \hline & 18 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ 108 & 6 \\ \hline & 12 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

18

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

12

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline & \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

18

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

12

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

18

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

12

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

18

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

12

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 6 \\ \hline 6 & \end{array}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

18

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

12

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \Rightarrow 6 =$$

6

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

18

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

12

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \Rightarrow 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

6

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\underline{18}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\underline{12}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \Rightarrow 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$\underline{6}$$

Число 12 делится на 6 нацело. Значит, 6 — НОД чисел 378 и 120.

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\underline{18}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\underline{12}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \Rightarrow 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$\underline{6}$$

$$6 = 18 - 1 \cdot 12 =$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$
$$\underline{18}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$
$$\underline{12}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \Rightarrow 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$
$$\underline{6}$$

$$6 = 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (120 - 6 \cdot 18) =$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\underline{18}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\underline{12}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \Rightarrow 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$\underline{6}$$

$$6 = 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (120 - 6 \cdot 18) = 7 \cdot 18 - 1 \cdot 120 =$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\underline{18}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\underline{12}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \Rightarrow 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$\underline{6}$$

$$\begin{aligned} 6 &= 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (120 - 6 \cdot 18) = 7 \cdot 18 - 1 \cdot 120 = \\ &= 7 \cdot (378 - 3 \cdot 120) - 1 \cdot 120 = \end{aligned}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

$$\underline{18}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

$$\underline{12}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \Rightarrow 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

$$\underline{6}$$

$$\begin{aligned} 6 &= 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (120 - 6 \cdot 18) = 7 \cdot 18 - 1 \cdot 120 = \\ &= 7 \cdot (378 - 3 \cdot 120) - 1 \cdot 120 = 7 \cdot 378 - 22 \cdot 120. \end{aligned}$$

Пример 8. Представьте НОД чисел 120 и 378 в виде линейной комбинации этих чисел.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 120 \\ \hline 360 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 378 - 3 \cdot 120,$$

18

$$\begin{array}{r|l} 120 & 18 \\ \hline 108 & 6 \end{array} \Rightarrow 12 = 120 - 6 \cdot 18,$$

12

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \Rightarrow 6 = 18 - 1 \cdot 12,$$

6

$$6 = 7 \cdot 378 - 22 \cdot 120.$$

Вернёмся к лекции?

Задача VI.1. (Ответ приведен на стр.648.) Пусть $\mathcal{P}$ — **полугруппа** матриц размерности 2×2 . Укажите множества, которые являются **идеалами полугруппы** $\mathcal{P}$:

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$ — множество вырожденных матриц, т.е. матриц с **нулевым детерминантом**;

2) множество B невырожденных матриц, т.е. матриц с **ненулевым детерминантом**;

3) C — множество симметричных матриц, т.е. матриц, не изменяющихся при **транспонировании**;

4) D — множество **верхних треугольных матриц**;

5) F — множество **диагональных матриц**;

6) G — множество всех матриц вида $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) H — множество матриц вида λE , где E — **единичная матрица**.

Задача VI.2. (Ответ приведен на стр.651.) Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача VI.3. (Ответ приведен на стр.658.) Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2 , у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Задача VII.4. (Ответ приведен на стр.664.) Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **КОЛЬЦОМ**.

Задача VIII.5. (Ответ приведен на стр.684.) Рассмотрим **КОЛЬ-**
ЦО $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$,
заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) =$
 $= (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j,$
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0.$ Покажите, что это коммутативное
кольцо, найдите его **идеалы**.

Задача VIII.6. (Ответ приведен на стр.725.) Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$

многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \mid \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \mid \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \mid \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Задача VIII.7. (Ответ приведен на стр.741.) Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача VIII.8. (Ответ приведен на стр.749.) Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Задача IX.9. (Ответ приведен на стр.763.) Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Задача IX.10. (Ответ приведен на стр.769.) Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации ЭТИХ многочленов.

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение.

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Найдем значение **функции Эйлера** $\varphi(12)$.

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Найдем значение **функции Эйлера** $\varphi(12)$.

Список натуральных чисел, взаимно простых с числом 12, имеет вид:

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Найдем значение **функции Эйлера** $\varphi(12)$.

Список натуральных чисел, взаимно простых с числом 12, имеет вид:

1; 5; 7; 11

Поэтому

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Найдем значение **функции Эйлера** $\varphi(12)$.

Список натуральных чисел, взаимно простых с числом 12, имеет вид:

1; 5; 7; 11

Поэтому $\varphi(12) = 4$.

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) =$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) = |\{1;$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) = |\{1; 2; \dots; 15\} \cap \{x \in \mathbb{N} : \gcd(x, 15) = 1\}|$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) = |\{1; 2; 4; \quad \quad \quad \}|$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) = |\{1; 2; 4; 7; \quad \quad \quad \}|$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) = |\{1; 2; 4; 7; 8; \quad \quad \quad \}|$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) = |\{1; 2; 4; 7; 8; 11; \quad \}|$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) = |\{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; \quad \}|$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) = |\{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\}| =$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Далее, найдем значение **функции Эйлера** от 15.

$$\varphi(15) = |\{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\}| = 8.$$

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Наконец, найдем значение **функции Эйлера** для числа 17.

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Наконец, найдем значение **функции Эйлера** для числа 17. Число 17 — простое, поэтому все натуральные числа, меньшие 17, являются взаимно простыми с 17. Значит,

Пример 9 (вычисления функции Эйлера). *Вычислите по определению $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.*

Решение. Наконец, найдем значение **функции Эйлера** для числа 17. Число 17 — простое, поэтому все натуральные числа, меньшие 17, являются взаимно простыми с 17. Значит,

$$\varphi(17) = 16.$$

Вернуться к лекции?

Задача IX.11. (Ответ приведен на стр.781.) Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Задача IX.12. (Ответ приведен на стр.796.) Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Пусть $\mathcal{P}$ — **полугруппа** матриц размерности 2×2 . Укажите множества, которые являются **идеалами полугруппы** $\mathcal{P}$:

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$ — множество вырожденных матриц, т.е. матриц с **нулевым детерминантом**;

2) множество B невырожденных матриц, т.е. матриц с **ненулевым детерминантом**;

3) C — множество симметричных матриц, т.е. матриц, не изменяющихся при **транспонировании**;

4) D — множество **верхних треугольных матриц**;

5) F — множество **диагональных матриц**;

6) G — множество всех матриц вида $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) H — множество матриц вида λE , где E — **единичная матрица**.

Задача 1. Пусть $\mathcal{P}$ — **полугруппа** матриц размерности 2×2 . Укажите множества, которые являются **идеалами полугруппы** $\mathcal{P}$:

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$ — множество вырожденных матриц, т.е. матриц с **нулевым детерминантом**;

2) множество B невырожденных матриц, т.е. матриц с **ненулевым детерминантом**;

3) C — множество симметричных матриц, т.е. матриц, не изменяющихся при **транспонировании**;

4) D — множество **верхних треугольных матриц**;

5) F — множество **диагональных матриц**;

6) G — множество всех матриц вида $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) H — множество матриц вида λE , где E — **единичная матрица**.

Ответ.

Задача 1. Пусть $\mathcal{P}$ — **полугруппа** матриц размерности 2×2 . Укажите множества, которые являются **идеалами полугруппы** $\mathcal{P}$:

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$ — множество вырожденных матриц, т.е. матриц с **нулевым детерминантом**;

2) множество B невырожденных матриц, т.е. матриц с **ненулевым детерминантом**;

3) C — множество симметричных матриц, т.е. матриц, не изменяющихся при **транспонировании**;

4) D — множество **верхних треугольных матриц**;

5) F — множество **диагональных матриц**;

6) G — множество всех матриц вида $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) H — множество матриц вида λE , где E — **единичная матрица**.

Ответ. Идеалами полугруппы $\mathcal{P}$ являются множества A и G .

Решение задачи 2.

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц:
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Ответ.

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц:
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц:
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц:
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix},$$

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix},$$

следовательно, идеал полугруппы $\mathcal{M}$, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, совпадает со множеством всех вырожденных матриц размерности 2×2 .

Задача 2. Рассмотрим **полугруппу** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Найти **идеалы полугруппы** $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix},$$

следовательно, идеал полугруппы $\mathcal{M}$, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, совпадает со множеством всех вырожденных матриц размерности 2×2 .

Для множеств $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ результат тот же самый.

Идеал полугруппы $\mathcal{M}$ идеал, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, совпадает со всей полугруппой.

Решение задачи 3.

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2 , у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2 , у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2 , у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2 , у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Идеалами, кроме P , являются множества:

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2 , у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Идеалами, кроме P , являются множества:

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Задача 3. Пусть $\mathcal{P}$ полугруппа таких матриц размерности 2×2 , у которых в каждом столбце все элементы, кроме одного, равны 0, а единственный ненулевой элемент столбца равен 1. Найдите все идеалы этой полугруппы.

Ответ. Носитель этой полугруппы $\mathcal{P}$ равен

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Идеалами, кроме P , являются множества:

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение задачи 4.

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$.

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} +$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} +$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$\begin{aligned} &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) = \\ &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + \\ &\quad + a_{i1}(-b_{11} - b_{12}) + a_{i2}(-b_{21} - b_{22}) + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{13} - b_{23}) = \end{aligned}$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$\begin{aligned} &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) = \\ &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + \\ &\quad + a_{i1}(-b_{11} - b_{12}) + a_{i2}(-b_{21} - b_{22}) + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{13} - b_{23}) = \\ &= 2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11} + 2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12} - \\ &\quad - a_{i1}b_{11} - a_{i1}b_{12} - a_{i2}b_{21} - a_{i2}b_{22} - (a_{i1} + a_{i2})(-(-b_{11} - b_{12}) - (-b_{21} - b_{22})) = \end{aligned}$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$\begin{aligned} &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) = \\ &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + \\ &\quad + a_{i1}(-b_{11} - b_{12}) + a_{i2}(-b_{21} - b_{22}) + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{13} - b_{23}) = \\ &= 2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11} + 2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12} - \\ &\quad - a_{i1}b_{11} - a_{i1}b_{12} - a_{i2}b_{21} - a_{i2}b_{22} - (a_{i1} + a_{i2})(-(-b_{11} - b_{12}) - (-b_{21} - b_{22})) = 0. \end{aligned}$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$\begin{aligned} &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) = \\ &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + \\ &\quad + a_{i1}(-b_{11} - b_{12}) + a_{i2}(-b_{21} - b_{22}) + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{13} - b_{23}) = \\ &= 2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11} + 2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12} - \\ &\quad - a_{i1}b_{11} - a_{i1}b_{12} - a_{i2}b_{21} - a_{i2}b_{22} - (a_{i1} + a_{i2})(-(-b_{11} - b_{12}) - (-b_{21} - b_{22})) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что сумма всех элементов столбца матрицы $\mathbf{C}$ равна 0.

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. В матрице $\mathbf{A}$ из K имеем для $i \in \{1; 2; 3\}$, что $a_{i3} = -a_{i1} - a_{i2}$ и $a_{3i} = -a_{1i} - a_{2i}$. Поэтому если $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, то по **определению произведения матриц**

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{1j} - b_{2j}) = 2a_{i1}b_{1j} + 2a_{i2}b_{2j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i2}b_{1j}.$$

Поэтому $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} =$

$$\begin{aligned} &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) = \\ &= (2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11}) + (2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12}) + \\ &\quad + a_{i1}(-b_{11} - b_{12}) + a_{i2}(-b_{21} - b_{22}) + (-a_{i1} - a_{i2})(-b_{13} - b_{23}) = \\ &= 2a_{i1}b_{11} + 2a_{i2}b_{21} + a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{11} + 2a_{i1}b_{12} + 2a_{i2}b_{22} + a_{i1}b_{22} + a_{i2}b_{12} - \\ &\quad - a_{i1}b_{11} - a_{i1}b_{12} - a_{i2}b_{21} - a_{i2}b_{22} - (a_{i1} + a_{i2})(-(-b_{11} - b_{12}) - (-b_{21} - b_{22})) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что сумма всех элементов столбца матрицы $\mathbf{C}$ равна 0. Следовательно, произведение элементов из K есть элемент из K .

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. Очевидно, что сумма матриц из K принадлежит K :

$$d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. Очевидно, что сумма матриц из K принадлежит K :

$$d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} = (a_{i1} + b_{i1}) + (a_{i2} + b_{i2}) + (a_{i3} + b_{i3}) =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. Очевидно, что сумма матриц из K принадлежит K :

$$d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} = (a_{i1} + b_{i1}) + (a_{i2} + b_{i2}) + (a_{i3} + b_{i3}) = \underbrace{a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}}_{=0} + \underbrace{b_{i1} + b_{i2} + b_{i3}}_{=0} =$$

Задача 4. Пусть K — множество таких матриц размерности 3×3 , у которых сумма всех элементов строки и сумма всех элементов столбца равны 0. Показать, что множество K с операциями сложения и умножения матриц является **кольцом**.

Ответ. Очевидно, что сумма матриц из K принадлежит K :

$$d_{i1} + d_{i2} + d_{i3} = (a_{i1} + b_{i1}) + (a_{i2} + b_{i2}) + (a_{i3} + b_{i3}) = \underbrace{a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}}_{=0} + \underbrace{b_{i1} + b_{i2} + b_{i3}}_{=0} = 0.$$

Решение задачи 5.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
 Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
 Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = \\ &= ((a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j) + (u + vi + wj) = \end{aligned}$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$, $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = \\ &= ((a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j) + (u + vi + wj) = \\ &= (a+x-2ax+u-2u(a+x-2ax))+(b+y-2by+v-2v(b+y-2by))i+(c+z-2cz+w-2w(c+z-2cz))j = \end{aligned}$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$, $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = \\ &= ((a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j) + (u + vi + wj) = \\ &= (a + x - 2ax + u - 2u(a + x - 2ax)) + (b + y - 2by + v - 2v(b + y - 2by))i + (c + z - 2cz + w - 2w(c + z - 2cz))j = \\ &= (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\ &+ (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \end{aligned}$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
 Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\ + (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j.$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$L = ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\
+ (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \\
R = (a + bi + cj) + ((x + yi + zj) + (u + vi + wj)) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$, $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\ &+ (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \\ R &= (a + bi + cj) + ((x + yi + zj) + (u + vi + wj)) = \\ &= (a + bi + cj) + ((x + u - 2xu) + (y + v - 2yv)i + (z + w - 2zw)j) = \end{aligned}$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$, $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\ &\quad + (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \\ R &= (a + bi + cj) + ((x + yi + zj) + (u + vi + wj)) = \\ &= (a + bi + cj) + ((x + u - 2xu) + (y + v - 2yv)i + (z + w - 2zw)j) = \\ &= (a + x + u - 2xu - 2a(x + u - 2xu)) + (b + y + v - 2yv - 2b(y + v - 2yv))i + (c + z + w - 2zw - 2c(z + w - 2zw))j = \end{aligned}$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$, $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned}
 L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\
 &\quad + (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \\
 R &= (a + bi + cj) + ((x + yi + zj) + (u + vi + wj)) = \\
 &= (a + bi + cj) + ((x + u - 2xu) + (y + v - 2yv)i + (z + w - 2zw)j) = \\
 &= (a + x + u - 2xu - 2a(x + u - 2xu)) + (b + y + v - 2yv - 2b(y + v - 2yv))i + (c + z + w - 2zw - 2c(z + w - 2zw))j = \\
 &\quad = (a + x + u - 2xu - 2ax - 2au + 4axu) + \\
 &\quad + (b + y + v - 2yv - 2by - 2bv + 4byv)i + (c + z + w - 2zw - 2cz - 2cw + 4czw)j.
 \end{aligned}$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$, $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\ &\quad + (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \\ R &= (a + bi + cj) + ((x + yi + zj) + (u + vi + wj)) = (a + x + u - 2xu - 2ax - 2au + 4axu) + \\ &\quad + (b + y + v - 2yv - 2by - 2bv + 4byv)i + (c + z + w - 2zw - 2cz - 2cw + 4czw)j. \end{aligned}$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\ &\quad + (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \\ R &= (a + bi + cj) + ((x + yi + zj) + (u + vi + wj)) = (a + x + u - 2xu - 2ax - 2au + 4axu) + \\ &\quad + (b + y + v - 2yv - 2by - 2bv + 4byv)i + (c + z + w - 2zw - 2cz - 2cw + 4czw)j. \end{aligned}$$

Следовательно, $L = R$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*.
 Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\ &\quad + (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \\ R &= (a + bi + cj) + ((x + yi + zj) + (u + vi + wj)) = (a + x + u - 2xu - 2ax - 2au + 4axu) + \\ &\quad + (b + y + v - 2yv - 2by - 2bv + 4byv)i + (c + z + w - 2zw - 2cz - 2cw + 4czw)j. \end{aligned}$$

Следовательно, $L = R$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$, $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\ &\quad + (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \\ R &= (a + bi + cj) + ((x + yi + zj) + (u + vi + wj)) = (a + x + u - 2xu - 2ax - 2au + 4axu) + \\ &\quad + (b + y + v - 2yv - 2by - 2bv + 4byv)i + (c + z + w - 2zw - 2cz - 2cw + 4czw)j. \end{aligned}$$

Следовательно, $L = R$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$, $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Проверим **ассоциативность**. Надо проверить *равенство*. Сравним левую L и правую R части **доказываемого равенства**:

$$\begin{aligned} L &= ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) + (u + vi + wj) = (a + x - 2ax + u - 2au - 2xu + 4axu) + \\ &\quad + (b + y - 2by + v - 2vb - 2vy + 4byv)i + (c + z - 2cz + w - 2wc - 2wz + 4czw)j. \\ R &= (a + bi + cj) + ((x + yi + zj) + (u + vi + wj)) = (a + x + u - 2xu - 2ax - 2au + 4axu) + \\ &\quad + (b + y + v - 2yv - 2by - 2bv + 4byv)i + (c + z + w - 2zw - 2cz - 2cw + 4czw)j. \end{aligned}$$

Следовательно, $L = R$.

Ассоциативность операции $+$ доказана.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна:

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a + bi + cj) * (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a + bi + cj) * (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) = 0,$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a + bi + cj) * (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) = 0,$$

$$(a + bi + cj) * ((x + yi + zj) * (u + vi + wj)) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a + bi + cj) * (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) = 0,$$

$$(a + bi + cj) * ((x + yi + zj) * (u + vi + wj)) = 0,$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна:

$$((a + bi + cj) * (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) = 0,$$

$$(a + bi + cj) * ((x + yi + zj) * (u + vi + wj)) = 0,$$

$$\underbrace{((a + bi + cj) * (x + yi + zj)) * (u + vi + wj)}_{=0} = \underbrace{(a + bi + cj) * ((x + yi + zj) * (u + vi + wj))}_{=0}.$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами:
 $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна.

Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна.

Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна.

Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) = 0,$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна.

Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) = 0,$$

$$(a + bi + cj) * (u + vi + wj) + (x + yi + zj) * (u + vi + wj) =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна.

Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) = 0,$$

$$(a + bi + cj) * (u + vi + wj) + (x + yi + zj) * (u + vi + wj) = 0 + 0 =$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна.

Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) = 0,$$

$$(a + bi + cj) * (u + vi + wj) + (x + yi + zj) * (u + vi + wj) = 0 + 0 = 0,$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$, $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна.

Дистрибутивность также не вызывает сомнений:

$$\begin{aligned}
 & ((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) * (u + vi + wj) = 0, \\
 & (a + bi + cj) * (u + vi + wj) + (x + yi + zj) * (u + vi + wj) = 0 + 0 = 0, \\
 & \underbrace{((a + bi + cj) + (x + yi + zj)) * (u + vi + wj)}_{=0} = \\
 & = \underbrace{(a + bi + cj) * (u + vi + wj)}_{=0} + \underbrace{(x + yi + zj) * (u + vi + wj)}_{=0}.
 \end{aligned}$$

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. **Ассоциативность** операции $+$ доказана.

Нейтральным относительно сложения является элемент $0 = 0 + 0i + 0j$.

Обратным к элементу $a + bi + cj$ относительно сложения является выражение $-a - bi - cj$.

Коммутативность сложения очевидна.

Итак, доказано, что относительно сложения S является **абелевой группой**.

Ассоциативность операции $*$ очевидна.

Дистрибутивность выполняется. Таким образом, доказано, что S является **кольцом**.

Задача 5. Рассмотрим **кольцо** $S = \{0; j; i; i + j; 1; 1 + j; 1 + i; 1 + i + j\}$ с операциями $+$ и $*$, заданными формулами: $(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x - 2ax) + (b + y - 2by)i + (c + z - 2cz)j$,
 $(a + bi + cj) * (x + yi + zj) = 0$. Покажите, что это коммутативное кольцо, найдите его **идеалы**.

Ответ. Носитель каждой подгруппы аддитивной группы кольца S является носителем идеала этого кольца. При этом, например, идеал

$$\{0; 1; i; 1 + i\}.$$

не является главным.

Решение задачи 6.

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ.

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Действительно,

$$\int_0^1 (1 - 2x) dx = 0,$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Действительно,

$$\int_0^1 (1 - 2x) dx = 0, \quad \int_0^1 x(1 - 2x) dx =$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Действительно,

$$\int_0^1 (1 - 2x) dx = 0, \quad \int_0^1 x(1 - 2x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_{x=0}^{x=1}$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**, поскольку, например,

$$1 - 2x \in A, \quad \text{но} \quad x \cdot (1 - 2x) \notin A.$$

Действительно,

$$\int_0^1 (1 - 2x) dx = 0, \quad \int_0^1 x(1 - 2x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \neq 0,$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \mid \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \mid \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \mid \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.
Множество B есть идеал кольца.

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \mid \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \mid \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \mid \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.

Множество B есть идеал кольца.

Множество C не является **идеалом** кольца, так как,

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.

Множество B есть идеал кольца.

Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.

Множество B есть идеал кольца.

Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left. \frac{d(x-2)^2}{dx} \right|_{x=2} = 0, \quad \text{но}$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.

Множество B есть идеал кольца.

Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left. \frac{d(x-2)^2}{dx} \right|_{x=2} = 0, \quad \text{но} \quad \left. \frac{d(x(x-2)^2)}{dx} \right|_{x=2} =$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.

Множество B есть идеал кольца.

Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left. \frac{d(x-2)^2}{dx} \right|_{x=2} = 0, \quad \text{но} \quad \left. \frac{d(x(x-2)^2)}{dx} \right|_{x=2} = \left. \frac{d(x^3 - 2x^2 + x)}{dx} \right|_{x=2} =$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.

Множество B есть идеал кольца.

Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left. \frac{d(x-2)^2}{dx} \right|_{x=2} = 0, \quad \text{но} \quad \left. \frac{d(x(x-2)^2)}{dx} \right|_{x=2} = \left. \frac{d(x^3 - 2x^2 + x)}{dx} \right|_{x=2} = (3x^2 - 4x + 1) \Big|_{x=2}$$

Задача 6. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{P}(x)$ многочленов с рациональными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Определить, какие из множеств являются идеалами кольца $\mathcal{P}(x)$:

1) $A = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ \int_0^1 p(x) dx = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, среднее значение которых на отрезке $[0; 1]$ равно 0;

2) $B = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, для которых число 2 является корнем;

3) $C = \left\{ p(x) \left| \begin{cases} p(x) \in \mathcal{P}(x), \\ p'(2) = 0 \end{cases} \right. \right\}$, т.е. множество всех тех многочленов из $\mathcal{P}(x)$, производная которых обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ. Множество A не является **идеалом**.

Множество B есть идеал кольца.

Множество C не является **идеалом** кольца, так как, например,

$$\left. \frac{d(x-2)^2}{dx} \right|_{x=2} = 0, \quad \text{но} \quad \left. \frac{d(x(x-2)^2)}{dx} \right|_{x=2} = \left. \frac{d(x^3 - 2x^2 + x)}{dx} \right|_{x=2} = (3x^2 - 4x + 1) \Big|_{x=2} \neq 0.$$

Решение задачи 7.

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ.

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} =$$

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + ap & aq \\ w + cp & cq \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ap & aq \\ cp & cq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + ap & aq \\ w + cp & cq \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

поэтому идеал, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, совпадает со всем **кольцом** $\mathcal{M}$.

Задача 7. Рассмотрим **кольцо** $\mathcal{M}$ матриц размерности 2×2 с вещественными коэффициентами. Является ли кольцо $\mathcal{M}$ **евклидовым кольцом**? Найти **идеалы** кольца $\mathcal{M}$, порожденные каждым из множеств матриц: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ. Идеал, порожденный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, совпадает со всем **кольцом** $\mathcal{M}$. Аналогичный результат получается для остальных порождающих множеств.

Решение задачи 8.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из I является матрицей из I .

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из I является матрицей из I . Следовательно, I образует подгруппу аддитивной группы кольца $\mathcal{K}$.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца $\mathcal{K}$** . Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из I является матрицей из I . Следовательно, I образует подгруппу аддитивной группы кольца $\mathcal{K}$.

Умножение матриц сводится к умножению их коэффициентов и суммированию произведений.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца $\mathcal{K}$** . Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из I является матрицей из I . Следовательно, I образует подгруппу аддитивной группы кольца $\mathcal{K}$.

Умножение матриц сводится к умножению их коэффициентов и суммированию произведений. Произведение неотрицательного целого числа на четное число есть четное число (считая 0 четным числом). Сумма четных чисел есть число четное.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца $\mathcal{K}$** . Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Ясно, что сумма матриц из I является матрицей из I . Следовательно, I образует подгруппу аддитивной группы кольца $\mathcal{K}$.

Умножение матриц сводится к умножению их коэффициентов и суммированию произведений. Произведение неотрицательного целого числа на четное число есть четное число (считая 0 четным числом). Сумма четных чисел есть число четное.

Следовательно, I является идеалом.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{K}$ — **кольцо матриц** размерности 2×2 с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_4 = \{0; 1; 2; 3\}$ вычетов кольца $\mathbb{Z}$ по модулю 4. Докажите, что подмножество I , состоящее из всех матриц с четными коэффициентами, является **идеалом кольца** $\mathcal{K}$. Является ли этот **идеал главным**?

Ответ. Проверим, является ли этот **идеал главным**.

Покажем, что этот идеал порожден матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Любую матрицу из I можно представить в виде суммы полученных матриц.

Решение задачи 9.

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - _ \cdot 15 = 12,$

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - 9 \cdot 15 = 12$,

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - 9 \cdot 15 = 12$,
 $15 - 12 = 3$,

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - 9 \cdot 15 = 12,$
 $15 - 12 = 3,$
 $3 = 15 - (147 - 9 \cdot 15) =$

Задача 9. Представьте НОД чисел 15 и 147 в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Ответ. $147 - 9 \cdot 15 = 12,$

$$15 - 12 = 3,$$

$$3 = 15 - (147 - 9 \cdot 15) = 10 \cdot 15 - 147.$$

Решение задачи 10.

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - (x^5 - x^3 - x^2 + 1) =$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - x(x^5 - x^3 - x^2 + 1) = 5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4,$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - x(x^5 - x^3 - x^2 + 1) = 5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4,$
 $25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (\quad)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) =$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - x(x^5 - x^3 - x^2 + 1) = 5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4,$
 $25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (5x - 1)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) = -19x^3 - 21x^2 + 19x + 21,$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - x(x^5 - x^3 - x^2 + 1) = 5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4,$
 $25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (5x - 1)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) = -19x^3 - 21x^2 + 19x + 21,$
 $\underbrace{19^2}_{\text{}}(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (\quad\quad\quad)(-19x^3 - 21x^2 + 19x + 21) =$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - x(x^5 - x^3 - x^2 + 1) = 5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4,$
 $25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (5x - 1)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) = -19x^3 - 21x^2 + 19x + 21,$
 $\underbrace{19^2}_{361}(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (\quad)(-19x^3 - 21x^2 + 19x + 21) =$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - x(x^5 - x^3 - x^2 + 1) = 5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4,$
 $25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (5x - 1)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) = -19x^3 - 21x^2 + 19x + 21,$
 $\underbrace{19^2}_{361}(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (95x - 86)(-19x^3 - 21x^2 + 19x + 21) = 3250x + 3250,$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - x(x^5 - x^3 - x^2 + 1) = 5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4,$
 $25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (5x - 1)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) = -19x^3 - 21x^2 + 19x + 21,$
 $\underbrace{19^2}_{361}(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (95x - 86)(-19x^3 - 21x^2 + 19x + 21) = 3250x + 3250,$
 $3250x + 3250 = 361(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (95x - 86)(-19x^3 - 21x^2 + 19x + 21) =$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - x(x^5 - x^3 - x^2 + 1) = 5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4,$
 $25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (5x - 1)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) = -19x^3 - 21x^2 + 19x + 21,$
 $\underbrace{19^2}_{361}(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (95x - 86)(-19x^3 - 21x^2 + 19x + 21) = 3250x + 3250,$
 $3250x + 3250 = 361(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (95x - 86)(-19x^3 - 21x^2 + 19x + 21) =$
 $= 361(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (95x - 86)(25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (5x - 1)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4)) =$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ. $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4 - x(x^5 - x^3 - x^2 + 1) = 5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4,$
 $25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (5x - 1)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) = -19x^3 - 21x^2 + 19x + 21,$
 $\underbrace{19^2}_{361}(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (95x - 86)(-19x^3 - 21x^2 + 19x + 21) = 3250x + 3250,$
 $3250x + 3250 = 361(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (95x - 86)(-19x^3 - 21x^2 + 19x + 21) =$
 $= 361(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (95x - 86)(25(x^5 - x^3 - x^2 + 1) - (5x - 1)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4)) =$
 $= (-475x^2 + 525x + 275)(5x^4 + x^3 - x^2 - x - 4) + (2375x - 2150)(x^5 - x^3 - x^2 + 1).$

Задача 10. Выразите НОД многочленов $x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$ и $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ в виде линейной комбинации этих многочленов.

Ответ.

Решение задачи 11.

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) =$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) =$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) =$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) =$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 =$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 = 4$,
что совпадает со **значением, вычисленным по определению**,

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 = 4,$

$$\varphi(15) =$$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 = 4,$

$$\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) =$$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 = 4,$

$$\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = 15 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) =$$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 = 4,$

$$\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = 15 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot 4 =$$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 = 4,$

$$\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = 15 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot 4 = 8,$$

что совпадает со **значением, вычисленным по определению**,

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 = 4,$

$$\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = 15 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot 4 = 8,$$

$$\varphi(17) =$$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 = 4,$

$$\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = 15 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot 4 = 8,$$

$$\varphi(17) = 17 \cdot \left(1 - \frac{1}{17}\right) =$$

Задача 11. Вычислите с помощью **соответствующей формулы** значения функции Эйлера, найденные при решении **примера 9**: $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(17)$.

Ответ. $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 = 4,$

$$\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = 15 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot 4 = 8,$$

$$\varphi(17) = 17 \cdot \left(1 - \frac{1}{17}\right) = 16,$$

что совпадает со **значением, вычисленным по определению**.

Решение задачи 12.

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) =$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 =$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,

$\varphi(4) =$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,
 $\varphi(4) = 2^2 - 2^1 =$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,
 $\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2$,

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,

$$\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2,$$

$$\varphi(5) =$$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,

$$\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2,$$

$$\varphi(5) = 5^1 - 5^0 =$$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,

$$\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2,$$

$$\varphi(5) = 5^1 - 5^0 = 4,$$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,

$$\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2,$$

$$\varphi(5) = 5^1 - 5^0 = 4,$$

$$\varphi(20) =$$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,
 $\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2$,
 $\varphi(5) = 5^1 - 5^0 = 4$,
 $\varphi(20) = (2^2 - 2^1) (5^1 - 5^0) =$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,
 $\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2$,
 $\varphi(5) = 5^1 - 5^0 = 4$,
 $\varphi(20) = (2^2 - 2^1) (5^1 - 5^0) = 2 \cdot 4 =$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,
 $\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2$,
 $\varphi(5) = 5^1 - 5^0 = 4$,
 $\varphi(20) = (2^2 - 2^1) (5^1 - 5^0) = 2 \cdot 4 = 8$,

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,
 $\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2$,
 $\varphi(5) = 5^1 - 5^0 = 4$,
 $\varphi(20) = (2^2 - 2^1) (5^1 - 5^0) = 2 \cdot 4 = 8$,
 $\varphi(21) =$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,
 $\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2$,
 $\varphi(5) = 5^1 - 5^0 = 4$,
 $\varphi(20) = (2^2 - 2^1) (5^1 - 5^0) = 2 \cdot 4 = 8$,
 $\varphi(21) = (3^1 - 3^0) (7^1 - 7^0) =$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,
 $\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2$,
 $\varphi(5) = 5^1 - 5^0 = 4$,
 $\varphi(20) = (2^2 - 2^1) (5^1 - 5^0) = 2 \cdot 4 = 8$,
 $\varphi(21) = (3^1 - 3^0) (7^1 - 7^0) = 2 \cdot 6 =$

Задача 12. Вычислите значения функции Эйлера по определению и с помощью **соответствующей формулы**: $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(21)$.

Ответ. $\varphi(3) = 3^1 - 3^0 = 2$,
 $\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2$,
 $\varphi(5) = 5^1 - 5^0 = 4$,
 $\varphi(20) = (2^2 - 2^1) (5^1 - 5^0) = 2 \cdot 4 = 8$,
 $\varphi(21) = (3^1 - 3^0) (7^1 - 7^0) = 2 \cdot 6 = 12$.

Задача 12.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: yu.b.melnikov@yandex.ru, UriiMelnikov58@gmail.com

[Вернуться к списку презентаций?](#)

