Министерство науки и высшего образования РФ
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Ю. Б. Мельников

Булевы алгебры

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

e-mail:
UriiMelnikov58@gmail.com

Екатеринбург
2020

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

Кроме того, имеются гиперссылки на пособия **«Математический анализ»** и **«Элементарная математика».**

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения. Имеются гиперссылки на тесты для самообучения и самоконтроля.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В программе `Adobe Reader` и `Acrobat Reader` переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader 11, Acrobat Reader DC или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать Adobe Reader версии 8 или 9 (но не 10).

Для того, чтобы ***вызвать панель навигации*** в Acrobat Reader надо, во-первых, выйти из полноэкранного режима (например, нажатием Esc), и, во-вторых, нажать клавишу F4 и выбрать на левой вертикальной панели вертикальный флажок «Закладки».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

II. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

II. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

II. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

A4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

II. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

A4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

A5 (свойство совместимости). $x + y = x$ тогда и только тогда, когда $x * y = y$;

II. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

A4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

A5 (свойство совместимости). $x + y = x$ тогда и только тогда, когда $x * y = y$;

A6. а) $x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$; б) $x * \mathbf{1} = x$;

II. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

A4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

A5 (свойство совместимости). $x + y = x$ тогда и только тогда, когда $x * y = y$;

A6. а) $x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$; б) $x * \mathbf{1} = x$;

A7. а) $x + \mathbf{0} = x$; б) $x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

II. Определение булевой алгебры

Булевой алгеброй называется универсальная алгебра $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ с носителем B, в котором выделены два элемента $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, и на котором определены двуместные операции $+$ и $*$ и одноместная операция $\overline{}$, причем выполняются следующие аксиомы:

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

A4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

A5 (свойство совместимости). $x + y = x$ тогда и только тогда, когда $x * y = y$;

A6. а) $x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$; б) $x * \mathbf{1} = x$;

A7. а) $x + \mathbf{0} = x$; б) $x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

A8. а) $x + \overline{x} = \mathbf{1}$; б) $x * \overline{x} = \mathbf{0}$.

II. Определение булевой алгебры

Заметим, что мы *не знаем*, что представляет собой множество B, как определены операции $+, *$ и $^{-}$, и какие элементы выбраны в качестве $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$.

II. Определение булевой алгебры

Заметим, что мы *не знаем*, что представляет собой множество B, как определены операции $+, *$ и $^{-}$, и какие элементы выбраны в качестве $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$.

Нас интересуют только *свойства* этих операций. Таким образом, символы $B, +, *, ^{-}$,$\mathbf{0}$,$\mathbf{1}$ можно рассматривать, как *переменные*, и придавать им те или иные значения.

II. Определение булевой алгебры

Заметим, что мы *не знаем*, что представляет собой множество B, как определены операции $+, *$ и $^{-}$, и какие элементы выбраны в качестве $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$.

Нас интересуют только *свойства* этих операций. Таким образом, символы $B, +, *, ^{-}, \mathbf{0}, \mathbf{1}$ можно рассматривать, как *переменные*, и придавать им те или иные значения.

Рассмотреть пример?

II. Определение булевой алгебры

Разумеется, при других «значениях переменных» $B, \mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, ^{-}$ утверждения A1–A8 могут и не выполняться, тогда соответствующая алгебра не будет булевой алгеброй. Это напоминает ситуацию, возникающую при решении уравнений. В самом деле, существует бесконечно много решений уравнения $x + y = 6$. Если положить $x = 2$, $y = 4$, то $(x, y) = (2, 4)$ — решение уравнения, а если $x = 3$, $y = 2$ — то $(x, y) = (3, 2)$ — не решение. Главное отличие состоит в том, что у нас сейчас и «+» рассматривается, как переменная! То есть можно нужным образом подбирать операцию. Например, если считать, что «крестиком» (то есть $+$) обозначена операция «умножение», то $(x, y) = (3, 2)$ уже будет решением уравнения $x + y = 6$.

II. Определение булевой алгебры

Роль аксиом, подобных **аксиомам булевых алгебр** подобна, в некотором смысле, роли тестов для определения исправности аппарата (например, калькулятора или компьютера и т.п.). Чтобы «протестировать» ту или иную алгебру на «булевость», надо «прогнать ее через аксиомы», то есть проверить, выполняются ли эти аксиомы в «тестируемой» алгебре.

II. Определение булевой алгебры

Роль аксиом, подобных **аксиомам булевых алгебр** подобна, в некотором смысле, роли тестов для определения исправности аппарата (например, калькулятора или компьютера и т.п.). Чтобы «протестировать» ту или иную алгебру на «булевость», надо «прогнать ее через аксиомы», то есть проверить, выполняются ли эти аксиомы в «тестируемой» алгебре.

Таким образом школьное определение аксиомы, как утверждения, не требующего доказательств, верно лишь отчасти: в рамках соответствующей теории аксиомы принимаются без проверки, но для того, чтобы гарантировать применимость выводов теории к той или иной ситуации мы *обязаны* проверить, что эти аксиомы в рассматриваемом случае выполняются.

II. Определение булевой алгебры

Изучать новое понятие можно двумя способами:

II. Определение булевой алгебры

Изучать новое понятие можно двумя способами:

— индуктивным (**рассмотрение примеров**);

II. Определение булевой алгебры

Изучать новое понятие можно двумя способами:

— индуктивным (**рассмотрение примеров**);

— дедуктивным (анализ определения, получение следствий).

III. Элементарные теоремы теории булевых алгебр

Рассмотрим ряд важнейших теорем, следующих непосредственно из аксиом **булевой алгебры**.

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство.

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость.

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$\overline{x} =$

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$\overline{x} = \overline{x} + \mathbf{0} =$

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы А1-А8**, имеем

$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y =$

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x} + \mathbf{0} = \overline{x} + x * y = \overline{x} * \mathbf{1} + x * y =$$

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x} + \mathbf{0} = \overline{x} + x * y = \overline{x} * \mathbf{1} + x * y = \overline{x} * (x + y) + x * y =$$

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y = (\overline{x}*x+\overline{x}*y)+x*y =$$

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y = (\overline{x}*x+\overline{x}*y)+x*y =$$

$$= (\mathbf{0} + \overline{x} * y) + x * y =$$

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y = (\overline{x}*x+\overline{x}*y)+x*y =$$

$$= (\mathbf{0} + \overline{x} * y) + x * y = \overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y =$$

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y = (\overline{x}*x+\overline{x}*y)+x*y =$$

$$= (\mathbf{0} + \overline{x} * y) + x * y = \overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y = \mathbf{1} * y =$$

III.1. Критерий обратного элемента

Теорема 1 (критерий обратного элемента). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Пусть $x + y = \mathbf{1}$ и $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, используя **аксиомы A1-A8**, имеем

$$\overline{x} = \overline{x}+\mathbf{0} = \overline{x}+x*y = \overline{x}*\mathbf{1}+x*y = \overline{x}*(x+y)+x*y = (\overline{x}*x+\overline{x}*y)+x*y =$$

$$= (\mathbf{0} + \overline{x} * y) + x * y = \overline{x} * y + x * y = (\overline{x} + x) * y = \mathbf{1} * y = y,$$

что и требовалось доказать.

III.2. Следствие о дополнении к 0 и 1

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). *$y = \overline{x}$ в том и только том случае, когда $y + x = \mathbf{1}$ и $y * x = \mathbf{0}$.*

Следствие 1 (**о дополнении к 0 и 1**). *$\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ и $\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Это очевидное следствие критерия обратного элемента и **аксиом A6-A8**.

III.3. Теорема об инволютивности «дополнения»

Теорема 2 (**об инволютивности** $\overline{}$). $\overline{\overline{x}} = x$.

Доказательство.

III.3. Теорема об инволютивности «дополнения»

Теорема 2 (**об инволютивности** $\overline{}$). $\overline{\overline{x}} = x$.

Доказательство. В **теореме 1** в качестве x возьмем $\overline{x}$, а в качестве y — элемент x. Тогда по **теореме 1** получаем заключение **теоремы 2**.

III.4. Теорема об однозначности «дополнения»

Теорема 3 (**об однозначности $\overline{}$**). *$\overline{x} = \overline{y}$ тогда и только тогда, когда $x = y$.*

Доказательство.

III.4. Теорема об однозначности «дополнения»

Теорема 3 (**об однозначности** $\overline{}$). *$\overline{x} = \overline{y}$ тогда и только тогда, когда $x = y$.*

Доказательство. Это очевидное следствие **теоремы 2**.

III.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

III.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

$$x + x * y =$$

III.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

$$x + x * y = x * \mathbf{1} + x * y =$$

III.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

$$x + x * y = x * \mathbf{1} + x * y = x * (\mathbf{1} + y) =$$

III.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

$$x + x * y = x * \mathbf{1} + x * y = x * (\mathbf{1} + y) = x * \mathbf{1} =$$

III.5. Закон поглощения (сложение)

Теорема 4 (закон поглощения). $x + x * y = x$.

Доказательство.

$$x + x * y = x * \mathbf{1} + x * y = x * (\mathbf{1} + y) = x * \mathbf{1} = x.$$

III.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (закон поглощения). $x * (x + y) = x$.

Доказательство.

III.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (закон поглощения). $x * (x + y) = x$.

Доказательство.

$$x * (x + y) =$$

III.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (закон поглощения). $x * (x + y) = x.$

Доказательство.

$$x * (x + y) = x * x + x * y =$$

III.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (**закон поглощения**). $x * (x + y) = x$.

Доказательство.

$$x * (x + y) = x * x + x * y = x + x * y =$$

III.6. Закон поглощения (произведение)

Теорема 5 (закон поглощения). $x * (x + y) = x$.

Доказательство.

$$x * (x + y) = x * x + x * y = x + x * y = x.$$

III.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y.$

Доказательство.

III.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y.$

Доказательство.

$$x + y =$$

III.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y$.

Доказательство.

$$x + y = x + (x + \overline{x}) * y =$$

III.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y.$

Доказательство.

$$x + y = x + (x + \overline{x}) * y = x + x * y + \overline{x} * y =$$

III.7. О сведении к дизъюнктным слагаемым

Теорема 6 (о сведении к дизъюнктным слагаемым).
$x + y = x + \overline{x} * y.$

Доказательство.

$$x + y = x + (x + \overline{x}) * y = x + x * y + \overline{x} * y = x + \overline{x} * y.$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство.

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить?

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x+y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} = x * \overline{x} * \overline{y} + y * \overline{x} * \overline{y} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} = x * \overline{x} * \overline{y} + y * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0} * \overline{y} + \mathbf{0} * \overline{x} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} = x * \overline{x} * \overline{y} + y * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0} * \overline{y} + \mathbf{0} * \overline{x} = \mathbf{0} + \mathbf{0} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство является очевидным:

$$(x+y) * \overline{x} * \overline{y} = x * \overline{x} * \overline{y} + y * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0} * \overline{y} + \mathbf{0} * \overline{x} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = x + (y + \overline{x} * \overline{y}) =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = x + (y + \overline{x} * \overline{y}) = x + y + \overline{x} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$;   **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = x + (y + \overline{x} * \overline{y}) = x + y + \overline{x} = y + \mathbf{1} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. а) Что надо проверить? Что элемент $\overline{x} * \overline{y}$ является «обратным» к $x + y$.

Для этого, естественно, воспользуемся доказанной **теоремой 1**.

Итак, надо проверить, что

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{1}, \qquad (x+y) * \overline{x} * \overline{y} = \mathbf{0}.$$

Первое равенство — это следствие **теоремы 6**:

$$(x+y) + \overline{x} * \overline{y} = x + (y + \overline{x} * \overline{y}) = x + y + \overline{x} = y + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. б) Используем ту же идею, что и в пункте **а)**. Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. **б)** Используем ту же идею, что и в пункте **а)**. Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. **б)** Используем ту же идею, что и в пункте **а)**. Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} = \overline{x} + \mathbf{1} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. б) Используем ту же идею, что и в пункте **а)**. Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} = \overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. **б)** Используем ту же идею, что и в пункте **а)**. Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} = \overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Кроме того,

$$x * y * (\overline{x} + \overline{y}) =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. б) Используем ту же идею, что и в пункте **а)**. Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} = \overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Кроме того,

$$x * y * (\overline{x} + \overline{y}) = y * \mathbf{0} + x * \mathbf{0} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. б) Используем ту же идею, что и в пункте **а)**. Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} = \overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Кроме того,

$$x * y * (\overline{x} + \overline{y}) = y * \mathbf{0} + x * \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} =$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. **б)** Используем ту же идею, что и в пункте **а)**. Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} = \overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Кроме того,

$$x * y * (\overline{x} + \overline{y}) = y * \mathbf{0} + x * \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

III.8. Законы де-Моргана

Теорема 7. а). $\overline{x+y} = \overline{x} * \overline{y}$; **б).** $\overline{x*y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Доказательство. б) Используем ту же идею, что и в пункте **а)**. Итак, по **теореме 6**,

$$x * y + \overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + y + \overline{y} = \overline{x} + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Кроме того,

$$x * y * (\overline{x} + \overline{y}) = y * \mathbf{0} + x * \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

По **критерию обратного элемента** получаем равенство $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x * y}$.

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение

Равенство $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство.

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство* $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме А7 а)**,

$$\overline{y} + x =$$

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y =$$

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 a)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} =$$

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение
Равенство $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам A3 а)** и **A7 б)**,

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение
Равенство $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме А7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам А3 а)** и **А7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} =$$

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме А7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам А3 а)** и **А7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} = y * (x + \overline{y}) =$$

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство* $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме A7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам A3 а)** и **A7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} = y * (x + \overline{y}) = y * x + y * \overline{y} =$$

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение *Равенство $x * y = \mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме А7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам А3 а)** и **А7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} = y * (x + \overline{y}) = y * x + y * \overline{y} = y * x + \mathbf{0} =$$

III.9. О включении в дополнение (нулевое произведение)

Теорема 8 (о включении в дополнение (нулевое произведение
Равенство $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * y = \mathbf{0}$. Тогда, по **теореме 2** и **теореме 6** и **аксиоме А7 а)**,

$$\overline{y} + x = \overline{y} + x * y = \overline{y} + \mathbf{0} = \overline{y}.$$

Достаточность. Пусть теперь $x + \overline{y} = \overline{y}$. Тогда, согласно **аксиомам А3 а)** и **А7 б)**,

$$\mathbf{0} = y * \overline{y} = y * (x + \overline{y}) = y * x + y * \overline{y} = y * x + \mathbf{0} = y * x.$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство.

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} =$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение $(x * y = x)$). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} =$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение $(x * y = x)$). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} = x * (y * \overline{y}) =$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение $(x * y = x)$). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} = x * (y * \overline{y}) = x * \mathbf{0} =$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} = x * (y * \overline{y}) = x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = x * y$. Умножив это равенство на $\overline{y}$, получаем

$$x * \overline{y} = (x * y) * \overline{y} = x * (y * \overline{y}) = x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

— получили требуемое соотношение.

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность.

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам A8 а), A3 а), A7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} =$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам A8 а), A3 а), A7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} = x * (y + \overline{y}) =$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение $(x * y = x)$). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам A8 а), A3 а), A7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} = x * (y + \overline{y}) = x * y + x * \overline{y} =$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам A8 а), A3 а), A7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} = x * (y + \overline{y}) = x * y + x * \overline{y} = x * y + \mathbf{0} =$$

III.10. О включении в дополнение (произведение совпадает с множителем)

Теорема 9 (о включении в дополнение ($x * y = x$)). *Равенство $x * y = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x * \overline{y} = \mathbf{0}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $x * \overline{y} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно **аксиомам A8 а), A3 а), A7 а)** получаем

$$x = x * \mathbf{1} = x * (y + \overline{y}) = x * y + x * \overline{y} = x * y + \mathbf{0} = x * y.$$

III.11. Список элементарных теорем

Теорема 1 (**критерий обратного элемента**). $y = \overline{x} \iff \begin{cases} y + x = \mathbf{1}, \\ y * x = \mathbf{0}. \end{cases}$

Теорема 2 (**об инволютивности** $\overline{}$). $\overline{\overline{x}} = x.$

Теорема 3 (**об однозначности** $\overline{}$). $\overline{x} = \overline{y} \iff x = y.$

Теорема 4 (**закон поглощения**). $x + x * y = x.$

Теорема 5 (**закон поглощения**). $x * (x + y) = x.$

Теорема 6. $x + y = x + \overline{x} * y.$

Теорема 7 (**законы де-Моргана**). ***а).*** $\overline{x + y} = \overline{x} * \overline{y};$ ***б).*** $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}.$

Теорема 8. *Равенство* $x * y = \mathbf{0}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x + \overline{y} = \overline{y}.$

Теорема 9. *Равенство* $x * y = x$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $x * \overline{y} = \mathbf{0}.$ ***Рассмотреть пример?***

IV. Некоторые понятия теории булевых алгебр

Рассмотрим некоторые теоремы и «вторичные» понятия теории булевых алгебр.

IV.1. Теорема о двойственной булевой алгебре

Теорема 10 (**о двойственной булевой алгебре**). *Если* $\mathcal{B} = \langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *— булева алгебра, то алгебраическая система* $\mathcal{B}' = \langle B, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \overline{}\}\rangle$ *тоже является булевой алгеброй.*

Доказательство.

IV.1. Теорема о двойственной булевой алгебре

Теорема 10 (**о двойственной булевой алгебре**). *Если* $\mathcal{B} = \langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *— булева алгебра, то алгебраическая система* $\mathcal{B}' = \langle B, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \overline{}\}\rangle$ *тоже является булевой алгеброй.*

Доказательство. Очевидное следствие из **аксиом булевой алгебры**.

IV.1. Теорема о двойственной булевой алгебре

Теорема 10 (о двойственной булевой алгебре). *Если* $\mathcal{B} = \langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ — *булева алгебра, то алгебраическая система* $\mathcal{B}' = \langle B, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \overline{}\}\rangle$ *тоже является булевой алгеброй.*

Доказательство. Очевидное следствие из **аксиом булевой алгебры**.

Определение 1. *Если* $\mathcal{B} = \langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ — *булева алгебра, то алгебраическая система* $\mathcal{B}' = \langle B, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \overline{}\}\rangle$ *называется алгеброй,* **двойственной** *к булевой алгебре* $\mathcal{B}$.

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство.

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (**О частичном порядке на булевой алгебре**). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Рефлексивность очевидна:

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Рефлексивность очевидна:

$$x * x = x \ \Rightarrow$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Рефлексивность очевидна:

$$x * x = x \;\Rightarrow\; x \leq x.$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение* $\leq$ *является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * x = y \end{cases} \Rightarrow$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * x = y \end{cases} \Rightarrow x = x * y =$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * x = y \end{cases} \Rightarrow \; x = x * y = y * x =$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **антисимметричность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * x = y \end{cases} \Rightarrow \; x = x * y = y * x = y.$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow\ x \leq z$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow x \leq z$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\le$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \le y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение* $\le$ *является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \le y, \\ y \le z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \; x*z = \qquad\qquad \Rightarrow \; x \le z.$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow x * z = (x * y) * z = \qquad \Rightarrow x \leq z.$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \ x*z = x*(y*z) = \qquad\qquad \Rightarrow \ x \leq z.$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение* $\leq$ *является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \; x * z = x * y * z = x * y = \qquad \Rightarrow \; x \leq z.$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \; x * z = x * y * z = x * y = x \; \Rightarrow$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow x * z = x * y * z = x * y = x \Rightarrow x \leq z.$$

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Доказательство. Проверим **транзитивность**:

$$\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y = x, \\ y * z = y \end{cases} \Rightarrow \ x * z = \ x * y * z \ = x * y = x \ \Rightarrow \ x \leq z.$$

Теорема доказана.

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\le$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \le y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение* $\le$ *является* ***частичным порядком*** *на носителе булевой алгебры.*

Определение 2. *Отношение* $\le$*, введенное на булевой алгебре правилом:* $x \le y$ *тогда и только тогда, когда* $x * y = x$*, называется* **индуцированным частичным порядком**.

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Определение 2. *Отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$, называется* **индуцированным частичным порядком**.

Например, в **булевой алгебре подмножеств** $\langle A;\ \{\cup, \cap, \bar{\ }\}\rangle$ множества M (то есть $A = \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq M \right\}$) индуцированный порядок совпадает с отношением, соответствующему предикату $\subseteq$.

IV.2. Определение частичного порядка, индуцированного на булевой алгебре

Рассмотрим отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$.

Теорема 11 (О частичном порядке на булевой алгебре). *Отношение $\leq$ является **частичным порядком** на носителе булевой алгебры.*

Определение 2. *Отношение $\leq$, введенное на булевой алгебре правилом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x * y = x$, называется* **индуцированным частичным порядком***.*

В **алгебре n-местных булевых функций** $\langle A, \{\vee, \wedge, \neg\}\rangle$ индуцированный порядок совпадает с отношением, соответствующему предикату $\leq$.

IV.3. Критерий индуцированного отношения частичного порядка

Теорема 12 (**Критерий** $\leq$). *В булевой алгебре* $x \leq y$ *тогда и только тогда, когда* $x + y = y$.

Доказательство.

IV.3. Критерий индуцированного отношения частичного порядка

Теорема 12 (**Критерий** $\leq$). *В булевой алгебре* $x \leq y$ *тогда и только тогда, когда* $x + y = y$.

Доказательство. Очевидное следствие **определения** и **аксиомы A5**.

IV.4. Определение атома булевой алгебры

Теорема 12 (Критерий $\leq$). *В булевой алгебре $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x + y = y$.*

Доказательство. Очевидное следствие **определения** и **аксиомы A5**.

Определение 3. *Отличный от* $\mathbf{0}$ *элемент x булевой алгебры $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ называется* **атомом**, *если для любого элемента y из B, отличного от* $\mathbf{0}$, *справедлива альтернатива: либо $x * y = x$, либо $x * y = \mathbf{0}$.*

Рассмотреть пример?

Как мы увидим, для конечных булевых алгебр роль атомов является решающей.

IV.5. Критерий атома

Теорема 12 (Критерий $\leq$). *В булевой алгебре $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x + y = y$.*

Доказательство. Очевидное следствие определения и **аксиомы A5**.

Определение 3. *Отличный от $\mathbf{0}$ элемент x булевой алгебры $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ называется* **атомом**, *если для любого элемента y из B, отличного от $\mathbf{0}$, справедлива альтернатива: либо $x * y = x$, либо $x * y = \mathbf{0}$.*

Лемма 1 (критерий атома). *Элемент x является атомом булевой алгебры тогда и только тогда, когда он является минимальным ненулевым элементом относительно индуцированного частичного порядка.*

V. Свойства атомов

Рассмотрим некоторые свойства атомов.

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x * y = \mathbf{0}$.

Доказательство.

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x * y = \mathbf{0}$.

Доказательство.

$x * y$

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Доказательство.

$x * y$

По **определению атома...**

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Доказательство.

$x * y \in \{\mathbf{0}, x\}$

По **определению атома...**

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Доказательство.

$x * y \in \{\mathbf{0}, x\} \quad \{\mathbf{0}, y\}$

По **определению атома...**

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных **атомов** x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Доказательство.

$x * y \in \{\mathbf{0}, x\} \cap \{\mathbf{0}, y\}$

По **определению атома...**

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x * y = \mathbf{0}$.

Доказательство.

$x * y \in \{\mathbf{0}, x\} \cap \{\mathbf{0}, y\} =$

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x * y = \mathbf{0}$.

Доказательство.

$x * y \in \{\mathbf{0}, x\} \cap \{\mathbf{0}, y\} = \{\mathbf{0}\}$,

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных **атомов** x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Доказательство.

$x * y \in \{\mathbf{0}, x\} \cap \{\mathbf{0}, y\} = \{\mathbf{0}\}$, откуда

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x * y = \mathbf{0}$.

Доказательство.

$x * y \in \{\mathbf{0}, x\} \cap \{\mathbf{0}, y\} = \{\mathbf{0}\}$, откуда $x * y = \mathbf{0}$.

V.1. Теорема о произведении атомов

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x * y = \mathbf{0}$.

Доказательство.

$x * y \in \{\mathbf{0}, x\} \cap \{\mathbf{0}, y\} = \{\mathbf{0}\}$, откуда $x * y = \mathbf{0}$.

Теорема доказана.

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

$x + \overline{y} =$

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

$x + \overline{y} = x * \mathbf{1} + \mathbf{1} * \overline{y} =$

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x * y = \mathbf{0}$.

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** x *и* y *справедливо соотношение* $x + \overline{y} = \overline{y}$.

Доказательство.

$$x + \overline{y} = x * \mathbf{1} + \mathbf{1} * \overline{y} = x * (y + \overline{y}) + \mathbf{1} * \overline{y} =$$

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

$$x + \overline{y} = x * \mathbf{1} + \mathbf{1} * \overline{y} = x * (y + \overline{y}) + \mathbf{1} * \overline{y} = x * y + x * \overline{y} + \mathbf{1} * \overline{y} =$$

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

$$x + \overline{y} = x * \mathbf{1} + \mathbf{1} * \overline{y} = x * (y + \overline{y}) + \mathbf{1} * \overline{y} = \underbrace{x * y}_{\mathbf{0}} + x * \overline{y} + \mathbf{1} * \overline{y} =$$

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

$$x + \overline{y} = x * \mathbf{1} + \mathbf{1} * \overline{y} = x * (y + \overline{y}) + \mathbf{1} * \overline{y} = \underbrace{x * y}_{\mathbf{0}} + x * \overline{y} + \mathbf{1} * \overline{y} =$$

$$= (x + \mathbf{1}) * \overline{y} =$$

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

$$x + \overline{y} = x * \mathbf{1} + \mathbf{1} * \overline{y} = x * (y + \overline{y}) + \mathbf{1} * \overline{y} = \underbrace{x * y}_{\mathbf{0}} + x * \overline{y} + \mathbf{1} * \overline{y} =$$

$$= \underbrace{(x + \mathbf{1})}_{\mathbf{1}} * \overline{y} =$$

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

$$x + \overline{y} = x * \mathbf{1} + \mathbf{1} * \overline{y} = x * (y + \overline{y}) + \mathbf{1} * \overline{y} = \underbrace{x * y}_{\mathbf{0}} + x * \overline{y} + \mathbf{1} * \overline{y} =$$

$$= \underbrace{(x + \mathbf{1})}_{\mathbf{1}} * \overline{y} = \mathbf{1} * \overline{y} =$$

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

$$x + \overline{y} = x * \mathbf{1} + \mathbf{1} * \overline{y} = x * (y + \overline{y}) + \mathbf{1} * \overline{y} = \underbrace{x * y}_{\mathbf{0}} + x * \overline{y} + \mathbf{1} * \overline{y} =$$

$$= \underbrace{(x + \mathbf{1})}_{\mathbf{1}} * \overline{y} = \mathbf{1} * \overline{y} = \overline{y}.$$

V.2. Теорема о поглощении атома дополнением

Теорема 13. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x * y = \mathbf{0}$.*

Теорема 14. *Для любых различных* ***атомов*** *x и y справедливо соотношение $x + \overline{y} = \overline{y}$.*

Доказательство.

$$x + \overline{y} = x * \mathbf{1} + \mathbf{1} * \overline{y} = x * (y + \overline{y}) + \mathbf{1} * \overline{y} = \underbrace{x * y}_{\mathbf{0}} + x * \overline{y} + \mathbf{1} * \overline{y} =$$

$$= \underbrace{(x + \mathbf{1})}_{\mathbf{1}} * \overline{y} = \mathbf{1} * \overline{y} = \overline{y}.$$

Теорема доказана.

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

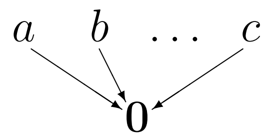
Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B*, и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов****, то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство.

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

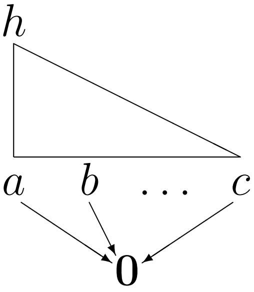
Доказательство.



V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \left\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\right\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

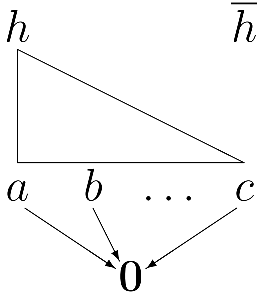


V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.



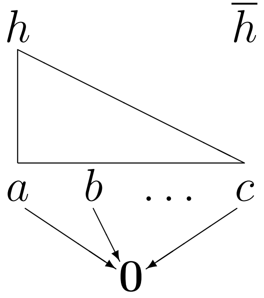
V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$.



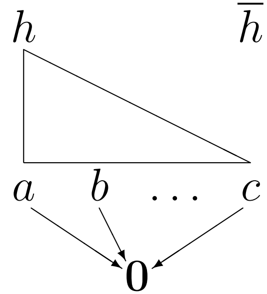
V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По закону де-Моргана $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.



V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

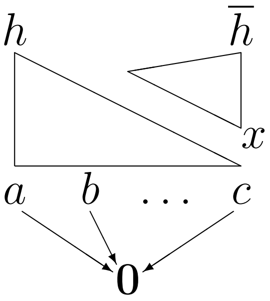
Теорема **15.** *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.



V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ — *множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

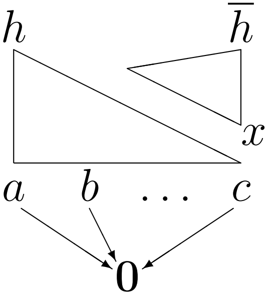
Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

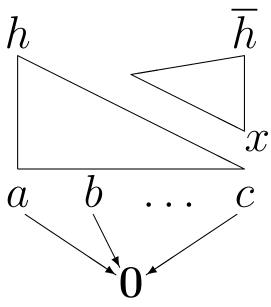
Покажем, что x — это атом.



V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Покажем, что x — это атом.

Воспользуемся **леммой 1**.

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ — *множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

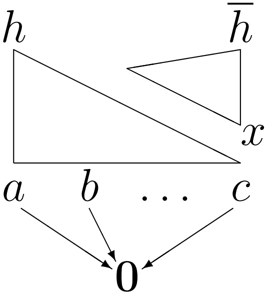
Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Покажем, что x — это атом.



Пусть найдется такой ненулевой элемент $y \neq x$, что $y \leq x$.

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{\quad}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ — *множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

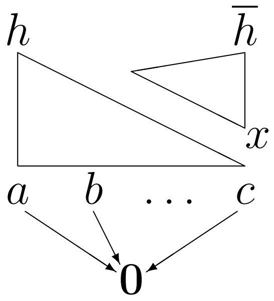
Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Покажем, что x — это атом.



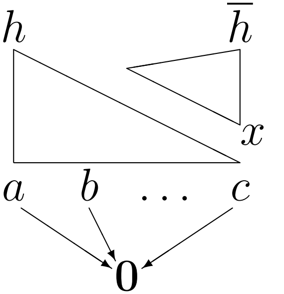
Пусть найдется такой ненулевой элемент $y \neq x$, что $y \leq x$.

В силу **транзитивности отношения** $\leq$ имеем $\begin{cases} x \leq \overline{h}, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow$

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Покажем, что x — это атом.

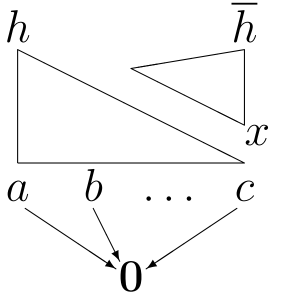
Пусть найдется такой ненулевой элемент $y \neq x$, что $y \leq x$.

В силу **транзитивности отношения** $\leq$ имеем $\begin{cases} x \leq \overline{h}, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \; y \leq \overline{h}$.

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Покажем, что x — это атом.

Пусть найдется такой ненулевой элемент $y \neq x$, что $y \leq x$.

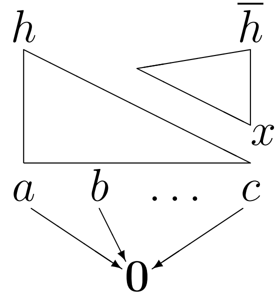
В силу **транзитивности отношения** $\leq$ имеем $\begin{cases} x \leq \overline{h}, \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \ y \leq \overline{h}$.

Но $y \neq x$, что противоречит минимальности x.

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

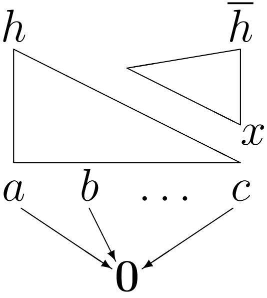
Покажем, что x — это атом.

Итак, мы показали, что x — минимальный ненулевой элемент, поэтому по **лемме 1** x является атомом.

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Покажем, что x — это атом.

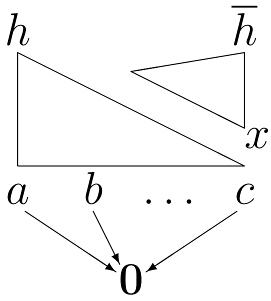
Итак, мы показали, что x — минимальный ненулевой элемент, поэтому по **лемме 1** x является атомом.

Без ограничения общности можно считать, что $x = a$.

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

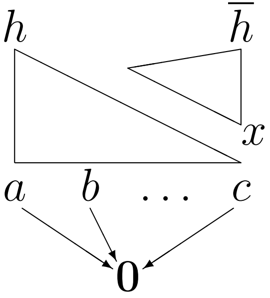
Мы получили, что $x = a$.

По **определению индуцированного отношения** $\leq$

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Мы получили, что $x = a$.

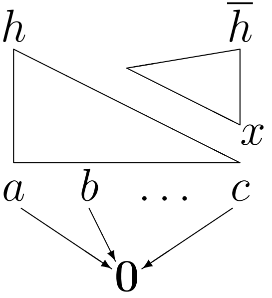
По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow$$

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Мы получили, что $x = a$.

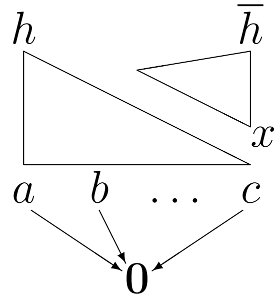
По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} =$$

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \dots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \dots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \dots + c$.



По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \dots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Мы получили, что $x = a$.

По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} = a * \overline{a} * \overline{b} * \dots * \overline{c} =$$

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

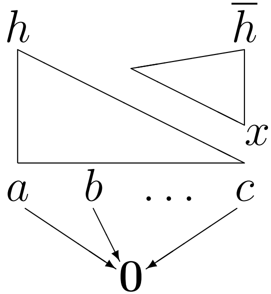
Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент $x \neq \mathbf{0}$.

Мы получили, что $x = a$.



По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} = \underbrace{a * \overline{a}}_{\mathbf{0}} * \overline{b} * \ldots * \overline{c} =$$

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

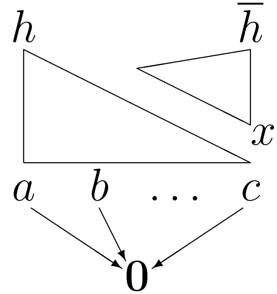
Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.



Мы получили, что $x = a$.

По **определению индуцированного отношения $\leq$**

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} = \underbrace{a * \overline{a}}_{\mathbf{0}} * \overline{b} * \ldots * \overline{c} = \mathbf{0},$$

V.3. Теорема о 1 конечной булевой алгебры

Теорема 15. *Если булева алгебра* $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечное число элементов в носителе* B, *и* $\mathbf{Б} = \{a, b, \ldots, c\}$ *— множество всех ее* ***атомов***, *то* $\mathbf{1} = a + b + \ldots + c$.

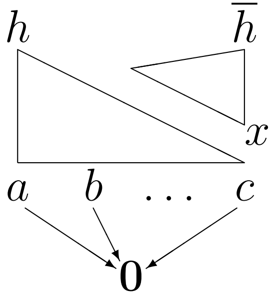
Доказательство. Пусть $h = a + b + \ldots + c$.

По **закону де-Моргана** $\overline{h} = \overline{a} * \overline{b} * \ldots * \overline{c}$.

Достаточно доказать, что $\overline{h} = \mathbf{0}$. Пусть $\overline{h} \neq \mathbf{0}$.

Среди всех элементов, **не превосходящих** $\overline{h}$, выберем произвольный минимальный элемент x.

Мы получили, что $x = a$.



По **определению индуцированного отношения** $\leq$

$$a = x \leq \overline{h} \quad \Rightarrow \quad a = a * \overline{h} = \underbrace{a * \overline{a}}_{\mathbf{0}} * \overline{b} * \ldots * \overline{c} = \mathbf{0},$$

но $a \neq \mathbf{0}$ по **определению атома**. Теорема доказана.

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.
Тогда любой ненулевой элемент a *может быть представлен в виде* $x + y + \ldots + z$, *где* $\{x,\ y,\ \ldots,\ z\}$ *множество всех* ***атомов***, ***сравнимых*** *с* a.

Слишком много слов естественного языка...

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i - \textit{атомы}, \\ t_i \leq a. \end{cases}$$

Уже лучше...

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i - \textbf{\textit{атомы}}, \ \text{т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}\,, \\ t_i \leq a, \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Совсем хорошо...

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \;-\; \textbf{\textit{атомы}},\ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство.

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} =$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B*.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textbf{\textit{атомы}}, \ \text{т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0}, \ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле,

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i - \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textbf{\textit{атомы}}, \ \text{т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i - \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \overset{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} +$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i - \textbf{\textit{атомы}}, \ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} + t_1 * t_{m+2} + \ldots +$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} + t_1 * t_{m+2} + \ldots + t_m * t_{m+1} + \ldots +$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — \textbf{атомы}, т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} + t_1 * t_{m+2} + \ldots + t_m * t_{m+1} + \ldots + t_m * t_n =$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \;-\; \textbf{\textit{атомы}},\ \text{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, по **теореме о 1 конечной булевой алгебры**

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

и, согласно **лемме о произведении атомов**,

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) =$$

$$= t_1 * t_{m+1} + t_1 * t_{m+2} + \ldots + t_m * t_{m+1} + \ldots + t_m * t_n = \mathbf{0}.$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — \textbf{атомы}, т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$= \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} \stackrel{?}{=} t_1 + \ldots + t_m.$$

Итак,

$$(t_1 + \ldots + t_m) + (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{1},$$

$$(t_1 + \ldots + t_m) * (t_{m+1} + \ldots + t_n) = \mathbf{0}.$$

В силу **критерия обратного элемента** $\overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m$.

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ --- } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \overset{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 =$

поскольку, согласно **критерию индуцированного отношения** $\leq$,

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — \textbf{атомы}, т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 =$

поскольку, согласно **критерию индуцированного отношения $\leq$**,

$$t_1 \leq a \quad \Leftrightarrow \quad a + t_1 = a.$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \; - \; \textbf{\textit{атомы}}, \; \textit{т.е.} \; \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0}, \; t_i\}, \\ t_i \leq a, \;\; \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 =$

поскольку, согласно **критерию индуцированного отношения** $\leq$,

$$t_2 \leq a \quad \Leftrightarrow \quad a + t_2 = a.$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \;-\; \textbf{\textit{атомы}},\ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$,

поскольку, согласно **критерию индуцированного отношения** $\leq$,

$$t_m \leq a \quad \Leftrightarrow \quad a + t_m = a.$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textbf{\textit{атомы}},\ \textit{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a,\ \ \textit{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \textit{атомы}, \ \text{т.е.}\ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \text{ т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_{m-1} + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_1 + \ldots + t_{m-1} + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_1 + \ldots + t_{m-1} + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n = a + \mathbf{1} =$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е. } \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n =$$

$$= a + t_1 + \ldots + t_{m-1} + t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n = a + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть* ***булева алгебра*** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *имеет конечный носитель* B.

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i - \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \text{ т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \stackrel{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n = \mathbf{1},$$

$$a * (t_{m+1} + \ldots + t_n) = a * t_{m+1} + \ldots + a * t_n = \mathbf{0}.$$

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \text{ — } \textbf{\textit{атомы}}, \text{ т.е. } \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0},\ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a \overset{?}{=} \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

В самом деле, $a = a + t_1 = a + t_2 = \ldots = a + t_m$, поэтому

$$a + t_{m+1} + \ldots + t_n = \mathbf{1},$$

$$a * (t_{m+1} + \ldots + t_n) = a * t_{m+1} + \ldots + a * t_n = \mathbf{0}.$$

По **критерию обратного элемента** $a = \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n}$.

V.4. Теорема об элементах конечной БА

Теорема 16. *Пусть **булева алгебра** $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ имеет конечный носитель B.*

$$\forall a \in B \quad a \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \begin{cases} a = t_1 + t_2 + \ldots + t_m, \\ t_i \ - \ \textbf{атомы}, \ \text{т.е.} \ \forall x \in B \quad t_i * x \in \{\mathbf{0}, \ t_i\}, \\ t_i \leq a, \ \text{т.е.} \quad t_i * a = t_i, \quad t_i + a = a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ — множество всех атомов.

$$a = \overline{t_{m+1} + \ldots + t_n} = t_1 + \ldots + t_m.$$

Теорема доказана.

V.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра* ***изоморфна*** *алгебре подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Доказательство.

V.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра* ***изоморфна*** *алгебре подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Доказательство. Положим $f(\mathbf{1})$ равным множеству всех **атомов** исходной булевой алгебры, $f(\mathbf{0}) = \emptyset$, $f(+) = \cup$, $f(*) = \cap$, $f(\overline{}) = \overline{}$ (в последнем случае под $\overline{}$ понимается **дополнение**).

V.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра **изоморфна** алгебре подмножеств множества ее **атомов**.*

Доказательство. Положим $f(\mathbf{1})$ равным множеству всех **атомов** исходной булевой алгебры, $f(\mathbf{0}) = \emptyset$, $f(+) = \cup$, $f(*) = \cap$, $f(\overline{}) = \overline{}$ (в последнем случае под $\overline{}$ понимается **дополнение**).

Согласно **теореме об элементах конечной булевой алгебры**, всякий элемент этой алгебры является суммой некоторых ее **атомов**.

V.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра* ***изоморфна*** *алгебре подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Доказательство. Положим $f(\mathbf{1})$ равным множеству всех **атомов** исходной булевой алгебры, $f(\mathbf{0}) = \emptyset$, $f(+) = \cup$, $f(*) = \cap$, $f(\overline{}) = \overline{}$ (в последнем случае под $\overline{}$ понимается **дополнение**).

Согласно **теореме об элементах конечной булевой алгебры**, всякий элемент этой алгебры является суммой некоторых ее **атомов**. Для **атомов** $a, b, \ldots, c$ положим

$$f(a + b + \ldots + c) = \{a, b, \ldots, c\}, \quad f(\mathbf{0}) = \emptyset. \tag{1}$$

V.5. Теорема о классификации конечных булевых алгебр

Теорема 17 (о классификации конечных булевых алгебр). *Всякая конечная булева алгебра* ***изоморфна*** *алгебре подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Доказательство. Положим $f(\mathbf{1})$ равным множеству всех **атомов** исходной булевой алгебры, $f(\mathbf{0}) = \emptyset$, $f(+) = \cup$, $f(*) = \cap$, $f(\overline{}) = \overline{}$ (в последнем случае под $\overline{}$ понимается **дополнение**).

Согласно **теореме об элементах конечной булевой алгебры**, всякий элемент этой алгебры является суммой некоторых ее **атомов**. Для **атомов** $a, b, \ldots, c$ положим

$$f(a + b + \ldots + c) = \{a, b, \ldots, c\}, \quad f(\mathbf{0}) = \emptyset. \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что f — требуемый изоморфизм. Теорема доказана.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где n — натуральное число, равное количеству* ***атомов*** *булевой алгебры $\mathcal{B}$.*

Доказательство.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ — *булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Согласно **теореме о классификации конечных булевых алгебр** достаточно доказать, что множество всех подмножеств n-элементного множества состоит из 2^n элементов.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Согласно **теореме о классификации конечных булевых алгебр** достаточно доказать, что множество всех подмножеств n-элементного множества состоит из 2^n элементов.

Обозначим множество подмножеств множества A через P_A, а количество элементов в множестве P_A для n-элементного множества A — через $k(n)$. Надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов,* $\quad$ *где $n = |B|$.*

Доказательство. *База индукции.* Каково минимальное возможное количество элементов в множестве? Часто отвечают, что 1, но это неверно. Существует еще пустое множество, поэтому $n_0 = 0$. У пустого множества есть только одно подмножество — само это множество, то есть у множества $\emptyset$ множество подмножеств имеет вид $\{\emptyset\}$. Таким образом, $k(0) = 1 = 2^0$. База индукции доказана.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

Как мы уже отмечали, главная задача при применении метода математической индукции состоит в том, что надо свести рассматриваемую ситуацию к случаю «меньшего n».

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

Надо «уменьшить количество элементов в множестве A». Для этого

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов, где* $n = |B|$.

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

Надо «уменьшить количество элементов в множестве A». Для этого удалим из A некоторый произвольный элемент a, получим множество B.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть в множестве A содержится ровно $n > 0$ элементов, и для любого такого номера m, что $0 \leq m < n$, имеет место равенство $k(m) = 2^m$. Нам надо доказать, что $k(n) = 2^n$.

Удалим из A некоторый произвольный элемент a, получим множество B. Так как в множестве B содержится ровно $n-1$ элемент, то, по предположению индукции, в множестве P_B содержится ровно $k(n-1) = 2^{n-1}$ элементов — подмножеств множества B.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Удалим из A некоторый произвольный элемент a, получим множество B. Так как в множестве B содержится ровно $n-1$ элемент, то, по предположению индукции, в множестве P_B содержится ровно $k(n-1) = 2^{n-1}$ элементов — подмножеств множества B. Осталось выяснить, сколько подмножеств множества A не попало в P_B. Мы докажем, что их столько же, сколько элементов в P_B.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Удалим из A некоторый произвольный элемент a, получим множество B. Так как в множестве B содержится ровно $n-1$ элемент, то, по предположению индукции, в множестве P_B содержится ровно $k(n-1) = 2^{n-1}$ элементов — подмножеств множества B. Осталось выяснить, сколько подмножеств множества A не попало в P_B. Если мы докажем, что их столько же, сколько элементов в P_B, то

$$k(n) = k(n-1) + k(n-1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 * 2^{n-1} = 2^n.$$

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Как доказать, что подмножеств множества A, не попавших в P_B, столько же, сколько элементов в P_B? Можно, например,

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Как доказать, что подмножеств множества A, не попавших в P_B, столько же, сколько элементов в P_B? Можно, например, установить взаимно однозначное отображение f множества P_B на множество всех тех подмножеств множества A, которые не являются элементами множества P_B.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Во-первых, при этом $f(C)$ — элемент из P_A, не являющийся элементом множества P_B,

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Во-первых, при этом $f(C)$ — элемент из P_A, не являющийся элементом множества P_B, во-вторых, очевидно, что ООФ$(f) \cup$ ОДЗ$(f) = D(f) \cup E(f) = P(A)$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Осталось проверить, что отображение f является *взаимно однозначным*, т.е.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B*, то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Осталось проверить, что отображение f является *взаимно однозначным*, т.е.

$$C = D \;\Leftrightarrow\; f(C) = f(D).$$

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Тот факт, что

$$C = D \Rightarrow f(C) = f(D)$$

следует из однозначности операции $\cup$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов, где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

В данном случае мы фактически проведем только «генерацию», «оформление» проведите самостоятельно.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Итак, надо доказать *равенство* множеств C и D. Заметим, что роль множеств C и D совершенно одинакова: если мы поменяем обозначения C и D местами, ни одно из утверждений от этого не изменится. Как говорят «C и D входят во все формулы симметрично».

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Итак, надо доказать *равенство* множеств C и D. Как говорят «C и D входят во все формулы симметрично». Поэтому можно доказать только одно включение, например, $C \subseteq D$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ — *булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \;\Leftrightarrow\; f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Так как $f(C) = f(D)$, то $C \cup \{a\} = D \cup \{a\}$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов,   где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Так как $f(C) = f(D)$, то $C \cup \{a\} = D \cup \{a\}$. Поэтому $x \in D \cup \{a\}$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B, *то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Так как $f(C) = f(D)$, то $C \cup \{a\} = D \cup \{a\}$. Поэтому $x \in D \cup \{a\}$. Значит, по определению объединения множеств, $x \in D$ или $x \in \{a\}$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Так как $f(C) = f(D)$, то $C \cup \{a\} = D \cup \{a\}$. Поэтому $x \in D \cup \{a\}$. Значит, по определению объединения множеств, $x \in D$ или $x \in \{a\}$. Так как $x \in B$, то, по выбору B, $x \neq a$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если* $\mathcal{B}$ *— булева алгебра с конечным носителем* B*, то множество* B *состоит из* 2^n *элементов,* *где* $n = |B|$.

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \Leftrightarrow f(C) = f(D).$$

Пусть $x \in C$. Доказано, что $x \notin \{a\}$, таким образом, $x \in D$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Положим, например, $f(C) = C \cup \{a\}$ для каждого подмножества C множества B.

Теперь докажем *взаимную* однозначность.

$$C = D \;\Leftrightarrow\; f(C) = f(D).$$

Итак, доказано, что $C \subseteq D$, поэтому («из соображений симметрии») $C = D$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Таким образом, доказано, что f — взаимно однозначное отображение, причем, очевидно, ОДЗ$(f) \cap (f) = \emptyset$, и ОДЗ$(f) \cup (f) = A$.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Таким образом, доказано, что f — взаимно однозначное отображение, причем, очевидно, $\text{ОДЗ}(f) \cap (f) = \emptyset$, и $\text{ОДЗ}(f) \cup (f) = A$. Следовательно, подмножеств множества A, не являющихся элементами множества P_B ровно столько же, сколько элементов в множестве P_B, то есть 2^{n-1} штук.

V.6. Теорема о количестве элементов в конечной булевой алгебре

Теорема 18. *Если $\mathcal{B}$ — булева алгебра с конечным носителем B, то множество B состоит из 2^n элементов, где $n = |B|$.*

Доказательство. Таким образом, доказано, что f — взаимно однозначное отображение, причем, очевидно, ОДЗ$(f) \cap (f) = \emptyset$, и ОДЗ$(f) \cup (f) = A$. Следовательно, подмножеств множества A, не являющихся элементами множества P_B ровно столько же, сколько элементов в множестве P_B, то есть 2^{n-1} штук.

Согласно принципу математической индукции, доказываемое утверждение справедливо для любого конечного множества.

Рассмотреть пример?

VI. Связь булевых алгебр с решетками

Определение 4. *Реляционная система (система отношений)* $\mathcal{A} = \langle A, \{\leq\}\rangle$, *где* $\leq$ *— отношение частичного порядка*, *называется* **решеткой**, *если для любых* x, y *из* A

$$\forall p \in A \quad \forall q \in A \quad \exists u \in A \quad \exists v \in A \quad \begin{cases} v \leq x \leq u, \\ v \leq y \leq u, \\ \begin{cases} p \leq x, \\ p \leq y \end{cases} \Rightarrow \ p \leq v, \\ \begin{cases} x \leq q, \\ y \leq q \end{cases} \Rightarrow \ u \leq q. \end{cases} \qquad (2)$$

При этом элемент $u = \sup\{x, y\}$ *называется* **точной верхней гранью** *множества* $\{x, y\}$, $v = \inf\{x, y\}$ *называется* **точной нижней гранью** *множества* $\{x, y\}$.

VI. Связь булевых алгебр с решетками

Определение 4. ***Реляционная система*** *(система отношений)* $\mathcal{A} = \langle A, \{\leq\}\rangle$, *где* $\leq$ *—* ***отношение частичного порядка***, *называется* **решеткой**, *если для любых* x, y *из* A

$$\forall p \in A \quad \forall q \in A \quad \exists u \in A \quad \exists v \in A \quad \begin{cases} v \leq x \leq u, \\ v \leq y \leq u, \end{cases} \boxed{\begin{array}{l} u = \sup\{x, y\} \\ v = \inf\{x, y\} \end{array}} \\ \begin{cases} p \leq x, \\ p \leq y \end{cases} \Rightarrow p \leq v, \\ \begin{cases} x \leq q, \\ y \leq q \end{cases} \Rightarrow u \leq q. \end{cases} \tag{2}$$

Определение 5. ***Решёткой*** **с дополнениями** *называется* ***решётка*** *со свойством*

$$\exists \mathbf{0} \in A \; \exists \mathbf{1} \in A \; \forall x \in A \begin{cases} \mathbf{0} \leq x, \\ x \leq \mathbf{1} \end{cases} \quad \exists x^{\square} \in A \begin{cases} \sup\{x, x^{\square}\} = \mathbf{1}, \\ \inf\{x, x^{\square}\} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{3}$$

VI. Связь булевых алгебр с решетками

Теорема 19. *Справедливы следующие утверждения:*
1) если $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *—* ***булева алгебра****, и* $\leq$ *—* ***индуцированное отношение*** *частичного порядка, то* ***реляционная система*** $\langle B, \{\leq\}\rangle$ *является* ***решеткой*** *с* ***дополнениями****;*
2) $\mathcal{A} = \langle A, \ \{\leq\}\rangle$ *—* ***решетка с дополнениями****, в которой операции введены формулами:*

$$\begin{cases} x + y = \sup\{x, y\}, \\ x * y = \inf\{x, y\}, \\ \overline{x} = x^{\square}, \end{cases} \tag{4}$$

то $\langle A, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *является* ***булевой алгеброй****.*

Доказательство.

VI. Связь булевых алгебр с решетками

Теорема 19. *Справедливы следующие утверждения:*
1) если $\langle B, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *—* ***булева алгебра****, и* $\leq$ *—* ***индуцированное отношение*** *частичного порядка, то* ***реляционная система*** $\langle B, \{\leq\}\rangle$ *является* ***решеткой*** *с* ***дополнениями****;*
2) $\mathcal{A} = \langle A, \ \{\leq\}\rangle$ *—* ***решетка с дополнениями****, в которой операции введены формулами:*

$$\begin{cases} x + y = \sup\{x, y\}, \\ x * y = \inf\{x, y\}, \\ \overline{x} = x^{\Box}, \end{cases} \tag{4}$$

то $\langle A, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, *, \overline{}\}\rangle$ *является* ***булевой алгеброй****.*

Доказательство сводится к проверке аксиом.

VII. Отличия булевой от линейной алгебры

Эти результаты демонстрируют роль **атомов** булевой алгебры. Прослеживается аналогия с теорией линейных пространств, при этом очевидны следующие отличия:

VII. Отличия булевой от линейной алгебры

Эти результаты демонстрируют роль **атомов** булевой алгебры. Прослеживается аналогия с теорией линейных пространств, при этом очевидны следующие отличия:

1. В линейных пространствах изоморфизм определяется неоднозначно, в зависимости от выбора базиса. В булевых алгебрах множество **атомов** определяется однозначно.

VII. Отличия булевой от линейной алгебры

Эти результаты демонстрируют роль **атомов** булевой алгебры. Прослеживается аналогия с теорией линейных пространств, при этом очевидны следующие отличия:

1. В линейных пространствах изоморфизм определяется неоднозначно, в зависимости от выбора базиса. В булевых алгебрах множество **атомов** определяется однозначно.

2. В теории линейных пространств «стандартное» пространство — арифметическое — обладает мощным вычислительным аппаратом: аппаратом матричной алгебры.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. **Аксиомы A1–A8** легко проверяются традиционными методами теории множеств.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,{}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X\cup Y=Y\cup X$; б) $X\cap Y=$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X\cup Y=Y\cup X$; б) $X\cap Y=Y\cap X$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы А1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы А2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$
Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;
Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;
Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,{}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X\cup Y=Y\cup X$; б) $X\cap Y=Y\cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$;
б) $(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;
б) $(X\cap Y)\cup Z=$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\} \rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Как доказать равенство $L = R$?

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы А1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы А2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы А3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Как доказать равенство $L = R$?

Если рассматривать ссылку на какую-либо теорему, имеется 3 способа:

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$
Аксиомы A1: а) $X\cup Y=Y\cup X$; б) $X\cap Y=Y\cap X$;
Аксиомы A2: а) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$;
б) $(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;
Аксиомы A3: а) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;
б) $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$;
Как доказать равенство $L=R$?

1) использование равносильных преобразований равенств;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.

Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Как доказать равенство $L = R$?

1) использование равносильных преобразований равенств;
2) доказать
3) от противного.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Как доказать равенство $L = R$?

1) использование равносильных преобразований равенств;
2) доказать $L \subseteq R$ и $L \supseteq R$.
3) от противного.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Как доказать равенство $L = R$?

1) использование равносильных преобразований равенств;
2) доказать $L \subseteq R$ и $L \supseteq R$.
3) от противного.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

$$(X \cap Y) \cup Z \overset{?}{\subseteq} (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**.
Здесь $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$

Аксиомы А1: а) $X\cup Y=Y\cup X$; б) $X\cap Y=Y\cap X$;

Аксиомы А2: а) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$;

б) $(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;

Аксиомы А3: а) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;

б) $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$;

$$(X\cap Y)\cup Z\overset{?}{\subseteq}(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$$

$$x\in(X\cap Y)\cup Z\Rightarrow$$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.

Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

$$(X \cap Y) \cup Z \overset{?}{\subseteq} (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

$$x \in (X \cap Y) \cup Z \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X \cap Y, \\ x \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

$$(X \cap Y) \cup Z \overset{?}{\subseteq} (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

$$x \in (X \cap Y) \cup Z \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X \cap Y, \\ x \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

Если $x \notin Z$, то...

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,{}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X\cup Y=Y\cup X$; б) $X\cap Y=Y\cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$;
б) $(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;
б) $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$;

$$(X\cap Y)\cup Z\overset{?}{\subseteq}(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$$

$$x\in(X\cap Y)\cup Z\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in X\cap Y,\\ x\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in X,\\ \end{array}\right.\wedge\left[\begin{array}{l}x\in Y,\\ \end{array}\right.\Rightarrow$$

Если $x\notin Z$, то...

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

$$(X \cap Y) \cup Z \overset{?}{\subseteq} (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

$$x \in (X \cap Y) \cup Z \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X \cap Y, \\ x \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ \end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l} x \in Y, \\ \end{array}\right. \Rightarrow$$

Если $x \in Z$, то...

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

$$(X \cap Y) \cup Z \overset{?}{\subseteq} (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

$$x \in (X \cap Y) \cup Z \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X \cap Y, \\ x \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Z \end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l} x \in Y, \\ x \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

Если $x \in Z$, то...

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X\cup Y=Y\cup X$; б) $X\cap Y=Y\cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$;
б) $(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;
б) $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$;

$$(X\cap Y)\cup Z\overset{?}{\subseteq}(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$$

$$x\in(X\cap Y)\cup Z\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in X\cap Y,\\ x\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in X,\\ x\in Z\end{array}\right.\wedge\left[\begin{array}{l}x\in Y,\\ x\in Z\end{array}\right.\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in(X\cup Z)\cap(Y\cup Z).$$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X\cup Y=Y\cup X$; б) $X\cap Y=Y\cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$;

б) $(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;

б) $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$;

$$(X\cap Y)\cup Z\overset{?}{\subseteq}(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$$

$$x\in(X\cap Y)\cup Z\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in X\cap Y,\\ x\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in X,\\ x\in Z\end{array}\right.\wedge\left[\begin{array}{l}x\in Y,\\ x\in Z\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in(X\cup Z)\cap(Y\cup Z).$$

Обратное включение получаем аналогично.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы А1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы А2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы А3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

$$(X \cap Y) \cup Z \overset{?}{\subseteq} (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

$$x \in (X \cap Y) \cup Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X \cap Y, \\ x \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Z \end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l} x \in Y, \\ x \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (X \cup Z) \cap (Y \cup Z).$$

Обратное включение получаем аналогично.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,{}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$
Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;
Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;
Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;
Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.

Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \;\Leftrightarrow$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \ \Leftrightarrow\ X \cap Y = Y$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы А1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы А2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы А3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы А4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы А5: $X \cup Y = X \iff X \cap Y = Y$;

Аксиомы А6: а) $X \cup \{0;\ 1\} =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы А1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы А2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы А3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы А4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы А5: $X \cup Y = X \ \Leftrightarrow\ X \cap Y = Y$;

Аксиомы А6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \ \Leftrightarrow\ X \cap Y = Y$;

Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \Leftrightarrow X \cap Y = Y$;

Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \ \Leftrightarrow\ X \cap Y = Y$;

Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Аксиомы A7: а) $X \cup \emptyset =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,{}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**.
Здесь $X\cup Y\cup Z\subseteq\{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X\cup Y=Y\cup X$; б) $X\cap Y=Y\cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$;
б) $(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;
б) $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X\cup X=X$; б) $X\cap X=X$;

Аксиомы A5: $X\cup Y=X\ \Leftrightarrow\ X\cap Y=Y$;

Аксиомы A6: а) $X\cup\{0;\ 1\}=\{0;\ 1\}$; б) $X\cap\{0;\ 1\}=X$;

Аксиомы A7: а) $X\cup\emptyset=X$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\{\{0,1\},\emptyset\},\{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \Leftrightarrow X \cap Y = Y$;

Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Аксиомы A7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\},\emptyset\}, \{\cup,\cap,^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \ \Leftrightarrow\ X \cap Y = Y$;

Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Аксиомы A7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset = \emptyset$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \ \Leftrightarrow\ X \cap Y = Y$;

Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Аксиомы A7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset = \emptyset$;

Аксиомы A8: а) $X \cup \overline{X} =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \ \Leftrightarrow\ X \cap Y = Y$;

Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Аксиомы A7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset = \emptyset$;

Аксиомы A8: а) $X \cup \overline{X} = \{0;\ 1\}$;

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы А1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы А2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы А3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы А4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы А5: $X \cup Y = X \;\Leftrightarrow\; X \cap Y = Y$;

Аксиомы А6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Аксиомы А7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset = \emptyset$;

Аксиомы А8: а) $X \cup \overline{X} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \overline{X} =$

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, ^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом A1–A8**. Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$

Аксиомы A1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы A2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы A3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы A4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы A5: $X \cup Y = X \ \Leftrightarrow\ X \cap Y = Y$;

Аксиомы A6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Аксиомы A7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset = \emptyset$;

Аксиомы A8: а) $X \cup \overline{X} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \overline{X} = \emptyset$.

Пример 1. *Покажите, что* $\langle\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0,1\}, \emptyset\}, \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$ *является булевой алгеброй.*

Решение. Мы ограничимся конкретизацией **аксиом А1–А8**.
Здесь $X \cup Y \cup Z \subseteq \{0;\ 1\}$ **Вернемся к лекции?**

Аксиомы А1: а) $X \cup Y = Y \cup X$; б) $X \cap Y = Y \cap X$;

Аксиомы А2: а) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
б) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

Аксиомы А3: а) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
б) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

Аксиомы А4: а) $X \cup X = X$; б) $X \cap X = X$;

Аксиомы А5: $X \cup Y = X \Leftrightarrow X \cap Y = Y$;

Аксиомы А6: а) $X \cup \{0;\ 1\} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \{0;\ 1\} = X$;

Аксиомы А7: а) $X \cup \emptyset = X$; б) $X \cap \emptyset = \emptyset$;

Аксиомы А8: а) $X \cup \overline{X} = \{0;\ 1\}$; б) $X \cap \overline{X} = \emptyset$.

Пример 2. *Докажите, что булевой алгеброй является алгебра подмножеств множества* M*:* $\mathbf{S} = \langle A,\ \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$, *где* $A = \left\{ X \,\middle|\, X \subseteq M \right\}$.

Решение.

Пример 2. *Докажите, что булевой алгеброй является алгебра подмножеств множества* M*:* $\mathbf{S} = \langle A,\ \{\cup, \cap, {}^{-}\}\rangle$, *где* $A = \left\{X \,\middle|\, X \subseteq M\right\}$.

Решение. Доказательство выполнения **аксиом булевой алгебры** проводится традиционными методами **доказательства равенства множеств**, см. **пример**.

Вернуться к лекции или рассмотреть **другой пример**?

Пример 3. *Докажите, что булевой алгеброй является алгебра булевых функций от двух переменных* x, y: $\mathbf{B} = \langle B,\ \{\vee, \wedge, \overline{\ }\}\rangle$, *где функции* $\wedge$, $\vee$ *и* $\overline{\ }$ *определены таблицами.*

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

p	$\overline{q}$
0	1
1	0

Комментарий. Булева функция от двух переменных — это функция с областью определения $\{0;\ 1\} \times \{0;\ 1\}$ и областью значений $\{0;\ 1\}$.

Функция $\vee$ называется **дизъюнкцией**.

Функция $\wedge$ называется **конъюнкцией**.

Функция $\overline{x}$ называется **отрицанием**.

Пример 3. *Докажите, что булевой алгеброй является алгебра булевых функций от двух переменных* x, y*:* $\mathbf{B} = \langle B, \{\vee, \wedge, ^{-}\}\rangle$*, где функции* $\wedge$*,* $\vee$ *и* $^{-}$ *определены таблицами.*

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

p	$\overline{q}$
0	1
1	0

Решение. Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y) = \big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big).$$

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	1			
1	0	0	1	0			
1	0	1	1	1			
1	1	0	1	0			
1	1	1	1	1			

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0			
0	0	1	0	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	1			
1	0	0	1	0			
1	0	1	1	1			
1	1	0	1	0			
1	1	1	1	1			

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	1	1	1	1	0		
1	0	0	1	0	0		
1	0	1	1	1	1		
1	1	0	1	0	0		
1	1	1	1	1	1		

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	1	1	1	1	0		
1	0	0	1	0	0		
1	0	1	1	1	1		
1	1	0	1	0	0		
1	1	1	1	1	1		

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	0	
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}$, $\quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}$, $\quad \overline{p} = 1 - p$.

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	0	
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\underbrace{\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y)}_{L} = \underbrace{\big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big)}_{R}.$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y) = \big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big).$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Значит, **аксиома** доказана.

Решение. $p \vee q = \max\{p,\ q\}, \quad p \wedge q = \min\{p,\ q\}, \quad \overline{p} = 1 - p.$

Приведем лишь доказательство **аксиомы**

$$\big(f(x,y) \vee g(x,y)\big) \wedge h(x,y) = \big(f(x,y) \wedge h(x,y)\big) \vee \big(g(x,y) \wedge h(x,y)\big).$$

$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$	$f(x,y) \vee g(x,y)$	L	$f \wedge h$	$g \wedge h$	R
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Остальные **аксиомы** можно доказать аналогично.

Вернуться к лекции?

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Представим эти алгебры в стандартном математическом виде:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Представим эти алгебры в стандартном математическом виде:

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \in \{a;\ b\} \right\};\ \{\{a;\ b\};\ \emptyset;\ \cup;\ \cap;\ \overline{}\} \right\rangle,$$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Представим эти алгебры в стандартном математическом виде:

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \in \{a;\ b\} \right\};\ \{\{a;\ b\};\ \emptyset;\ \cup;\ \cap;\ \overline{}\} \right\rangle,$$

$$\mathcal{B} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} x \in \{0;\ 1\}, \\ f(x) \in \{0;\ 1\} \end{array} \right. \right\};\ \{\mathbf{1};\ \mathbf{0};\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle =$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — функции, тождественно равные 0 и, соответственно, 1.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Представим эти алгебры в стандартном математическом виде:

$$\mathcal{A} = \left\langle \left\{ X \,\middle|\, X \in \{a;\ b\} \right\};\ \{\{a;\ b\};\ \emptyset;\ \cup;\ \cap;\ \overline{}\} \right\rangle,$$

$$\mathcal{B} = \left\langle \left\{ f \,\middle|\, \begin{cases} x \in \{0;\ 1\}, \\ f(x) \in \{0;\ 1\} \end{cases} \right\};\ \{\mathbf{1};\ \mathbf{0};\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left\{ f \,\middle|\, \{x;\ f(x)\} \subseteq \{0;\ 1\} \right\};\ \{\mathbf{1};\ \mathbf{0};\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle,$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — функции, тождественно равные 0 и, соответственно, 1.

Пример 4. *Рассмотрим **булеву алгебру** $\mathcal{A}$ **подмножеств множества** $\{a;\ b\}$ и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной** (с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры **изоморфны**, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Естественный вопрос: как задать элементы носителей? Для алгебры $\mathcal{A}$ ответ очевиден:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Естественный вопрос: как задать элементы носителей? Для алгебры $\mathcal{A}$ ответ очевиден: элементами носителя являются *подмножества* из $\{a;\ b\}$, поэтому каждое подмножество зададим, например, списком элементов.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Таким образом, носитель алгебры $\mathcal{A}$ равен:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Таким образом, носитель алгебры $\mathcal{A}$ равен:

$$\mathbf{A} = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Таким образом, носитель алгебры $\mathcal{A}$ равен:

$$\mathbf{A} = \left\{\emptyset, \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Таким образом, носитель алгебры $\mathcal{A}$ равен:

$$\mathbf{A} = \Big\{\emptyset, \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\}\Big\}$$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Как задать носитель алгебры $\mathcal{B}$?

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции.*

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции*. Типовыми способами задания функции являются:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции*. Типовыми способами задания функции являются:

— формула;

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции*. Типовыми способами задания функции являются:

— формула;

— таблица;

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции.* Типовыми способами задания функции являются:

— формула;

— таблица;

— график.

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Элементы носителя алгебры $\mathcal{B}$ представляют собой *функции*. Типовыми способами задания функции являются:

— формула;

— таблица;

— график.

Какой из этих способов оптимален в нашем случае?

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру $\mathcal{B}$* ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. У интересующих нас функций область определения состоит всего из двух элементов, поэтому эти функции удобнее всего задать

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. У интересующих нас функций область определения состоит всего из двух элементов, поэтому эти функции удобнее всего задать таблицами:

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. У интересующих нас функций область определения состоит всего из двух элементов, поэтому эти функции удобнее всего задать таблицами:

x	$f_0 = \mathbf{0}$	f_1	f_2	$f_3 = \mathbf{1}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$

Пример 4. *Рассмотрим **булеву алгебру** $\mathcal{A}$ **подмножеств множества** $\{a;\ b\}$ и булеву алгебру $\mathcal{B}$ **булевых функций от одной переменной** (с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры **изоморфны**, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$.

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{ψ_1}	f_3	f_2	f_1	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$

Пример 4. *Рассмотрим* ***булеву алгебру*** $\mathcal{A}$ ***подмножеств множества*** $\{a;\ b\}$ *и булеву алгебру* $\mathcal{B}$ ***булевых функций от одной переменной*** *(с операциями «****дизъюнкция****», «****конъюнкция****», «****отрицание****»). Доказать, что эти алгебры* ***изоморфны****, и найти все изоморфизмы алгебры* $\mathcal{A}$ *на алгебру* $\mathcal{B}$*.*

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{ψ_1}	f_3	f_2	f_1	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$
X^{ψ_2}	f_3	f_1	f_2	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$

Пример 4. *Рассмотрим **булеву алгебру** $\mathcal{A}$ **подмножеств множества** $\{a;\ b\}$ и булеву алгебру $\mathcal{B}$ **булевых функций от одной переменной** (с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры **изоморфны**, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{ψ_1}	f_3	f_2	f_1	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$
X^{ψ_2}	f_3	f_1	f_2	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$

Тот факт, что других изоморфизмов нет, следует из того, что при изоморфизме «ноль» и «единица» булевой алгебры переходят в «ноль» и «единицу» другой булевой алгебры.

Пример 4. *Рассмотрим **булеву алгебру** $\mathcal{A}$ **подмножеств множества** $\{a;\ b\}$ и булеву алгебру $\mathcal{B}$ **булевых функций от одной переменной** (с операциями «**дизъюнкция**», «**конъюнкция**», «**отрицание**»). Доказать, что эти алгебры **изоморфны**, и найти все изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$.*

Решение. Искомые изоморфизмы можно задать таблицами:

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a;\ b\}$	$\{a;b\}$	$\emptyset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$
X^{φ_1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{φ_2}	f_0	f_2	f_1	f_3	f_3	f_0	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
X^{ψ_1}	f_3	f_2	f_1	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$
X^{ψ_2}	f_3	f_1	f_2	f_0	f_0	f_3	$\wedge$	$\vee$	$\overline{}$

Вернуться к лекции?

Пример 5.

Например, в **булевой алгебре подмножеств** $\langle A;\ \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$ множества M (то есть $A = \left\{X \,\middle|\, X \subseteq M\right\}$) **атомами** являются

Пример 5.

Например, в **булевой алгебре подмножеств** $\langle A;\ \{\cup, \cap, \overline{}\}\rangle$ множества M (то есть $A = \left\{ X \;\middle|\; X \subseteq M \right\}$) **атомами** являются все одноэлементные подмножества $\{x\}$, где $x \in M$.

Пример 5.

В алгебре n- местных булевых функций $\langle A, \ \{\vee, \wedge, \neg\}\rangle$ **атомами** являются

Пример 5.

В алгебре n- местных булевых функций $\langle A, \{\vee, \wedge, \neg\}\rangle$ **атомами** являются булевы функции f такие, что каждая из них принимает значение 1 только при одном-единственном наборе значений аргументов. Например, при $n = 2$ множество **атомов** равно

Пример 5.

В алгебре n- местных булевых функций $\langle A, \ \{\vee, \wedge, \neg\}\rangle$ **атомами** являются булевы функции f такие, что каждая из них принимает значение 1 только при одном-единственном наборе значений аргументов. Например, при $n = 2$ множество **атомов** равно $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, где эти функции задаются таблицами

$f_1(x;y)$		
$y \backslash x$	0	1
0	1	0
1	0	0

,

$f_2(x;y)$		
$y \backslash x$	0	1
0	0	1
1	0	0

,

$f_3(x;y)$		
$y \backslash x$	0	1
0	0	0
1	1	0

,

$f_4(x;y)$		
$y \backslash x$	0	1
0	0	0
1	0	1

.

Рассмотрим пример безатомной булевой алгебры или **вернемся к лекции?**

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Напомним, что **рациональным** называется число вида $\dfrac{m}{n}$

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Напомним, что **рациональным** называется число вида $\dfrac{m \in \mathbb{Z}}{n \in \mathbb{N}}$,

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_m < b_m \le 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Напомним, что **рациональным** называется число вида $\dfrac{m \in \mathbb{Z}}{n \in \mathbb{N}}$, где $\mathbb{Z} = \{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2; \ldots\}$, $\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\}$.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_m < b_m \le 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Очевидно, что множество M с операциями $\cup$, $\cap$ и операцией дополнения до множества $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$ является булевой алгеброй, в которой в качестве $\mathbf{0}$ выступает пустое множество $\emptyset$, а в качестве $\mathbf{1}$ — множество $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Очевидно, что множество M с операциями $\cup$, $\cap$ и операцией дополнения до множества $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$ является булевой алгеброй, в которой в качестве $\mathbf{0}$ выступает пустое множество $\emptyset$, а в качестве $\mathbf{1}$ — множество $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$.

Если X — **атом** этой булевой алгебры, то для $(a;\ b) \subseteq X$ имеем $\left(\dfrac{2a+b}{3};\ \dfrac{a+2b}{3}\right) \cap X = \left(\dfrac{2a+b}{3};\ \dfrac{a+2b}{3}\right) \notin \{X;\ \emptyset\}$, что противоречит **определению атома**.

Пример 6 (безатомной булевой алгебры). *Привести пример безатомной булевой алгебры.*

Решение. Обозначим через M совокупность всех множеств вида

$$\Big((a_1; b_1) \cup (a_2; b_2) \cup \ldots \cup (a_m; b_m)\Big) \cap \mathbb{Q},$$

где, во-первых, $0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_m < b_m \le 1$, и, во-вторых, все a_i и b_i являются рациональными числами.

Очевидно, что множество M с операциями $\cup$, $\cap$ и операцией дополнения до множества $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$ является булевой алгеброй, в которой в качестве $\mathbf{0}$ выступает пустое множество $\emptyset$, а в качестве $\mathbf{1}$ — множество $(0;\ 1) \cap \mathbb{Q}$.

Таким образом, у этой алгебры нет **атомов**.

Вернуться к лекции?

Пример 7 (строения конечной булевой алгебры). *Пусть операции в булевой алгебре определены такими таблицами* ***Кэли****:*

$+$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

$*$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

Что в этой булевой алгебре представляет собой элемент $\mathbf{1}$*? Найти все* ***атомы*** *этой булевой алгебры. Указать образы всех элементов при изоморфизме этой булевой алгебры на* ***алгебру всех подмножеств*** *некоторого множества.*

$+$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

$*$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна алгебре подмножеств двухэлементного множества, например, множества $\{a, b\}$.

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна алгебре подмножеств двухэлементного множества, например, множества $\{a, b\}$.

Очевидно, что $\mathbf{0} = 1$, $\mathbf{1} = 3$. Изоморфизм, например, такой:

1	2	3	4	+	*
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\cup$	$\cap$

.

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна алгебре подмножеств двухэлементного множества, например, множества $\{a, b\}$.

Очевидно, что $\mathbf{0} = 1$, $\mathbf{1} = 3$. Изоморфизм, например, такой:

1	2	3	4	$+$	$*$
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\cup$	$\cap$

. Можно предложить и такой изоморфизм:

1	2	3	4	$+$	$*$
$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	$\cup$	$\cap$

.

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	3	4

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	1	2	3	4
4	1	1	4	4

В этой алгебре всего 4 элемента. Поэтому она изоморфна алгебре подмножеств двухэлементного множества, например, множества $\{a, b\}$.

Очевидно, что $\mathbf{0} = 1$, $\mathbf{1} = 3$. Изоморфизм, например, такой:

1	2	3	4	+	*
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\cup$	$\cap$

. Можно предложить и такой изоморфизм:

1	2	3	4	+	*
$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$	$\cup$	$\cap$

.

Рассмотреть следующий пример или **вернуться к лекции?**

Пример 8. *Найти все автоморфизмы булевой алгебры с носителем из функций таких, что* $D(f) = \{-1; 0; 1\}$, $E(f) = \{-5;\ 5\}$, *с операциями* f_1, f_0, $\max$, $\min$, $(-1) \cdot \bullet$. *Задайте таблицей стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****. Найти все* ***гомоморфизмы*** *этой булевой алгебры на двуатомную булеву алгебру. Убедитесь по определению* ***изоморфизма****, что при переходе к образам элементов носителя и операций истинная формула* $\min\{\max\{f_2;\ f_3\};\ f_7\} = f_7$ *преобразуется в истинную формулу.*

Решение. Сначала опишем носитель этой булевой алгебры. Функции зададим таблицами:

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

$\max\{f(x);\ g(x)\}$								
$g\backslash f$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_2	f_1	f_2	f_7	f_6	f_1	f_6	f_7
f_3	f_3	f_1	f_7	f_3	f_5	f_5	f_1	f_7
f_4	f_4	f_1	f_6	f_5	f_4	f_5	f_6	f_1
f_5	f_5	f_1	f_1	f_5	f_5	f_5	f_1	f_1
f_6	f_6	f_1	f_6	f_1	f_6	f_1	f_6	f_1
f_7	f_7	f_1	f_7	f_7	f_1	f_1	f_1	f_7

$\min\{f(x);\ g(x)\}$								
$g\backslash f$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0
f_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_2	f_0	f_2	f_2	f_0	f_0	f_0	f_2	f_2
f_3	f_0	f_3	f_0	f_3	f_0	f_3	f_0	f_3
f_4	f_0	f_4	f_0	f_0	f_4	f_4	f_4	f_0
f_5	f_0	f_5	f_0	f_3	f_4	f_5	f_4	f_3
f_6	f_0	f_6	f_2	f_0	f_4	f_4	f_6	f_2
f_7	f_0	f_7	f_2	f_3	f_0	f_3	f_2	f_7

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции .

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4. Отметим, что указание образов **атомов** однозначно определяет автоморфизм.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4. Автоморфизм булевой алгебры либо переставляет **атомы** между собой (таких автоморфизмов $3! = 6$), либо отображает исходную булеву алгебру в двойственную, тогда образами **атомов** являются **коатомы**[1] f_5; f_6; f_7.

[1]То есть **атомы** двойственной алгебры.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4. Таких автоморфизмов также 6 штук. Пример неединичного автоморфизма можно задать таблицей (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $\quad f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $\quad f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

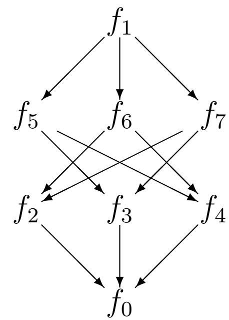
$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Ясно, что **атомами** этой булевой алгебры являются функции f_2; f_3; f_4. Таких автоморфизмов также 6 штук. Пример неединичного автоморфизма можно задать таблицей (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot\bullet$
x^φ	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4	f_6	f_5	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot\bullet$

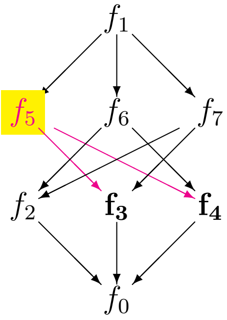
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} =$

x	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2\ \ ?$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



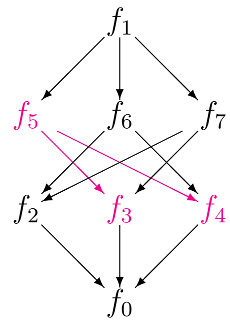
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} =$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	?			f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3				f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4				f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3				f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2				f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



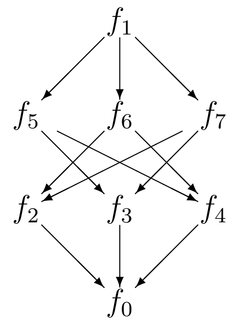
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi_1} =$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ ?$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



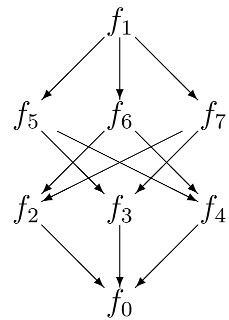
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_3^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$

x	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	f_0 f_1 f_3 f_4 f_2 ?	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	f_0 f_1 f_4 f_2 f_3	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	f_0 f_1 f_3 f_2 f_4	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	f_0 f_1 f_2 f_4 f_3	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	f_0 f_1 f_4 f_3 f_2	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	f_1 f_0 f_5 f_6 f_7	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	f_1 f_0 f_6 f_7 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	f_1 f_0 f_7 f_5 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	f_1 f_0 f_6 f_5 f_7	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	f_1 f_0 f_5 f_7 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	f_1 f_0 f_7 f_6 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



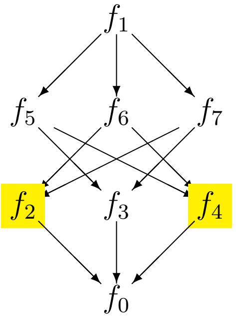
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_3^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} =$

x	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0 \quad f_1 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_2 \quad ?$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0 \quad f_1 \quad f_4 \quad f_2 \quad f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0 \quad f_1 \quad f_3 \quad f_2 \quad f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_4 \quad f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0 \quad f_1 \quad f_4 \quad f_3 \quad f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1 \quad f_0 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1 \quad f_0 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1 \quad f_0 \quad f_7 \quad f_5 \quad f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1 \quad f_0 \quad f_6 \quad f_5 \quad f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_5 \quad f_7 \quad f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_7 \quad f_6 \quad f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



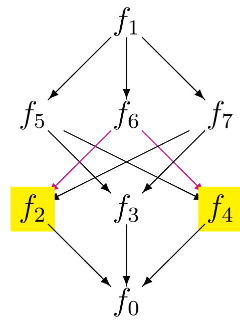
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 1} = \max\{f_3^{\varphi 1}; f_4^{\varphi 1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} =$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	?			f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



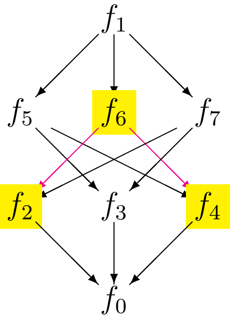
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 1} = \max\{f_3^{\varphi 1}; f_4^{\varphi 1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} =$

x	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_2 \quad ?$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_4 \quad f_2 \quad f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_3 \quad f_2 \quad f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_4 \quad f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_4 \quad f_3 \quad f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_7 \quad f_5 \quad f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_6 \quad f_5 \quad f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_5 \quad f_7 \quad f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_7 \quad f_6 \quad f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



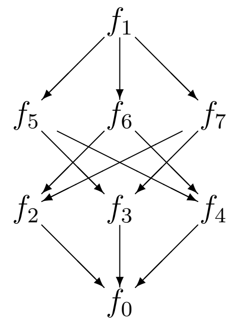
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 1} = \max\{f_3^{\varphi 1}; f_4^{\varphi 1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} = f_6$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	?			f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



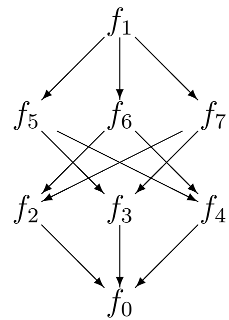
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 1} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 1} = \max\{f_3^{\varphi 1}; f_4^{\varphi 1}\} =$
$= \max\{f_4; f_2\} = f_6$

x	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0 f_1 f_3 f_4 f_2 f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0 f_1 f_4 f_2 f_3	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0 f_1 f_3 f_2 f_4	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0 f_1 f_2 f_4 f_3	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0 f_1 f_4 f_3 f_2	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1 f_0 f_5 f_6 f_7	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1 f_0 f_6 f_7 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1 f_0 f_7 f_5 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1 f_0 f_6 f_5 f_7	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1 f_0 f_5 f_7 f_6	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1 f_0 f_7 f_6 f_5	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



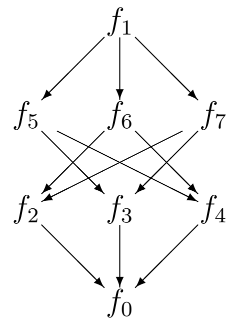
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} =$

x	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0 \quad f_1 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_2 \quad f_6 \quad ?$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0 \quad f_1 \quad f_4 \quad f_2 \quad f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0 \quad f_1 \quad f_3 \quad f_2 \quad f_4$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_4 \quad f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0 \quad f_1 \quad f_4 \quad f_3 \quad f_2$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1 \quad f_0 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1 \quad f_0 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1 \quad f_0 \quad f_7 \quad f_5 \quad f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1 \quad f_0 \quad f_6 \quad f_5 \quad f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_5 \quad f_7 \quad f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_7 \quad f_6 \quad f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



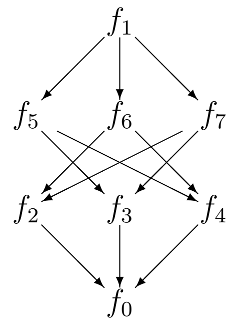
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi_1} =$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6$?	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



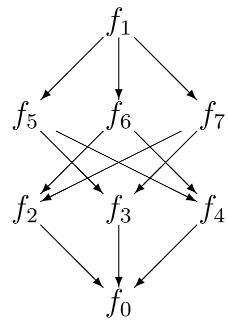
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_2^{\varphi_2}; f_4^{\varphi_1}\} =$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	f_6	?		f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2				f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



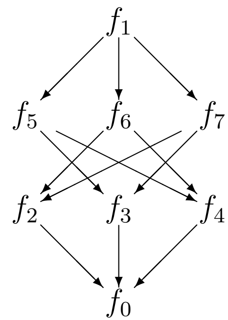
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_2^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_3; f_2\} =$

x	$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0 \ f_1 \ f_3 \ f_4 \ f_2 \ f_6$?	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0 \ f_1 \ f_4 \ f_2 \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0 \ f_1 \ f_3 \ f_2 \ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_4 \ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0 \ f_1 \ f_4 \ f_3 \ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1 \ f_0 \ f_5 \ f_6 \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1 \ f_0 \ f_6 \ f_7 \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1 \ f_0 \ f_7 \ f_5 \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1 \ f_0 \ f_6 \ f_5 \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1 \ f_0 \ f_5 \ f_7 \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1 \ f_0 \ f_7 \ f_6 \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



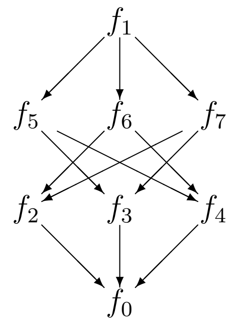
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi_1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi_1} = \max\{f_2^{\varphi_1}; f_4^{\varphi_1}\} =$
$= \max\{f_3; f_2\} = f_7$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6\ ?$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



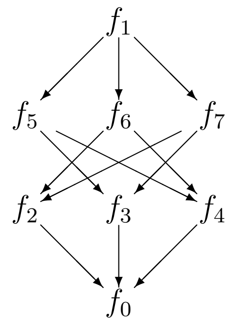
Список автоморфизмов: $(f_6)^{\varphi 1} = (\max\{f_2; f_4\})^{\varphi 1} = \max\{f_2^{\varphi 1}; f_4^{\varphi 1}\} =$
$= \max\{f_3; f_2\} = f_7$

x	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_2 \quad f_6 \quad f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_4 \quad f_2 \quad f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_3 \quad f_2 \quad f_4$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_4 \quad f_3$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	$f_0 \quad f_1 \quad f_4 \quad f_3 \quad f_2$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_7 \quad f_5 \quad f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_6 \quad f_5 \quad f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_5 \quad f_7 \quad f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	$f_1 \quad f_0 \quad f_7 \quad f_6 \quad f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



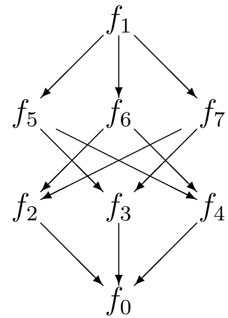
Список автоморфизмов: $(f_7)^{\varphi 1} = (\max\{f_2; f_3\})^{\varphi 1} = \max\{f_2^{\varphi 1}; f_3^{\varphi 1}\} =$
$= \max\{f_3; f_4\} = f_5$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6\ f_7\ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



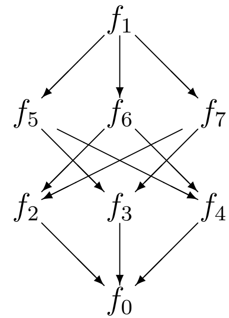
Список автоморфизмов: для φ_2–φ_5 получаем

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6\ f_7\ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



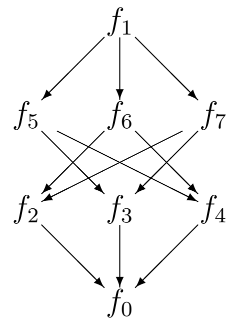
Список автоморфизмов: для φ_2–φ_5 получаем

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6\ f_7\ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3\ f_7\ f_5\ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4\ f_6\ f_5\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3\ f_5\ f_7\ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2\ f_7\ f_6\ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



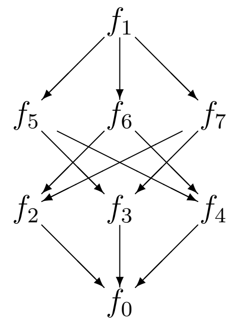
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi_6} =$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6\ f_7\ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3\ f_7\ f_5\ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4\ f_6\ f_5\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3\ f_5\ f_7\ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2\ f_7\ f_6\ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7\ ?$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



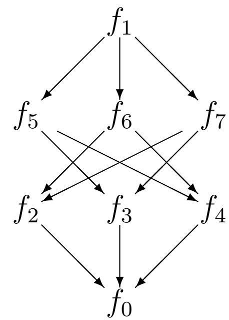
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} =$

x	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_1	f_0	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7\ \ ?$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_0	f_1	$\min$	$\max$	$(-1)\cdot$



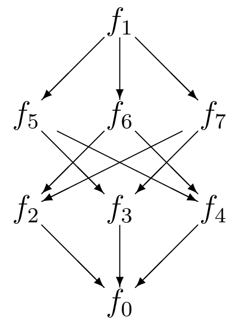
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} = \min\{f_3^{\varphi 6}; f_4^{\varphi 6}\} =$

x	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7\ \ ?$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



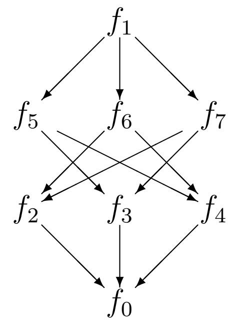
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} = \min\{f_3^{\varphi 6}; f_4^{\varphi 6}\} =$
$= \min\{f_6; f_7\} =$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	f_6	f_7	f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3	f_7	f_5	f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4	f_6	f_5	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3	f_5	f_7	f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2	f_7	f_6	f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	?			f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



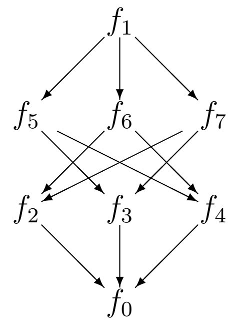
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} = \min\{f_3^{\varphi 6}; f_4^{\varphi 6}\} =$
$= \min\{f_6; f_7\} = f_2$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	f_0	f_1	f_3	f_4	f_2	f_6	f_7	f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	f_0	f_1	f_4	f_2	f_3	f_7	f_5	f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	f_0	f_1	f_3	f_2	f_4	f_6	f_5	f_7	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	f_0	f_1	f_2	f_4	f_3	f_5	f_7	f_6	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	f_0	f_1	f_4	f_3	f_2	f_7	f_6	f_5	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	?			f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	f_1	f_0	f_6	f_7	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	f_1	f_0	f_7	f_5	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	f_1	f_0	f_6	f_5	f_7				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	f_1	f_0	f_5	f_7	f_6				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	f_1	f_0	f_7	f_6	f_5				f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



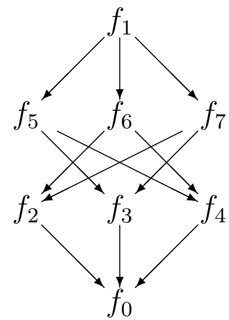
Список автоморфизмов: $(f_5)^{\varphi 6} = (\max\{f_3; f_4\})^{\varphi 6} = \min\{f_3^{\varphi 6}; f_4^{\varphi 6}\} =$
$= \min\{f_6; f_7\} = f_2$

x	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 0}$	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 1}$	$f_0\ f_1\ f_3\ f_4\ f_2\ f_6\ f_7\ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 2}$	$f_0\ f_1\ f_4\ f_2\ f_3\ f_7\ f_5\ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 3}$	$f_0\ f_1\ f_3\ f_2\ f_4\ f_6\ f_5\ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 4}$	$f_0\ f_1\ f_2\ f_4\ f_3\ f_5\ f_7\ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 5}$	$f_0\ f_1\ f_4\ f_3\ f_2\ f_7\ f_6\ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 6}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_6\ f_7\ f_2$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 7}$	$f_1\ f_0\ f_6\ f_7\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 8}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_5\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 9}$	$f_1\ f_0\ f_6\ f_5\ f_7$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 10}$	$f_1\ f_0\ f_5\ f_7\ f_6$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi 11}$	$f_1\ f_0\ f_7\ f_6\ f_5$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



Список автоморфизмов:

x	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_0}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_1}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_2}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_3}	$f_0\ \ f_1\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_4}	$f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_5}	$f_0\ \ f_1\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5$	f_1	f_0	max	min	$(-1)\cdot$
x^{φ_6}	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_7}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_3\ \ f_4\ \ f_2$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_8}	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_5\ \ f_6\ \ f_4\ \ f_2\ \ f_3$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
x^{φ_9}	$f_1\ \ f_0\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_3\ \ f_2\ \ f_4$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{10}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_5\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_2\ \ f_4\ \ f_3$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$
$x^{\varphi_{11}}$	$f_1\ \ f_0\ \ f_7\ \ f_6\ \ f_5\ \ f_4\ \ f_3\ \ f_2$	f_0	f_1	min	max	$(-1)\cdot$



Пример 8. *Найти все автоморфизмы булевой алгебры с носителем из функций таких, что* $D(f) = \{-1; 0; 1\}$, $E(f) = \{-5;\ 5\}$, *с операциями* f_1, f_0, $\max$, $\min$, $(-1)\cdot\bullet$. *Задайте таблицей стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****. Найти все* ***гомоморфизмы*** *этой булевой алгебры на двуатомную булеву алгебру. Убедитесь по определению* ***изоморфизма****, что при переходе к образам элементов носителя и операций истинная формула* $\min\{\max\{f_2;\ f_3\};\ f_7\} = f_7$ *преобразуется в истинную формулу.*

Решение. Таблица, задающая стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее **атомов** имеет следующий вид (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	$\max$	$\min$	$(-1)\cdot\bullet$
x^ψ	$\emptyset$	$\{f_2;\ f_3;\ f_4\}$	$\{f_2\}$	$\{f_3\}$	$\{f_4\}$	$\{f_3;\ f_4\}$	$\{f_2;\ f_4\}$	$\{f_2;\ f_3\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Для того, чтобы найти все **гомоморфизмы** этой алгебры на двуатомную булевы алгебру, заметим, что, во-первых, это возможно сделать только «с точностью до **изоморфизма**», то есть при условии отождествления изоморфных алгебр,

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Для того, чтобы найти все **гомоморфизмы** этой алгебры на двуатомную булевы алгебру, заметим, что, во-первых, это возможно сделать только «с точностью до **изоморфизма**», то есть при условии отождествления изоморфных алгебр, во-вторых, образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент. В самом деле, если t — **атом**, то для любого элемента x из носителя исходной булевой алгебры имеем $t * x \in \{t;\ \mathbf{0}\}$, поэтому

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент. В самом деле, если t — **атом**, то для любого элемента x из носителя исходной булевой алгебры имеем $t * x \in \{t;\ \mathbf{0}\}$, поэтому $t^\varphi * x^\varphi \in \{t^\varphi;\ \mathbf{0}^\varphi\}$. Поэтому либо t^φ есть **атом**, либо

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент. В самом деле, если t — **атом**, то для любого элемента x из носителя исходной булевой алгебры имеем $t * x \in \{t;\ \mathbf{0}\}$, поэтому $t^{\varphi} * x^{\varphi} \in \{t^{\varphi};\ \mathbf{0}^{\varphi}\}$. Поэтому либо t^{φ} есть **атом**, либо это нулевой элемент образа исходной алгебры.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

Поэтому **гомоморфизмы** отличаются друг от друга, во-первых, тем, какой из них пребразуется гомоморфизмом в нулевой элемент и, во-вторых, в какие именно **атомы** переходят «уцелевшие» **атомы**.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

Поэтому **гомоморфизмы** отличаются друг от друга, во-первых, тем, какой из них пребразуется гомоморфизмом в нулевой элемент и, во-вторых, в какие именно **атомы** переходят «уцелевшие» **атомы**.

В итоге получаем 6 гомоморфизмов. Например, возьмем в качестве образа алгебру подмножеств множества $\{a;\ b\}$. Тогда один из гомоморфизмов имеет вид (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

Поэтому **гомоморфизмы** отличаются друг от друга, во-первых, тем, какой из них пребразуется гомоморфизмом в нулевой элемент и, во-вторых, в какие именно **атомы** переходят «уцелевшие» **атомы**.

В итоге получаем 6 гомоморфизмов. Например, возьмем в качестве образа алгебру подмножеств множества $\{a;\ b\}$. Тогда один из гомоморфизмов имеет вид (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	max	min	$(-1)\cdot\bullet$
x^ψ	$\emptyset$	$\{a;\ b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a;\ b\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-1	-5	5	-5	-5	5	5	5	-5
0	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5
1	-5	5	5	-5	-5	-5	5	5

$(-1)\cdot f(x)$								
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$-f$	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4

Образ атома под действием гомоморфизма есть либо **атом**, либо нулевой элемент.

В итоге получаем 6 гомоморфизмов. Например, возьмем в качестве образа алгебру подмножеств множества $\{a;\ b\}$. Тогда один из гомоморфизмов имеет вид (учитываем, что $f_5 = \max\{f_3;\ f_4\}$, $f_6 = \max\{f_2;\ f_4\}$, $f_7 = \max\{f_2;\ f_3\}$):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	max	min	$(-1)\cdot\bullet$
x^ψ	$\emptyset$	$\{a;\ b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a;\ b\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Пример 8. *Найти все автоморфизмы булевой алгебры с носителем из функций таких, что* $D(f) = \{-1; 0; 1\}$, $E(f) = \{-5;\ 5\}$, *с операциями* f_1, f_0, $\max$, $\min$, $(-1) \cdot \bullet$. *Задайте таблицей стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее* ***атомов***. *Найти все* ***гомоморфизмы*** *этой булевой алгебры на двуатомную булеву алгебру. Убедитесь по определению* ***изоморфизма***, *что при переходе к образам элементов носителя и операций истинная формула* $\min\{\max\{f_2;\ f_3\};\ f_7\} = f_7$ *преобразуется в истинную формулу.*

Решение. $\min^{\varphi}\{\max^{\varphi}\{f_2^{\varphi};\ f_3^{\varphi}\};\ f_7^{\varphi}\} = f_7^{\varphi}$,

Пример 8. *Найти все автоморфизмы булевой алгебры с носителем из функций таких, что* $D(f) = \{-1; 0; 1\}$, $E(f) = \{-5;\ 5\}$, *с операциями* f_1, f_0, $\max$, $\min$, $(-1) \cdot \bullet$. *Задайте таблицей стандартный изоморфизм этой булевой алгебры на алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****. Найти все* ***гомоморфизмы*** *этой булевой алгебры на двуатомную булеву алгебру. Убедитесь по определению* ***изоморфизма****, что при переходе к образам элементов носителя и операций истинная формула* $\min\{\max\{f_2;\ f_3\};\ f_7\} = f_7$ *преобразуется в истинную формулу.*

Решение. $\min^{\varphi}\{\max^{\varphi}\{f_2^{\varphi};\ f_3^{\varphi}\};\ f_7^{\varphi}\} = f_7^{\varphi}$,
$(\{f_2\} \cup \{f_3\}) \cap \{f_2;\ f_3\} = \{f_2;\ f_3\}$ — истинная формула.
Рассмотреть следующий пример или **вернуться к лекции?**

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{\quad}\}\rangle\,.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры. Найти образы предикатов* $\mathcal{R}_1 \sim\ x \leq y,\quad \mathcal{R}_2 \sim\ x \neq y$ *при естественном изоморфизме этой алгебры в алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****. Какой из этих предикатов является коатомом булевой алгебры* $\mathcal{A}$ *(то есть атомом двойственной булевой алгебры)? Найдите количество гомоморфизмов булевой алгебры* $\mathcal{A}$ *на двуатомную булеву алгебру. Доказать, что алгебра* $\mathcal{A}$ *изоморфна булевой алгебре булевых функций от двух переменных с операциями* $\vee$, $\wedge$, $\overline{\quad}$.

Решение.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle .$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Как *задать* **атомы**?

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\,\} \right\rangle .$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Как *задать* **атомы**? Мы выделили 2 типа предикатов: **предикат-высказывание** и **предикат-функция**.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \rangle\,.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Как *задать* **атомы**? Мы выделили 2 типа предикатов: **предикат-высказывание** и **предикат-функция**.

Предикаты $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ заданы как предикаты-высказывания, поэтому, видимо, описание **атомов** следует дать как предикатов-высказываний.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{\quad}\}\rangle\,.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Как *задать* **атомы**? Мы выделили 2 типа предикатов: **предикат-высказывание** и **предикат-функция**.

Предикаты $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ заданы как предикаты-высказывания, поэтому, видимо, описание **атомов** следует дать как предикатов-высказываний. На самом деле это непринципиально, так как перевод с языка предикатов-функций на язык предикатов-высказываний дается **соответсвующей формулой**.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2;6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\}\right\rangle.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Поэтому зададим **атомы** с помощью предикатов-функций, при этом приведем предикаты-функции для предикатов-высказываний $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$, а также нулевого и единичного элементов этой булевой алгебры:

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \rangle\,.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Поэтому зададим **атомы** с помощью предикатов-функций:

		0	**1**	атомы					
x	y	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	r_1	r_2
2	2	0	1	1	0	0	0	1	0
2	6	0	1	0	1	0	0	1	1
6	2	0	1	0	0	1	0	0	1
6	6	0	1	0	0	0	1	1	0

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\}\rangle\,.$$

Найти ***атомы*** *этой булевой алгебры.*

Решение. Таким образом, в соответствии с **формулой перехода от предиката-функции к предикату-высказыванию** искомые **атомы** можно представить в виде, например, следующих предикатов-высказываний:

$$\mathcal{P}_2 \sim p_2 = 1, \quad \mathcal{P}_3 \sim p_3 = 1, \quad \mathcal{P}_4 \sim p_4 = 1, \quad \mathcal{P}_5 \sim p_5 = 1.$$

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \left\{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\right\}\right\rangle .$$

Найти образы предикатов $\mathcal{R}_1 \sim\ x \leq y$, $\mathcal{R}_2 \sim\ x \neq y$ *при естественном изоморфизме этой алгебры в алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Решение. Имеем $r_1 = p_2 \vee p_3 \vee p_5$, поэтому под действием стандартного **изоморфизма** ψ в алгебру подмножеств множества **атомов** получаем

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2;6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\ \}\rangle\,.$$

Найти образы предикатов $\mathcal{R}_1 \sim\ x \le y$, $\mathcal{R}_2 \sim\ x \ne y$ *при естественном изоморфизме этой алгебры в алгебру подмножеств множества ее* ***атомов****.*

Решение. Имеем $r_1 = p_2 \vee p_3 \vee p_5$, поэтому под действием стандартного **изоморфизма** ψ в алгебру подмножеств множества **атомов** получаем

$$\mathcal{R}_1^{\psi} = (\mathcal{R}_2 \vee \mathcal{R}_3 \vee \mathcal{R}_5)^{\psi} = \{\mathcal{R}_2;\ \mathcal{R}_3;\ \mathcal{R}_5\}\,,$$

$$\mathcal{R}_2^{\psi} = (\mathcal{R}_3 \vee \mathcal{R}_4)^{\psi} = \{\mathcal{R}_3;\ \mathcal{R}_4\}\,,$$

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \left\{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\right\}\right\rangle .$$

Найдите количество гомоморфизмов булевой алгебры $\mathcal{A}$ *на двуатомную булеву алгебру.*

Решение. Подсчитаем число гомоморфизмов в двуатомную булеву алгебру.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\,\} \right\rangle .$$

Найдите количество гомоморфизмов булевой алгебры $\mathcal{A}$ *на двуатомную булеву алгебру.*

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет»[2] только 2 атома.

[2]То есть не обратится в ноль.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \left\{ \mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{} \right\} \right\rangle .$$

Найдите количество гомоморфизмов булевой алгебры $\mathcal{A}$ *на двуатомную булеву алгебру.*

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет» только 2 атома. Следовательно, искомое число гомоморфизмов равно числу различных отображений двух **атомов** во множество из четырех **атомов**.

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет» только 2 атома. Следовательно, искомое число гомоморфизмов равно числу различных отображений двух **атомов** во множество из четырех **атомов**.

Если бы образ исходной алгебры не был двуатомным, это число пришлось бы удвоить из-за возможности гомоморфизма в двойственную алгебру.

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет» только 2 атома. Следовательно, искомое число гомоморфизмов равно числу различных отображений двух **атомов** во множество из четырех **атомов**.

Если бы образ исходной алгебры не был двуатомным, это число пришлось бы удвоить из-за возможности гомоморфизма в двойственную алгебру. В данном случае удвоения не происходит, так как в двуатомной булевой алгебре всего 4 элемента и, следовательно, **атомы** совпадают с **коатомами** (т.е. **атомами** двойственной алгебры).

Решение. Как мы заметили при решении **примера 8**, при гомоморфизме образ атома есть либо **атом**, либо нулевой элемент булевой алгебры. Значит, при рассматриваемом гомоморфизме из четырех **атомов** «выживет» только 2 атома. Следовательно, искомое число гомоморфизмов равно числу различных отображений двух **атомов** во множество из четырех **атомов**.

Если бы образ исходной алгебры не был двуатомным, это число пришлось бы удвоить из-за возможности гомоморфизма в двойственную алгебру. В данном случае удвоения не происходит, так как в двуатомной булевой алгебре всего 4 элемента и, следовательно, **атомы** совпадают с **коатомами** (т.е. **атомами** двойственной алгебры).

Итак, искомое число гомоморфизмов равно $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2; 6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \left\langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \right\rangle .$$

Доказать, что алгебра $\mathcal{A}$ *изоморфна булевой алгебре булевых функций от двух переменных с операциями* $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$.

Решение. Осталось доказать изоморфность исходной булевой алгебры и алгебры булевых функций от двух переменных.

Пример 9. *Рассмотрим множество* Π *всех двуместных предикатов на множестве* $\{2;6\}$ *с операциями дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, то есть получили булеву алгебру*

$$\mathcal{A} = \langle \Pi;\ \{\mathcal{P}_1;\ \mathcal{P}_0;\ \vee;\ \wedge;\ \overline{}\} \rangle\,.$$

Доказать, что алгебра $\mathcal{A}$ *изоморфна булевой алгебре булевых функций от двух переменных с операциями* $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$.

Решение. Искомая изоморфность следует из того, что и в той, и в другой булевой алгебре содержится ровно 4 атома и, следовательно, по **теореме о классификации конечных булевых алгебр** обе они изоморфны булевой алгебре подмножеств четырехэлементного множества.

Вернуться к лекции?

Задача VIII.1. (Ответ приведен на стр.461.) Найти **булеву алгебру**, состоящую из минимального числа элементов.

Задача IX.2. (Ответ приведен на стр.463.) Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача IX.3. (Ответ приведен на стр.512.) Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача IX.4. (Ответ приведен на стр.520.) Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Задача X.5. (Ответ приведен на стр.578.) Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Задача X.6. (Ответ приведен на стр.615.) Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Найти **булеву алгебру**, состоящую из минимального числа элементов.

Задача 1. Найти **булеву алгебру**, состоящую из минимального числа элементов.

Ответ. Это булева алгебра, состоящая из одного элемента, играющего одновременно роль нуля и единицы.

Решение задачи 2.

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

u v

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

u $\qquad\qquad$ v

$$\mathbf{0} = u * v$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответт.

$u * (u * v) =$

u $\quad$ v

$\mathbf{0} = u * v$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.
$u * (u * v) = (u * u) * v =$

u v

$\mathbf{0} = u * v$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$u * (u * v) = (u * u) * v = u * v \;\Rightarrow$

u v

$\mathbf{0} = u * v$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$u * (u * v) = (u * u) * v = u * v \;\Rightarrow u * v \leqslant u.$

u v

$\mathbf{0} = u * v$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

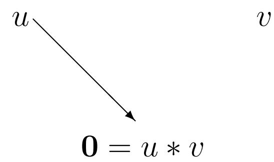
Ответ.

$u * (u * v) = (u * u) * v = u * v \;\Rightarrow u * v \leqslant u.$

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[dr] & & v \\
& \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}
$$

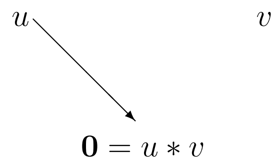
Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.
$u * (u * v) = (u * u) * v = u * v \Rightarrow u * v \leqslant u.$
Аналогично получаем $u * v \quad u.$



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.
$u * (u * v) = (u * u) * v = u * v \;\Rightarrow u * v \leqslant u.$
Аналогично получаем $u * v \leqslant u$.



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$u * (u * v) = (u * u) * v = u * v \ \Rightarrow u * v \leqslant u.$

Аналогично получаем $u * v \leqslant u$.

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
& \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} = u + v & \\
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
 & \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$u * (u + v) =$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} = u + v & \\
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
 & \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}
$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$u * (u + v) = u * u + u * v =$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} = u + v & \\
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
 & \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответт.

$u * (u+v) = u*u + u*v = u + u*v =$

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} = u+v & \\ u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\ & \mathbf{0} = u*v & \end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$u * (u + v) = u * u + u * v = u + u * v =$

По **закону поглощения (сложение), см. теорему 4...**

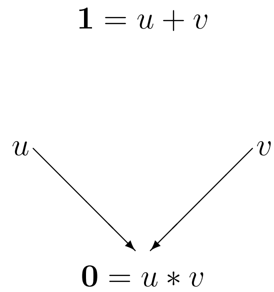
$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} = u + v & \\ u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\ & \mathbf{0} = u * v & \end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$u * (u + v) = u * u + u * v = u + u * v = u \Rightarrow$

По **закону поглощения (сложение), см. теорему 4...**



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

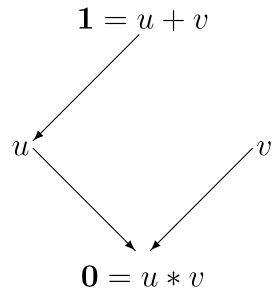
$u * (u+v) = u * u + u * v = u + u * v = u \Rightarrow u \leqslant (u+v)$.

По **закону поглощения (сложение), см. теорему 4...**

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} = u+v & \\ u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\ & \mathbf{0} = u * v & \end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.
$u * (u + v) = u * u + u * v = u + u * v = u \ \Rightarrow u \leqslant (u + v)$.
По **закону поглощения (сложение), см. теорему 4...**



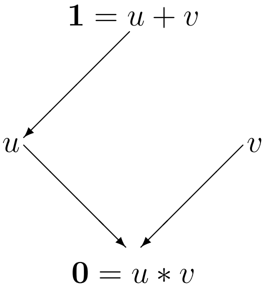
Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$u*(u+v)=u*u+u*v=u+u*v=u \Rightarrow u \leqslant (u+v)$.

По **закону поглощения (сложение), см. теорему 4...**

Аналогично получаем $v \leqslant (u+v)$.



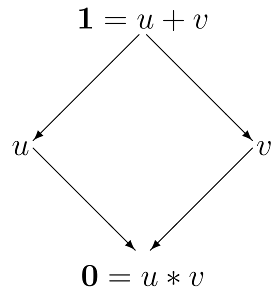
Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

$u*(u+v) = u*u+u*v = u+u*v = u \Rightarrow u \leqslant (u+v)$.

По **закону поглощения (сложение), см. теорему 4...**

Аналогично получаем $v \leqslant (u+v)$.



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

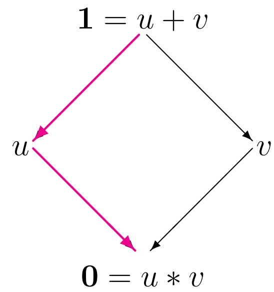
Ответ.

По транзитивности...

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} = u + v \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
 & \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

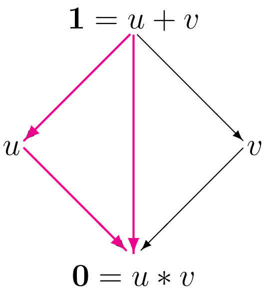
Ответ.
По транзитивности...



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

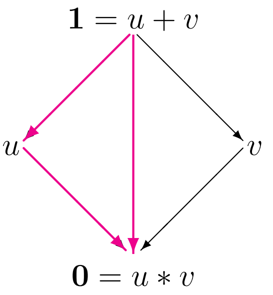
Ответ.

По транзитивности...



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

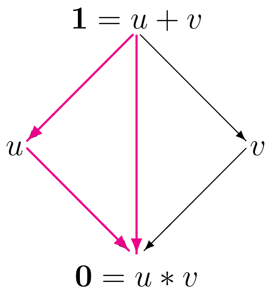
Ответ.



Наличие последней «стрелки» (дуги графа) можно проверить «по-честному»:

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

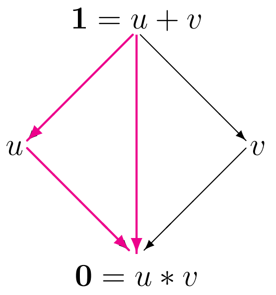


Наличие последней «стрелки» (дуги графа) можно проверить «по-честному»:

$u * v * (u + v) =$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

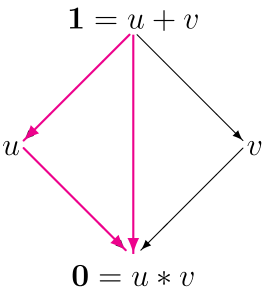


Наличие последней «стрелки» (дуги графа) можно проверить «по-честному»:

$u * v * (u + v) = u * v * u + u * v * v =$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

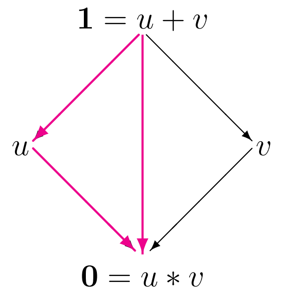


Наличие последней «стрелки» (дуги графа) можно проверить «по-честному»:

$u * v * (u + v) = u * v * u + u * v * v = u * v + u * v =$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

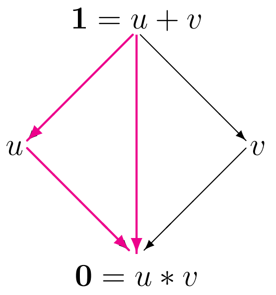


Наличие последней «стрелки» (дуги графа) можно проверить «по-честному»:

$u * v * (u + v) = u * v * u + u * v * v = u * v + u * v = u * v \;\Rightarrow$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.



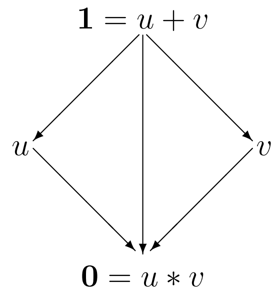
Наличие последней «стрелки» (дуги графа) можно проверить «по-честному»:

$u * v * (u + v) = u * v * u + u * v * v = u * v + u * v = u * v \Rightarrow$

$\Rightarrow (u * v) \leqslant (u + v)$.

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.



Наличие последней «стрелки» (дуги графа) можно проверить «по-честному»:

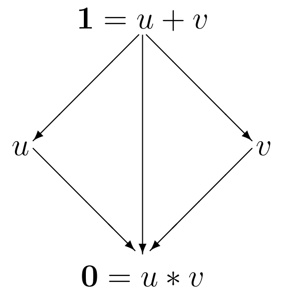
$u * v * (u + v) = u * v * u + u * v * v = u * v + u * v = u * v \Rightarrow$

$\Rightarrow (u * v) \leqslant (u + v)$.

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

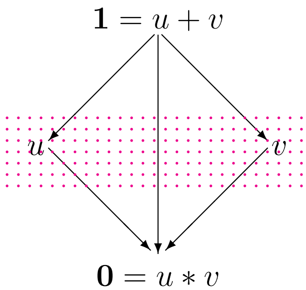
Атомы



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

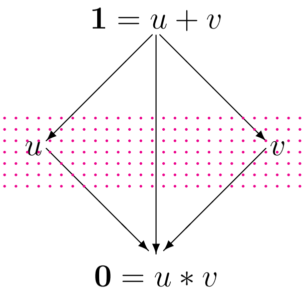
Ответ.

Атомы



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

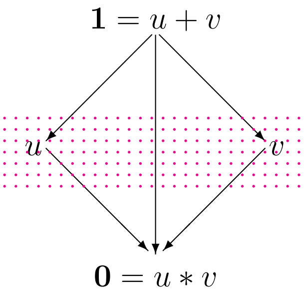
Ответ.
Атомы Коатомы.



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

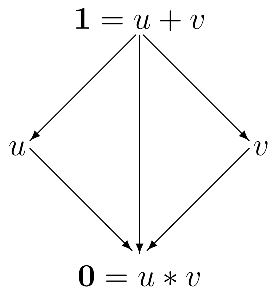
Ответ.

Атомы $=$ Коатомы.



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.



Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

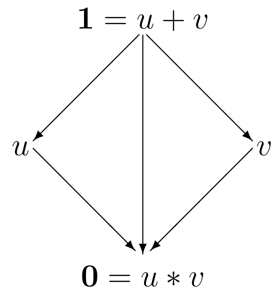
Ответ.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим

формулой?
графиком?
таблицей?

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} = u + v \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
 & \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.



Ответ.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответт.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}							

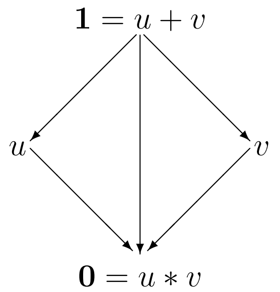
$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1}=u+v \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\ & \mathbf{0}=u*v & \end{tikzcd}$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

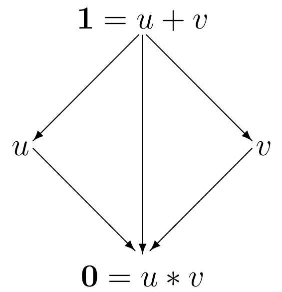
Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}		$\{u\}$					



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.



Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

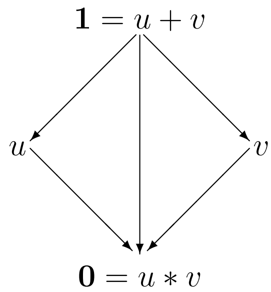
x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}		$\{u\}$	$\{v\}$				

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

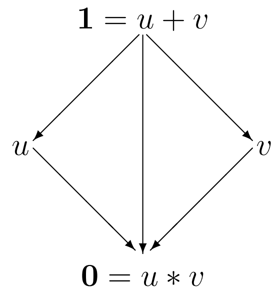
Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{u\}$	$\{v\}$				



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.



Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ	$\emptyset$	$\{u\}$	$\{v\}$	$\{u, v\}$			

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ	$\emptyset$	$\{u\}$	$\{v\}$	$\{u, v\}$	$\cup$		

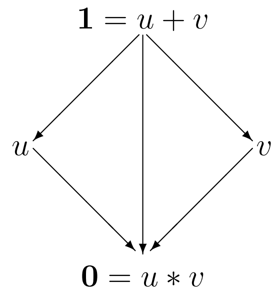
$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} = u + v \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
u \arrow[dr] & & v \arrow[dl] \\
 & \mathbf{0} = u * v &
\end{tikzcd}
$$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

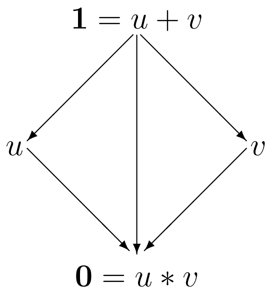
Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ	$\emptyset$	$\{u\}$	$\{v\}$	$\{u,v\}$	$\cup$	$\cap$	



Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.



Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

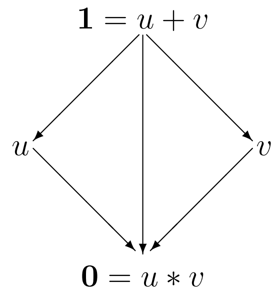
x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{u\}$	$\{v\}$	$\{u, v\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Задача 2. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно два атома u и v. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.
Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	u	v	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{u\}$	$\{v\}$	$\{u,v\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Задача решена.



Решение задачи 3.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

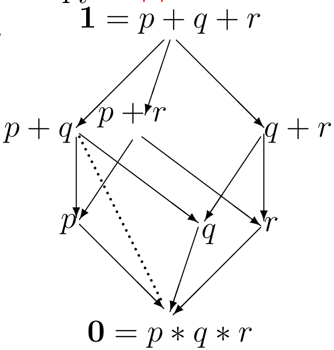
Ответ.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1}=p+q+r \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
p+q \arrow[d] \arrow[dr] & p+r \arrow[dl] \arrow[dr] & q+r \arrow[dl] \arrow[d] \\
p \arrow[dr] & q \arrow[d] & r \arrow[dl] \\
 & \mathbf{0}=p*q*r &
\end{tikzcd}$$

Петли и остальные дуги («стрелки») графа проводятся **«по транзитивности»**.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

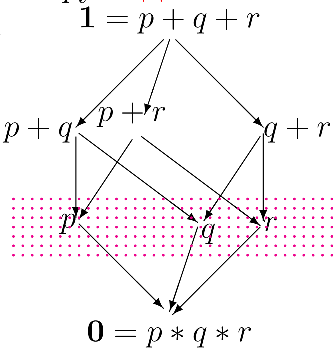
Ответ.



Петли и остальные дуги («стрелки») графа проводятся **«по транзитивности»**.
Например, такова дуга от $(a + b)$ к $\mathbf{0}$.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geq$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

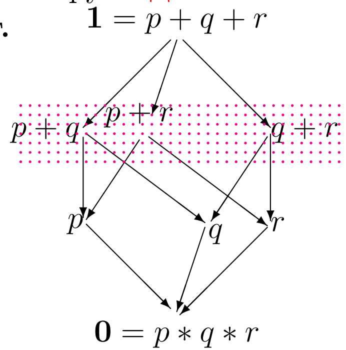
Ответ.



Атомы и

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

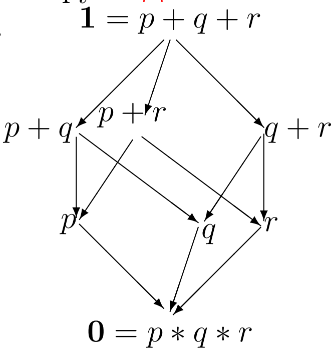
Ответ.



Атомы и коатомы.

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

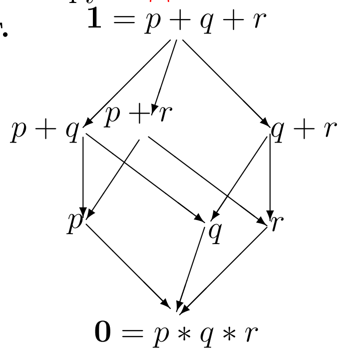


Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	$\mathbf{0}$	p	q	r	$p+q$	$p+r$	$q+r$	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}											

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

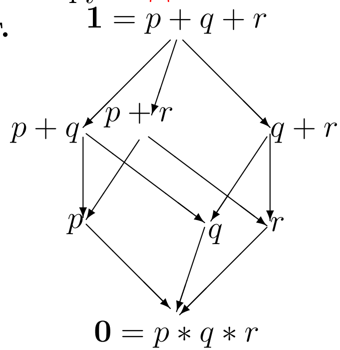


Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	$\mathbf{0}$	p	q	r	$p+q$	$p+r$	$q+r$	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ									$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Задача 3. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geq$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно три атома p, q и r. Постройте **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.



Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	$\mathbf{0}$	p	q	r	$p+q$	$p+r$	$q+r$	$\mathbf{1}$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\{p,q\}$	$\{p,r\}$	$\{q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Решение задачи 4.

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

a b c d

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

a b c d

$\mathbf{0} = a * b * c * d$

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответт.

$a * (a * b * c * d) =$

a b c d

$\mathbf{0} = a * b * c * d$

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a * b * c * d) = (a * a) * b * c * d =$

a b c d

$\mathbf{0} = a * b * c * d$

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a * b * c * d) = (a * a) * b * c * d =$

$= a * b * c * d \;\Rightarrow$

$a \quad b \quad c \quad d$

$\mathbf{0} = a * b * c * d$

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a * b * c * d) = (a * a) * b * c * d =$

$= a * b * c * d \;\Rightarrow\; (a * b * c * d) \leqslant a.$

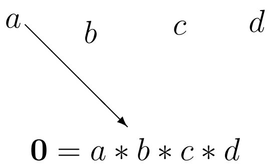
a b c d

$\mathbf{0} = a * b * c * d$

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$$a * (a * b * c * d) = (a * a) * b * c * d =$$
$$= a * b * c * d \;\Rightarrow\; (a * b * c * d) \leqslant a.$$



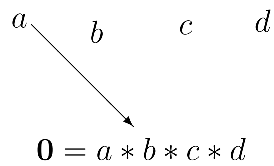
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a * b * c * d) = (a * a) * b * c * d =$

$= a * b * c * d \Rightarrow (a * b * c * d) \leqslant a.$

Аналогично получаем другие неравенства....



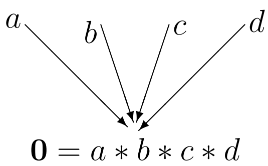
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a * b * c * d) = (a * a) * b * c * d =$

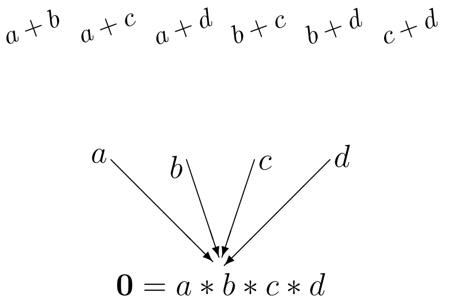
$= a * b * c * d \;\Rightarrow\; (a * b * c * d) \leqslant a.$

Аналогично получаем другие неравенства....



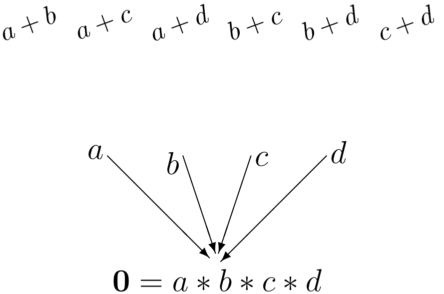
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

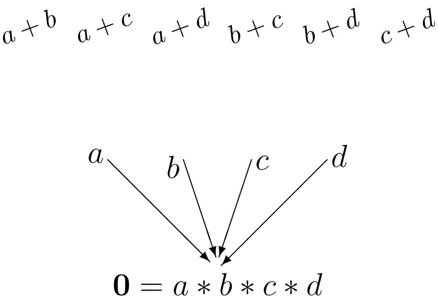
Ответ.
$a * (a + b) =$



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

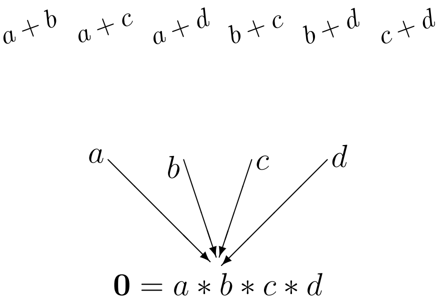
$a * (a + b) = a * a + a * b =$



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$$a * (a + b) = a * a + a * b =$$
$$= a * 1 + a * b =$$

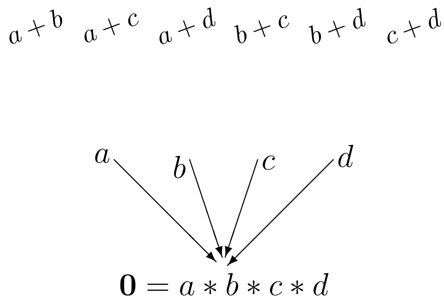


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a + b) = a * a + a * b =$

$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) =$

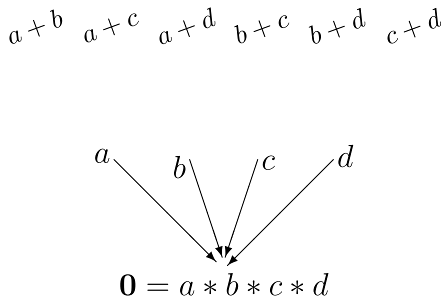


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a + b) = a * a + a * b =$

$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 =$

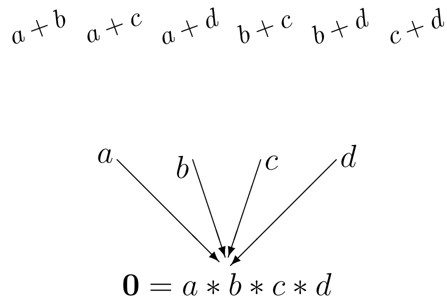


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a + b) = a * a + a * b =$

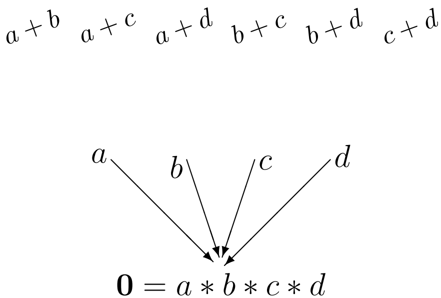
$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 = a \ \Rightarrow$



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$$a * (a + b) = a * a + a * b =$$
$$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 = a \;\Rightarrow a \leqslant (a + b).$$

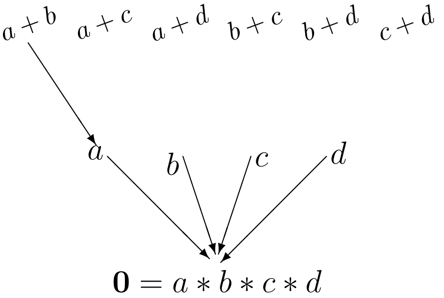


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a*(a+b) = a*a + a*b =$

$= a*1 + a*b = a*(1+b) = a*1 = a \;\Rightarrow a \leqslant (a+b).$



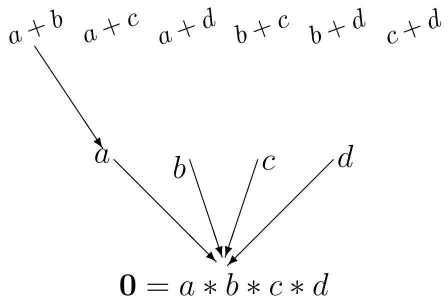
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a + b) = a * a + a * b =$

$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 = a \Rightarrow a \leqslant (a + b)$.

Аналогично получаем другие неравенства....



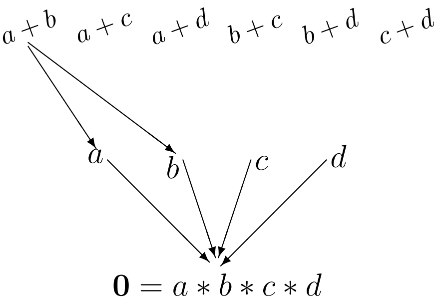
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a + b) = a * a + a * b =$

$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 = a \Rightarrow a \leqslant (a + b)$.

Аналогично получаем другие неравенства....



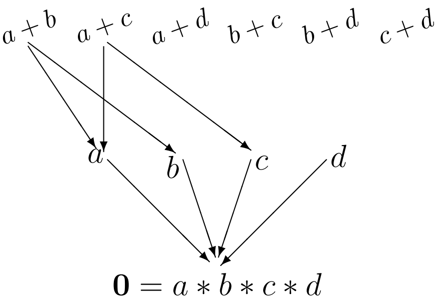
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a + b) = a * a + a * b =$

$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 = a \Rightarrow a \leqslant (a + b).$

Аналогично получаем другие неравенства....



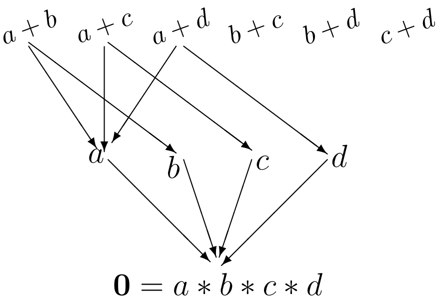
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a + b) = a * a + a * b =$

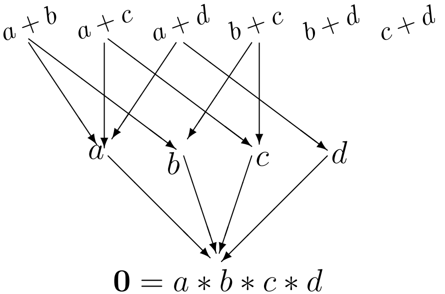
$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 = a \Rightarrow a \leqslant (a + b).$

Аналогично получаем другие неравенства....



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.
$a * (a + b) = a * a + a * b =$
$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 = a \;\Rightarrow a \leqslant (a + b)$.
Аналогично получаем другие неравенства....



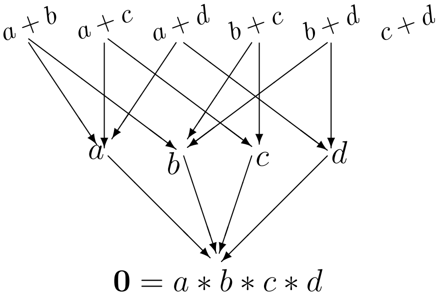
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a + b) = a * a + a * b =$

$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 = a \ \Rightarrow a \leqslant (a + b)$.

Аналогично получаем другие неравенства....



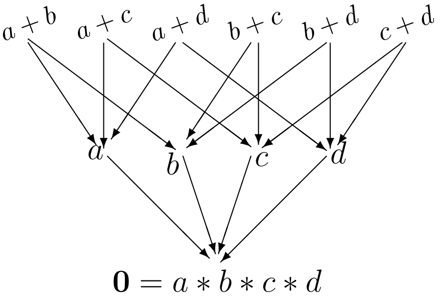
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

$a * (a + b) = a * a + a * b =$

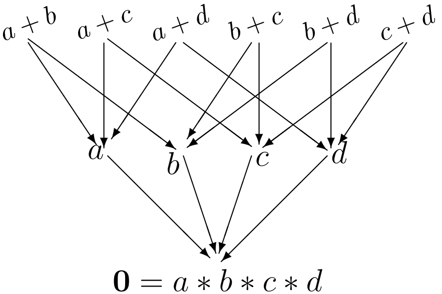
$= a * 1 + a * b = a * (1 + b) = a * 1 = a \;\Rightarrow a \leqslant (a + b)$.

Аналогично получаем другие неравенства....



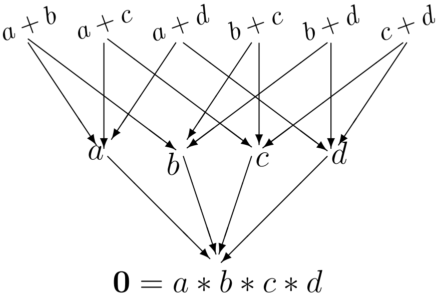
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.
«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.



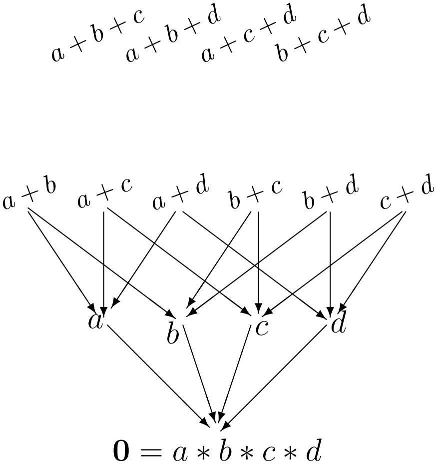
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.
«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.
Продолжим процесс...



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.
«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.
Продолжим процесс...

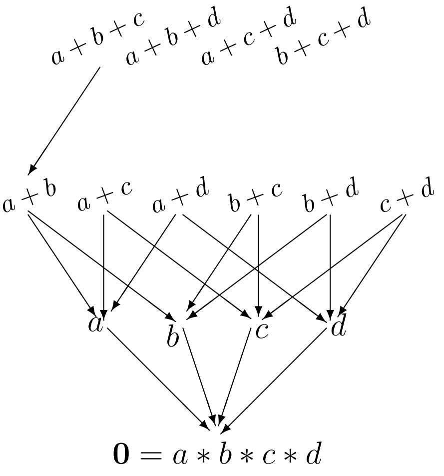


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Продолжим процесс...

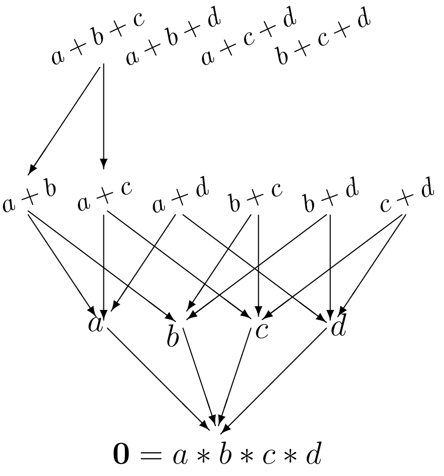


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Продолжим процесс...

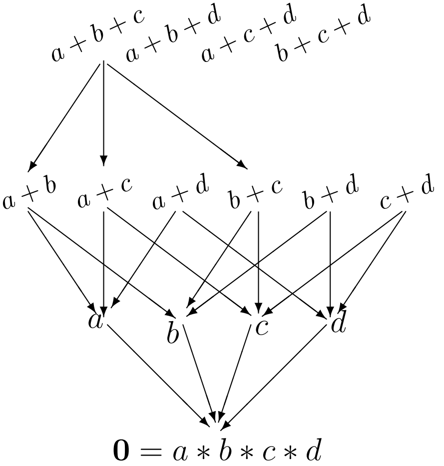


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Продолжим процесс...

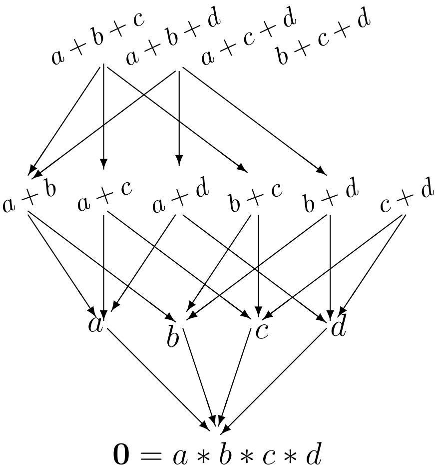


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

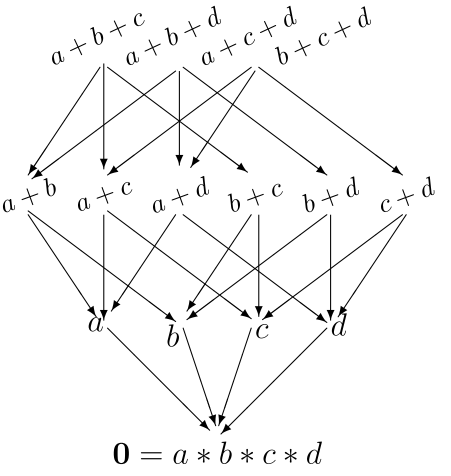
«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Продолжим процесс...



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.
«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.
Продолжим процесс...

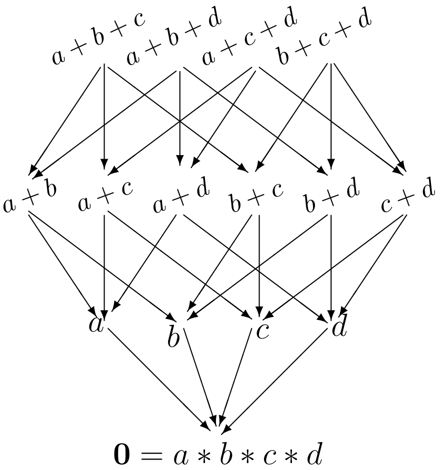


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Продолжим процесс...

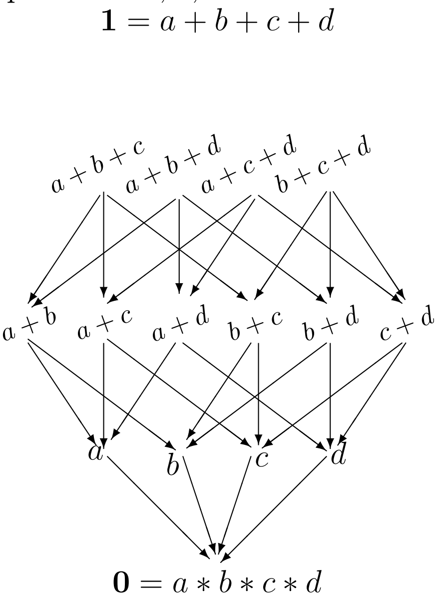


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Продолжим процесс...

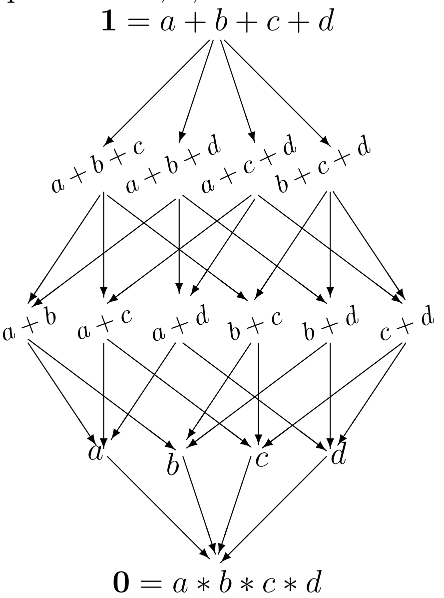


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Продолжим процесс...

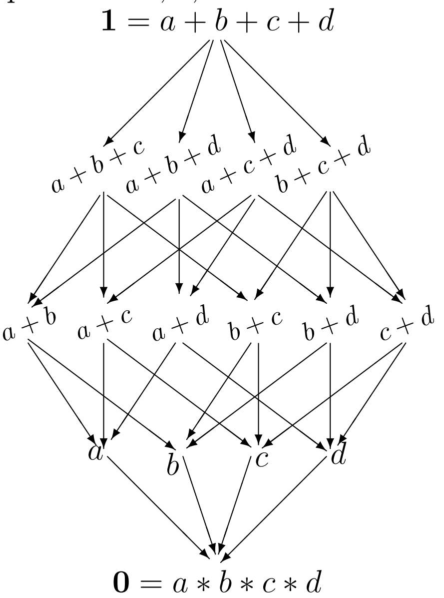


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить список атомов:

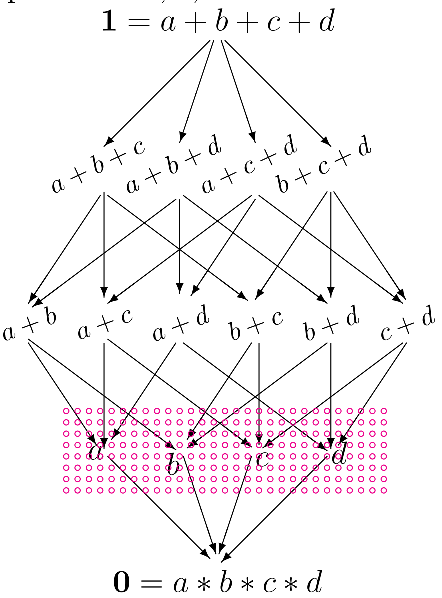


Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить список атомов:



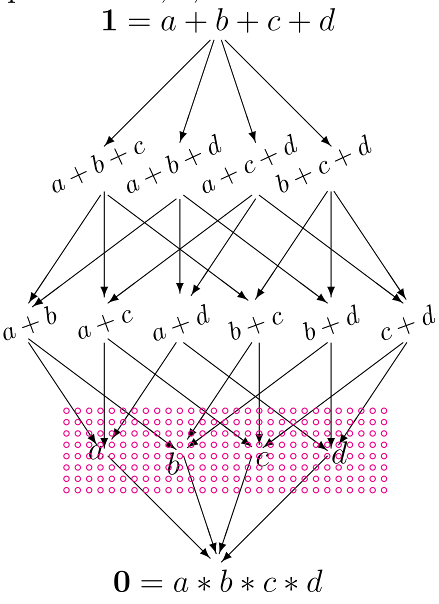
Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

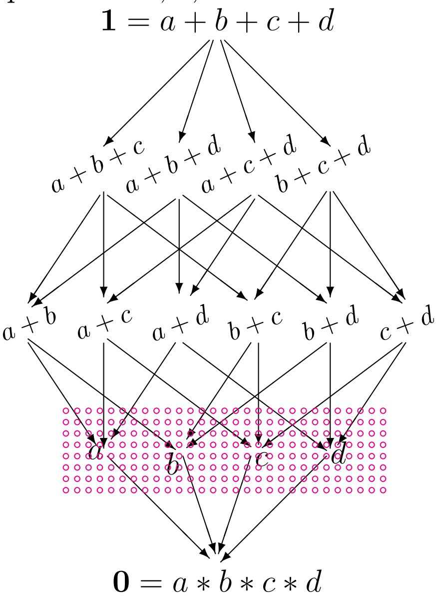
Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

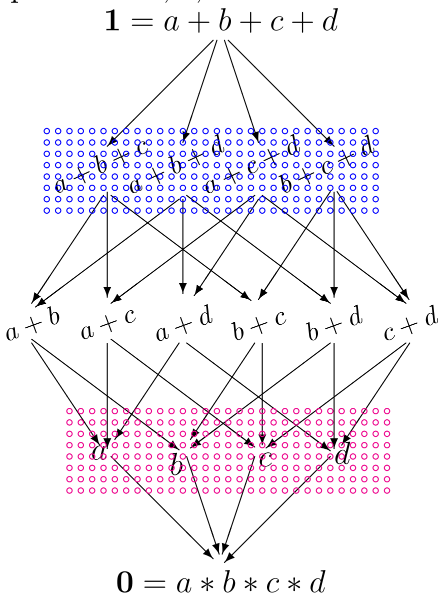
Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

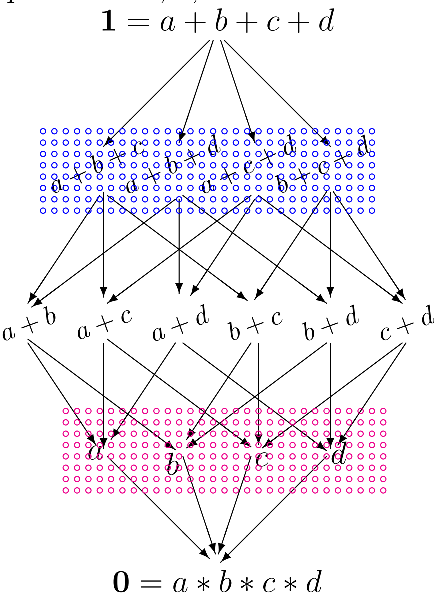
«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

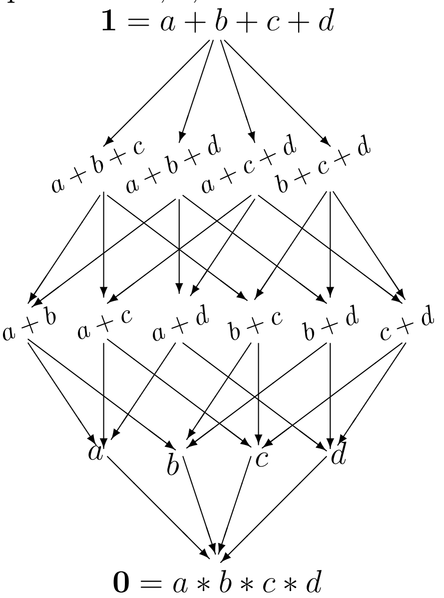
Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{\qquad\qquad\}$



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

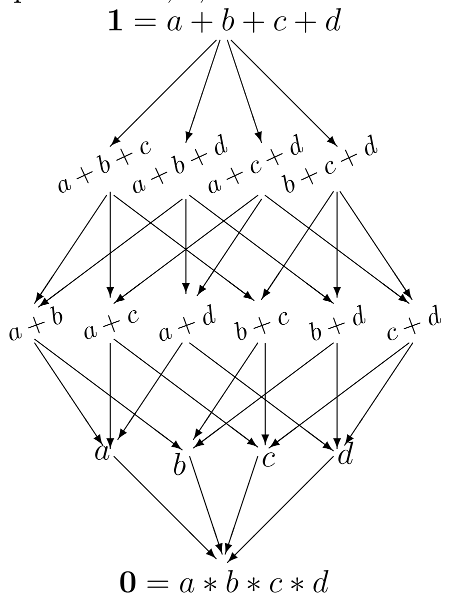
Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

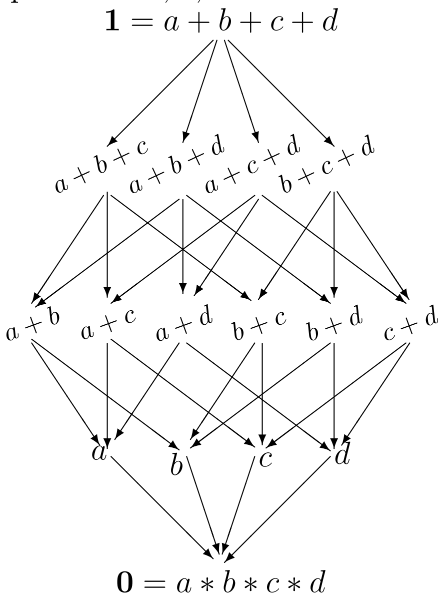
Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ зададим таблицей значений:



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

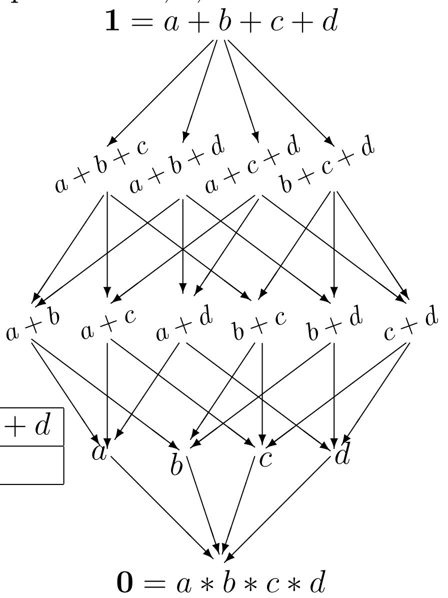
Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ зададим таблицей значений:



x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^{φ}								

x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^{φ}							

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}						

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

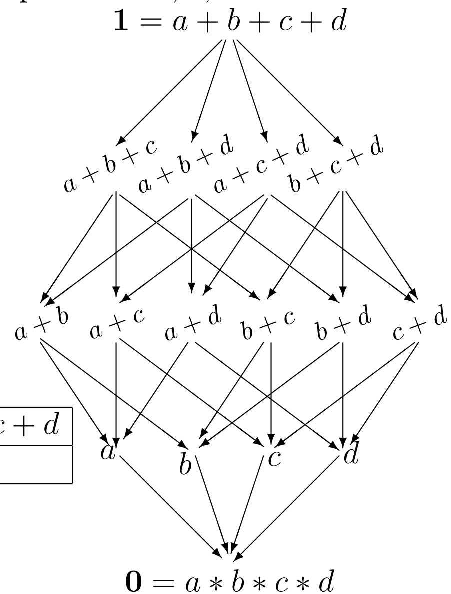
$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^φ		$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$			

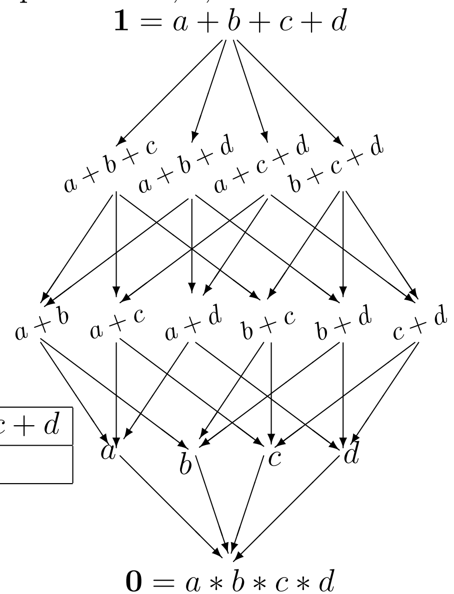
x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^φ							

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ						



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.



«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^φ	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$			

x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^φ							

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{\quad}$
x^φ						

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

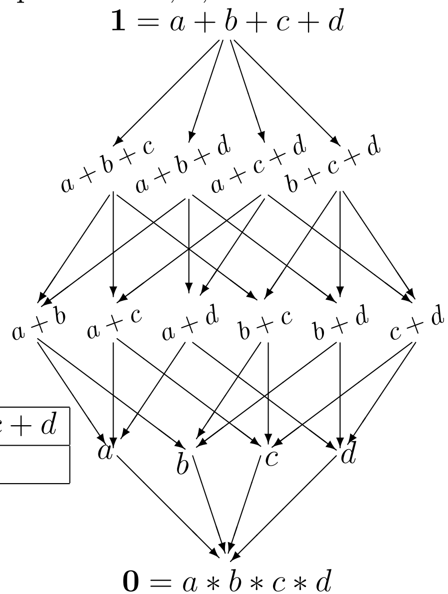
Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$

зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$

x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^{φ}	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$				

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}						



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

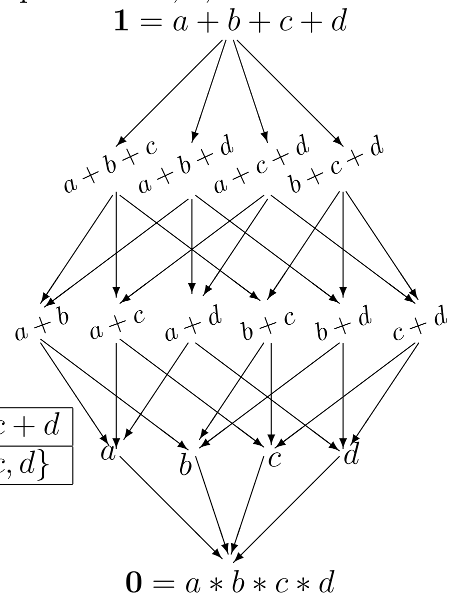
Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$

зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$

x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^{φ}	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$				



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

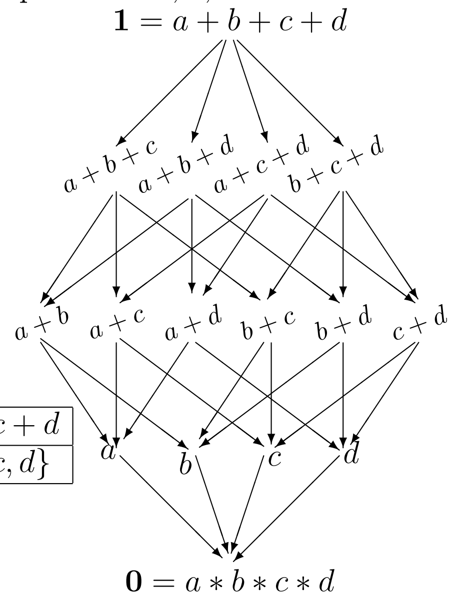
$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d.$

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^φ	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$

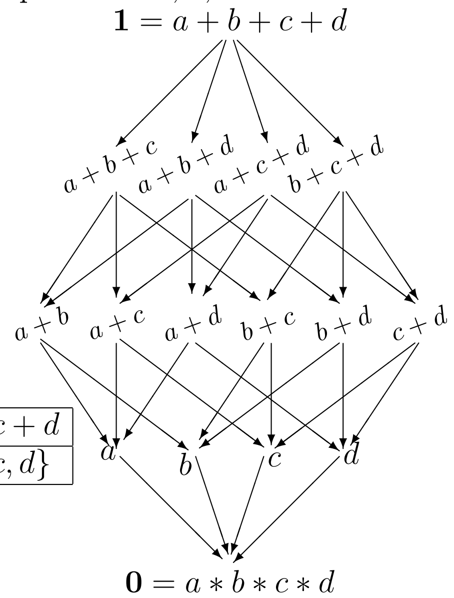
x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^φ	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$			



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.



«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a + b) \to \mathbf{0}$.
Из графа можно получить
список атомов: a, b, c, d,
и список коатомов:
$a + b + c, a + b + d, a + c + d, b + c + d$.
Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^φ	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$

x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^φ	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\cup$		

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

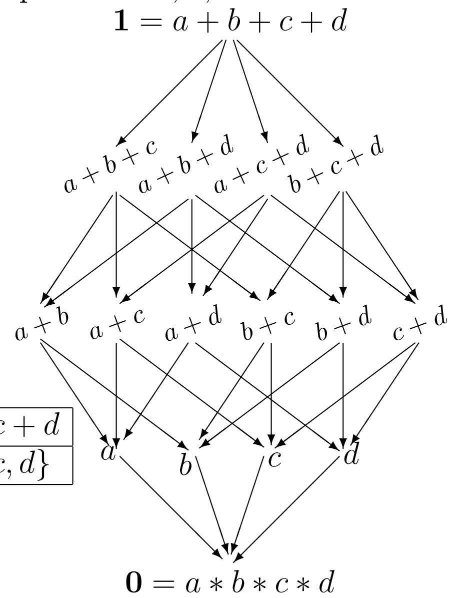
Из графа можно получить

список атомов: a, b, c, d,

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ зададим таблицей значений:



x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^φ	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$

x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^φ	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\cup$	$\cap$	

Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению** $\geqslant$ на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

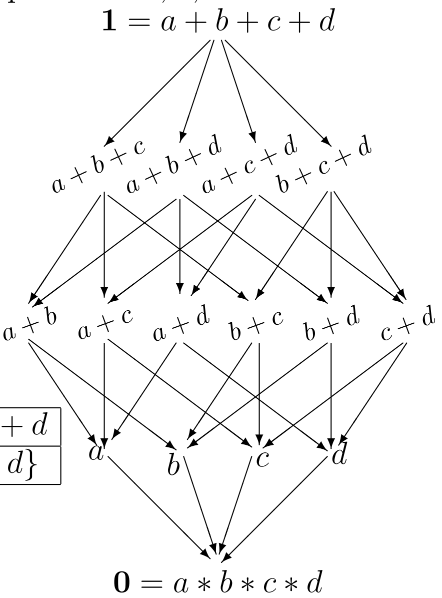
Из графа можно получить список атомов: a, b, c, d, и список коатомов: $a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d$.

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^{φ}	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$

x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^{φ}	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^{φ}	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$



Задача 4. Постройте **ориентированный граф**, соответствующий **индуцированному отношению $\geqslant$** на **булевой алгебре**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d.

Ответ.

«Замыкать по транзитивности» не будем, т.е. не будем, например, рисовать дугу $(a+b) \to \mathbf{0}$.

Из графа можно получить

список атомов: $a, b, c, d,$

и список коатомов:

$a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d.$

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества $\{a,\ b,\ c,\ d\}$

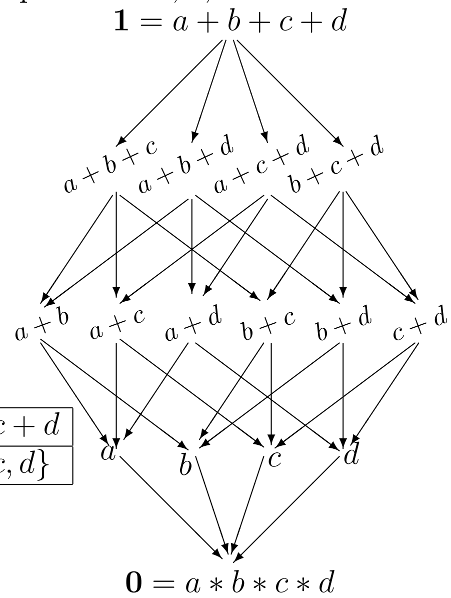
зададим таблицей значений:

x	$\mathbf{0}$	a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$
x^φ	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$

x	$b+c$	$b+d$	$c+d$	$a+b+c$	$a+b+d$	$a+c+d$	$b+c+d$
x^φ	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$

x	$a+c+d$	$b+c+d$	$a+b+c+d$	$+$	$*$	$\overline{}$
x^φ	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Задача решена.



Решение задачи 5.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Как обычно, начнем с рассмотрения **«экстремальных случаев»**: во-первых, когда конгруенция — это отношение равенства, во-вторых, когда конгруенция — это **универсальное отношение**.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**,

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.

Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.
Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.
Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x * t;\ \mathbf{0} * t) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.

Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x * t;\ \mathbf{0} * t) \in T\ \Rightarrow\ (t;\ \mathbf{0}) \in T.$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.

Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.

Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x * t;\ \mathbf{0} * t) \in T\ \Rightarrow\ (t;\ \mathbf{0}) \in T.$$

Таким образом, t **находится в классе** $C_0 = C(x) = C(t)$.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Для получения остальных конгруенций тоже применим **стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций**.
Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Если $x \in C_0$ и t — такой **атом**, что $t \leq x$, т.е., согласно **определению индуцированного отношения**, $x * t = t$.
Следовательно, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (t;\ t) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (x * t;\ \mathbf{0} * t) \in T\ \Rightarrow\ (t;\ \mathbf{0}) \in T.$$

Таким образом, t **находится в классе** $C_0 = C(x) = C(t)$.
Поэтому следует в первую очередь рассматривать **атомы**, находящиеся в том же классе, что и $\mathbf{0}$.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a + b;\ \mathbf{0} + b) \in T\ \Rightarrow$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a+b;\ \mathbf{0}+b) \in T\ \Rightarrow\ (a+b;\ b) \in T.$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a+b;\ \mathbf{0}+b) \in T\ \Rightarrow\ (a+b;\ b) \in T.$$

Если $x \in C(b) = C(a+b)$, то по **определению конгруенции**

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.

Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a+b;\ \mathbf{0}+b) \in T\ \Rightarrow\ (a+b;\ b) \in T.$$

Если $x \in C(b) = C(a+b)$, и t — **атом**, отличный от a и b, то, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ b) \in T, \\ (t;\ t) \in T, \end{cases} \Rightarrow\ (x*t;\ b*t) \in T,\ \Rightarrow\ (x*t;\ \mathbf{0}) \in T,\ \Rightarrow\ x*t \in \{t,\ \mathbf{0}\} \cap \{a,\ \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Следовательно, $x*t = 0$. Поэтому, в силу **теоремы об элементах конечной булевой алгебры** либо $x = b$, либо $x = a+b$.

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Рассмотрим класс C_0 эквивалентных по конгруенции T элементов, содержащий нулевой элемент $\mathbf{0}$ булевой алгебры.
Пусть в класс C_0 входит единственный **атом**, допустим, a. Тогда $C_0 = \{\mathbf{0}, a\}$ и, согласно **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (a;\ \mathbf{0}) \in T, \\ (b;\ b) \in T \end{cases} \Rightarrow\ (a+b;\ \mathbf{0}+b) \in T\ \Rightarrow\ (a+b;\ b) \in T.$$

Если $x \in C(b) = C(a+b)$, и t — **атом**, отличный от a и b, то, по **определению конгруенции**

$$\begin{cases} (x;\ b) \in T, \\ (t;\ t) \in T, \end{cases} \Rightarrow\ (x*t;\ b*t) \in T,\ \Rightarrow\ (x*t;\ \mathbf{0}) \in T,\ \Rightarrow\ x*t \in \{t,\ \mathbf{0}\} \cap \{a,\ \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

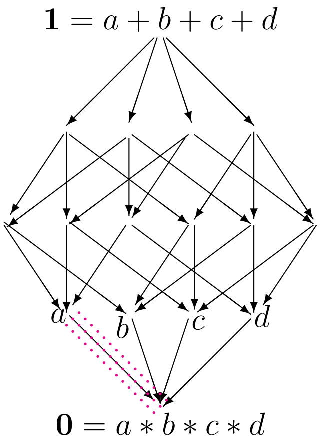
Следовательно, $x*t = 0$. Поэтому, в силу **теоремы об элементах конечной булевой алгебры** либо $x = b$, либо $x = a+b$.
Продолжая эти рассуждения, получаем, что классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},\quad \{b+d,\ a+b+d\},\quad \{c+d,\ a+c+d\},\quad \{b+c+d,\ a+b+c+d\},$$

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

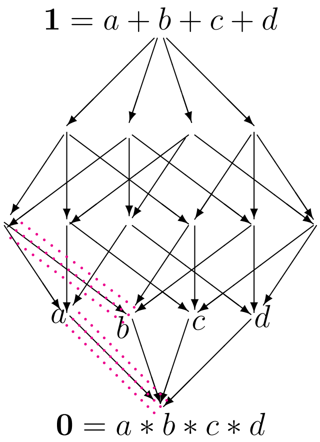
$$\{\mathbf{0},\ a\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

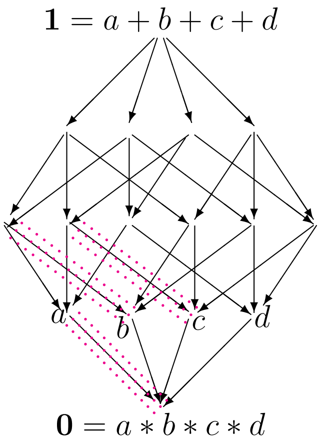
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

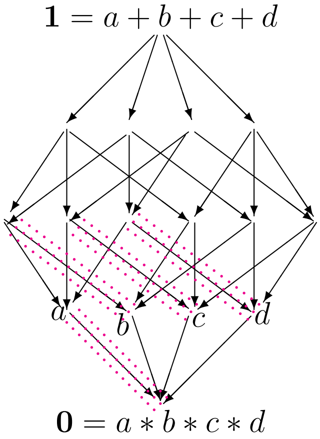
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

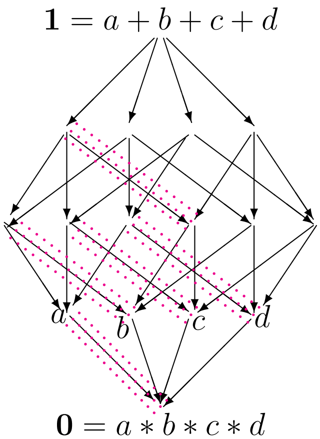
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

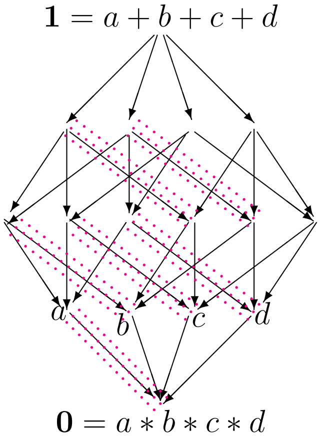
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

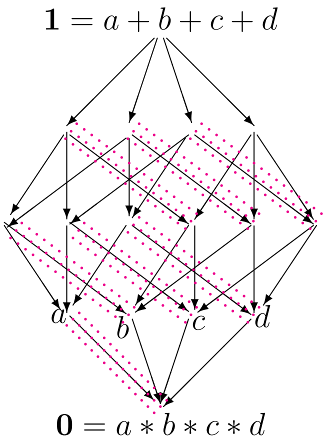
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},\quad \{b+d,\ a+b+d\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

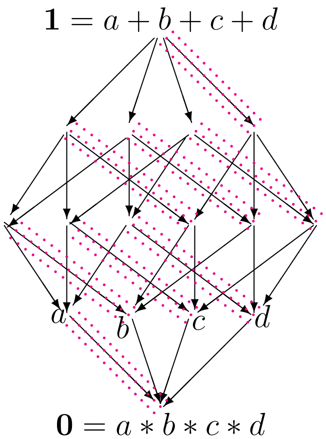
$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},\quad \{b+d,\ a+b+d\},\quad \{c+d,\ a+c+d\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a\},\quad \{b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c\},\quad \{d,\ a+d\},$$
$$\{b+c,\ a+b+c\},\quad \{b+d,\ a+b+d\},\quad \{c+d,\ a+c+d\},\quad \{b+c+d,\ a+b+c+d\},$$



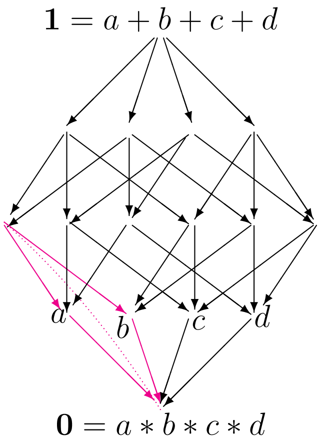
Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

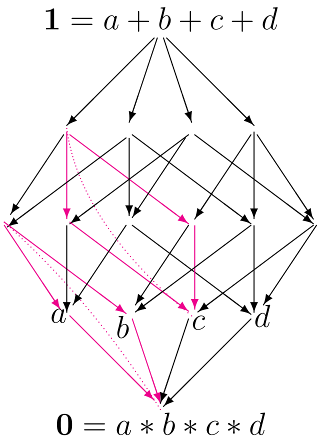
$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ a+b\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

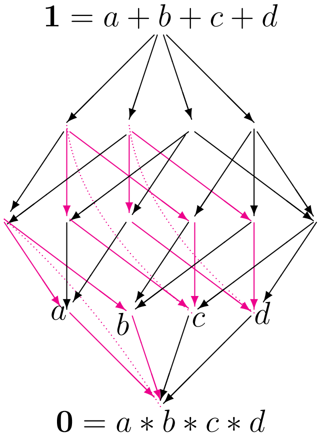
$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ a+b\}, \quad \{c,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

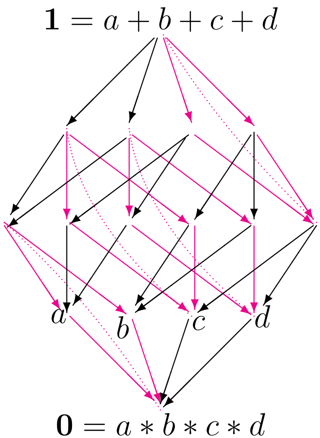
$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},\quad \{d,\ a+d,\ b+d,\ a+b+d\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ a+b\},\quad \{c,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},\quad \{d,\ a+d,\ b+d,\ a+b+d\},$$
$$\{c+d,\ a+c+d,\ b+c+d,\ a+b+c+d\},$$

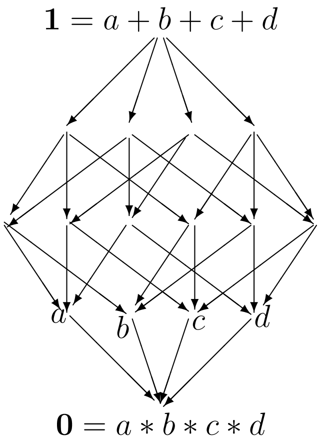


Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b,\ c\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

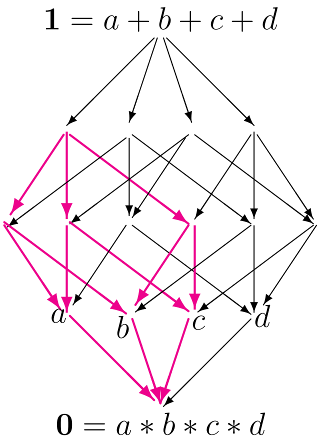
Ответ. Если $\{a,\ b,\ c\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b,\ c\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

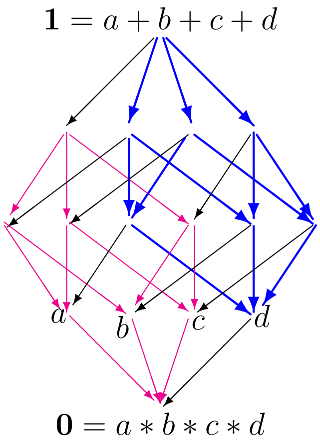
$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ c,\ a+b,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},$$



Задача 5. Для **булевой алгебры**, содержащей ровно четыре атома a, b, c и d, найдите все **фактор-системы**.

Ответ. Если $\{a,\ b,\ c\} \subseteq C(\mathbf{0})$, то классы эквивалентных по T элементов имеют вид:

$$\{\mathbf{0},\ a,\ b,\ c,\ a+b,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\},$$
$$\{d,\ a+d,\ b+d,\ c+d,\ a+b+d,\ a+c+d,\ b+c+d,\ a+b+c+d\},$$



Задача 5.

Решение задачи 6.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ. Сначала зададим носитель этой алгебры таблицей:

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, изоморфизм в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что $\mathbf{0}$ в этой булевой алгебре является

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что $\mathbf{0}$ в этой булевой алгебре является функция f_0,

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что $\mathbf{0}$ в этой булевой алгебре является функция f_0,
а $\mathbf{1}$ является

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что $\mathbf{0}$ в этой булевой алгебре является функция f_0,
а $\mathbf{1}$ является функция f_{15}.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что $\mathbf{0}$ в этой булевой алгебре является функция f_0,
а $\mathbf{1}$ является функция f_{15}.
Операцию $\overline{\quad}$ можно задать формулой:

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Ясно, что **0** в этой булевой алгебре является функция f_0,
а **1** является функция f_{15}.
Операцию $\overline{\quad}$ можно задать формулой: $\overline{f(x,y)} = 1 - f(x,y)$.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\Leftrightarrow$$

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\Leftrightarrow\; p(x,y) \wedge q(x,y) = p(x,y) \;\Leftrightarrow$$

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\Leftrightarrow\; p(x,y) \wedge q(x,y) = p(x,y) \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in \{0;\ 1\}\; p(x,y) \leq q(x,y).$$

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\Leftrightarrow\; p(x,y) \wedge q(x,y) = p(x,y) \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in \{0;\ 1\}\ p(x,y) \leq q(x,y).$$

Следовательно, **атомами** этой булевой алгебры являются функции

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Найдем **атомы**, для чего полезно конкретизировать **индуцированное отношение** $\leq$:

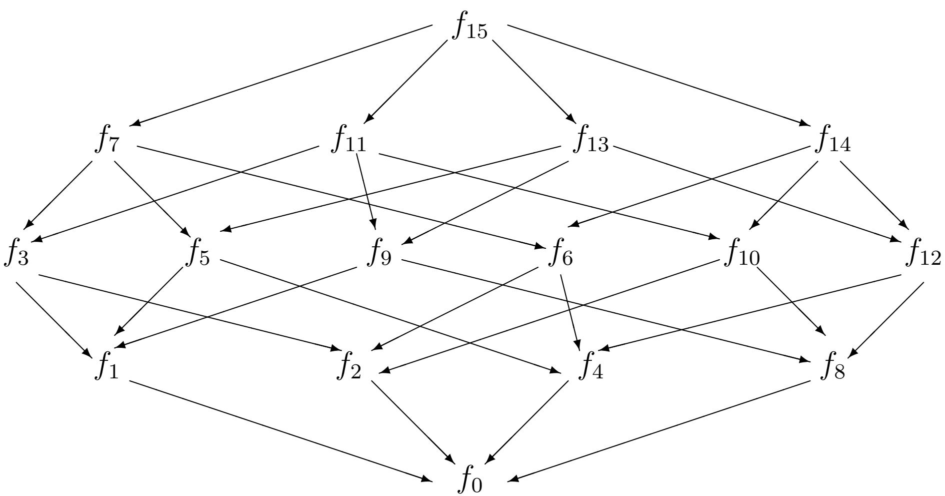
$$p(x,y) \leq g(x,y) \;\Leftrightarrow\; p(x,y) \wedge q(x,y) = p(x,y) \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in \{0;\ 1\}\; p(x,y) \leq q(x,y).$$

Следовательно, **атомами** этой булевой алгебры являются функции $f_1, f_2, f_4(x,y), f_8(x,y)$.

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1



Как и на других изображениях графа индуцированного отношения $\geq$, приведенных в теме «Булевы алгебры», для упрощения чертежа мы не изобразили петли и дуги (т.е. «стрелки»), которые можно провести «по транзитивности».

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим

формулой?
графиком?
таблицей?

Задача 6. Рассмотрим множество всех булевых функций от двух переменных с операциями $\vee, \wedge, \neg$. Покажите, что эта алгебра является **булевой алгеброй**, найдите ее **атомы**, постройте граф **индуцированного отношения** $\geq$, **изоморфизм** в алгебру **подмножеств множества атомов**.

Ответ.

x	y	$f_0(x,y)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$f_{15}(x,y)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Изоморфизм в алгебру подмножеств множества атомов, зададим таблицей:

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	$\vee$	$\wedge$	$\overline{}$
x^φ	$\emptyset$	$\{f_1\}$	$\{f_2\}$	$\{f_1, f_2\}$	$\{f_4\}$	$\{f_1, f_4\}$	$\{f_2, f_4\}$	$\{f_1, f_2, f_4\}$	$\{f_8\}$	$\{f_1, f_8\}$	$\{f_2, f_8\}$	$\{f_1, f_2, f_8\}$	$\{f_4, f_8\}$	$\{f_1, f_4, f_8\}$	$\{f_2, f_4, f_8\}$	$\{f_1, f_2, f_4, f_8\}$	$\cup$	$\cap$	$\overline{}$

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?