Министерство науки и высшего образования РФ
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Ю. Б. Мельников

Основы теории групп

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

e-mail:
UriiMelnikov58@gmail.com

Екатеринбург
2020

I. Инструкция к пособию **13**

II. Группоиды **22**

III. Группы **27**

III.1. Элементарные теоремы теории групп 29

III.1.1. Критерий нейтрального элемента 30

III.1.2. Теорема об однозначности g' 43

III.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения 52

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению . 57

III.2. Подгруппа 66

III.3. Критерий подгруппы 70

III.4. Смежные классы 77

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов 78

III.6. Порядок элемента и порядок конечной группы 104
III.7. Теорема Лагранжа 106
III.8. Следствия из теоремы Лагранжа 133
III.9. Лемма о делимости на порядок элемента 137
III.10. Централизатор и нормализатор 154
III.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе 160
III.12. Порождающие элементы 167
III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы 168
III.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант . 178
III.15. Взаимный коммутант подгрупп. Коммутант группы . 184
III.16. Критерии перестановочности элементов 186
III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов 211
III.18. Нормальная подгруппа 251
III.19. Критерии нормальности подгруппы 256

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе 278
III.21. Теорема о фактор-группе 290

IV. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп **293**
IV.1. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов 296
IV.2. Сопряженные подгруппы 299
IV.3. Ядро гомоморфизма 312
IV.4. Теорема о нормальности ядра 313
IV.5. Естественный гомоморфизм 317
IV.6. Первая теорема о гомоморфизме 333
IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме 352
IV.8. Третья теорема о гомоморфизме 387
IV.9. Теорема о характеризации коммутанта 389

V. Операции алгебры подгрупп **394**
V.1. Пересечение подгрупп 397

V.2. Произведение подгрупп 405
V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп 406
V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп . 441
V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента . 451
V.3. Прямое произведение подгрупп 467
V.3.1. Внутреннее прямое произведение 468
V.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп 471
V.3.3. Внешнее прямое произведение 474
V.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений 489
V.4. Полупрямое произведение подгрупп 497

VI. Абелевы группы **506**
VI.1. Циклические группы 507
VI.1.1. Определение циклической группы 512

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы . . . 513
VI.2. Конечнопорожденные абелевы группы 522

VII. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп 523

VIII. Представления 526
VIII.1. Подстановочные представления 527
VIII.1.1. Регулярное подстановочное представление . . . 528
VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе 529
VIII.2. Операторные и матричные представления 556
VIII.2.1. Приводимые и неприводимые представления . 560
VIII.2.2. Теорема Машке 564
VIII.2.3. Лемма Шура 565
VIII.2.4. Эквивалентные представления 566

IX. Задание групп образующими и определяющими отношениями 570

Пример 1 построения таблицы Кэли для группы диедра D_6 572

Пример 2 группы перестановок 604

Пример 3 таблицы Кэли группы подстановок Σ_3 617

Пример 4 циклической группы 668

Пример 5 конечной циклической группы 697

Пример 6 поиска подгрупп 704

Пример 7 разбиений на смежные классы по подгруппе 717

Пример 8 сопряженных элементов 770

Пример 9 изоморфизма 815

Пример 10 ко второй теореме о гомоморфизмах 821

Пример 11 произведений подгрупп 833

Пример 12 произведении смежных классов по нормальной подгруппе 845

Пример 13 фактор-группы 859

Пример 14, иллюстрирующий первую теорему о гомоморфизме 885

Пример 15, иллюстрирующий вторую теорему о гомомор-

физме 921

Пример 16 прямого произведения подгрупп 941

Пример 17 группы, неразложимой в прямое произведение собственных подгрупп 957

Пример 18 разложения группы в полупрямое произведение 974

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ 984

Определение группы 984

Задача XI.1 985

Задача XI.2 986

Подгруппы 986

Задача XII.3 987

Задача XII.4 988

Задача XII.5 989

Задача XII.6 990

Задача XII.7 991

Задача XII.8 992

Задача XII.9 993

Фактор-группа 993

Задача XIII.10 994

Задача XIII.11 995

Алгебра подгрупп 995

Задача XIV.12 996

Задача XIV.13 997

Представления групп 997

Задача XV.14 998

Задача XV.15 999

Задача XV.16 1000

Ответы и решения 1001

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

Кроме того, имеются гиперссылки на пособия **«Математический анализ»** и **«Элементарная математика».**

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения. Имеются гиперссылки на тесты для самообучения и самоконтроля.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В программе `Adobe Reader` и `Acrobat Reader` переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для того, чтобы ***вызвать панель навигации*** в `Acrobat Reader` надо, во-первых, выйти из полноэкранного режима (например, нажатием `Esc`), и, во-вторых, нажать клавишу `F4` и выбрать на левой вертикальной панели вертикальный флажок «Закладки» 🔖.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Группоиды

Какие универсальные алгебры $\langle \mathbf{A}; \{f_1; f_2; \ldots\}\rangle$ наиболее интересны для первоначального изучения?

II. Группоиды

Для формирования понятийного аппарата наиболее эффективна стратегия приритетного изучения экстремальных ситуаций. «Экстремальность» по отношению к носителю выражается в выделении двух типов алгебр: **конечных**, у которых носитель **A** конечен, и **бесконечных**, у которых носитель **A** бесконечен.

II. Группоиды

Для формирования понятийного аппарата наиболее эффективна стратегия приритетного изучения экстремальных ситуаций. «Экстремальность» по отношению к носителю выражается в выделении двух типов алгебр: **конечных**, у которых носитель **A** конечен, и **бесконечных**, у которых носитель **A** бесконечен.

«Экстремальность» по отношению к набору операций состоит в изучении алгебр с одной операцией. Алгебры с одной унарной операцией оказались не слишком интересны.

II. Группоиды

Для формирования понятийного аппарата наиболее эффективна стратегия приритетного изучения экстремальных ситуаций. «Экстремальность» по отношению к носителю выражается в выделении двух типов алгебр: **конечных**, у которых носитель **A** конечен, и **бесконечных**, у которых носитель **A** бесконечен.

«Экстремальность» по отношению к набору операций состоит в изучении алгебр с одной операцией. Алгебры с одной унарной операцией оказались не слишком интересны.

Значительно более богатый материал предоставили алгебры с одной бинарной операцией, называемые **группоидами**. Чаще всего мы работали с операциями, обладающими свойством ассоциативности, позволяющими не заботиться о расположении скобок в выражениях типа $a \cdot b \cdot c$. Поэтому такие группоиды получили специальное название — **полугруппы**.

II. Группоиды

Определение 1. *Группоид* $\langle \boldsymbol{G}; \{*\} \rangle$ *с одной двуместной операцией* $*$ *называется* **полугруппой**, *если эта операция является ассоциативной, т.е. выполняется тождество:* $(a * b) * c = a * (b * c)$.

III. Группы

Определение 2. **Группой** *называется множество* G *с определенной на нем операцией* $*$, *удовлетворяющая следующим трем условиям (аксиомам группы):*

ассоциативность: $(x * y) * z = x * (y * z)$;

существование нейтрального элемента: *в* G *существует такой элемент* e, *что* $g * e = e * g = g$ *для любого элемента* g *из* G;

существование обратного элемента: *для любого элемента* g *из* G *найдется такой элемент* g', *что* $g * g' = e$.

Элемент g' *называется* ***обратным*** *к* g.

III. Группы

Определение 2. **Группой** *называется множество* G *с определенной на нем операцией* $*$*, удовлетворяющая следующим трем условиям (аксиомам группы):*

ассоциативность: $(x * y) * z = x * (y * z)$;

существование нейтрального элемента: *в* G *существует такой элемент* e*, что* $g * e = e * g = g$ *для любого элемента* g *из* G;

существование обратного элемента: *для любого элемента* g *из* G *найдется такой элемент* g'*, что* $g * g' = e$.

Элемент g' *называется* ***обратным*** *к* g.

В мультипликативной записи элемент, обратный к g, обычно обозначается через g^{-1}. В аддитивной записи — через $(-g)$.

III.1. Элементарные теоремы теории групп

Определение 2. **Группой** *называется множество G с определенной на нем операцией $*$, удовлетворяющая следующим трем условиям (аксиомам группы):*

ассоциативность: $(x * y) * z = x * (y * z)$;

существование нейтрального элемента: *в G существует такой элемент e, что $g * e = e * g = g$ для любого элемента g из G;*

существование обратного элемента: *для любого элемента g из G найдется такой элемент g', что $g * g' = e$.*

Элемент g' называется ***обратным*** *к g.*

Обычно изучение нового понятия осуществляется индуктивно (рассмотрением **примеров**) или дедуктивно (анализ определения, доказательство теорем).

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство.

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство $g * x = g$ или $x * g = g$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность.

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство $g * x = g$ или $x * g = g$.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$g = \qquad (g * x)$$

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$g' * g = g' * (g * x)$$

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$= g' * g = g' * (g * x) =$$

Но левая часть равенства равна e согласно **аксиоме существования обратного элемента**.

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) =$$

Но левая часть равенства равна e согласно **аксиоме существования обратного элемента**.

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) =$$

Правую часть равенства преобразуем с помощью **аксиомы ассоциативности**.

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) = (g' * g) * x =$$

Правую часть равенства преобразуем с помощью **аксиомы ассоциативности**.

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) = (g' * g) * x = e * x =$$

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) = (g' * g) * x = e * x = x.$$

III.1.1. Критерий нейтрального элемента

Теорема 1. *$x = e$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g из G выполняется равенство* $g * x = g$ *или* $x * g = g$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $g * x = g$.

$$e = g' * g = g' * (g * x) = (g' * g) * x = e * x = x.$$

Следовательно, $x = e$, что и требовалось доказать.

Случай $x * g = g$ разбирается аналогично.

III.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство.

III.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть

III.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

III.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). $x * g = e$ *(или* $g * x = e$*) тогда и только тогда, когда* $x = g'$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$(x * g) * g' = e * g' \Rightarrow$

III.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow\; x * (g * g') = g' \;\Rightarrow$$

III.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow\; x * (g * g') = g' \;\Rightarrow\; x * e = g' \;\Rightarrow$$

III.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x * g = e$. Тогда

$$(x * g) * g' = e * g' \;\Rightarrow\; x * (g * g') = g' \;\Rightarrow\; x * e = g' \;\Rightarrow\; x = g'.$$

III.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Достаточность. Если $x = g'$, то

III.1.2. Теорема об однозначности g'

Теорема 2 (об однозначности g'). *$x * g = e$ (или $g * x = e$) тогда и только тогда, когда $x = g'$.*

Доказательство. Достаточность. Если $x = g'$, то $x * g = e$ в силу аксиомы существования обратного элемента. Теорема доказана.

III.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t **группы** G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство.

III.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t **группы** G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. Воспользуемся **теоремой об однозначности** g'.

III.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t **группы** G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. $t * t' = e$, поэтому по **теореме об однозначности** g' элемент t является обратным к t', т.е.

III.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t **группы** G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. $t * t' = e$, поэтому по **теореме об однозначности** g' элемент t является обратным к t', т.е. имеем $t = (t')'$.

III.1.3. Теорема об инволютивности операции обращения

Теорема 3 (об инволютивности операции обращения). *Для любого элемента t **группы** G имеет место равенство $(t')' = t$.*

Доказательство. $t * t' = e$, поэтому по **теореме об однозначности** g' элемент t является обратным к t', т.е. имеем $t = (t')'$.

Теорема доказана.

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство.

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$(x*y)*(y'*x') =$

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) =$

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') =$

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') =$

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' =$$

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' = e.$$

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению).
$(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' = e.$$

Теорема доказана.

III.1.4. Теорема об элементе, обратном к произведению

Теорема 4 (об элементе, обратном к произведению). $(x * y)' = y' * x'$.

Доказательство. Согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента достаточно проверить очевидное равенство $(x * y) * (y' * x') = e$. Имеем

$$(x*y)*(y'*x') = x*(y*(y'*x')) = x*((y*y')*x') = x*(e*x') = x*x' = e.$$

Теорема доказана.

Соглашение 1. *Применяются следующие обозначения: если X — подмножество группы G, и g — элемент группы G, то*

$$g * X = \left\{ g * x \,\middle|\, x \in X \right\}, \quad X * g = \left\{ x * g \,\middle|\, x \in X \right\}. \tag{1}$$

III.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

III.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Тот факт, что H — подгруппа группы G, обозначается как $H \leq G$.

III.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Тот факт, что H — подгруппа группы G, обозначается как $H \leq G$. Таким образом, условие $H \leq G$ является более сильным, чем $H \subseteq G$.

III.2. Подгруппа

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Тот факт, что H — подгруппа группы G, обозначается как $H \leq G$. Таким образом, условие $H \leq G$ является более сильным, чем $H \subseteq G$.

Тот факт, что $H \leq G$ и $H \neq G$, то $H < G$.

III.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство.

III.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

III.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

III.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H,* т.е. $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

Ассоциативность выполняется во всем G, а тем более в H.

III.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H, т.е.* $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

Аксиома существования обратного элемента выполняется, поскольку в H содержится хотя бы один элемент h, и, следовательно, $h * h' = e$ — элемент из H.

III.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H,* т.е. $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right)$.

Доказательство. Достаточность. Если $x * y$ принадлежит H для любых x, y из H, то это означает, что на H определена операция $*$.

Аксиома существования обратного элемента выполняется, поскольку в H содержится хотя бы один элемент h, и, следовательно, $h * h' = e$ — элемент из H. Теорема доказана.

III.3. Критерий подгруппы

Определение 3. *Подмножество H группы G называется* **подгруппой** *группы G тогда и только тогда, когда H является группой относительно ограничения операции $*$ на H.*

Теорема 5 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y из H элементы $x * y$ и x' принадлежат H,*

т.е. $H \leq G \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in H, \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in H, \\ x' \in H \end{cases} \right).$

Рассмотреть пример?

III.4. Смежные классы

Определение 4. *Для подгруппы H из G и элемента g из G множество $g * H = \left\{ g * h \,\middle|\, h \in H \right\}$ называется* **левым смежным классом** *группы G по H. Количество левых смежных классов группы G по подгруппе H называется* **индексом подгруппы** *H в группе G, и обозначается $|G : H|$. Множество $H * g = \left\{ h * g \,\middle|\, h \in H \right\}$ называется* **правым смежным классом** *группы G по H.*

Рассмотреть пример?

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство.

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 1) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 2)

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 1) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 2)

Пусть $x * H = y * H$.

Надо доказать, что $x' * y \in H$.

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 1) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 2)

Пусть $x * H = y * H$.

$x * e \in x * H = y * H \ \Rightarrow$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. 1) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 2)

Пусть $x * H = y * H$.

$x * e \in x * H = y * H \ \Rightarrow \quad = x * e \in y * H \ \Rightarrow$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 1) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 2)

Пусть $x * H = y * H$.

$x * e \in x * H = y * H \ \Rightarrow \ x = x * e \in y * H \ \Rightarrow$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 1) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 2)

Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow\; x = x * e \in y * H \;\Rightarrow\; \exists h \begin{cases} h \in H, \\ x = y * h. \end{cases}$$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. 1) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 2)

Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow\; x = x * e \in y * H \;\Rightarrow\; \exists h \begin{cases} h \in H, \\ x = y * h. \end{cases}$$

$x = y * h \;\Rightarrow\; y' * x = h \in H.$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 1) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 2)

Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow\; x = x * e \in y * H \;\Rightarrow\; \exists h \begin{cases} h \in H, \\ x = y * h. \end{cases}$$

$x = y * h \;\Rightarrow\; y' * x = h \in H$.

Из соображений симметрии $x' * y \in H$.

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 1) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 2)

Пусть $x * H = y * H$.

$$x * e \in x * H = y * H \;\Rightarrow\; x = x * e \in y * H \;\Rightarrow\; \exists h \begin{cases} h \in H, \\ x = y * h. \end{cases}$$

$x = y * h \;\Rightarrow\; y' * x = h \in H.$

Из соображений симметрии $x' * y \in H$.

Итак, 1) $\Rightarrow$ 2) доказано.

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 2) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 3) — очевидно.

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. $3) \overset{?}{\Rightarrow} 1)$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 3) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 1) Пусть $x' * y \in H$.

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1) Пусть $x' * y \in H$.

Надо доказать **равенство множеств.**

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \ \Rightarrow \ x * H = y * H.$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \ \Rightarrow \begin{cases} x * H \subseteq y * H, \\ y * H \subseteq x * H. \end{cases}$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 3) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \ \Rightarrow \ \begin{cases} x * H \subseteq y * H, \\ y * H \subseteq x * H. \end{cases}$

Из соображений симметрии достаточно доказать только одно из включений, например, $x * H \subseteq y * H$.

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \ \Rightarrow \ \Big(x * g \in x * H \ \overset{?}{\Rightarrow} \ x * g \in y * H\Big)$.

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \left(x * g \in x * H \;\overset{?}{\Rightarrow}\; x * g \in y * H\right)$.

$x' * y = h \;\Rightarrow$ $x =$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \left(x * g \in x * H \;\overset{?}{\Rightarrow}\; x * g \in y * H\right)$.

$x' * y = h \;\Rightarrow\; y = x * h \;\Rightarrow\; x =$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \Big(x * g \in x * H \;\overset{?}{\Rightarrow}\; x * g \in y * H\Big)$.

$$x' * y = h \;\Rightarrow\; y = x * h \;\Rightarrow\; x = y * h'.$$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \left(x * g \in x * H \;\overset{?}{\Rightarrow}\; x * g \in y * H \right)$.

$$x' * y = h \;\Rightarrow\; y = x * h \;\Rightarrow\; x = y * h'.$$

Значит, $x * g =$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \left(x * g \in x * H \;\overset{?}{\Rightarrow}\; x * g \in y * H \right)$.

$$x' * y = h \;\Rightarrow\; y = x * h \;\Rightarrow\; x = y * h'.$$

Значит, $x * g = y * h' * g$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство. 3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \left(x * g \in x * H \;\overset{?}{\Rightarrow}\; x * g \in y * H\right)$.

$$x' * y = h \;\Rightarrow\; y = x * h \;\Rightarrow\; x = y * h'.$$

Значит, $x * g = y * \underbrace{h' * g}_{\in H} \in$

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array} \right.$

Доказательство. 3) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 1)

«Мечта»: $x' * y = h \in H \;\Rightarrow\; \left(x * g \in x * H \;\stackrel{?}{\Rightarrow}\; x * g \in y * H \right)$.

$$x' * y = h \;\Rightarrow\; y = x * h \;\Rightarrow\; x = y * h'.$$

Значит, $x * g = y * \underbrace{h' * g}_{\in H} \in y * H$.

Итак,

$$x * g \in x * H \;\Rightarrow\; x * g \in y * H,$$

т.е. $x * H \subseteq y * H$.

III.5. Критерий совпадения левых смежных классов

Теорема 6. *Для подгруппы H равносильны следующие утверждения:*

1) $x * H = y * H$; *2)* $\begin{cases} x' * y \in H, \\ y' * x \in H; \end{cases}$ *3)* $\left[\begin{array}{l} x' * y \in H, \\ y' * x \in H. \end{array}\right.$

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2) — доказано,

2) $\Rightarrow$ 3) — доказано,

3) $\Rightarrow$ 1) — доказано.

Теорема доказана.

III.6. Порядок элемента и порядок конечной группы

Определение 5. *Группа называется* **конечной**, *если группа состоит из конечного числа элементов.* **Порядком конечной группы**, *обозначаемым* $|G|$, *называется количество элементов этой группы.*

III.6. Порядок элемента и порядок конечной группы

Определение 5. *Группа называется* **конечной**, *если группа состоит из конечного числа элементов.* **Порядком конечной группы**, *обозначаемым* $|G|$, *называется количество элементов этой группы.*

Определение 6. *Говорят, что* g — **элемент конечного порядка**, *если существует такое число* n, *для которого* $g^n = e$. *Если* g — *элемент конечного порядка, то наименьшее такое натуральное число* n, *что* $g^n = e$, *называется* **порядком элемента**, *и обозначается* $|g|$. *В этом случае говорят, что* g — **элемент порядка** n.

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство.

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что
во-первых, всякий элемент группы G содержится в некотором левом смежном классе;

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что
во-первых, всякий элемент группы G содержится в некотором левом смежном классе;
во-вторых, различные смежные классы группы G по H не пересекаются;

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что
во-первых, всякий элемент группы G содержится в некотором левом смежном классе;
во-вторых, различные смежные классы группы G по H не пересекаются;
в-третьих, количество элементов в каждом классе равно $|H|$.

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-первых,

$$g \in G \ \Rightarrow$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-первых,

$$g \in G \ \Rightarrow \ g = g * e \in$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-первых,

$$g \in G \;\Rightarrow\; g = g * e \in g * H.$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-первых,

$$g \in G \;\Rightarrow\; g = g * e \in g * H.$$

Значит, всякий элемент группы G содержится в некотором левом смежном классе.

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых, пусть $x * H$ и $y * H$ — различные смежные классы с непустым пересечением.

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{cases} \Rightarrow$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{cases} \Rightarrow$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z = x * h_1, \quad h_1 \in H, \\ z = y * h_2, \quad h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ z = x * h_1, \quad h_1 \in H, \\ z = y * h_2, \quad h_2 \in H \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ x' * z = h_1 \in H, \\ y' * z = h_2 \in H \end{array} \right. \Rightarrow$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ z = x * h_1, \quad h_1 \in H, \\ z = y * h_2, \quad h_2 \in H \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x * H \neq y * H, \\ x' * z = h_1 \in H, \\ y' * z = h_2 \in H \end{array} \right. \Rightarrow x * H = z * H = y * H.$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. Во-вторых,

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ x * H \cap y * H \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ \exists z \quad z \in ((x * H) \cap (y * H)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z \in x * H, \\ z \in y * H, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * H \neq y * H, \\ z = x * h_1, \quad h_1 \in H, \\ z = y * h_2, \quad h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{x * H \neq y * H}, \\ x' * z = h_1 \in H, \\ y' * z = h_2 \in H \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x * H} = z * H = \mathbf{y * H}.$$

Противоречие показывает, что $x * H \neq y * H \ \Rightarrow \ x * H \cap y * H = \emptyset$.

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) =$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 =$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 =$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. **В-третьих,** осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \ \Rightarrow$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \ \Rightarrow \ x * h_1 = x * h_2 \ \Rightarrow$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \ \Rightarrow \ x * h_1 = x * h_2 \ \Rightarrow \ h_1 = h_2.$$

III.7. Теорема Лагранжа

Теорема 7 (Лагранж). *Для всякой подгруппы H конечной группы G справедливо равенство $|G| = |H| * |G : H|$.*

Доказательство. В-третьих, осталось доказать, что $|H| = |x * H|$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi : \ H \to x * H$, определенная формулой $\varphi(h) = x * h$, является **взаимно однозначной**.

$$h_1 = h_2 \ \Rightarrow \ \varphi(h_1) = x * h_1 = x * h_2 = \varphi(h_2).$$

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \ \Rightarrow \ x * h_1 = x * h_2 \ \Rightarrow \ h_1 = h_2.$$

Теорема Лагранжа доказана.

III.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство.

III.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство. Очевидно, фактически это переформулировка теоремы Лагранжа.

III.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (о порядке подгруппы). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство. Очевидно, фактически это переформулировка теоремы Лагранжа.

Следствие 2 (о порядке элемента группы). *Порядок любого элемента конечной группы делит нацело порядок самой группы*

Доказательство.

III.8. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1 (**о порядке подгруппы**). *Порядок любой подгруппы конечной группы делит нацело порядок самой группы.*

Доказательство. Очевидно, фактически это переформулировка теоремы Лагранжа.

Следствие 2 (**о порядке элемента группы**). *Порядок любого элемента конечной группы делит нацело порядок самой группы*

Доказательство. Очевидно, т.к. порядок элемента равен порядку порожденной им **циклической подгруппы** (подробнее циклические группы мы рассмотрим **ниже**).

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство.

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Как **доказать делимость числа a на b** нацело?

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n =$$

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} =$$

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m =$$

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m = \left(\left(g^{|g|}\right)^k\right) * g^m =$$

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m = \left(\left(g^{|g|}\right)^k\right) * g^m = e * g^m =$$

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m = \left(\left(g^{|g|}\right)^k\right) * g^m = e * g^m = g^m,$$

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Разделим n на $|g|$ с остатком:

$$n = |g| \cdot k + m, \qquad 0 \leq m < |g|.$$

Тогда

$$e = g^n = g^{|g|k+m} = g^{|g|k} * g^m = \left(\left(g^{|g|}\right)^k\right) * g^m = e * g^m = g^m,$$

что противоречит определению $|g|$, как наименьшего такого натурального числа, что $g^{|g|} = e$.

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, $g^{(u \cdot w)} = (g^u)^w = e$.

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, $g^{(u \cdot w)} = (g^u)^w = e$.

Поэтому, как доказано выше, $u \cdot w$ делится нацело на $u \cdot v$, то есть w делится нацело на v.

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, w делится нацело на v.

С другой стороны, $e = g^{(u \cdot v)} = (g^u)^v$.

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, w делится нацело на v.

С другой стороны, $e = g^{(u \cdot v)} = (g^u)^v$.

Поэтому v делится нацело на w.

III.9. Лемма о делимости на порядок элемента

Лемма 1. *Если для неединичного элемента g группы G и натурального числа n имеем $g^n = e$, то n делится нацело на $|g|$. В частности, если $|g| = u \cdot v$, то $|g^u| = v$.*

Доказательство. Осталось доказать утверждение «в частности...».

Итак, пусть $|g^u| = w$.

Тогда, с одной стороны, w делится нацело на v.

С другой стороны, $e = g^{(u \cdot v)} = (g^u)^v$.

Поэтому v делится нацело на w.

Следовательно, $v = w$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Перейти к доказательству теоремы о цикличности мультипликативной группы поля Галуа?

III.10. Централизатор и нормализатор

Рассмотрим произвольное подмножество X группы G. В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций естественно рассмотреть подмножество элементов группы G, отличающихся каким-либо особенным «поведением» относительно элементов множества X. Наиболее естественным является требование перестановочности либо с каждым элементом из X, либо со множеством X в целом.

III.10. Централизатор и нормализатор

Рассмотрим произвольное подмножество X группы G. В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций естественно рассмотреть подмножество элементов группы G, отличающихся каким-либо особенным «поведением» относительно элементов множества X. Наиболее естественным является требование перестановочности либо с каждым элементом из X, либо со множеством X в целом. Различие состоит в следующем. В первом случае рассматриваются такие элементы y, что для любого x из X выполняется равенство $x * y = y * x$.

III.10. Централизатор и нормализатор

Рассмотрим произвольное подмножество X группы G. В соответствии со стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций естественно рассмотреть подмножество элементов группы G, отличающихся каким-либо особенным «поведением» относительно элементов множества X. Наиболее естественным является требование перестановочности либо с каждым элементом из X, либо со множеством X в целом. Различие состоит в следующем. В первом случае рассматриваются такие элементы y, что для любого x из X выполняется равенство $x * y = y * x$. Во втором случае $x*y$ может отличаться от $y*x$, но $x * y = y * x'$ для некоторого x' из X. Эта мысль оказалась настолько плодотворной, что были введены специальные термины.

III.10. Централизатор и нормализатор

Определение 7. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **централизатор** *множества X во множестве Y — это*

$$C_Y(X) = \left\{ y \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{ll} y \in Y, & \\ \forall x \in X & x * y = y * x \end{array} \right. \right\}. \tag{2}$$

III.10. Централизатор и нормализатор

Определение 7. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **централизатор** *множества X во множестве Y — это*

$$C_Y(X) = \left\{ y \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{ll} y \in Y, & \\ \forall x \in X & x * y = y * x \end{array} \right. \right\}. \tag{2}$$

Определение 8. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **нормализатор** *множества X во множестве Y — это*

$$N_Y(X) = \left\{ y \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} y \in Y, \\ \left\{ x * y \;\middle|\; x \in X \right\} = \left\{ y * x \;\middle|\; x \in X \right\} \end{array} \right. \right\}. \tag{3}$$

III.10. Централизатор и нормализатор

Определение 7. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **централизатор** *множества X во множестве Y — это*

$$C_Y(X) = \left\{ y \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{ll} y \in Y, & \\ \forall x \in X & x * y = y * x \end{array} \right. \right\}. \tag{2}$$

Определение 8. *Для любого подмножеств X и Y группы G* **нормализатор** *множества X во множестве Y — это*

$$N_Y(X) = \left\{ y \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} y \in Y, \\ \left\{ x * y \,\middle|\, x \in X \right\} = \left\{ y * x \,\middle|\, x \in X \right\} \end{array} \right. \right\}. \tag{3}$$

Напомним, что в соответствии с соглашением 1 равенство $\left\{ x * y \,\middle|\, x \in X \right\} = \left\{ y * x \,\middle|\, x \in X \right\}$ можно представить в виде $y * X = X * y$.

III.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство.

III.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Как доказать включение одного множества в другое?

III.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Надо доказать, что всякий элемент из $C_H(X)$ является элементом из $N_H(X)$.

III.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора

III.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора для любого $g \in X$

III.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора для любого $g \in X$ имеем $a * g = g * a$. Следовательно, выполняется равенство (8).

III.11. Теорема о централизаторе и нормализаторе

Теорема 8 (о централизаторе и нормализаторе). *Если H — подгруппа группы G, и X — подмножество группы G, то для множеств $C_H(X)$ и $N_H(X)$ имеет место система включений:*

$$C_H(X) \leq N_H(X) \leq G.$$

В частности, централизатор и нормализатор любого подмножества в подгруппе группы G являются подгруппами группы G.

Доказательство. Пусть $a \in C_H(X)$. Тогда согласно определению централизатора для любого $g \in X$ имеем $a * g = g * a$. Следовательно, выполняется равенство (8).

Теорема доказана.

III.12. Порождающие элементы

Определение 9. *Пусть G — группа, A — какое-либо подмножество ее элементов. Говорят, что подгруппа H* ***порождена множеством*** *A, если H — это минимальная из подгрупп, содержащих A (внешняя характеризация). Подгруппа H, порожденная множеством A, обозначается $\langle A \rangle$.*

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}. \tag{4}$$

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$.

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$.

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ \end{cases} \Rightarrow$$

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$.

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ A \subseteq P \end{cases} \Rightarrow$$

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$.

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ A \subseteq P \end{cases} \Rightarrow A \subseteq \big(P \cap \langle A \rangle\big) \leq G.$$

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P. Докажем включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$.

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ A \subseteq P \end{cases} \Rightarrow A \subseteq \big(P \cap \langle A \rangle\big) \leq G.$$

Но $\langle A \rangle$ — минимальная среди таких подгрупп, поэтому $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$.

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

Итак включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$ доказано. Обратное включение очевидно. Таким образом,

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ \langle A \rangle \subseteq P \end{cases} \Rightarrow$$

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

Итак включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$ доказано. Обратное включение очевидно. Таким образом,

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ \langle A \rangle \subseteq P \end{cases} \Rightarrow P = \langle A \rangle,$$

III.13. Внутренняя характеризация порожденной подгруппы

Теорема 9. *Пусть G — группа и $A \subseteq G$. Тогда*

$$\langle A \rangle = \underbrace{\left\{ x^a * y^b * \ldots * z^c \;\middle|\; \begin{cases} \{x, y, \ldots, z\} \subseteq A \\ \{a, b, \ldots, c\} \subseteq \mathbb{Z} \end{cases} \right\}}_{=P}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (4) через P.

Итак включение $\langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle \cap P$ доказано. Обратное включение очевидно. Таким образом,

$$\begin{cases} P \leq \langle A \rangle, \\ \langle A \rangle \subseteq P \end{cases} \Rightarrow P = \langle A \rangle,$$

т.е. (4) доказана.

III.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

III.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

Первый вариант: в качестве «измерителя» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент z, что

$$x * y = y * \mathbf{z} \Rightarrow$$

III.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

Первый вариант: в качестве «измерителя» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент z, что

$$x * y = y * z \;\Rightarrow\; z = y' * x * y.$$

III.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

Первый вариант: в качестве «измерителя» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент z, что

$$x * y = y * z \;\Rightarrow\; z = y' * x * y.$$

Другой вариант: как «измеритель» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент t, что

$$x * y = y * x * \mathbf{t} \;\Rightarrow$$

III.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Как «измерить» некоммутативность элементов: $x * y \neq y * x$?

Первый вариант: в качестве «измерителя» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент z, что

$$x * y = y * z \;\Rightarrow\; z = y' * x * y.$$

Другой вариант: как «измеритель» некоммутативности элементов x и y использовать такой элемент t, что

$$x * y = y * x * t \;\Rightarrow\; t = x' * y' * x * y.$$

III.14. Сопряженные элементы. Коммутаторы. Коммутант

Определение 10. *Элементы a и b группы G называются* **сопряженными** *с помощью элемента c, если $b = c' * a * c$. Выражение $c' * a * c$ коротко записывается в виде a^c.*

Определение 11. *Назовем* **коммутатором** *элементов x, y группы G элемент $[x, y]$, определяемый формулой $[x, y] = x' * y' * x * y$.*

Рассмотрим пример?

III.15. Взаимный коммутант подгрупп. Коммутант группы

Определение 12. Взаимным коммутантом $[A, B]$ *подгрупп* A *и* B *группы* G *называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами вида* $[a, b]$, *где* a *из* A, b — *из* B.

III.15. Взаимный коммутант подгрупп. Коммутант группы

Определение 12. Взаимным коммутантом $[A, B]$ *подгрупп* A *и* B *группы* G *называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами вида* $[a, b]$*, где* a *из* A*,* b *—* *из* B*.*

Определение 13. Коммутантом G' *группы* G *называется подгруппа* $[G, G]$*.*

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство.

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство.

$$x * y = y * x \ \Leftrightarrow \qquad\qquad = x.$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство.

$$x * y = y * x \ \Leftrightarrow \qquad = y' * x * y = x.$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство.

$$x * y = y * x \;\Leftrightarrow\; x^y = y' * x * y = x.$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Далее,

$$x * y = y * x \ \Leftrightarrow \ y =$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Далее,

$$x * y = y * x \ \Leftrightarrow \ y = x' * y * x =$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Далее,

$$x * y = y * x \ \Leftrightarrow \ y = x' * y * x = y^x.$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y =$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x$.

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x.$
В силу ассоциативности операции $*$ и **аксиомы существования обратного элемента** имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x.$
В силу ассоциативности операции $*$ и **аксиомы существования обратного элемента** имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$
$= x' * e * x =$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x.$
В силу ассоциативности операции $*$ и **аксиомы существования обратного элемента** имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$
$= x' * e * x = x' * x = e.$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $x * y = y * x$. Тогда
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x.$
В силу ассоциативности операции $*$ и **аксиомы существования обратного элемента** имеем
$[x, y] = x' * y' * x * y = x' * y' * y * x = x' * (y' * y) * x =$
$= x' * e * x = x' * x = e.$

Итак, если $x * y = y * x$, то $[x, y] = e$.

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда
$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] =$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда
$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y =$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y =$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y =$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y = e * x * y =$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y = e * x * y = x * y.$$

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y = e * x * y = x * y.$$

Следовательно, если $[x, y] = e$, то $y * x = x * y$.

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть теперь $[x, y] = e$. Тогда

$$y * x = y * x * e = y * x * [x, y] = y * x * x' * y' * x * y =$$
$$= y * \underbrace{x * x'}_{e} * y' * x * y = y * e * y' * x * y = y * y' * x * y =$$
$$= \underbrace{y * y'}_{e} * x * y = e * x * y = x * y.$$

Следовательно, если $[x, y] = e$, то $y * x = x * y$.

Теорема доказана.

III.16. Критерии перестановочности элементов

Теорема 10. *Для любых элементов x, y группы G*

$$x * y = y * x \quad \Leftrightarrow \quad x^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y^x = y \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = e. \qquad (5)$$

Определение 14. ***Группа*** *с* ***коммутативной*** *групповой операцией называется* ***коммутативной*** *или* ***абелевой группой***.

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c' * a * b * c =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c' * a * b * c = c' * a * e * b * c =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c' * a * b * c = c' * a * c * c' * b * c =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

1. $(a*b)^c = c'*a*b*c = c'*a*c*c'*b*c = a^c * b^c$.

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$
$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b = e,$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;

4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;

6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$

$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b = e,$

следовательно, по теореме 2 об однозначности обратного элемента

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;

4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;

6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

2. $(a')^b * a^b = b' * a' * b * b' * a * b = b' * a * e * a' * b =$

$= b' * a' * a * b = b' * e * b = b' * b = e,$

следовательно, по теореме 2 об однозначности обратного элемента $\left(a^b\right)' = (a')^b$.

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

3. $a^b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;

4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;

6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b' * a * b = e * b' * a * b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b'*a*b = e*b'*a*b = a*a'*b'*a*b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

3. $a^b = b'*a*b = e*b'*a*b = a*a'*b'*a*b = a*[a,b]$.

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

4. $[a,b] =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

4. $[a,b] = a' * b' * a * b =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

4. $[a,b] = a'*b'*a*b = a'*(b^a) =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

4. $[a,b] = a'*b'*a*b = a'*(b^a) = b'^a * b$.

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] =$$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)' * c' * a * b * c =$$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)' * c' * a * b * c = b' * a' * c' * a * b * c =$$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)' * c' * a * b * c = b' * a' * c' * a * b * c =$$

$$= b' * a' * c' * a * e * b * c =$$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)' * c' * a * b * c = b' * a' * c' * a * b * c =$$

$$= b' * a' * c' * a * \underbrace{c * b * b' * c'}_{e} * b * c =$$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

5. По теореме 4 об элементе, обратном к произведению

$$[a*b,c] = (a*b)'*c'*a*b*c = b'*a'*c'*a*b*c =$$

$$= b'*a'*c'*a*\underbrace{c*b*b'*c'}_{e}*b*c = [a,c]^b * [b,c].$$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a' * (b*c)' * a * b * c =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a' * (b*c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a' * (b*c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

$$= a' * c' * a * c * c' * a' * b' * a * b * c =$$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a' * (b*c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

$$= a' * c' * \underbrace{a * c * c' * a'}_{e} * b' * a * b * c =$$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;

4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;

6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

6. $[a,b*c] = a' * (b*c)' * a * b * c = a' * c' * b' * a * b * c =$

$$= a' * c' * \underbrace{a * c * c' * a'}_{e} * b' * a * b * c = [a,c] * [a,b]^c.$$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;

4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;

6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

7. $[a,b]' =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

7. $[a,b]' = (a'*b'*a*b)' =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a*[a,b]$;

4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;

6. $[a,b*c] = [a,c]*[a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

7. $[a,b]' = (a'*b'*a*b)' = b'*a'*\underbrace{(b')'}_{b}*\underbrace{(a')'}_{a} =$

III.17. Некоторые соотношения для коммутаторов и сопряженных элементов

1. $(a*b)^c = a^c * b^c$; 2. $\left(a^b\right)' = (a')^b$; 3. $a^b = a * [a,b]$;
4. $[a,b] = a' * (b^a) = b'^a * b$; 5. $[a*b,c] = [a,c]^b * [b,c]$;
6. $[a,b*c] = [a,c] * [a,b]^c$; 7. $[a,b]' = [b,a]$.

Доказательство.

7. $[a,b]' = (a'*b'*a*b)' = b'*a'*\underbrace{(b')'}_{b} * \underbrace{(a')'}_{a} = [b,a]$.

III.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. *Подгруппа N из G называется* **нормальной** *в G, если левые смежные классы группы G по подгруппе N совпадают с правыми.*

Что-то много слов...

III.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. *Подгруппа N из G называется* **нормальной** *в G, если для любого g из G справедливо равенство $g * N = N * g$.*

Уже лучше, но...

III.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. $\underbrace{N \trianglelefteq G}_{\substack{\textbf{нормальная} \\ \textit{подгруппа}}} \Leftrightarrow\ g * N = N * g.$ *(5)*

Вот теперь хорошо!

III.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. $\underbrace{N \trianglelefteq G}_{\substack{\textbf{нормальная} \\ \textit{подгруппа}}} \Leftrightarrow g * N = N * g.$ *(5)*

Например, **мы нашли** все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**:
$H_1 = \{a, b, c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$,
$H_4 = \{a, r\}$.

Оказалось, что нормальной подгруппой является только $H_1 \trianglelefteq G$.

В самом деле...

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

III.18. Нормальная подгруппа

Определение 15. $\underbrace{N \trianglelefteq G}_{\substack{\textbf{нормальная} \\ \textit{подгруппа}}} \Leftrightarrow\ g * N = N * g.$ *(5)*

Например, **мы нашли** все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**:
$H_1 = \{a, b, c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$,
$H_4 = \{a, r\}$.

Оказалось, что нормальной подгруппой является только $H_1 \trianglelefteq G$.

В самом деле...

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

$$b * H_2 = \{b, q\} \neq \{b, r\} = H_2 * b, \quad b * H_3 = \{b, r\} \neq \{b, p\} = H_3 * b,$$

$$b * H_4 = \{b, p\} \neq \{b, q\} = H_4 * b.$$

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.

Поэтому $x^g =$

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.

Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.

Поэтому $x^g = g' * x * g =$

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Пусть N — нормальная подгруппа и $x \in N$.
Поскольку $N * g = g * N$, то $x * g = g * y$, где y — элемент из N.
Поэтому $x^g = g' * x * g = y \in N$.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$. Возьмем элемент g из G, и x из N. Обозначим $g' * x * g$ через y.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$. Возьмем элемент g из G, и x из N. Обозначим $g' * x * g$ через y. По предположению y содержится в N. Поэтому

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Надо доказать совпадение множеств $g * N$ и $N * g$. Возьмем элемент g из G, и x из N. Обозначим $g' * x * g$ через y. По предположению y содержится в N. Поэтому $x * g = g * y$, то есть $N * g$ содержится в $g * N$.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$. Далее, согласно теореме 2 об однозначности обратного элеменнта $g * x * g' = (g')' * x * g' = z$ — элемент из N. Значит,

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$.

Далее, согласно теореме 2 об однозначности обратного элеменнта $g * x * g' = (g')' * x * g' = z$ — элемент из N. Значит, $g * x = z * g$, поэтому $g * N$ включается в $N * g$. Таким образом, $g * N = N * g$.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

1. Докажем достаточность. Итак, мы показали, что $N * g \subseteq g * N$. Далее, согласно теореме 2 об однозначности обратного элемента $g * x * g' = (g')' * x * g' = z$ — элемент из N. Значит, $g * x = z * g$, поэтому $g * N$ включаеся в $N * g$. Таким образом, $g * N = N * g$. Пункт 1 доказан.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Пусть N — нормальная подгруппа. Тогда, согласно пункту 1, для любого x из N и g из G элемент x^g — принадлежит N.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Пусть N — нормальная подгруппа. Тогда, согласно пункту 1, для любого x из N и g из G элемент x^g — принадлежит N. В силу соотношения 4) имеем $[x, g] = x' * (x^g)$ — элемент из N, так как x' и x^g — элементы из N.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Пусть N — нормальная подгруппа. Тогда, согласно пункту 1, для любого x из N и g из G элемент x^g — принадлежит N. В силу соотношения 4) имеем $[x, g] = x' * (x^g)$ — элемент из N, так как x' и x^g — элементы из N.

Необходимость доказана.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Достаточность.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Достаточность. Пусть известно, что $[x, g]$ является элементом группы G для всякого x из N, g из G.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Достаточность. Пусть известно, что $[x, g]$ является элементом группы G для всякого x из N, g из G. В силу соотношения 3) $x^g = x[x, g]$ — элемент из N, и, согласно пункту 1, получаем, что N — нормальная подгруппа.

III.19. Критерии нормальности подгруппы

Теорема 11 (критерии нормальности подгруппы). *Подгруппа N группы G является* ***нормальной*** *в G тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих утверждений:*

1. *Для любого элемента x из N и g из G элемент $x^g = g' * x * g$ содержится в N;*
2. $[N, G] \leq N$.

Доказательство.

2. Достаточность. Пусть известно, что $[x, g]$ является элементом группы G для всякого x из N, g из G. В силу соотношения 3) $x^g = x[x, g]$ — элемент из N, и, согласно пункту 1, получаем, что N — нормальная подгруппа.

Теорема доказана.

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Рассмотреть пример?

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство.

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$(x*N)*(y*N) =$

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N =$

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N =$

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x * N) * (y * N) = x * (N * y) * N = x * (y * N) * N = (x * y) * (N * N) =$$

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) =$$

$$= (x*y)*N =$$

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) =$$

$$= (x*y)*N = (x*y)*(h*N) =$$

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) =$$

$$= (x*y)*N = (x*y)*(h*N) = (x*y*h)*N =$$

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) =$$

$$= (x*y)*N = (x*y)*(h*N) = (x*y*h)*N = z*N.$$

III.20. Лемма об умножении смежных классов по подгруппе

Лемма 2. *Пусть N — **нормальная подгруппа** группы G. Тогда для любых x, y из G для каждого элемента z из $(x * y) * N$ имеем: $(x * N) * (y * N) = (x * y) * N = z * N$. Таким образом, произведение смежных классов группы G по нормальной подгруппе N является смежным классом.*

Доказательство. По условию $z = x * y * h$ для некоторого элемента h из H. По **определению нормальной подгруппы**

$$(x*N)*(y*N) = x*(N*y)*N = x*(y*N)*N = (x*y)*(N*N) =$$

$$= (x*y)*N = (x*y)*(h*N) = (x*y*h)*N = z*N.$$

Лемма доказана.

III.21. Теорема о фактор-группе

Теорема 12. *Множество смежных классов группы G по* ***нормальной подгруппе*** N *является* ***группой*** *относительно операции умножения* ***смежных классов****, определенной в* ***лемме об умножении смежных классов по подгруппе****.*

III.21. Теорема о фактор-группе

Теорема 12. *Множество смежных классов группы G по* ***нормальной подгруппе*** N *является* ***группой*** *относительно операции умножения* ***смежных классов****, определенной в* ***лемме об умножении смежных классов по подгруппе****.*

Доказательство сводится к простой проверке аксиом группы.

III.21. Теорема о фактор-группе

Теорема 12. *Множество смежных классов группы G по* ***нормальной подгруппе*** N *является* ***группой*** *относительно операции умножения* ***смежных классов****, определенной в* ***лемме об умножении смежных классов по подгруппе****.*

Определение 16. *Множество смежных классов группы G по* ***нормальной подгруппе*** N *с операцией умножения смежных классов называется* **фактор-группой** *группы G по подгруппе N. Фактор-группа группы G по подгруппе N обозначается G/N.*

Рассмотреть пример?

IV. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп

Определение 17. *Функция* $f : G \to H$ *называется* **гомоморфизмом** *группы* $\langle G, \{*\}\rangle$ ***на*** *(в) группу* $\langle H, \{\circ\}\rangle$, *если*

$$\forall x, y \in G \qquad f(x * y) = f(x) \circ f(y). \tag{6}$$

Если f *является* ***взаимно однозначной функцией***, *то* f *называется* **изоморфизмом**.

Рассмотрим пример?

IV. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп

Определение 17. *Функция* $f : G \to H$ *называется* **гомоморфизмом** *группы* $\langle G, \{*\}\rangle$ ***на*** *(в) группу* $\langle H, \{\circ\}\rangle$, *если*

$$\forall x, y \in G \qquad f(x * y) = f(x) \circ f(y). \tag{6}$$

Если f *является* ***взаимно однозначной функцией****, то* f *называется* **изоморфизмом**.

С точки зрения теории групп все изоморфные группы одинаковы, ведь нас не интересует «природа» элементов группы, конкретный способ задания операции (в том смысле, что нам неважно, каким образом, по какой формуле и т.п. вычисляется результат групповой операции, процесс вычисления мы не рассматриваем).

IV. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп

Определение 17. *Функция* $f : G \to H$ *называется* **гомоморфизмом** *группы* $\langle G, \{*\}\rangle$ ***на*** *(в) группу* $\langle H, \{\circ\}\rangle$, *если*

$$\forall x, y \in G \qquad f(x * y) = f(x) \circ f(y). \tag{6}$$

Если f *является* ***взаимно однозначной функцией****, то* f *называется* **изоморфизмом**.

С точки зрения теории групп все изоморфные группы одинаковы, ведь нас не интересует «природа» элементов группы, конкретный способ задания операции.

Поэтому в большинстве теорем в теории групп группы различаются только с точностью до изоморфизма (то есть изоморфные группы отождествляются).

IV.1. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов

Теорема 13. *Если* f — ***гомоморфизм*** *группы* $\langle G, \{*\}\rangle$ *с единичным элементом* a *на группу* $\langle H, \{\circ\}\rangle$, *с единичным элементом* b, *то для любого элемента* x *из* G $\quad f(a) = b \quad$ *и* $\quad f(x') = f(x)'$.

IV.1. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов

Теорема 13. *Если* f — ***гомоморфизм*** *группы* $\langle G, \{*\}\rangle$ *с единичным элементом* a *на группу* $\langle H, \{\circ\}\rangle$, *с единичным элементом* b, *то для любого элемента* x *из* G $\quad f(a) = b \quad$ *и* $\quad f(x') = f(x)'$.

Доказательство. По определению гомоморфизма $f(x) = f(a * x) = f(a) \circ f(x)$, следовательно, согласно **теореме 1 (критерию нейтрального элемента)**, $f(a) = b$.

IV.1. Теорема об образах обратного и нейтрального элементов

Теорема 13. *Если f — **гомоморфизм** группы $\langle G, \{*\}\rangle$ с единичным элементом a на группу $\langle H, \{\circ\}\rangle$, с единичным элементом b, то для любого элемента x из G* $f(a) = b$ *и* $f(x') = f(x)'$.

Доказательство. По определению гомоморфизма $f(x) = f(a * x) = f(a) \circ f(x)$, следовательно, согласно **теореме 1 (критерию нейтрального элемента)**, $f(a) = b$.

Далее, $b = f(a) = f(x * x') = f(x) \circ f(x')$, поэтому, в силу **теоремы 2 об однозначности обратного элемента**, $f(x') = f(x)'$. Теорема доказана.

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Покажем, что ψ является **изоморфизмом**.

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Покажем, что ψ **взаимно однозначное отображение**:

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Покажем, что ψ **взаимно однозначное отображение**:

$$x = y \;\Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow\; \psi(x) = \psi(y).$$

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Покажем, что ψ **взаимно однозначное отображение**:

$$x = y \;\Leftrightarrow\; g' * x * g = g' * y * g \;\Leftrightarrow\; \psi(x) = \psi(y).$$

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

Для доказательства, что ψ — **изоморфизм**, осталось проверить свойство $\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$.

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) =$$

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g =$$

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g =$$

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g = g' * x * \underbrace{g * g'}_{=e} * y * g =$$

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g = g' * x * \underbrace{g * g'}_{=e} * y * g =$$

$$= x^g * y^g =$$

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = (x * y)^g = g' * x * y * g = g' * x * \underbrace{g * g'}_{=e} * y * g =$$

$$= x^g * y^g = \psi(x) * \psi(y).$$

IV.2. Сопряженные подгруппы

Теорема 14 (о сопряженной подгруппе). *Если H — подгруппа группы G, то для любого $g \in G$ множество H^g, определенное формулой*

$$H^g = \left\{ h^g \,\middle|\, h \in H \right\} \tag{7}$$

является подгруппой, ***изоморфной*** *группе H.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, заданное формулой: для $x \in G$

$$\psi(x) = x^g. \tag{8}$$

$$\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y).$$

Теорема доказана.

IV.3. Ядро гомоморфизма

Определение 18. Ядром *гомоморфизма f называется множество* $\mathrm{Ker}(f)$ *всех тех элементов x группы G, образом которых является единичный элемент группы H:* $f(x) = e$.

IV.4. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство.

IV.4. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство. Согласно **критерию нормальности подгруппы** достаточно убедиться в том, что для любого x из $\mathrm{Ker}(f)$ и любого g из G $[x, g]$ — элемент из $\mathrm{Ker}(f)$.

IV.4. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство. Согласно **критерию нормальности подгруппы** достаточно убедиться в том, что для любого x из $\mathrm{Ker}(f)$ и любого g из G $[x, g]$ — элемент из $\mathrm{Ker}(f)$. Согласно **определению ядра**, для доказательства этого факта надо проверить, что образ этого элемента — единичный. Но это сделать легко:

IV.4. Теорема о нормальности ядра

Теорема 15 (о нормальности ядра). $\mathrm{Ker}(f)$ *является* ***нормальной подгруппой*** *группы* G.

Доказательство. Согласно **критерию нормальности подгруппы** достаточно убедиться в том, что для любого x из $\mathrm{Ker}(f)$ и любого g из G $[x, g]$ — элемент из $\mathrm{Ker}(f)$. Согласно **определению ядра**, для доказательства этого факта надо проверить, что образ этого элемента — единичный. Но это сделать легко:

$$f([x, g]) = [f(x), f(g)] = [e, f(g)] = e,$$

что и требовалось доказать.

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на **$\mathbf{G/N}$**.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на **$\mathbf{G/N}$**.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8)

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) =$

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) =$

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на $\mathbf{G/N}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на **G/N**.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на **G/N**.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * k \,\middle|\, k \in N \right\} =$$

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на **G/N**.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \left\{ g * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * h' * n * h * m \,\middle|\, n, m \in N \right\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \left\{ g * h * k \,\middle|\, k \in N \right\} = g * h * N.$$

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \Big\{ g * n \,\Big|\, n \in N \Big\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на **G/N**.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить равенство $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$.

Согласно (8), с одной стороны $\psi(g * h) = g * h * N$.

С другой стороны, $\psi(g) * \psi(h) = g * N * h * N =$

$$= \Big\{ g * n * h * m \,\Big|\, n, m \in N \Big\} = \Big\{ g * h * h' * n * h * m \,\Big|\, n, m \in N \Big\} =$$

$$= \left\{ g * h * \underbrace{n^h * m}_{k \in N} \,\middle|\, n, m \in N \right\} = \Big\{ g * h * k \,\Big|\, k \in N \Big\} = g * h * N.$$

Следовательно, $\psi(g * h) = \psi(g) * \psi(h)$. Теорема доказана.

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на **$\mathbf{G/N}$**.

Гомоморфизм ψ называется **естественным гомоморфизмом** группы G на фактор-группу G/N.

IV.5. Естественный гомоморфизм

Теорема 16. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то отображение*

$$\psi(g) = g * N = \left\{ g * n \,\middle|\, n \in N \right\} \tag{8}$$

является гомоморфизмом группы G на **$\mathbf{G/N}$**.

Гомоморфизм ψ называется **естественным гомоморфизмом** группы G на фактор-группу G/N.

Оказывается, что фактор-группами исчерпывается, с точностью до изоморфизма, множество всех гомоморфных образов группы G.

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство.

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция.

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция. Для этого необходимо убедиться в том, что образ смежного класса $x * Ker(f)$ не зависит от выбора элемента x (называемого представителем этого класса).

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция. Для этого необходимо убедиться в том, что образ смежного класса $x * Ker(f)$ не зависит от выбора элемента x (называемого представителем этого класса). Итак, пусть $x * \mathrm{Ker}(f) = y * \mathrm{Ker}(f)$. Тогда для некоторого g из $\mathrm{Ker}(f)$

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Докажем сначала, что F — функция. Для этого необходимо убедиться в том, что образ смежного класса $x * Ker(f)$ не зависит от выбора элемента x (называемого представителем этого класса). Итак, пусть $x * \mathrm{Ker}(f) = y * \mathrm{Ker}(f)$. Тогда для некоторого g из $\mathrm{Ker}(f)$ $\quad x * g = y$. Поэтому

$$f(y) = F(y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * g * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * \mathrm{Ker}(f)) = f(x).$$

Однозначность F доказана.

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Надо проверить, что для произвольных x, y из G

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Надо проверить, что для произвольных x, y из G

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * \mathrm{Ker}(f)) * F(y * \mathrm{Ker}(f)).$$

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) =$$

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) =$$

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) = f(x * y) =$$

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) = f(x * y) =$$

$$= f(x) * f(y) =$$

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Теперь проверим, что F — гомоморфизм. Для произвольных x, y из G имеем:

$$F(x * \mathrm{Ker}(f) * y * \mathrm{Ker}(f)) = F(x * y * \mathrm{Ker}(f)) = f(x * y) =$$

$$= f(x) * f(y) = F(x * \mathrm{Ker}(f)) * F(y * \mathrm{Ker}(f)),$$

то есть F — гомоморфизм.

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F, т.е.

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F, т.е.

$$x = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y).$$

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F. Пусть $f(x) = f(y)$.

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F. Пусть $f(x) = f(y)$. Рассмотрим $x'y$. Так как f — гомоморфизм, то, согласно теореме об образе обратного и нейтрального элементов,

$$f(x' * y) = f(x') * f(y) = f(x)' * f(y) = e.$$

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть f — гомоморфизм группы G на группу H. Тогда H изоморфна $G/\mathrm{Ker}(f)$. Более того, если E — естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Ker}(f)$, то $f = E * F$, где F вводится формулой $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, причем F — изоморфизм.*

Доказательство. Осталось проверить взаимную однозначность гомоморфизма F. Пусть $f(x) = f(y)$. Рассмотрим $x'y$. Так как f — гомоморфизм, то, согласно теореме об образе обратного и нейтрального элементов,

$$f(x' * y) = f(x') * f(y) = f(x)' * f(y) = e.$$

Следовательно, $x' * y$ принадлежит $\mathrm{Ker}(f)$. Таким образом, по критерию совпадения смежных классов, $x * \mathrm{Ker}(f) = y * \mathrm{Ker}(f)$, что и требовалось доказать.

IV.6. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 17 (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть* f — *гомоморфизм группы* G *на группу* H. *Тогда* H *изоморфна* $G/\mathrm{Ker}(f)$. *Более того, если* E — *естественный гомоморфизм группы* G *на* $G/\mathrm{Ker}(f)$, *то* $f = E * F$, *где* F *вводится формулой* $F(g * \mathrm{Ker}(f)) = f(g)$, *причем* F — *изоморфизм.*

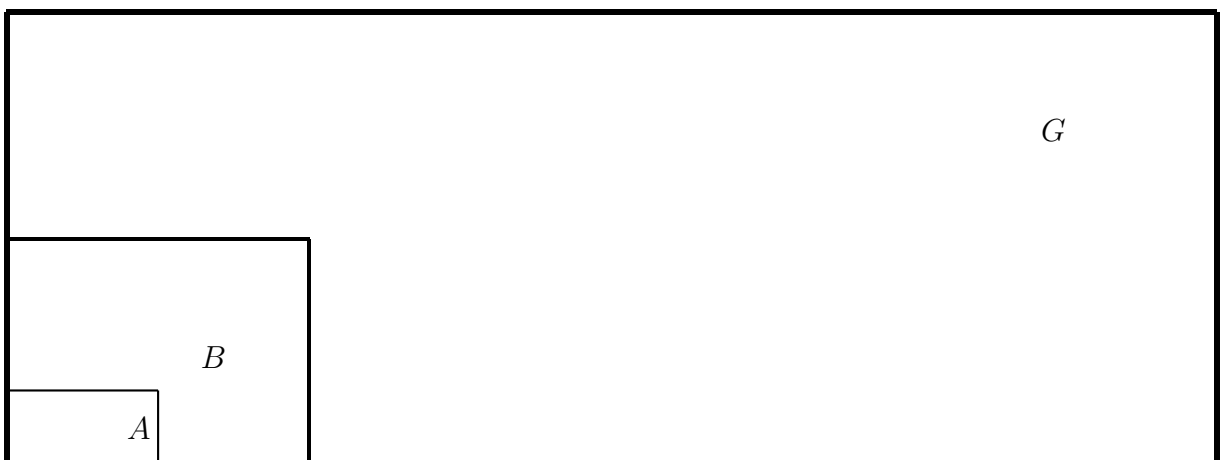
Доказательство. Соотношение $f = E * F$ является просто переформулировкой определения отображения F.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

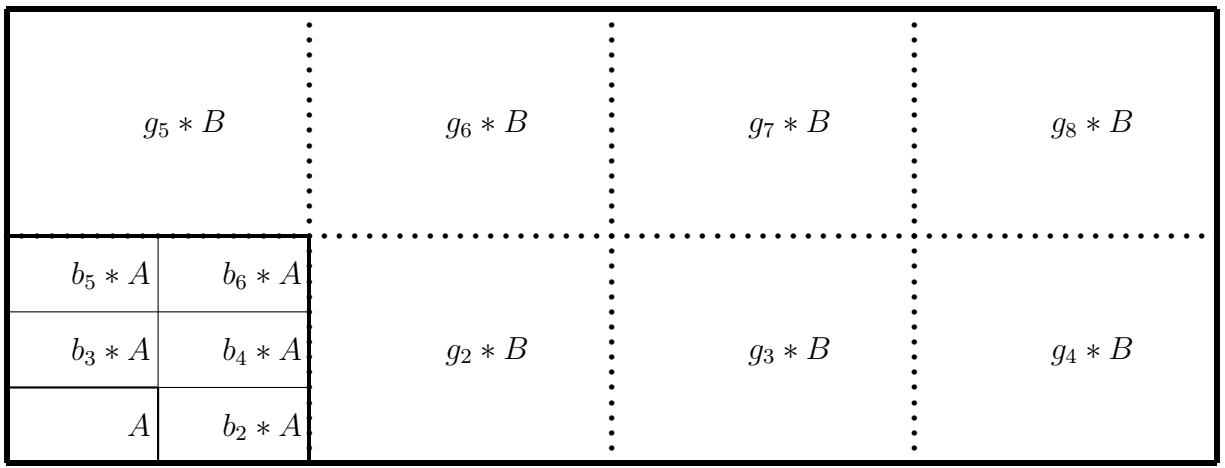
Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*



Прямоугольниками изображены группа G, $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

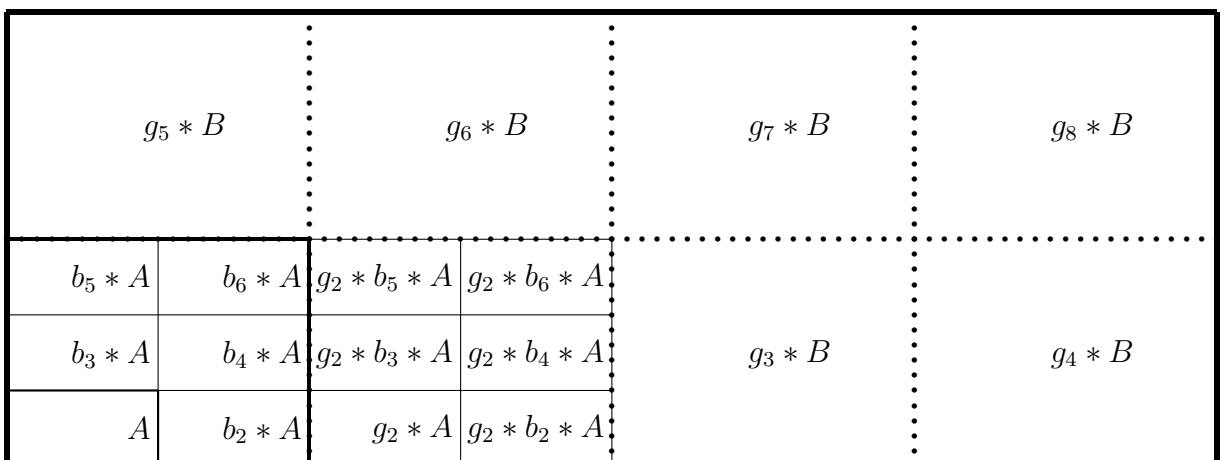
Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B.



Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

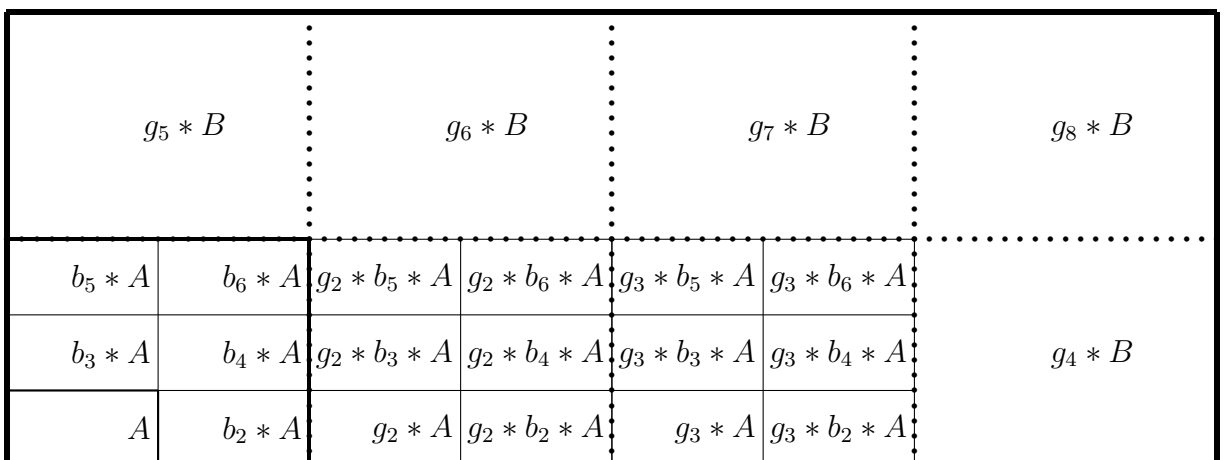
Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*



Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*



Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

$g_5 * B$		$g_6 * B$		$g_7 * B$		$g_8 * B$	
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

$g_5 * b_5 * A$	$g_5 * b_6 * A$	$g_6 * B$		$g_7 * B$		$g_8 * B$	
$g_5 * b_3 * A$	$g_5 * b_4 * A$						
$g_5 * A$	$g_5 * b_2 * A$						
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

$g_5 * b_5 * A$	$g_5 * b_6 * A$	$g_6 * b_5 * A$	$g_6 * b_6 * A$	$g_7 * B$		$g_8 * B$	
$g_5 * b_3 * A$	$g_5 * b_4 * A$	$g_6 * b_3 * A$	$g_6 * b_4 * A$				
$g_5 * A$	$g_5 * b_2 * A$	$g_6 * A$	$g_6 * b_2 * A$				
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

<table>
<tr><td>$g_5 * b_5 * A$</td><td>$g_5 * b_6 * A$</td><td>$g_6 * b_5 * A$</td><td>$g_6 * b_6 * A$</td><td>$g_7 * b_5 * A$</td><td>$g_7 * b_6 * A$</td><td colspan="2" rowspan="2">$g_8 * B$</td></tr>
<tr><td>$g_5 * b_3 * A$</td><td>$g_5 * b_4 * A$</td><td>$g_6 * b_3 * A$</td><td>$g_6 * b_4 * A$</td><td>$g_7 * b_3 * A$</td><td>$g_7 * b_4 * A$</td></tr>
<tr><td>$g_5 * A$</td><td>$g_5 * b_2 * A$</td><td>$g_6 * A$</td><td>$g_6 * b_2 * A$</td><td>$g_7 * A$</td><td>$g_7 * b_2 * A$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>$b_5 * A$</td><td>$b_6 * A$</td><td>$g_2 * b_5 * A$</td><td>$g_2 * b_6 * A$</td><td>$g_3 * b_5 * A$</td><td>$g_3 * b_6 * A$</td><td>$g_4 * b_5 * A$</td><td>$g_4 * b_6 * A$</td></tr>
<tr><td>$b_3 * A$</td><td>$b_4 * A$</td><td>$g_2 * b_3 * A$</td><td>$g_2 * b_4 * A$</td><td>$g_3 * b_3 * A$</td><td>$g_3 * b_4 * A$</td><td>$g_4 * b_3 * A$</td><td>$g_4 * b_4 * A$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>$b_2 * A$</td><td>$g_2 * A$</td><td>$g_2 * b_2 * A$</td><td>$g_3 * A$</td><td>$g_3 * b_2 * A$</td><td>$g_4 * A$</td><td>$g_4 * b_2 * A$</td></tr>
</table>

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

$g_5 * b_5 * A$	$g_5 * b_6 * A$	$g_6 * b_5 * A$	$g_6 * b_6 * A$	$g_7 * b_5 * A$	$g_7 * b_6 * A$	$g_8 * b_5 * A$	$g_8 * b_6 * A$
$g_5 * b_3 * A$	$g_5 * b_4 * A$	$g_6 * b_3 * A$	$g_6 * b_4 * A$	$g_7 * b_3 * A$	$g_7 * b_4 * A$	$g_8 * b_3 * A$	$g_8 * b_4 * A$
$g_5 * A$	$g_5 * b_2 * A$	$g_6 * A$	$g_6 * b_2 * A$	$g_7 * A$	$g_7 * b_2 * A$	$g_8 * A$	$g_8 * b_2 * A$
$b_5 * A$	$b_6 * A$	$g_2 * b_5 * A$	$g_2 * b_6 * A$	$g_3 * b_5 * A$	$g_3 * b_6 * A$	$g_4 * b_5 * A$	$g_4 * b_6 * A$
$b_3 * A$	$b_4 * A$	$g_2 * b_3 * A$	$g_2 * b_4 * A$	$g_3 * b_3 * A$	$g_3 * b_4 * A$	$g_4 * b_3 * A$	$g_4 * b_4 * A$
A	$b_2 * A$	$g_2 * A$	$g_2 * b_2 * A$	$g_3 * A$	$g_3 * b_2 * A$	$g_4 * A$	$g_4 * b_2 * A$

Мы изобразили смежные классы по нормальной подгруппе B группы G. Группу B мы представили как систему смежных классов по нормальной подгруппе A.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство. Обозначим через φ отображение, определенное формулой: для любого g из G положим

$$\varphi\left((g * A) * \left\{ b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B \right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Вернёмся к лекции?

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{ b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B \right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * A * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * A * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_\beta * g_\alpha \in b_\beta * A * b'_\alpha =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_\beta * g_\alpha \in b_\beta * A * b'_\alpha = A \Rightarrow$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{g_\alpha * b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = \left\{g_\beta * b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * A = g_\beta * b_\beta * A \Rightarrow g_\alpha * b_\alpha * a_\alpha = g_\beta * b_\beta * a_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_\beta * g_\alpha \in b_\beta * A * b'_\alpha = A \Rightarrow g_\alpha * A = g_\beta * A.$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Докажем **однозначность** отображения φ:

$$(g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; g_\alpha * A = g_\beta * A.$$

Следовательно, φ — **однозначное** отображение.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Взаимная однозначность отображения φ очевидна:

$$g_\alpha * A = g_\beta * A \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} = (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

Осталось проверить, что φ — **гомоморфизм**, т.е. что $\varphi(X * Y) = \varphi(X) * \varphi(Y)$.

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если* A *и* B *— нормальные подгруппы группы* G*, причем* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$*, то* $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$*, и группа* $(G/A)/(B/A)$ ***изоморфна*** G/B*.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{g_\beta * b_\alpha^{g_\beta} * A^{g_\beta} \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * g_\beta * \left\{b_\alpha^{g_\beta} * A^{g_\beta} \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * g_\beta * \underbrace{\left\{b_\alpha^{g_\beta} * A^{g_\beta} \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}}_{=\left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * A * g_\beta * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A^{g_\beta} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) = g_\alpha * g_\beta * B =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) = g_\alpha * g_\beta * B = g_\alpha * B * g_\beta * B =$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A * g_\beta \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left(g_\alpha * g_\beta * A * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) = g_\alpha * g_\beta * B = g_\alpha * B * g_\beta * B =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) * \varphi\left((g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right).$$

IV.7. Вторая теорема о гомоморфизме

Теорема 18 (вторая теорема о гомоморфизме). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, причем $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, то $(B/A) \trianglelefteq (G/B)$, и группа $(G/A)/(B/A)$* ***изоморфна*** *G/B.*

Доказательство.

$$\varphi\left((g * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) = g * B. \tag{9}$$

$$\varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\} * (g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right) =$$

$$= \varphi\left((g_\alpha * A) * \left\{b_\alpha * A \,\middle|\, b_\alpha \in B\right\}\right) * \varphi\left((g_\beta * A) * \left\{b_\beta * A \,\middle|\, b_\beta \in B\right\}\right).$$

Теорема доказана.

IV.8. Третья теорема о гомоморфизме

Теорема 19 (третья теорема о гомоморфизме). *Если* A — ***нормальная подгруппа*** *группы* B, *которая является подгруппой в* G, *и* H — ***нормальная подгруппа*** *в* G, *то* $(B * H)/(A * H)$ ***изоморфна*** $B/\left(A * (B \cap H)\right)$.

Доказательство.

IV.8. Третья теорема о гомоморфизме

Теорема 19 (третья теорема о гомоморфизме). *Если* A — ***нормальная подгруппа*** *группы* B, *которая является подгруппой в* G, *и* H — ***нормальная подгруппа*** *в* G, *то* $(B * H)/(A * H)$ ***изоморфна*** $B/\left(A * (B \cap H)\right)$.

Доказательство. Положим $f(b * A * H) = b * A * (B \cap H)$. Непосредственной проверкой по определению получаем, что f — **функция**, потом — что это **гомоморфизм**, и, наконец, проверкой его **взаимной однозначности** заканчивается доказательство этой теоремы.

IV.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство.

IV.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Пусть G/N — абелева группа. При естественном гомоморфизме коммутатор, очевидно, переходит в коммутатор.

IV.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Пусть G/N — абелева группа. При естественном гомоморфизме коммутатор, очевидно, переходит в коммутатор. Поэтому, согласно критерию перестановочности элементов, в силу абелевости G/N, получаем, что $[x, y] * N = N$ — единичный элемент фактор-группы G/N. Значит, G' включается в N.

IV.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Осталось проверить, что G/G' — коммутативная группа.

IV.9. Теорема о характеризации коммутанта

Теорема 20 (о характеризации коммутанта). *Коммутант G' группы G является минимальной такой нормальной подгруппой группы G, для которой G/G' — **абелева** (то есть **коммутативная**) группа.*

Доказательство. Осталось проверить, что G/G' — коммутативная группа.

Так как в фактор-группе все коммутаторы — единичные, то, по критерию перестановочности элементов, G/G' — абелева группа.

Теорема доказана.

V. Операции алгебры подгрупп

Основными задачами теории групп являются получение информации о группах (т.е. построение моделей групп) и совершенствование аппарата изучения групп.

Для построения моделей групп к настоящему моменту мы можем применять:

V. Операции алгебры подгрупп

Основными задачами теории групп являются получение информации о группах (т.е. построение моделей групп) и совершенствование аппарата изучения групп.

Для построения моделей групп к настоящему моменту мы можем применять: 1) построение **таблицы Кэли** групповой операции (для конечных групп); 2) построение решетки подгрупп (т.е. множества подгрупп с отношением включения одной подгруппы в другую); 3) построение всех (с точностью до изоморфизма) гомоморфных образов (досточно построить все фактор-группы).

V. Операции алгебры подгрупп

Основными задачами теории групп являются получение информации о группах (т.е. построение моделей групп) и совершенствование аппарата изучения групп.

Для построения моделей групп к настоящему моменту мы можем применять: 1) построение **таблицы Кэли** групповой операции (для конечных групп); 2) построение решетки подгрупп (т.е. множества подгрупп с отношением включения одной подгруппы в другую); 3) построение всех (с точностью до изоморфизма) гомоморфных образов (досточно построить все фактор-группы).

В данном разделе для развития исследовательского аппарата теории групп применим **стратегию перехода от изучения отдельного объекта с исследованию системы объектов**. Рассмотрим **операции** на множестве подгрупп.

V.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой*[1] *группы G.*

Доказательство.

[1] Точнее, носителем подгруппы.

V.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

V.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow$$

V.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ \\ x \in B, \\ \\ \end{cases} \Rightarrow$$

V.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow$$

V.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A, \\ x' \in A, \end{cases} \Rightarrow$$

V.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A, \\ x' \in A, \\ x * y \in B, \\ y' \in B \end{cases} \Rightarrow$$

V.1. Пересечение подгрупп

Теорема 21 (о пересечении подгрупп). *Если A и B — подгруппы группы G, то $A \cap B$ является подгруппой группы G.*

Доказательство. Воспользуемся **критерием подгруппы**.

$$\begin{cases} x \in A \cap B, \\ y \in A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A, \\ y \in A, \\ x \in B, \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A, \\ x' \in A, \\ x * y \in B, \\ y' \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x * y \in A \cap B, \\ x' \in A \cap B. \end{cases}$$

V.2. Произведение подгрупп

Определение 19. Произведением подгрупп A *и* B *группы* G *называется множество*

$$A * B = \left\{ a * b \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} a \in A, \\ b \in B. \end{array} \right. \right\} \tag{10}$$

Произведение подгрупп — **не обязательно подгруппа**.

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Произведение подгрупп A и B группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда $A * B = B * A$.*

Много слов естественного языка...

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Вот это уже стоит конспектировать.

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Надо доказать, что

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Надо доказать, что $A * B = B * A$.

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Как доказать, что $A * B = B * A$?

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

Как доказать, что $A * B = B * A$?

i) С помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) свести к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

Как доказать, что $A * B = B * A$?

i) С помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) свести к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Естественно, выбираем второй вариант.

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow (a * b)^{-1} \in A * B \Rightarrow$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если $A \leq G$ и $B \leq G$, то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow (a * b)^{-1} \in A * B \Rightarrow (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \Rightarrow$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если $A \leq G$ и $B \leq G$, то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow (a * b)^{-1} \in A * B \Rightarrow (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a * b = (a_1 * b_1)^{-1} =$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если $A \leq G$ и $B \leq G$, то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow (a * b)^{-1} \in A * B \Rightarrow (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a * b = (a_1 * b_1)^{-1} = b_1^{-1} * a_1^{-1}$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если $A \leq G$ и $B \leq G$, то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow (a * b)^{-1} \in A * B \Rightarrow (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a * b = (a_1 * b_1)^{-1} = \underbrace{b_1^{-1}}_{B} * \underbrace{a_1^{-1}}_{A} \in B * A.$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если $A \leq G$ и $B \leq G$, то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.

$$\begin{cases} a * b \in A * B, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow (a * b)^{-1} \in A * B \Rightarrow (a * b)^{-1} = \underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a * b = (a_1 * b_1)^{-1} = \underbrace{b_1^{-1}}_{B} * \underbrace{a_1^{-1}}_{A} \in B * A.$$

Значит, $A * B \subseteq B * A$.

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$= b * a \in B * A.$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$= \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$\left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$\left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

Но

$$\begin{cases} a^{-1} * b^{-1} \in B * A, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$\left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

Но

$$\begin{cases} a^{-1} * b^{-1} \in B * A, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow \left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} \in A * B.$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если $A \leq G$ и $B \leq G$, то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A * B \leq G$.
Доказано, что $A * B \subseteq B * A$. Покажем, что $B * A \subseteq A * B$.

$$\left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1} * \left(a^{-1}\right)^{-1} = b * a \in B * A.$$

Но

$$\begin{cases} a^{-1} * b^{-1} \in B * A, \\ A * B \leq G \end{cases} \Rightarrow \left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} \in A * B.$$

Следовательно,

$$b * a \in B * A \Rightarrow b * a = \left(a^{-1} * b^{-1}\right)^{-1} \in A * B.$$

Необходимость доказана.

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если $A \leq G$ и $B \leq G$, то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\begin{cases} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{cases} \Rightarrow$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\begin{cases} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a_1 * b_1) * (a_2 * b_2) =$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\begin{cases} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a_1 * b_1) * (a_2 * b_2) = a_1 * (b_1 * a_2) * b_2 =$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a_1 * b_1) * (a_2 * b_2) = a_1 * (b_1 * a_2) * b_2 = a_1 * (a_3 * b_3) * b_2 =$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 * b_1 \in A * B, \\ a_2 * b_2 \in A * B, \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a_1 * b_1) * (a_2 * b_2) = a_1 * (b_1 * a_2) * b_2 = a_1 * (a_3 * b_3) * b_2 =$$

$$= (a_1 * a_3) * (b_3 * b_2) \in A * B.$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} =$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} =$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если $A \leq G$ и $B \leq G$, то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} = \underbrace{b^{-1} * a^{-1}}_{B*A=A*B} =$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если* $A \leq G$ *и* $B \leq G$, *то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} = \underbrace{b^{-1} * a^{-1}}_{B*A=A*B} = a_1 * b_1$$

V.2.1. Теорема о произведении коммутирующих подгрупп

Теорема 22. *Если $A \leq G$ и $B \leq G$, то*

$$A * B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A * B = B * A. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $A * B = B * A$. Докажем, что $A * B \leq G$. Естественно применить **критерий подгруппы.**

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; (a * b)^{-1} = \underbrace{b^{-1} * a^{-1}}_{B*A=A*B} = a_1 * b_1 \in A * B.$$

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23. *Пусть A — подгруппа группы G, B — подгруппа группы A. Тогда множество $A * B$, равное, по определению, $\left\{a * b \,\middle|\, (a \in A)\&(b \in B)\right\}$, совпадает с A.*

Много слов естественного языка...

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что в условиях этой теоремы $A * B = B * A$ (см. доказательство теоремы).

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

$$a \in A \;\Rightarrow$$

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

$$a \in A \;\Rightarrow\; a = a * e \in A * B,$$

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

$$a \in A \;\Rightarrow\; a = a * e \in A * B,$$

т.е. $A \subseteq A * B$.

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Доказали, что $A \subseteq A * B$. Наконец,

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow$$

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Доказали, что $A \subseteq A * B$. Наконец,

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; a * \underbrace{b}_{B \subseteq A} \in A,$$

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Доказали, что $A \subseteq A * B$. Наконец,

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; a * \underbrace{b}_{B \subseteq A} \in A,$$

откуда $A * B \subseteq A$.

V.2.2. Теорема о произведении инцидентных подгрупп

Теорема 23.

$$B \leq A \leq G \;\Rightarrow\; A * B = A \leq G. \tag{12}$$

Доказательство. Надо доказать совпадение двух множеств: A и $A * B$.

Доказали, что $A \subseteq A * B$. Наконец,

$$a * b \in A * B \;\Rightarrow\; a * \underbrace{b}_{B \subseteq A} \in A,$$

откуда $A * B \subseteq A$.

Итак, $A * B = A \leq G$, теорема доказана.

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Пусть* ***произведение*** *подгрупп A и B группы G является подгруппой. Тогда представление любого элемента g из $A * B$ в виде $g = a * b$, где $a \in A$, $b \in B$, будет* ***однозначным*** *если и только если $A \cap B = \{e\}$.*

Много слов естественного языка...

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G, \quad B \leq G \quad$ *и* $\quad A * B \leq G$, *то*

$$g = \overbrace{\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B}}^{\text{однозначно}} \Leftrightarrow A \cap B = \{e\}. \tag{13}$$

Все равно пока много слов естественного языка...

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \leq G, \quad B \leq G \quad$ *и* $\quad A * B \leq G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow \; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости. Пусть представление элемента в виде $a * b$ является однозначным.

Как доказать, что $A \cap B = \{e\}$?

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow \; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости. Пусть представление элемента в виде $a * b$ является однозначным.

Как доказать, что $A \cap B = \{e\}$?

Естественно взять произвольный элемент из пересечения и показать, что этот элемент — нейтральный.

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow \; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ \\ \\ \end{cases} \Rightarrow$$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow \; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow \; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow$$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow \; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ \end{cases}$$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow \; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ \end{cases}$$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow \; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ e = g. \end{cases}$$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \Leftrightarrow \; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство необходимости.

$$\begin{cases} g \in A \cap B, \\ g = \underbrace{g}_{A} * \underbrace{e}_{B} = \underbrace{e}_{A} * \underbrace{g}_{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = e, \\ e = g. \end{cases}$$

Необходимость доказана.

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \underbrace{a_2' * a_1}_{A} = \underbrace{b_2 * b_1'}_{B} \;\Rightarrow$$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \underbrace{a_2' * a_1}_{A} = \underbrace{b_2 * b_1'}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_2' * a_1 = e, \\ b_2 * b_2' = e. \end{cases} \;\Rightarrow$$

V.2.3. Теорема об однозначности разложения элемента

Теорема 24. *Если* $A \le G, \quad B \le G \quad$ *и* $\quad A * B \le G$, *то*

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1}_{A} * \underbrace{b_1}_{B} = \underbrace{a_2}_{A} * \underbrace{b_2}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases} \right)}_{\text{однозначность разложения}} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \{e\}. \quad (14)$$

Доказательство достаточности. Пусть

$$g \in A \cap B \;\Rightarrow\; g = e.$$

$$g = a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \;\Rightarrow\; \underbrace{a_2' * a_1}_{A} = \underbrace{b_2 * b_1'}_{B} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_2' * a_1 = e, \\ b_2 * b_2' = e. \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Теорема доказана.

V.3. Прямое произведение подгрупп

Теорема об однозначности разложения элемента позволяет выделить важный случай произведения подгрупп. Можно предложить две изоморфные, но не равные конструкции: **внутреннее прямое произведение подгрупп** и **внешнее прямое произведение групп**.

V.3.1. Внутреннее прямое произведение

Определение 20. *Пусть* A *и* B — *подгруппы группы* G, *причем* $A \cap B = \{e\}$ *и для любых* $a \in A$, $b \in B$ *выполняется равенство* $a * b = b * a$. *Тогда произведение* $A * B$ *подгрупп* A *и* B *называется* **(внутренним) прямым произведением** *и обозначается как* $A \times B$.

Рассмотрим пример?

V.3.1. Внутреннее прямое произведение

Определение 20. *Пусть A и B — подгруппы группы G, причем $A \cap B = \{e\}$ и для любых $a \in A$, $b \in B$ выполняется равенство $a * b = b * a$. Тогда произведение $A * B$ подгрупп A и B называется* **(внутренним) прямым произведением** *и обозначается как $A \times B$.*

Теорема 25 (о внутреннем прямом произведении подгрупп). *Внутреннее прямое произведение подгрупп A и B группы G является группой, причем представление элемента из $A * B$ в виде $a * b$ определяется* ***однозначно***.

Доказательство.

V.3.1. Внутреннее прямое произведение

Определение 20. *Пусть A и B — подгруппы группы G, причем $A \cap B = \{e\}$ и для любых $a \in A$, $b \in B$ выполняется равенство $a * b = b * a$. Тогда произведение $A * B$ подгрупп A и B называется* **(внутренним) прямым произведением** *и обозначается как $A \times B$.*

Теорема 25 (о внутреннем прямом произведении подгрупп). *Внутреннее прямое произведение подгрупп A и B группы G является группой, причем представление элемента из $A * B$ в виде $a * b$ определяется* ***однозначно***.

Доказательство. Это очевидное следствие **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** и **теоремы об однозначности разложения элемента.**

V.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп

Теорема 26 (о прямом произведении нормальных подгрупп). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение групп A и B является* ***прямым произведением****.*

Доказательство.

V.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп

Теорема 26 (о прямом произведении нормальных подгрупп). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение групп A и B является* ***прямым произведением****.*

Доказательство. По **критерию нормальности подгруппы** имеем, что $[A, B] \leq [A, G] \leq A$ и $[A, B] \leq [G, B] \leq B$, откуда

V.3.2. Теорема о прямом произведении нормальных подгрупп

Теорема 26 (о прямом произведении нормальных подгрупп). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение групп A и B является* ***прямым произведением****.*

Доказательство. По **критерию нормальности подгруппы** имеем, что $[A, B] \leq [A, G] \leq A$ и $[A, B] \leq [G, B] \leq B$, откуда $[A, B] \leq A \cap B = \{e\}$, что и требовалось доказать.

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство.

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) =$$

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) =$$

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) = \big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\big) =$$

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) = \big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\big) =$$

$$= (a_1, b_1) * (a_2 \bullet a_3,\ b_2 \circ b_3) =$$

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) = \big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\big) =$$

$$= (a_1, b_1) * (a_2 \bullet a_3,\ b_2 \circ b_3) = (a_1, b_1) * \big((a_2, b_2) * (a_3, b_3)\big).$$

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Проверим **ассоциативность**:

$$\big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) = (a_1 \bullet a_2,\ b_1 \circ b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= \big((a_1 \bullet a_2) \bullet a_2,\ (b_1 \circ b_2) \circ b_2\big) = \big(a_1 \bullet (a_2 \bullet a_2),\ b_1 \circ (b_2 \circ b_2)\big) =$$

$$= (a_1, b_1) * (a_2 \bullet a_3,\ b_2 \circ b_3) = (a_1, b_1) * \big((a_2, b_2) * (a_3, b_3)\big).$$

Ассоциативность доказана.

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. **Нейтральным элементом** является, очевидно,

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. **Нейтральным элементом** является, очевидно,
$(e_A,\ e_B)$, где e_A — нейтральный элемент группы A, e_B — нейтральный элемент группы B.

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Наконец, к элементу $(a,\ b)$ **обратным** является упорядоченная пара

$$(a,\ b)' =$$

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Доказательство. Наконец, к элементу $(a,\ b)$ **обратным** является упорядоченная пара

$$(a,\ b)' = (a',\ b')\,.$$

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Теорема доказана.

V.3.3. Внешнее прямое произведение

Теорема 27 (о внешнем прямом произведении групп). *Пусть A и B — группы с групповыми операциями $\bullet$ и, соответственно, $\circ$. Тогда декартово произведение $A \times B$ является группой относительно операции $*$, где*

$$(a, b) * (c, d) = (a \bullet c,\ b \circ d). \tag{15}$$

Определение 21. *Пусть A и B — группы. Тогда декартово произведение $A \times B$ называется* **(внешним) прямым произведением** *групп A и B.*

V.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство.

V.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. В силу **теоремы об однозначности разложения элемента** отображение ψ, заданное формулой

$$\psi(a * b) = (a,\ b)\,,\ \text{где}\ \begin{cases} a \in A, \\ b \in B \end{cases} \tag{16}$$

является **взаимно однозначным**.

V.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\big) =$$

V.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\big) = \psi\big(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\big) =$$

V.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\big) = \psi\big(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\big) = \big(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\big) =$$

V.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\big((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\big) = \psi\big(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\big) = \big(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\big) =$$

$$= \big(a_1,\ b_1\big) * \big(a_2,\ b_2\big) =$$

V.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\left((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\right) = \psi\left(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\right) = \left(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\right) =$$

$$= \left(a_1,\ b_1\right) * \left(a_2,\ b_2\right) = \psi\left(a_1 * b_1\right) * \psi\left(a_2 * b_2\right).$$

V.3.4. Теорема об изоморфности внешнего и внутреннего произведений

Теорема 28 (**об изоморфности внешнего и внутреннего произведений**). *Если A и B — нормальные подгруппы группы G, и $A \cap B = \{e\}$, то произведение $A * B$ подгрупп A и B* ***изоморфно*** *$A \times B$ — внешнему прямому произведению подгрупп A и B.*

Доказательство. Наконец, по **определению внутреннего произведения**

$$\psi\left((a_1 * b_1) * (a_2 * b_2)\right) = \psi\left(a_1 * a_2 * b_1 * b_2\right) = \left(a_1 * a_2,\ b_1 * b_2\right) =$$

$$= \left(a_1,\ b_1\right) * \left(a_2,\ b_2\right) = \psi\left(a_1 * b_1\right) * \psi\left(a_2 * b_2\right).$$

Теорема доказана.

V.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство.

V.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство. В силу **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** достаточно проверить, что $A * B = B * A$.

V.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b =$$

V.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b =$$

V.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b =$$

V.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \ \Rightarrow$$

V.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B *— такие подгруппы группы* G*, что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$*. Тогда* $A * B \leq G$*.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \;\Rightarrow\; A * B = B * A.$$

V.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если* A *и* B — *такие подгруппы группы* G, *что, во-первых,* $A \cap B = \{e\}$ *и, во-вторых,* $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$. *Тогда* $A * B \leq G$.

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \;\Rightarrow\; A * B = B * A.$$

В силу **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** получаем, что $A * B$ — подгруппа группы G. Теорема доказана.

V.4. Полупрямое произведение подгрупп

Теорема 29 (о полупрямом произведении подгрупп). *Если A и B — такие подгруппы группы G, что, во-первых, $A \cap B = \{e\}$ и, во-вторых, $A \trianglelefteq \langle A, B\rangle$. Тогда $A * B \leq G$.*

Доказательство.

$$a * b = b * b' * a * b = b * a^b = b * a_1 \;\Rightarrow\; A * B = B * A.$$

В силу **теоремы о произведении коммутирующих подгрупп** получаем, что $A * B$ — подгруппа группы G. Теорема доказана.

Определение 22. *Произведение подгрупп A и B группы G называется* **полупрямым**, *если $A \trianglelefteq G$ и $A \cap B = \{e\}$. Полупрямое произведение обозначается как $A \leftthreetimes B$.*

Рассмотрим пример?

VI. Абелевы группы

Рассмотрим группы с коммутативной групповой операцией.

VI.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

VI.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

VI.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

– **порядок конечной группы**, т.е. количество элементов в **конечной группе**;

VI.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

– **порядок конечной группы**, т.е. количество элементов в **конечной группе**;

– минимальное число **порождающих группы**;

VI.1. Циклические группы

Для формирования понятийного аппарата теории групп естественно применить **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**. Для выделения «экстремальных случаев» следует определить характеристики группы.

Можно выделить такие характеристики как

– **порядок конечной группы**, т.е. количество элементов в **конечной группе**;

– минимальное число **порождающих группы**;

– **период группы**, т.е. максимум **порядков элементов группы** и др.

VI.1.1. Определение циклической группы

Определение 23. *Группа G называется* **циклической**, *если для некоторого элемента g из G имеем*

$$G = \left\{ g^n,\ (g')^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ g^n,\ \left(g^{-1}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство.

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} =$$

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H}$$

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

Но k — наименьшее *положительное* число со свойством $a^k \in H$. Значит,

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

Но k — наименьшее *положительное* число со свойством $a^k \in H$. Значит, $r = 0$.

VI.1.2. Теорема о подгруппах циклической группы

Теорема 30 (о подгруппах циклической группы). *Любая подгруппа* ***циклической группы*** *является циклической группой.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$ и $H \leq G$.

Возьмем минимальное такое число k, что $a^k \in H$. Пусть $a^m \in H$. Тогда $a^{|m|} \in H$. Поэтому можно считать, что $m > 0$.

Разделим m на k с остатком: $m = ks + r$, где $r \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ k-1\}$. Имеем

$$a^r = a^{m-ks} = \underbrace{a^m}_{H} * \underbrace{\left((a')^k\right)^s}_{H} \in H.$$

Но k — наименьшее *положительное* число со свойством $a^k \in H$. Значит, $r = 0$.

Следовательно, m делится нацело на k, т.е. все элементы из H являются стеренями элемента a^k. Теорема доказана.

VI.2. Конечнопорожденные абелевы группы

Теорема 31 (о строении конечнопорожденной абел. группы). *Любая* ***абелева*** *группа с конечным числом* ***порождающих элементов*** *представима в виде прямого произведения* ***циклических групп***.

VII. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп

Какие **гомоморфизмы групп** **наиболее перспективны для изучения**?

VII. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп

Какие **гомоморфизмы групп наиболее перспективны для изучения**?

Стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций позволяет выделить случай, когда гомоморфизм отображает группу G на себя. Такие гомоморфизмы называются **эндоморфизмами**.

Эндоморфизмы, которые являются изоморфизмами, называются **автоморфизмами**.

VII. Эндоморфизмы и автоморфизмы групп

Какие **гомоморфизмы групп наиболее перспективны для изучения**?

Стратегия приоритетного изучения экстремальных ситуаций позволяет выделить случай, когда гомоморфизм отображает группу G на себя. Такие гомоморфизмы называются **эндоморфизмами**.

Эндоморфизмы, которые являются изоморфизмами, называются **автоморфизмами**.

Как результат применения **стратегии построения модели** можно интерпретировать исследования гомоморфизмов в определенные классы групп. Такие гомоморфизмы называют **представлениями** групп. В теории групп особую роль играют **подстановочные представления** групп, т.е. гомоморфизм группы в группу подстановок, т.е. **группу перестановок элементов некоторого множества** Ω.

VIII. Представления

Под **представлением группы** понимают гомоморфизм группы в некоторый фиксированный класс групп.

VIII.1. Подстановочные представления

Определение 24. Подстановочным представлением *группы* G *называется гомоморфизм группы* G *в* ***группу перестановок (подстановок)*** Σ_n.

VIII.1.1. Регулярное подстановочное представление

Определение 24. Подстановочным представлением *группы* G *называется гомоморфизм группы* G *в* ***группу перестановок (подстановок)*** Σ_n.

Определение 25. ***Подстановочное представление*** F *группы* G *в* ***группу перестановок (подстановок)*** Σ_n *множества* Ω *называется* **регулярным**, *если*

$$\forall \omega \in \Omega \; \exists g \in G \quad F[g](\omega) \neq \omega. \tag{17}$$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство.

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Взаимная однозначность функции $F[g]$:

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Взаимная однозначность функции $F[g]$:

$$x * H = y * H \;\Leftrightarrow$$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Взаимная однозначность функции $F[g]$:

$$x * H = y * H \;\Leftrightarrow\; g * x * H = g * y * H \;\Leftrightarrow$$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Взаимная однозначность функции $F[g]$:

$$x * H = y * H \;\Leftrightarrow\; g * x * H = g * y * H \;\Leftrightarrow\; F[g](x) = F[g](y).$$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$ $F[g * h](x) =$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$ $F[g * h](x) = (g * h) * x * H =$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$ $F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) =$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$ $F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) = F[g]\,(h * x * H) =$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$
$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) = F[g]\,(h * x * H) =$
$= F[g]\,(F[h](x)) =$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. F является **гомоморфизмом**: если $\{g,\ h\} \subseteq G$
$F[g * h](x) = (g * h) * x * H = g * (h * x * H) = F[g]\,(h * x * H) =$
$= F[g]\,(F[h](x)) = F[g] \circ F[h](x).$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем ядро гомоморфизма F:

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:
$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:

$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow\quad \exists h \in H \quad x * h = g * x \;\Leftrightarrow$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:

$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow\quad \exists h \in H \quad x * h = g * x \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\quad \exists h \in H \quad h = x' * g * x =$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Найдем **ядро гомоморфизма** F:
$x * H = F[g](x) = g * x * H \;\Leftrightarrow\quad \exists h \in H \quad x * h = g * x \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\quad \exists h \in H \quad h = x' * g * x = g^x.$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Итак, $g \in \operatorname{Ker} F \;\Leftrightarrow\; \forall x \in G \quad g^x \in H$.

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Итак, $g \in \operatorname{Ker} F \;\Leftrightarrow\; \forall x \in G \quad g^x \in H$. Следовательно, $\operatorname{Ker} F \subseteq H$.

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Осталось показать, что если N — такая нормальная подгруппа группы G, что $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H$, то $\operatorname{Ker} F = N$.

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. Осталось показать, что если N — такая нормальная подгруппа группы G, что $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H$, то $\operatorname{Ker} F = N$. Пусть $g \in N$.

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) =$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H =$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** $F[g]$ *на множестве* $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$*:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H \subseteq x * N * H =$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G.$
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H \subseteq x * N * H = x * H.$

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Доказательство. $\operatorname{Ker} F \subseteq N \subseteq H, \quad g \in N \trianglelefteq G$.
$F[g](x) = g * x * H = x * x' * g * x * H \subseteq x * N * H = x * H$. Значит, $g \in \operatorname{Ker} F$.

VIII.1.2. Теорема о регулярном подстановочном представлении по подгруппе

Теорема 32 (о регулярном подстановочном представлении по *Если G — группа, $H \leq G$, то функция F, каждому элементу g из G сопоставляющая* ***перестановку*** *$F[g]$ на множестве $\Omega = \left\{ x * H \,\middle|\, x \in G \right\}$:*

$$F[g](x * H) = g * x * H, \tag{18}$$

является ***регулярным подстановочным представлением*** *группы G. Ядром гомоморфизма F является максимальная нормальная в G подгруппа группы H.*

Теорема доказана.

Рассмотреть пример?

VIII.2. Операторные и матричные представления

Определение 26. Операторным представлением *группы G называется гомоморфизм группы G в группу* ***невырожденных*** *(т.е. с нулевым* ***ядром****) линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство U с групповой операцией* ***«композиция (суперпозиция) функций»***.

VIII.2. Операторные и матричные представления

Определение 26. Операторным представлением *группы G называется гомоморфизм группы G в группу* ***невырожденных*** *(т.е. с нулевым* ***ядром****) линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство U с групповой операцией* ***«композиция (суперпозиция) функций»****.*

Определение 27. Матричным представлением *группы G называется гомоморфизм группы G в группу $GL_n(F)$* ***невырожденных матриц*** *размерности $n \times n$ с коэффициентами из поля F с групповой операцией* ***«умножение матриц»****.*

VIII.2. Операторные и матричные представления

Переход от операторного представления к матричному осуществляется с помощью выбора **базиса** в пространстве U и использования **матрицы линейного оператора**.

VIII.2. Операторные и матричные представления

Переход от операторного представления к матричному осуществляется с помощью выбора **базиса** в пространстве U и использования **матрицы линейного оператора**.

Если $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ — **операторное представление**, $\mathbf{Б}$ — **базис** линейного пространства U, то **матричное представление** $\mathcal{A}_M$ определено формулой: для любого $g \in G$

$$\mathcal{A}_M(g) = (\mathcal{A}[g])_{\mathbf{Б}},$$

где $X_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{X}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

VIII.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 28. ***Операторное представление*** $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

VIII.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 28. ***Операторное представление*** $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

VIII.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 28. *Операторное представление* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

Как следует из рассмотренной ниже **теоремы Машке**, для операторного представления в группу $\operatorname{Aut} U$ **невырожденных линейных операторов** линейного пространства над полем $\mathcal{C}$ комплексных чисел неприводимость равносильна отсутствию в U собственных (т.е. отличных от U и от нулевого подпространства) $\mathcal{A}[G]$-инвариантных подпространств. Под $\mathcal{A}[G]$-инвариантным подпространством понимается, естественно,

VIII.2.1. Приводимые и неприводимые представления

Определение 28. *Операторное представление* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **приводимым**, *если* U *представимо в виде* $U = V \oplus W$, *где* ненулевые *подпространства* V *и* W *являются* $\mathcal{A}[g]$*-инвариантными для любого* $g \in G$. *В противном случае представление* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$ *называется* **неприводимым**.

Как следует из рассмотренной ниже **теоремы Машке**, для операторного представления в группу $\operatorname{Aut} U$ **невырожденных линейных операторов** линейного пространства над полем $\mathcal{C}$ комплексных чисел неприводимость равносильна отсутствию в U собственных (т.е. отличных от U и от нулевого подпространства) $\mathcal{A}[G]$-инвариантных подпространств. Под $\mathcal{A}[G]$-инвариантным подпространством понимается, естественно, подпространство, являющееся
$\mathcal{A}[g]$-инвариантным для любого $g \in G$.

VIII.2.2. Теорема Машке

Теорема 33 (Машке). *Справедливы следующие утверждения:*
1) всякое ***операторное представление*** *над полем* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений группы* G *над полем* $\mathbb{C}$*;*
2) если $\mathcal{A}$ *—* ***матричное представление*** *группы* G *над* $\mathbb{C}$ *и*
$\exists k \in \mathbb{N}\ \forall g \in G \quad \mathcal{A}(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k\times k}(g) & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{B}_{m\times k}(g) & \mathbf{C}_{m\times m}(g) \end{pmatrix}$,
то существует невырожденная матрица $\mathbf{T}$*, что*
$\mathbf{T}^{-1}\mathcal{A}(g)\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k\times k}(g) & \mathbf{0}_{m\times m} \\ \mathbf{B}_{m\times k}(g) & \mathbf{C}_{m\times m}(g) \end{pmatrix}$;
3) если $\mathcal{A} : G \to \operatorname{Aut} U$ *— операторное представление группы* G *в группу* ***невырожденных операторов*** *линейного пространства* U*.* $V \leq U$*, причем для любого* $g \in G$ *подпространство* V *—* $\mathcal{A}[g]$***-инвариантное****, то существует такое* $\mathcal{A}[g]$***-инвариантное*** *подпространство* W*, что* $U = V \oplus W$*.*

VIII.2.3. Лемма Шура

Лемма 3 (Шур). *Пусть* $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$, $\mathcal{B}: G \to \operatorname{Aut} V$ — *неприводимые* ***операторные представления*** *группы* G *в линейные пространства* U *и* V *над полем* F. *Если* $\hat{P}: U \to V$ — *такой линейный оператор, что*

$$\forall g \in G \quad \mathcal{A}[g] \circ \hat{P} = \hat{P} \circ \mathcal{A}[g], \tag{19}$$

то либо $\hat{P}$ — *нулевой оператор, либо* $\operatorname{Ker} \hat{P} = \{\mathbf{0}_U\}$.

VIII.2.4. Эквивалентные представления

«Одинаковость» представлений понимается в теории групп следующим образом.

VIII.2.4. Эквивалентные представления

Определение 29. *Пусть U и V — линейные пространства над полем F и G — группа.* ***Операторные представления*** $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$, *и* $\mathcal{B}: G \to \operatorname{Aut} V$ *называются* **эквивалентными**, *если существует такой изоморфизм (т.е.* ***невырожденный линейный оператор****) $\hat{T}$ линейного пространства U на линейное пространство V, что*

$$\forall g \in G \; \forall u \in U \; \left(\hat{T}\left(\mathcal{A}[g](u)\right) = \mathcal{B}[g]\left(\hat{T}(u)\right)\right). \tag{20}$$

VIII.2.4. Эквивалентные представления

Определение 30. ***Матричные представления*** $\mathcal{A}: G \to GL_n(F)$, *и* $\mathcal{B}: G \to GL_n(F)$ *называются* **эквивалентными**, *если существует такая матрица* $\mathbf{T}$, *что*

$$\forall g \in G \quad \mathcal{B}(g) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathcal{A}(g) \cdot \mathbf{T}. \tag{21}$$

VIII.2.4. Эквивалентные представления

В силу **теоремы об изоморфности линейного пространства операторов и линейного пространства матриц** **операторные представления** $\mathcal{A}: G \to \operatorname{Aut} U$, и $\mathcal{B}: G \to \operatorname{Aut} V$ являются эквивалентными тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие матричные представления, т.е. матричные представления, полученные следующим образом: если $\mathbf{Б}$ — базис линейного пространства U, $\mathbf{В}$ — базис линейного пространства V, то матричные представления $\mathcal{A}_M$ и $\mathcal{B}_M$ определены формулой: для любого $g \in G$

$$\mathcal{A}_M(g) = (\mathcal{A}[g])_{\mathbf{Б}}\,, \quad \mathcal{B}_M(g) = (\mathcal{B}[g])_{\mathbf{В}}\,,$$

где $X_{\mathbf{Б}}$ — **матрица оператора** $\hat{X}$ в базисе $\mathbf{Б}$.

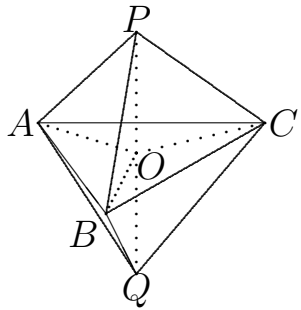
IX. Задание групп образующими и определяющими отношениями

Рассмотрим еще один типовой способ задания группы.

IX. Задание групп образующими и определяющими отношениями

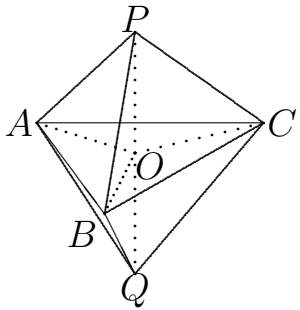
Теорема 34 (Дик). *Если группа* $G = \left\{ I \,\middle|\, V(I) \right\}$ *задается системой порождающих* I *и некоторой системой определяющих соотношений* $V(I)$, *а группа* $H = \left\{ I \,\middle|\, W(I) \right\}$ *задается системой порождающих* I *и некоторой системой определяющих соотношений* $W(I)$, *причем* $V(I) \subseteq W(I)$, *то* H *есть гомоморфный образ группы* G, *т.е. существует такая нормальная подгруппа* N *группы* G, *что* $H \simeq G/N$.

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



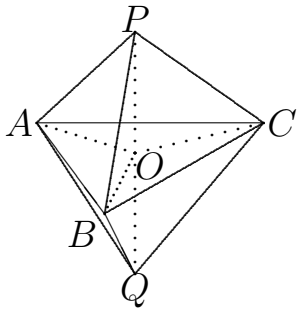
Решение.

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



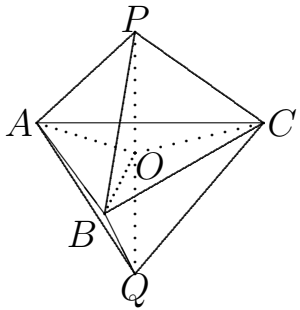
Решение. Как задать симметрию?

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение. Каждую симметрию a, b, c, p, q, r зададим, указывая образы вершин диедра.

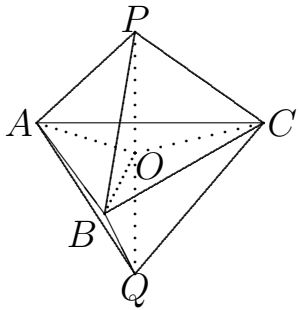
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q

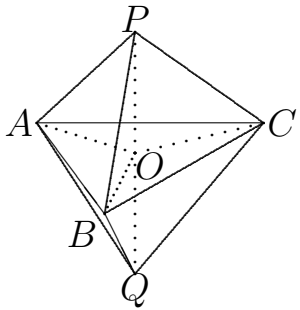
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q

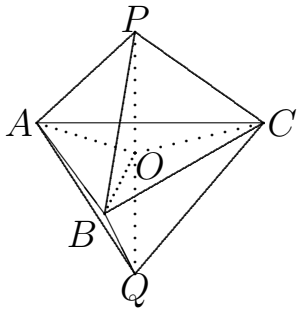
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q

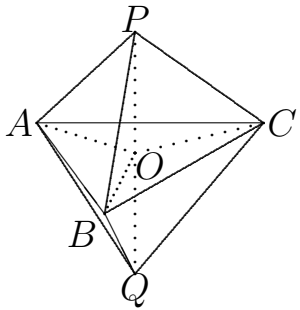
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P

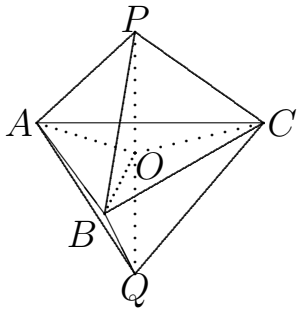
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P

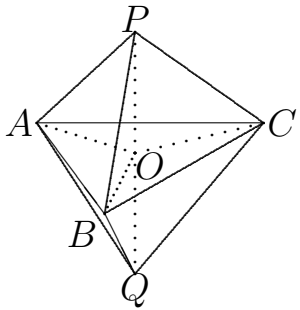
Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



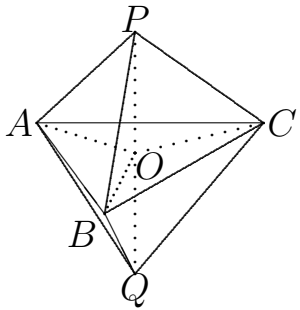
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	**A**	B	C	P	Q
$b(x)$	**B**	C	A	P	Q
$b(b(x))$					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



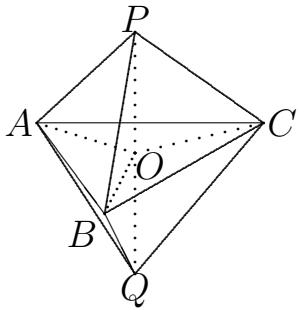
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



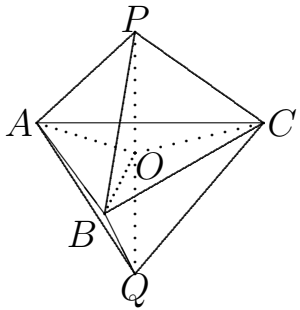
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



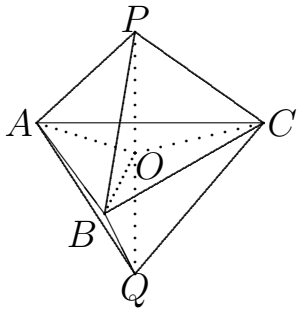
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C				

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



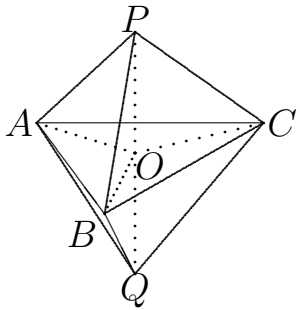
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C				

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



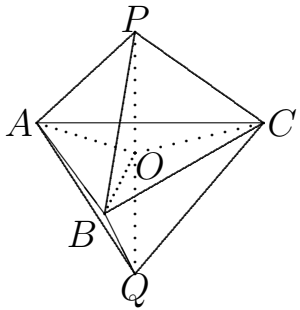
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C				

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



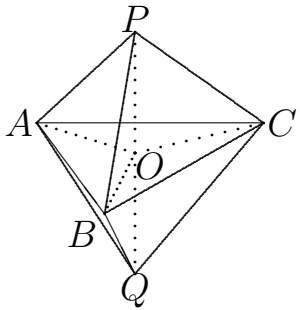
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C				

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



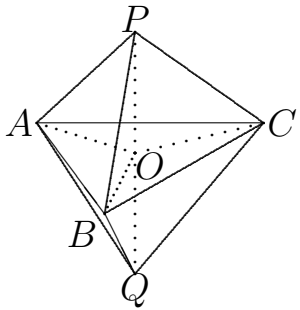
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	**A**	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	**B**	C	P	Q
$b(x)$	B	**C**	A	P	Q
$b(b(x))$	C	**A**			

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



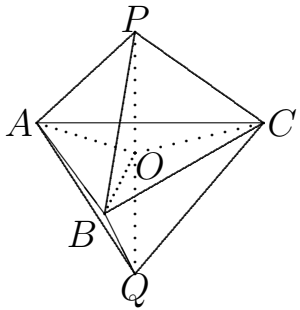
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C	A			

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



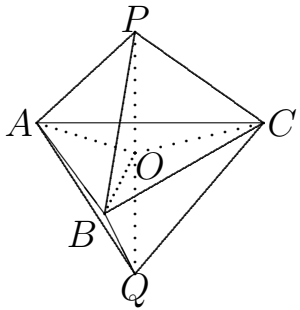
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C	A			

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



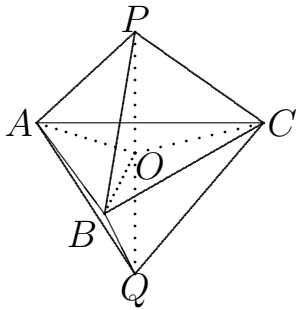
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C	A			

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



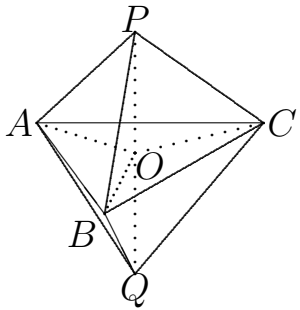
Решение.

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	C	A	B		

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

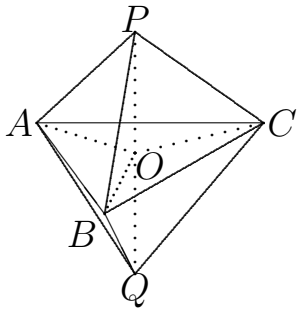
	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	**C**	**A**	**B**	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b					
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	**C**	**A**	**B**		

Значит, $b * b =$

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение.

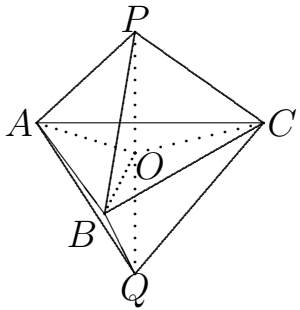
	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	**C**	**A**	**B**	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c				
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

x	A	B	C	P	Q
$b(x)$	B	C	A	P	Q
$b(b(x))$	**C**	**A**	**B**		

Значит, $b * b = c$

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

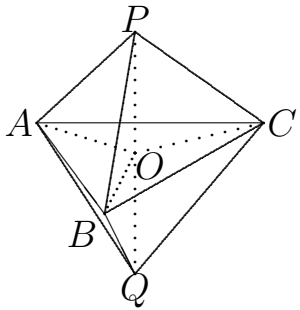


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c				
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

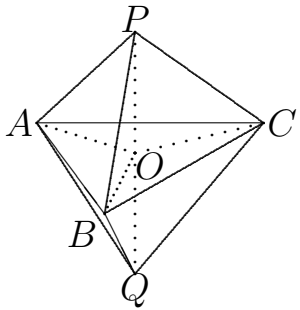


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a			
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

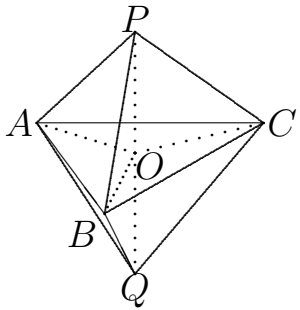


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q		
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

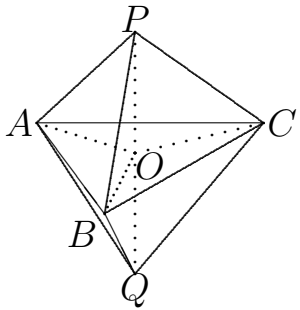


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

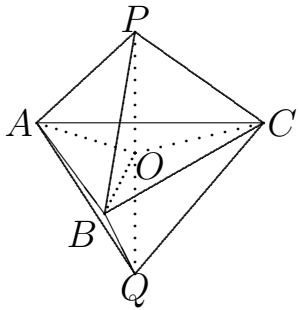


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c					
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

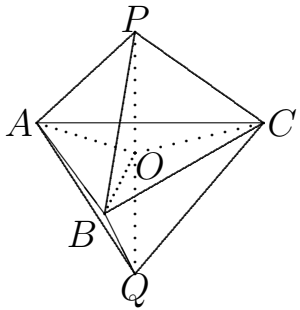


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p					
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

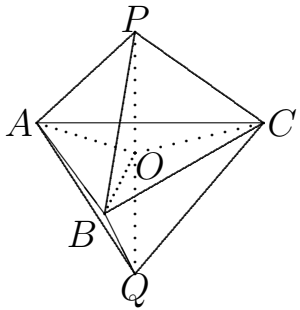


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q					
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.

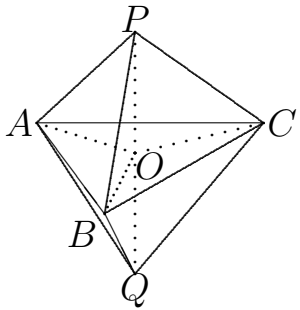


Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r					

Пример 1. *Построить* ***таблицу Кэли*** *для группы* D_6 *симметрий диедра. На рисунке изображен диедр:* $AB = BC = AC$, $PA = PB = PC = QA = QB = QC$.



Решение. Продолжая в том же духе, получаем

	A	B	C	P	Q
a	A	B	C	P	Q
b	B	C	A	P	Q
c	C	A	B	P	Q
p	B	A	C	Q	P
q	A	C	B	Q	P
r	C	B	A	Q	P

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Вернёмся к лекции или **рассмотреть пример группы перестановок**.

Обратите внимание **на пример.**

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots;n\}$ *является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение.

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ *является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»:

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций* — ***перестановок элементов*** — *множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ *является группой относительно операции* ***композиции (суперпозиции) функций***.

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций* — ***перестановок элементов*** — *множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots;n\}$ *является группой относительно операции* ***композиции (суперпозиции) функций***.

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\big((f \circ g) \circ h\big)\,(x) =$$

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций* — ***перестановок элементов*** — *множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ *является группой относительно операции* ***композиции (суперпозиции) функций***.

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\big((f \circ g) \circ h\big)\,(x) = h\,((f \circ g)(x)) =$$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots;n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = h\left((f \circ g)(x)\right) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) =$$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots;n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = h\left((f \circ g)(x)\right) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) =$$

$$= (g \circ h)\big(f(x)\big) =$$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots;n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = h\left((f \circ g)(x)\right) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) =$$

$$= (g \circ h)\big(f(x)\big) = \Big(f \circ (g \circ h)\Big)(x).$$

Пример 2. *Докажите, что множество Σ_n всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots;n\}$ является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Докажем **ассоциативность** операции $\circ$ «композиция функций»: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. По **определению композиции функций**

$$\Big((f \circ g) \circ h\Big)(x) = h\left((f \circ g)(x)\right) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) =$$

$$= (g \circ h)\big(f(x)\big) = \Big(f \circ (g \circ h)\Big)(x).$$

Ассоциативность операции $\circ$ доказана.

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций* — ***перестановок элементов*** — *множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ *является группой относительно операции* ***композиции (суперпозиции) функций***.

Решение. **Нейтральным элементом** является тождественное отображение Ω на себя: $e(k) =$

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots; n\}$ *является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. **Нейтральным элементом** является тождественное отображение Ω на себя: $e(k) = k$.

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots;n\}$ *является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Перестановкой, **обратной** к перестановке f является функция, **обратная** к f.

Пример 2. *Докажите, что множество* Σ_n *всех взаимно однозначных функций — **перестановок элементов** — множества* $\Omega = \{1;\ 2;\ \ldots;n\}$ *является группой относительно операции **композиции (суперпозиции) функций**.*

Решение. Доказано, что Σ_n — группа.

Вернёмся к лекции или **к выбору перспективных направлений исследования гоморфизмов**, или **рассмотреть пример группы перестановок**.

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение.

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Как зададим элементы из Σ_3?

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Элементы из Σ_3 — это

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Элементы из Σ_3 — это *функции*.

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Элементы из Σ_3 — это *функции*.

Из **стандартных способов задания функции** основимся на задании

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Элементы из Σ_3 — это *функции*.

Из **стандартных способов задания функции** основимся на задании таблицей значений.

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$			

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$			

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$			

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$		1	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$		1	2

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$			

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$			3

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$			
$f_5(x)$			

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1		
$f_5(x)$		2	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$		2	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	$f_2\left(f_1(1)\right)$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	**2**	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	$f_2\left(f_1(1)\right)$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	**2**	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	$f_2(\mathbf{2})$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	$f_2(\mathbf{2})$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	**1**	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	$f_2(\mathbf{2})$		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	**1**	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	**1**	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1		

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	$f_2\left(f_1(2)\right)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	**3**	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	$f_2\left(f_1(2)\right)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	**2**	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	**3**	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	$f_2(3)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	$f_2(3)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	**2**
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	$f_2(3)$	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	**2**
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	**2**	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	2	

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	2	$f_2\left(f_1(3)\right)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	**1**
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	2	$f_2\left(f_1(3)\right)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	**3**
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	**1**
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	2	$f_2(1)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	2	$f_2(1)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	**3**	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	2	$f_2(1)$

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	**1**	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	**3**	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	**3**
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	2	3

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		?			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	2	3

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		f_0			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

x	1	2	3
$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2\left(f_1(x)\right)$	1	2	3

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1		f_0			
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3					
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4					
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5					

Продолжая этот процесс, получаем

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

x	1	2	3
$f_0(x)$	1	2	3
$f_1(x)$	2	3	1
$f_2(x)$	3	1	2
$f_3(x)$	2	1	3
$f_4(x)$	1	3	2
$f_5(x)$	3	2	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

Пример 3. *Постройте* ***таблицу Кэли*** *для* ***группы перестановок*** Σ_3.

Решение. Построим таблицу Кэли для Σ_3:

Список элементов группы Σ_3				
x	1	2	3	
$f_0(x)$	1	2	3	единица группы
$f_1(x)$	2	3	1	порядка 3, это q^{-1}
$f_2(x)$	3	1	2	порядка 3, это p^{-1}
$f_3(x)$	2	1	3	инволюция
$f_4(x)$	1	3	2	инволюция
$f_5(x)$	3	2	1	инволюция

Таблица Кэли (Σ_3)						
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

Вернуться к определению группы или **рассмотреть циклическую группу**.

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение.

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$\begin{cases} m \geq 0, \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g^m * g^n =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$\begin{cases} m \geq 0, \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g^m * g^n = \underbrace{g * \ldots * g}_{m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$\begin{cases} m \geq 0, \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g^m * g^n = \underbrace{g * \ldots * g}_{m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} = \underbrace{g * \ldots * g}_{m+n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$\begin{cases} m \geq 0, \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g^m * g^n = \underbrace{g * \ldots * g}_{m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} = \underbrace{g * \ldots * g}_{m+n} = g^{m+n}.$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = \underbrace{g * \ldots * g}_{n+m} = g^{m+n}.$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} =$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} =$$

$$= (g')^{-n-m} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} =$$

$$= (g')^{-n-m} = (g')^{-(n+m)} =$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. Введем обозначения: $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$. Докажем, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $g^m * g^n = g^{m+n}$.

$$m \geq 0,\ n \geq 0 \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$-n \leq m < 0 < n \ \Rightarrow\ g^m * g^n = g^{m+n}.$$

$$m < 0 < n \leq -m \ \Rightarrow\ g^m * g^n = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} =$$

$$= \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} * \underbrace{g' * \ldots * g'}_{n} * \underbrace{g * \ldots * g}_{n} = \underbrace{g' * \ldots * g'}_{-m-n} =$$

$$= (g')^{-n-m} = (g')^{-(n+m)} = g^{m+n}.$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Итак, мы доказали, что если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^m * g^n = g^{m+n}.$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) =$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} =$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} = g^{k+(m+n)} =$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} = g^{k+(m+n)} =$$

$$= g^{(k+m)+n} =$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} = g^{k+(m+n)} =$$

$$= g^{(k+m)+n} = g^{k+m} * g^n =$$

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. Докажем **ассоциативность** умножения в группе H:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} = g^{k+(m+n)} =$$

$$= g^{(k+m)+n} = g^{k+m} * g^n = \left(g^k * g^m\right) * g^n.$$

Пример 4. *Пусть G — группа с групповой операцией $*$ и $g \in G$. Докажите, что множество $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ является группой. Группа H называется* **циклической, порожденной** *g, $H = \langle g \rangle$.*

Решение. **Нейтральным элементом** группы H является нейтральный элемент $e = g^0$ группы G.

Пример 4. *Пусть* G *— группа с групповой операцией* $*$ *и* $g \in G$. *Докажите, что множество* $H = \left\{ g^k, (g')^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cap \{0\} \right\}$ *является группой. Группа* H *называется* **циклической, порожденной** g, $H = \langle g \rangle$.

Решение. **Обратным** к элементу g^k является элемент $(g')^k = g^{-k}$.

Вернёмся к лекции или **к выбору перспективных направлений исследования гоморфизмов?** Или рассмотреть **пример конечной циклической группы?**

Пример 5. *Пусть* G — *группа и для* $g \in G$ *существует натуральное число* α *такое, что* $g^\alpha = e$. *Докажите, что* $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ *является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой***.

Решение. Этот пример можно рассматривать как уточнение результата **примера 4.**

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$.

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z}\ \ \forall n \in \mathbb{Z}\ \ g^m * g^n = g^{m+n}$.

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z}\ \ \forall n \in \mathbb{Z}\ \ g^m * g^n = g^{m+n}$.

В рассматриваемом случае $g^k = g^m$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число β, что

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z}\ \ \forall n \in \mathbb{Z}\ \ g^m * g^n = g^{m+n}$.

В рассматриваемом случае $g^k = g^m$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число β, что $k - m = \alpha\beta$.

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z}\quad \forall n \in \mathbb{Z}\qquad g^m * g^n = g^{m+n}$.

В рассматриваемом случае $g^k = g^m$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число β, что $k - m = \alpha\beta$.

Кроме того, $(g^k)' = g^{-k} = g^{\alpha-k}$.

Пример 5. *Пусть G — группа и для $g \in G$ существует натуральное число α такое, что $g^\alpha = e$. Докажите, что $H = \{e,\ g,\ \ldots,\ g^{\alpha-1}\}$ является группой. Эта группа называется* ***конечной циклической группой****.*

Решение. Будем считать, что α минимальное натуральное число такое, что $g^\alpha = e$. Как **мы уже доказали**, если $g' = g^{-1}$, $(g')^k = g^{-k}$, то $\forall m \in \mathbb{Z}\ \ \forall n \in \mathbb{Z}\ \ g^m * g^n = g^{m+n}$.

В рассматриваемом случае $g^k = g^m$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число β, что $k - m = \alpha\beta$.

Кроме того, $(g^k)' = g^{-k} = g^{\alpha-k}$.

Остается сослаться на **пример 4.**

Вернёмся к лекции или **к выбору перспективных направлений исследования гоморфизмов?**

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. **Ясно**, что в этой группе нейтральным элементом является a.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. **Ясно**, что в этой группе нейтральным элементом является a.

Значит, a является элементом любой подгруппы группы D_6.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6.

Пусть $b \in H_1$. Тогда $b^2 \in H_1$, откуда

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6.

Пусть $b \in H_1$. Тогда $b^2 \in H_1$, откуда $c \in H_1$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6.

Пусть $b \in H_1$. Тогда $b^2 \in H_1$, откуда $c \in H_1$.

При этом $c^2 = b \in H_1$ и $cb = bc = a \in H_1$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппу $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппу $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$.

Перебирая элементы, не лежащие в H_1, получаем подгруппы $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппы $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппы $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

По **теореме Лагранжа** порядок подгруппы делит нацело порядок группы.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппы $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

По **теореме Лагранжа** порядок подгруппы делит нацело порядок группы.

Значит, собственные подгруппы группы D_6 имеют порядок 2 или 3.

Пример 6. Найдите все подгруппы группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Минимальной подгруппой является $H_0 = \{a\}$, а максимальной — подгруппа D_6. Получили подгруппы $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$, $H_2 = \{a, p\}$, $H_3 = \{a, q\}$, $H_4 = \{a, r\}$.

По **теореме Лагранжа** порядок подгруппы делит нацело порядок группы.

Значит, собственные подгруппы группы D_6 имеют порядок 2 или 3.

Следовательно, других подгрупп в группе D_6 нет.

Вернёмся к лекции?

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ $\quad b * H_1 \quad c * H_1,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	**b**	**c**	**a**	q	r	p
c	**c**	**a**	**b**	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ $\quad b * H_1 \quad c * H_1,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	**b**	**c**	**a**	q	r	p
c	**c**	**a**	**b**	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	**p**	**r**	**q**	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	**p**	**r**	**q**	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	**p**	**r**	**q**	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} \quad q * H_1 \quad r * H_1,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	**p**	**r**	**q**	a	c	b
q	**q**	**p**	**r**	b	a	c
r	**r**	**q**	**p**	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} \quad q * H_1 \quad r * H_1,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	**p**	**r**	**q**	a	c	b
q	**q**	**p**	**r**	b	a	c
r	**r**	**q**	**p**	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	**a**	b	c	p	q	r
b	**b**	c	a	q	r	p
c	**c**	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	**a**	b	c	p	q	r
b	**b**	c	a	q	r	p
c	**c**	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	**a**	b	c	p	q	r
b	**b**	c	a	q	r	p
c	**c**	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} \quad H_1 * b \quad H_1 * c,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	**b**	**c**	**a**	q	r	p
c	**c**	**a**	**b**	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} \quad H_1 * b \quad H_1 * c,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	**b**	**c**	**a**	q	r	p
c	**c**	**a**	**b**	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} = H_1 * b = H_1 * c,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} = H_1 * b = H_1 * c,$

$H_1 * p =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	**p**	q	r
b	b	c	a	**q**	r	p
c	c	a	b	**r**	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} = H_1 * b = H_1 * c,$

$H_1 * p =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	**p**	q	r
b	b	c	a	**q**	r	p
c	c	a	b	**r**	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} = H_1 * b = H_1 * c,$

$H_1 * p = \{p,\ q,\ r\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	**p**	q	r
b	b	c	a	**q**	r	p
c	c	a	b	**r**	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} = H_1 * b = H_1 * c,$

$H_1 * p = \{p,\ q,\ r\} \quad H_1 * q \quad H_1 * r,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	**p**	**q**	**r**
b	b	c	a	**q**	**r**	**p**
c	c	a	b	**r**	**p**	**q**
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} = H_1 * b = H_1 * c,$

$H_1 * p = \{p,\ q,\ r\} \quad H_1 * q \quad H_1 * r,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	**p**	**q**	**r**
b	b	c	a	**q**	**r**	**p**
c	c	a	b	**r**	**p**	**q**
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$$
$$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$$
$$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} = H_1 * b = H_1 * c,$$
$$H_1 * p = \{p,\ q,\ r\} = H_1 * q = H_1 * r,$$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_1 = \{a,\ b,\ c\} = b * H_1 = c * H_1,$

$p * H_1 = \{p,\ q,\ r\} = q * H_1 = r * H_1,$

$H_1 * a = \{a,\ b,\ c\} = H_1 * b = H_1 * c,$

$H_1 * p = \{p,\ q,\ r\} = H_1 * q = H_1 * r,$

левые и правые смежные классы по подгруппе H_1 совпали!

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = _ * H_2$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 \quad H_2 * a =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 \quad H_2 * a = \{a, p\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * _$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = _ * H_2$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \quad H_2 * b =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \quad H_2 * b = \{b, r\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * _$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 = \{c, r\} = _ * H_2;$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 = \{c, r\} = r * H_2$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 = \{c, r\} = r * H_2 \quad H_2 * c =$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 = \{c, r\} = r * H_2 \quad H_2 * c = \{c, q\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 = \{c, r\} = r * H_2 \neq H_2 * c = \{c, q\}$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 = \{c, r\} = r * H_2 \neq H_2 * c = \{c, q\} = H_2 * _.$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 = \{c, r\} = r * H_2 \neq H_2 * c = \{c, q\} = H_2 * q.$

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 = \{c, r\} = r * H_2 \neq H_2 * c = \{c, q\} = H_2 * q.$

Левые и правые смежные классы по H_2 не совпадают!

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\{a,\ b,\ c\} = a * H_1 = b * H_1 = c * H_1 = H_1 * a = H_1 * b = H_1 * c,$

$\{p,\ q,\ r\} = p * H_1 = q * H_1 = r * H_1 = H_1 * p = H_1 * q = H_1 * r,$

$a * H_2 = \{a, p\} = p * H_2 = H_2 * a = \{a, p\} = H_2 * p,$

$b * H_2 = \{b, q\} = q * H_2 \neq H_2 * b = \{b, r\} = H_2 * r,$

$c * H_2 = \{c, r\} = r * H_2 \neq H_2 * c = \{c, q\} = H_2 * q.$

Левые и правые смежные классы по H_2 не совпадают,
а по H_1 — совпадают!

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

Левые и правые смежные классы по H_2 не совпадают,
а по H_1 — совпадают!

Итак, левые и правые смежные классы могут совпадать, а могут и не совпадать.

Пример 7. Найдите **левые и правые смежные классы** группы $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной данной **таблицей Кэли** по подгруппам $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $H_2 = \{a, p\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

Левые и правые смежные классы по H_2 не совпадают,
а по H_1 — совпадают!

Итак, левые и правые смежные классы могут совпадать, а могут и не совпадать.

Какой из этих случаев наиболее интересен для изучения?

Вернёмся к лекции?

Пример 8. *В группе* D_8 *групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу* b *и к элементу* p. *Найдите* $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q = q^{-1} * b * q =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q = q^{-1} * b * q = q * b * q =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q = q^{-1} * b * q = q * b * q = p * q =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q = q^{-1} * b * q = q * b * q = p * q = c,$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q = q^{-1} * b * q = q * b * q = p * q = c,$$

$$b^r =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q = q^{-1} * b * q = q * b * q = p * q = c,$$

$$b^r = r^{-1} * b * r =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q = q^{-1} * b * q = q * b * q = p * q = c,$$

$$b^r = r^{-1} * b * r = r * b * r =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q = q^{-1} * b * q = q * b * q = p * q = c,$$

$$b^r = r^{-1} * b * r = r * b * r = q * r =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$b^a = a^{-1} * b * a = a * b * a = b,$$

$$b^b = b^{-1} * b * b = b,$$

$$b^c = c^{-1} * b * c = b^{-2} * b * b^2 = b^{-1} * b^{-1} * b * b * b = b,$$

$$b^p = p^{-1} * b * p = p * b * p = r * p = c,$$

$$b^q = q^{-1} * b * q = q * b * q = p * q = c,$$

$$b^r = r^{-1} * b * r = r * b * r = q * r = c.$$

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b^a = b^b = b^c = b, \qquad b^p = b^q = b^r = c.$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p =$$

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p = r * b * p =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p = r * b * p = q * p =$$

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p = r * b * p = q * p = b,$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p = r * b * p = q * p = b,$$

$$[p, q] =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p = r * b * p = q * p = b,$$

$$[p, q] = p' * q' * p * q =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p = r * b * p = q * p = b,$$

$$[p, q] = p' * q' * p * q = p * q * p * q =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p = r * b * p = q * p = b,$$

$$[p, q] = p' * q' * p * q = p * q * p * q = c * p * q =$$

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p = r * b * p = q * p = b,$$

$$[p, q] = p' * q' * p * q = p * q * p * q = c * p * q = r * q =$$

Пример 8. *В группе D_8 групповая операция задана таблицей. Найдите все элементы, сопряжённые к элементу b и к элементу p. Найдите $[b, c]$, $[b, p]$, $[p, q]$.*

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$[b, c] = b' * c' * b * c = c * b * b * c = a,$$

$$[b, p] = b' * p' * b * p = c * p * b * p = r * b * p = q * p = b,$$

$$[p, q] = p' * q' * p * q = p * q * p * q = c * p * q = r * q = b.$$

Вернёмся к лекции?

Пример 9. *Пусть* $\mathbb{Z} = \langle\{0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2, \ldots\}, \{+\}\rangle$ — ***аддитивная группа кольца*** *целых чисел,* $K = \left\langle\left\{1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{1}{4},\ 8,\ \frac{1}{8}, \ldots\right\}, \{\cdot\}\right\rangle$. *Покажите, что* ***гомоморфизмом*** *является функция* $f : \mathbb{Z} \to K$, *заданная формулой* $f(x) = 2^x$.

Решение.

Пример 9. *Пусть* $\mathbb{Z} = \langle \{0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2, \ldots\}, \{+\} \rangle$ *— **аддитивная группа кольца** целых чисел,* $K = \left\langle \{1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{1}{4},\ 8,\ \frac{1}{8}, \ldots\}, \{\cdot\} \right\rangle$. *Покажите, что **гомоморфизмом** является функция* $f : \mathbb{Z} \to K$, *заданная формулой* $f(x) = 2^x$.

Решение.

$$f(x + y) =$$

Пример 9. *Пусть* $\mathbb{Z} = \langle \{0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2, \ldots\}, \{+\} \rangle$ — ***аддитивная группа кольца*** *целых чисел,* $K = \left\langle \{1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{1}{4},\ 8,\ \frac{1}{8}, \ldots\}, \{\cdot\} \right\rangle$. *Покажите, что* ***гомоморфизмом*** *является функция* $f : \mathbb{Z} \to K$, *заданная формулой* $f(x) = 2^x$.

Решение.

$$f(x + y) = \qquad\qquad = f(x) \cdot f(y).$$

Пример 9. *Пусть* $\mathbb{Z} = \langle \{0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2, \ldots\}, \{+\} \rangle$ — ***аддитивная группа кольца*** *целых чисел,* $K = \left\langle \{1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{1}{4},\ 8,\ \frac{1}{8}, \ldots\}, \{\cdot\} \right\rangle$. *Покажите, что* ***гомоморфизмом*** *является функция* $f : \mathbb{Z} \to K$, *заданная формулой* $f(x) = 2^x$.

Решение.

$$f(x+y) = 2^{x+y} = \qquad\qquad = f(x) \cdot f(y).$$

Пример 9. *Пусть* $\mathbb{Z} = \langle \{0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2, \ldots\}, \{+\} \rangle$ — ***аддитивная группа кольца*** *целых чисел,* $K = \left\langle \{1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{1}{4},\ 8,\ \frac{1}{8}, \ldots\}, \{\cdot\} \right\rangle$. *Покажите, что* ***гомоморфизмом*** *является функция* $f : \mathbb{Z} \to K$, *заданная формулой* $f(x) = 2^x$.

Решение.

$$f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y).$$

Пример 9. *Пусть* $\mathbb{Z} = \langle \{0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2, \ldots\}, \{+\} \rangle$ — ***аддитивная группа кольца*** *целых чисел,* $K = \left\langle \{1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{1}{4},\ 8,\ \frac{1}{8}, \ldots\}, \{\cdot\} \right\rangle$. *Покажите, что* ***гомоморфизмом*** *является функция* $f : \mathbb{Z} \to K$, *заданная формулой* $f(x) = 2^x$.

Решение.

$$f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y).$$

Значит, f — **гомоморфизм**.

Вернёмся к лекции?

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\},$$

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

$$\mathbb{Z}_{12}/B = \Big\{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big\},$$

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

$$\mathbb{Z}_{12}/B = \Big\{\{0;2;4;6;8;10\};\ \{1;3;5;7;9;11\}\Big\},$$

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

$$\mathbb{Z}_{12}/B = \Big\{\{0;2;4;6;8;10\};\ \{1;3;5;7;9;11\}\Big\},$$

$$(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A) = \Big\{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\}.$$

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

$$\mathbb{Z}_{12}/B = \Big\{\{0;2;4;6;8;10\};\ \{1;3;5;7;9;11\}\Big\},$$

$$(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A) = \Big\{\{\qquad\qquad\qquad\qquad\};\ \{\qquad\qquad\qquad\qquad\}\Big\}.$$

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

$$\mathbb{Z}_{12}/B = \Big\{\{0;2;4;6;8;10\};\ \{1;3;5;7;9;11\}\Big\},$$

$$(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A) = \Big\{\big\{\{0;6\};\{2;8\};\{4;10\}\big\};\ \{\qquad\qquad\qquad\qquad\}\Big\}.$$

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

$$\mathbb{Z}_{12}/B = \Big\{\{0;2;4;6;8;10\};\ \{1;3;5;7;9;11\}\Big\},$$

$$(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A) = \Big\{\big\{\{0;6\};\{2;8\};\{4;10\}\big\};\ \big\{\{1;7\};\{3;9\};\{5;11\}\big\}\Big\}.$$

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

$$\mathbb{Z}_{12}/B = \Big\{\{0;2;4;6;8;10\};\ \{1;3;5;7;9;11\}\Big\},$$

$$(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A) = \Big\{\big\{\{0;6\};\{2;8\};\{4;10\}\big\};\ \big\{\{1;7\};\{3;9\};\{5;11\}\big\}\Big\}.$$

X		
$\varphi(X)$		

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

$$\mathbb{Z}_{12}/B = \Big\{\{0;2;4;6;8;10\};\ \{1;3;5;7;9;11\}\Big\},$$

$$(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A) = \Big\{\big\{\{0;6\};\{2;8\};\{4;10\}\big\};\ \big\{\{1;7\};\{3;9\};\{5;11\}\big\}\Big\}.$$

X	$\big\{\{0;6\};\{2;8\};\{4;10\}\big\}$	$\big\{\{1;7\};\{3;9\};\{5;11\}\big\}$
$\varphi(X)$		

Пример 10. *В группе* $\mathbb{Z}_{12} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ 10;\ 11\}$ *даны подгруппы* $A = \{0;\ 6\}$ *и* $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$. *Найдите* $\mathbb{Z}_{12}/A$, $\mathbb{Z}_{12}/B$, $(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A)$.

Решение.

$$\mathbb{Z}_{12}/A = \Big\{\{0;6\};\ \{1;7\};\ \{2;8\};\ \{3;9\};\ \{4;10\};\ \{5;11\}\Big\},$$

$$\mathbb{Z}_{12}/B = \Big\{\{0;2;4;6;8;10\};\ \{1;3;5;7;9;11\}\Big\},$$

$$(\mathbb{Z}_{12}/A)\,/(B/A) = \Big\{\big\{\{0;6\};\{2;8\};\{4;10\}\big\};\ \big\{\{1;7\};\{3;9\};\{5;11\}\big\}\Big\}.$$

X	$\big\{\{0;6\};\{2;8\};\{4;10\}\big\}$	$\big\{\{1;7\};\{3;9\};\{5;11\}\big\}$
$\varphi(X)$	$\{0;2;4;6;8;10\}$	$\{1;3;5;7;9;11\}$

Вернёмся к лекции?

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a * a, a * p, b * a, b * p, c * a, c * p\}$.

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, b * p, c, c * p\}$.

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, c * p\}$.

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} =$

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} = \{a * a, a * q, p * a, p * q\}$

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} = \{a, q, p, p * q\}$

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} = \{a, q, p, c\}$

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	**a**	b	**c**	**p**	**q**	r
a	**a**	b	**c**	**p**	**q**	r
b	b	c	a	q	r	p
c	**c**	a	**b**	**r**	**p**	q
p	**p**	r	**q**	**a**	**c**	b
q	**q**	p	**r**	**b**	**a**	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} = \{a, q, p, c\}$

Пример 11. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение подгрупп $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, p\}$, а также подгрупп B и $C = \{a, q\}$.

$*$	**a**	b	**c**	**p**	**q**	r
a	**a**	b	**c**	**p**	**q**	r
b	b	c	a	q	r	p
c	**c**	a	**b**	**r**	**p**	q
p	**p**	r	**q**	**a**	**c**	b
q	**q**	p	**r**	**b**	**a**	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Имеем $A * B = \{a, b, c\} * \{a, p\} =$
$= \{a, p, b, q, c, r\}$.

$B * C = \{a, p\} * \{a, q\} = \{a, q, p, c\}$ — не является подгруппой группы D_6.

Вернёмся к лекции?

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{a * q;\ b * q;\ c * q\} * \{a;\ b;\ c\} =$$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	$\mathbf{q}$	r
$\mathbf{a}$	a	b	c	p	$\mathbf{q}$	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$

$= b * \{\mathbf{a} * \mathbf{q};\ b * q;\ c * q\} * \{a;\ b;\ c\} =$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	**a**	b	c	p	**q**	r
a	a	b	c	p	**q**	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	**q**	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$

$= b * \{\mathbf{a} * \mathbf{q};\ b * q;\ c * q\} * \{a;\ b;\ c\} =$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	**a**	b	c	p	**q**	r
a	a	b	c	p	**q**	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	**q**	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{\mathbf{a} * \mathbf{q};\ b * q;\ c * q\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{\mathbf{q} * \mathbf{a};\qquad\qquad\ \} * \{a;\ b;\ c\} =$$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	$\mathbf{q}$	r
a	a	b	c	p	q	r
$\mathbf{b}$	b	c	a	q	$\mathbf{r}$	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{a * q;\ \mathbf{b * q};\ c * q\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{q * a;\qquad\qquad\ \} * \{a;\ b;\ c\} =$$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	$\mathbf{c}$	p	$\mathbf{q}$	r
a	a	b	c	p	q	r
$\mathbf{b}$	b	c	a	q	$\mathbf{r}$	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
$\mathbf{q}$	q	p	$\mathbf{r}$	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{a * q;\ \mathbf{b * q};\ c * q\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{q * a;\qquad\qquad\ \} * \{a;\ b;\ c\} =$$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	$\mathbf{c}$	p	$\mathbf{q}$	r
a	a	b	c	p	q	r
$\mathbf{b}$	b	c	a	q	$\mathbf{r}$	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
$\mathbf{q}$	q	p	$\mathbf{r}$	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$

$= b * \{a * q;\ \mathbf{b} * \mathbf{q};\ c * q\} * \{a;\ b;\ c\} =$

$= b * \{q * a;\ \mathbf{q} * \mathbf{c};\ \ \ \ \ \ \} * \{a;\ b;\ c\} =$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	$\mathbf{q}$	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
$\mathbf{c}$	c	a	b	r	$\mathbf{p}$	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{a * q;\ b * q;\ \mathbf{c * q}\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{q * a;\ q * c;\ \quad\} * \{a;\ b;\ c\} =$$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	**b**	c	p	**q**	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	**p**	q
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	**p**	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{a * q;\ b * q;\ \mathbf{c * q}\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{q * a;\ q * c;\ \quad\} * \{a;\ b;\ c\} =$$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	$\mathbf{b}$	c	p	$\mathbf{q}$	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
$\mathbf{c}$	c	a	b	r	$\mathbf{p}$	q
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
$\mathbf{q}$	q	$\mathbf{p}$	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{a * q;\ b * q;\ \mathbf{c * q}\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{q * a;\ q * c;\ \mathbf{q * b}\} * \{a;\ b;\ c\} =$$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{a * q;\ b * q;\ c * q\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{q * a;\ q * c;\ q * b\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * q * \{a;\ c;\ b\} * \{a;\ b;\ c\} =$$

Пример 12. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти произведение **смежных классов** $b * \{a;\ b;\ c\}$ и $q * \{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $\{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$$b * \{a;\ b;\ c\} * q * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{a * q;\ b * q;\ c * q\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * \{q * a;\ q * c;\ q * b\} * \{a;\ b;\ c\} =$$
$$= b * q * \{a;\ c;\ b\} * \{a;\ b;\ c\} = b * q * \{a;\ c;\ b\}.$$

Вернёмся к лекции?

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:
$a * \{a;\ b;\ c\} =$

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:
$a * \{a;\ b;\ c\} = b * \{a;\ b;\ c\} = c * \{a;\ b;\ c\} = \{a;\ b;\ c\}$,

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:
$a * \{a;\ b;\ c\} = b * \{a;\ b;\ c\} = c * \{a;\ b;\ c\} = \{a;\ b;\ c\}$,
$p * \{a;\ b;\ c\} =$

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:

$a * \{a;\ b;\ c\} = b * \{a;\ b;\ c\} = c * \{a;\ b;\ c\} = \{a;\ b;\ c\}$,

$p * \{a;\ b;\ c\} = q * \{a;\ b;\ c\} = r * \{a;\ b;\ c\} = \{p;\ q;\ r\}$.

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:

$a * \{a;\ b;\ c\} = b * \{a;\ b;\ c\} = c * \{a;\ b;\ c\} = \{a;\ b;\ c\}$,

$p * \{a;\ b;\ c\} = q * \{a;\ b;\ c\} = r * \{a;\ b;\ c\} = \{p;\ q;\ r\}$.

Остается

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:

$a * \{a;\ b;\ c\} = b * \{a;\ b;\ c\} = c * \{a;\ b;\ c\} = \{a;\ b;\ c\}$,

$p * \{a;\ b;\ c\} = q * \{a;\ b;\ c\} = r * \{a;\ b;\ c\} = \{p;\ q;\ r\}$.

Остается задать групповую операцию.

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:

$a * \{a;\ b;\ c\} = b * \{a;\ b;\ c\} = c * \{a;\ b;\ c\} = \{a;\ b;\ c\}$,

$p * \{a;\ b;\ c\} = q * \{a;\ b;\ c\} = r * \{a;\ b;\ c\} = \{p;\ q;\ r\}$.

Остается задать групповую операцию.

Операция — это

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:

$a * \{a;\ b;\ c\} = b * \{a;\ b;\ c\} = c * \{a;\ b;\ c\} = \{a;\ b;\ c\}$,

$p * \{a;\ b;\ c\} = q * \{a;\ b;\ c\} = r * \{a;\ b;\ c\} = \{p;\ q;\ r\}$.

Остается задать групповую операцию.

Операция — это **функция**.

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:

$a * \{a;\ b;\ c\} = b * \{a;\ b;\ c\} = c * \{a;\ b;\ c\} = \{a;\ b;\ c\}$,

$p * \{a;\ b;\ c\} = q * \{a;\ b;\ c\} = r * \{a;\ b;\ c\} = \{p;\ q;\ r\}$.

В данном случае операцию **зададим**

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение. Носитель этой фактор-группы **мы уже находили**:

$a * \{a;\ b;\ c\} = b * \{a;\ b;\ c\} = c * \{a;\ b;\ c\} = \{a;\ b;\ c\}$,

$p * \{a;\ b;\ c\} = q * \{a;\ b;\ c\} = r * \{a;\ b;\ c\} = \{p;\ q;\ r\}$.

В данном случае операцию **зададим таблицей.**

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{a;\ b;\ c\}$		
$\{p;\ q;\ r\}$		

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}\}$		
$\{p;\ q;\ r\}$		

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	**b**	**c**	**a**	q	r	p
c	**c**	**a**	**b**	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}\}$		
$\{p;\ q;\ r\}$		

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	**b**	**c**	**a**	q	r	p
c	**c**	**a**	**b**	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	
$\{p;\ q;\ r\}$		

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{\mathbf{p};\ \mathbf{q};\ \mathbf{r}\}$
$\{\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	
$\{p;\ q;\ r\}$		

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	**p**	**q**	**r**
a	a	b	c	**p**	**q**	**r**
b	b	c	a	**q**	**r**	**p**
c	c	a	b	**r**	**p**	**q**
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{a;\ b;\ c\}$	**{p; q; r}**
{a; b; c}	$\{a;\ b;\ c\}$	
$\{p;\ q;\ r\}$		

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	**p**	**q**	**r**
a	a	b	c	**p**	**q**	**r**
b	b	c	a	**q**	**r**	**p**
c	c	a	b	**r**	**p**	**q**
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{a;\ b;\ c\}$	**{p; q; r}**
{a; b; c}	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{p;\ q;\ r\}$		

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{\mathbf{p};\ \mathbf{q};\ \mathbf{r}\}$		

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	**p**	**r**	**q**	a	c	b
q	**q**	**p**	**r**	b	a	c
r	**r**	**q**	**p**	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{\mathbf{p};\ \mathbf{q};\ \mathbf{r}\}$		

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	**p**	**r**	**q**	a	c	b
q	**q**	**p**	**r**	b	a	c
r	**r**	**q**	**p**	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{$**a**; **b**; **c**$\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{$**p**; **q**; **r**$\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{\mathbf{p};\ \mathbf{q};\ \mathbf{r}\}$
$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{\mathbf{p};\ \mathbf{q};\ \mathbf{r}\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	**p**	**q**	**r**
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	**a**	**c**	**b**
q	q	p	r	**b**	**a**	**c**
r	r	q	p	**c**	**b**	**a**

Решение.

$\circ$	$\{a;\ b;\ c\}$	**{p; q; r}**
$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
{p; q; r}	$\{p;\ q;\ r\}$	

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	**p**	**q**	**r**
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	**a**	**c**	**b**
q	q	p	r	**b**	**a**	**c**
r	r	q	p	**c**	**b**	**a**

Решение.

$\circ$	$\{a;\ b;\ c\}$	**{p; q; r}**
$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
{p; q; r}	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{a;\ b;\ c\}$

Пример 13. В группе $D_6 = \{a, b, c, p, q, r\}$ **симметрий диедра**, рассмотренной в **примере 1**, с групповой операцией, заданной **таблицей Кэли**, найти **фактор-группу** $D_6/\{a;\ b;\ c\}$ по **нормальной подгруппе** $H_1 = \{a;\ b;\ c\}$.

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Решение.

$\circ$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{a;\ b;\ c\}$

Вернёмся к лекции?

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение.

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\quad\}$

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\qquad\}$

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\quad\}$

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	**b**	**c**	**a**	q	r	p
c	**c**	**a**	**b**	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	**a**	**b**	**c**	p	q	r
b	**b**	**c**	**a**	q	r	p
c	**c**	**a**	**b**	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	**p**	**q**	**r**
a	a	b	c	**p**	**q**	**r**
b	b	c	a	**q**	**r**	**p**
c	c	a	b	**r**	**p**	**q**
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	**p**	**q**	**r**
a	a	b	c	**p**	**q**	**r**
b	b	c	a	**q**	**r**	**p**
c	c	a	b	**r**	**p**	**q**
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	**p**	**r**	**q**	a	c	b
q	**q**	**p**	**r**	b	a	c
r	**r**	**q**	**p**	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	**a**	**b**	**c**	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	**p**	**r**	**q**	a	c	b
q	**q**	**p**	**r**	b	a	c
r	**r**	**q**	**p**	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1			
1	1	1	1			
1	1	1	1			

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	**p**	**q**	**r**
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	**a**	**c**	**b**
q	q	p	r	**b**	**a**	**c**
r	r	q	p	**c**	**b**	**a**

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1			
1	1	1	1			
1	1	1	1			

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	**p**	**q**	**r**
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	**a**	**c**	**b**
q	q	p	r	**b**	**a**	**c**
r	r	q	p	**c**	**b**	**a**

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Нетрудно показать, что φ — гомоморфизм. В таблице значений операции $*$ заменим элементы на из образы относительно φ.

	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

Последняя таблица с точностью до дублирования строк и столбцов совпадает с таблицей значений операции $\oplus$.

Значит, φ — это гомоморфизм.

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Фактор-группу **мы нашли** в ходе решения **примера 13.**

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$						

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$						

$\varphi(a) =$

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$						

$\varphi(a) = 0 = \varphi(\ \ )$

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$						

$\varphi(a) = 0 = \varphi(b) = \varphi(\ \ )$.

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$						

$\varphi(a) = 0 = \varphi(b) = \varphi(c)$.

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$					

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$				

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$			

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$			

$\varphi(p) =$

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$			

$\varphi(p) = 1 = \varphi(\ \ )$

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$			

$\varphi(p) = 1 = \varphi(q) = \varphi(\ \ )$.

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$			

$\varphi(p) = 1 = \varphi(q) = \varphi(r)$.

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$		

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$

X	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$E(X)$		

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$

X	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$E(X)$	0	

Пример 14. Рассмотрим **гомоморфизм** φ группы $\mathbf{D_6} = \{a, b, c, p, q, r\}$, с групповой операцией $*$, на группу $\langle\{0;\ 1\},\ \{\oplus\}\rangle$, где φ опредена таблицей

$*$	a	b	c	p	q	r
a	a	b	c	p	q	r
b	b	c	a	q	r	p
c	c	a	b	r	p	q
p	p	r	q	a	c	b
q	q	p	r	b	a	c
r	r	q	p	c	b	a

α	a	b	c	p	q	r	$*$
$\varphi(\alpha)$	0	0	0	1	1	1	$\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Найти **фактор-группу** $D_6/\operatorname{Ker}\varphi$, **F**, **E**.

Решение. $\operatorname{Ker}\varphi = \{a;\ b;\ c\}$.

Функции **F**, **E** зададим таблицами значений:

x	a	b	c	p	q	r
$F(x)$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$	$\{p;\ q;\ r\}$

X	$\{a;\ b;\ c\}$	$\{p;\ q;\ r\}$
$E(X)$	0	1

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)\,/\,(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)\,/\,(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 =$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)\,/\,(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \big\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\}\,; \qquad\qquad \big\}\,,$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \big\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\qquad\qquad \big\},$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.

$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$
$= \left\{ \{0;6;-6;\ldots\};\right.$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.

$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$
$= \left\{ \{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\right.$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.

$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$
$= \left\{ \{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};\right.$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$$
$$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$$
$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \Big\{ \{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};$$
$$\{3;9;-3;\ldots\}; \qquad\qquad \Big\}$$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.

$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$
$= \Big\{ \{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};$
$\{3;9;-3;\ldots\};\ \{4;10;-2;16;\ldots\};\qquad\qquad \Big\}$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.

$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$
$= \left\{ \{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};\right.$
$\left. \{3;9;-3;\ldots\};\ \{4;10;-2;16;\ldots\};\ \{5;11;-1;17;-7;\ldots\} \right\}$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.

$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$
$= \left\{ \{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};\right.$
$\left. \{3;9;-3;\ldots\};\ \{4;10;-2;16;\ldots\};\ \{5;11;-1;17;-7;\ldots\} \right\}$
$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\} =$

Пример 15. *Для аддитивной группы* $\mathbb{Z}$ *целых чисел постройте* $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6$, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)/(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6)$, *где*
$\mathbb{Z}_m = \left\{ m \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{0;\ m;\ -m;\ 2m\ \ -2m;\ \ldots\}.$

Решение.

$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$
$= \left\{ \{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\} \right\},$
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$
$= \left\{ \{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};\right.$
$\left. \{3;9;-3;\ldots\};\ \{4;10;-2;16;\ldots\};\ \{5;11;-1;17;-7;\ldots\} \right\}$
$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\} =$
$= \left\{ \{0;6;-6;12;-12;\ldots\};\ \{3;9;-3;15;-9;\ldots\} \right\},$

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$$
$$= \left\{\{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\}\right\},$$
$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \left\{\{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};\right.$$
$$\left.\{3;9;-3;\ldots\};\ \{4;10;-2;16;\ldots\};\ \{5;11;-1;17;-7;\ldots\}\right\}$$
$$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \left\{\{0;6;-6;12;-12;\ldots\};\ \{3;9;-3;15;-9;\ldots\}\right\},$$
$$(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)\,/\,(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6) =$$

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$$
$$= \left\{\{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\}\right\},$$
$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \left\{\{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};\right.$$
$$\left.\{3;9;-3;\ldots\};\ \{4;10;-2;16;\ldots\};\ \{5;11;-1;17;-7;\ldots\}\right\}$$
$$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \left\{\{0;6;-6;12;-12;\ldots\};\ \{3;9;-3;15;-9;\ldots\}\right\},$$
$$(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)\,/\,(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6) =$$
$$= \left\{\{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\};\ \{1+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6\};\ \{2+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\}\right\}.$$

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$$
$$= \left\{\{\mathbf{0};\mathbf{3};\mathbf{-3};\mathbf{6};\mathbf{-6};\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\}\right\},$$
$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \left\{\{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};\right.$$
$$\left.\{3;9;-3;\ldots\};\ \{4;10;-2;16;\ldots\};\ \{5;11;-1;17;-7;\ldots\}\right\}$$
$$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \left\{\{0;6;-6;12;-12;\ldots\};\ \{3;9;-3;15;-9;\ldots\}\right\},$$
$$(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)\,/\,(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6) =$$
$$= \left\{\{\mathbb{Z}_6;\ \mathbf{3}+\mathbb{Z}_6\};\ \{1+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6\};\ \{2+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\}\right\}.$$

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ \mathbf{1}+\mathbb{Z}_3;\ 2+\mathbb{Z}_3\} =$$
$$= \left\{\{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{\mathbf{1};\mathbf{4};\mathbf{-2};\mathbf{7};\mathbf{-5};\ldots\};\ \{2;5;-1;8;-4;\ldots\}\right\},$$
$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \left\{\{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};\right.$$
$$\left.\{3;9;-3;\ldots\};\ \{4;10;-2;16;\ldots\};\ \{5;11;-1;17;-7;\ldots\}\right\}$$
$$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \left\{\{0;6;-6;12;-12;\ldots\};\ \{3;9;-3;15;-9;\ldots\}\right\},$$
$$(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)\,/\,(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6) =$$
$$= \left\{\{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\};\ \{\mathbf{1}+\mathbb{Z}_6;\ \mathbf{4}+\mathbb{Z}_6\};\ \{2+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\}\right\}.$$

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{Z}_3;\ 1+\mathbb{Z}_3;\ \mathbf{2+\mathbb{Z}_3}\} =$$
$$= \left\{\{0;3;-3;6;-6;\ldots\};\ \{1;4;-2;7;-5;\ldots\};\ \mathbf{\{2;5;-1;8;-4;\ldots\}}\right\},$$
$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 1+\mathbb{Z}_6;\ 2+\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \{\{0;6;-6;\ldots\};\ \{1;7;-5;\ldots\};\ \{2;8;-4;14;-10;\ldots\};$$
$$\{3;9;-3;\ldots\};\ \{4;10;-2;16;\ldots\};\ \{5;11;-1;17;-7;\ldots\}\}$$
$$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\} =$$
$$= \left\{\{0;6;-6;12;-12;\ldots\};\ \{3;9;-3;15;-9;\ldots\}\right\},$$
$$(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_6)\,/\,(\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_6) =$$
$$= \left\{\{\mathbb{Z}_6;\ 3+\mathbb{Z}_6\};\ \{1+\mathbb{Z}_6;\ 4+\mathbb{Z}_6\};\ \mathbf{\{2+\mathbb{Z}_6;\ 5+\mathbb{Z}_6\}}\right\}.$$

Вернёмся к лекции?

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение.

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Два варианта получить легко:

$$A = \{e\} \times A = A \times \{e\}.$$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e =$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$a =$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$a = a^3 * a^4$,

Действительно,

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$a = a^3 * a^4$,

Действительно,

$$a^3 * a^4 =$$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$a = a^3 * a^4$,

Действительно,

$$a^3 * a^4 = a^7 =$$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$a = a^3 * a^4$,

Действительно,

$$a^3 * a^4 = a^7 = a^6 * a =$$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$a = a^3 * a^4$,

Действительно,

$$a^3 * a^4 = a^7 = a^6 * a = e * a =$$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$a = a^3 * a^4$,

Действительно,

$$a^3 * a^4 = a^7 = a^6 * a = e * a = a.$$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$a = a^3 * a^4, \quad a^2 = e * a^2,$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$$a = a^3 * a^4, \quad a^2 = e * a^2, \quad a^3 = a^3 * e,$$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$$a = a^3 * a^4, \quad a^2 = e * a^2, \quad a^3 = a^3 * e, \quad a^4 = e * a^4,$$

Пример 16. *Циклическую группу* $A = \langle e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \rangle$ *представить в виде прямого произведения подгрупп.*

Решение. Нетривиальный вариант:

$$A = \left\{e, a^3\right\} \times \left\{e, a^2, a^4\right\}.$$

Проверим: $e = e * e$,

$$a = a^3 * a^4, \quad a^2 = e * a^2, \quad a^3 = a^3 * e, \quad a^4 = e * a^4, \quad a^5 = a^3 * a^2.$$

Вернёмся к лекции или рассмотрим **другой пример?**

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение.

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, \quad \}.$$

Если $a \in B$, то

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, \quad \}.$$

Если $a \in B$, то

$$\begin{cases} a^2 \in B, \\ \end{cases}$$

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, \quad \}.$$

Если $a \in B$, то

$$\begin{cases} a^2 \in B, \\ a^3 \in B \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, \quad \}.$$

Если $a \in B$, то

$$\begin{cases} a^2 \in B, \\ a^3 \in B \end{cases} \Rightarrow B = A.$$

Плохо.

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, \quad \}.$$

Если $a^2 \in B$, то $B = \{e, a^2\}$.

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Если $a^2 \in B$, то $B = \{e, a^2\}$.

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Если $a^3 \in C$, то

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Если $a^3 \in C$, то

$$\begin{cases} (a^3)^2 & \in B, \\ (a^3)^3 & \in B \end{cases}$$

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Если $a^3 \in C$, то

$$\begin{cases} \left(a^3\right)^2 = a^2 \in B, \\ \left(a^3\right)^3 \qquad\qquad\qquad \in B \end{cases}$$

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Если $a^3 \in C$, то

$$\begin{cases} \left(a^3\right)^2 = a^2 \in B, \\ \left(a^3\right)^3 = a^9 \qquad\qquad \in B \end{cases}$$

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Если $a^3 \in C$, то

$$\begin{cases} \left(a^3\right)^2 = a^2 \in B, \\ \left(a^3\right)^3 = a^9 = \left(a^4\right)^2 \cdot a \quad \in B \end{cases}$$

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Если $a^3 \in C$, то

$$\begin{cases} (a^3)^2 = a^2 \in B, \\ (a^3)^3 = a^9 = (a^4)^2 \cdot a = a \in B \end{cases}$$

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Если $a^3 \in C$, то

$$\begin{cases} (a^3)^2 = a^2 \in B, \\ (a^3)^3 = a^9 = (a^4)^2 \cdot a = a \in B \end{cases} \Rightarrow B = A.$$

Уже было.

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Итак, это список *всех* подгрупп группы A.

Пример 17. *Покажите, что* ***циклическая группа*** $A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}$ *не раскладывается в* ***прямое произведение*** *собственных подгрупп (т.е. подгрупп, отличных от* A *и от* $\{1\}$*).*

Решение. Найдём все подгруппы группы A:

$$E = \{e\}, \quad A = \{e;\ a;\ a^2;\ a^3\}, \quad B = \{e, a^2\}.$$

Итак, это список *всех* подгрупп группы A.

Следовательно, собственная подгруппа только одна. Значит, A не раскладывается в прямую сумму собственных подгрупп.

Вернёмся к лекции?

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение.

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение. Мы **уже выяснили**, что в **группе диедра** D_6 только одна **нормальная подгруппа**:

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение. Мы **уже выяснили**, что в **группе диедра** D_6 только одна **нормальная подгруппа**: $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$.

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение. Мы **уже выяснили**, что в **группе диедра** D_6 только одна **нормальная подгруппа**: $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$.

Поэтому

$$D_8 = \{a,\ b,\ c\} \leftthreetimes \{\qquad\} =$$

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение. Мы **уже выяснили**, что в **группе диедра** D_6 только одна **нормальная подгруппа**: $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$.

Поэтому

$$D_8 = \{a,\ b,\ c\} \leftthreetimes \{a,\ p\} =$$

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение. Мы **уже выяснили**, что в **группе диедра** D_6 только одна **нормальная подгруппа**: $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$.

Поэтому

$$D_8 = \{a,\ b,\ c\} \leftthreetimes \{a,\ p\} = \{a,\ b,\ c\} \leftthreetimes \{a,\ q\} =$$

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение. Мы **уже выяснили**, что в **группе диедра** D_6 только одна **нормальная подгруппа**: $H_1 = \{a,\ b,\ c\}$.

Поэтому

$$D_8 = \{a,\ b,\ c\} \leftthreetimes \{a,\ p\} = \{a,\ b,\ c\} \leftthreetimes \{a,\ q\} = \{a,\ b,\ c\} \leftthreetimes \{a,\ r\}.$$

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение. Мы **уже выяснили**, что в **группе кватернионов** Q_8 все собственные подгруппы являются циклическими: $A_1 = \{1,\ -1\}$,

$A_2 = \{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $A_3 = \{1,\ j,\ -1,\ -j\}$, $A_4 = \{1,\ k,\ -1,\ -k\}$.

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение. Мы **уже выяснили**, что в **группе кватернионов** Q_8 все собственные подгруппы являются циклическими: $A_1 = \{1,\ -1\}$,

$$A_2 = \{1,\ i,\ -1,\ -i\}, \quad A_3 = \{1,\ j,\ -1,\ -j\}, \quad A_4 = \{1,\ k,\ -1,\ -k\}.$$

Все эти подгруппы включают в себя A_1, т.е. нет пары собственных подгрупп с единичным пересечением.

Следовательно,

Пример 18. *Если возможно, представьте* ***группу диедра*** D_6 *и* ***группу кватернионов*** Q_8 *в виде* ***полупрямого произведения*** *собственных подгрупп (т.е. отличных от единичной и от всей группы).*

Решение. Мы **уже выяснили**, что в **группе кватернионов** Q_8 все собственные подгруппы являются циклическими: $A_1 = \{1,\ -1\}$,

$$A_2 = \{1,\ i,\ -1,\ -i\}, \quad A_3 = \{1,\ j,\ -1,\ -j\}, \quad A_4 = \{1,\ k,\ -1,\ -k\}.$$

Все эти подгруппы включают в себя A_1, т.е. нет пары собственных подгрупп с единичным пересечением.

Следовательно, представить Q_8 в виде произведения собственных подгрупп невозможно.

Вернёмся к лекции?

Задания для самостоятельного выполнения

Задача XI.1. (Ответ приведен на стр.1003.) Найдите все группы порядка 4.

Задача XI.2. (Ответ приведен на стр.1022.) Найдите мультипликативную группу Q_8 единичных **кватернионов** $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$.

Задача XII.3. (Ответ приведен на стр.1025.) Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Задача XII.4. (Ответ приведен на стр.1041.) Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Задача XII.5. (Ответ приведен на стр.1049.)

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Задача XII.6. (Ответ приведен на стр.1061.) Пусть G — группа, $A \leq G$, $B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.

Задача XII.7. (Ответ приведен на стр.1066.) Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Задача XII.8. (Ответ приведен на стр.1083.) Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

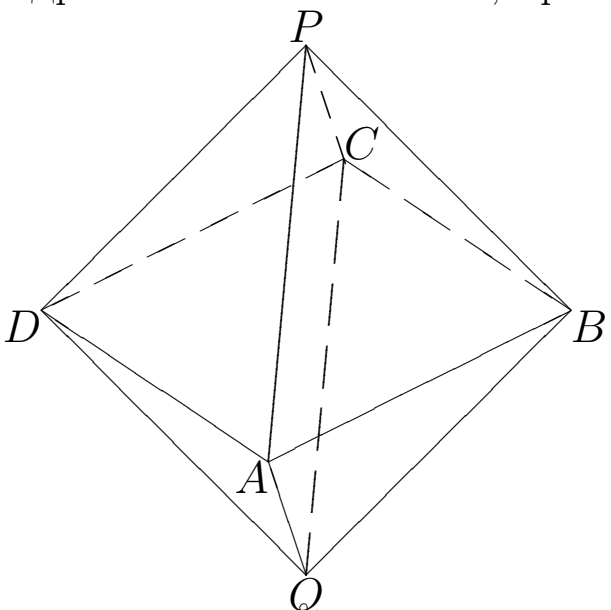
Задача XII.9. (Ответ приведен на стр.1093.) Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Задача XIII.10. (Ответ приведен на стр.1109.) Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **факторгруппу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Задача XIII.11. (Ответ приведен на стр.1143.) Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Задача XIV.12. (Ответ приведен на стр.1152.) Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Задача XIV.13. (Ответ приведен на стр.1159.) Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.



Задача XV.14. (Ответ приведен на стр.1206.) Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Задача XV.15. (Ответ приведен на стр.1234.) Найдите **матричное представление** «группы **кватернионов**» Q_8.

Задача XV.16. (Ответ приведен на стр.1237.) Найти представление группы диедра D_6.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.
Ответ. *Что надо найти?*

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.
Ответ. *Что надо найти?* Группу.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ?

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4. Рассмотрим «экстремальный» случай. Например, допустим, что имеется элемент порядка 4. Без ограничения общности можно считать, что это b, и что $b^2 = c, \quad b^3 = d$.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.
Ответ.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4. Рассмотрим «экстремальный» случай. Например, допустим, что имеется элемент порядка 4. Без ограничения общности можно считать, что это b, и что $b^2 = c, \quad b^3 = d$.

Таблица Кэли в случае существования элемента порядка 4 имеет вид

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4. Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4. Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a		
c	c		a	
d	d			a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4. Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a		
c	c		a	
d	d			a

Если бы $bc = b$, то

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4. Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a		
c	c		a	
d	d			a

Если бы $bc = b$, то $c = a$, противоречие.

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4. Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	
c	c	d	a	
d	d			a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4. Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	
d	d	c		a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ. *Что надо найти?* Группу.

В каком виде представим ответ? Опишем носитель группы и операцию. Нам надо описать группу с точностью до изоморфизма. Поэтому обозначим элементы группы буквами, например, a, b, c, d, где a — единичный (нейтральный) элемент искомой группы.

В силу **теоремы Лагранжа** порядки элементов группы G должны быть делителями числа 4. Осталось рассмотреть ситуацию, когда элемента порядка 4 не имеется. Так только элемент a имеет порядок 1, то все остальные элементы — порядка 2.

Таблица Кэли в случае, когда элемента порядка 4 не существует, имеет вид

Таблица XVI.0

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ.

Таблица 1

a	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Таблица 2

a	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Задача 1. Найдите все группы порядка 4.

Ответ.

Таблица 1

a	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Циклическая группа порядка 4

Таблица 2

a	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Элементарная абелева группа порядка 4

Решение задачи 2.

Задача 2. Найдите мультипликативную группу Q_8 единичных **кватернионов** $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$.

Задача 2. Найдите мультипликативную группу Q_8 единичных **кватернионов** $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$.

Ответ. Зададим Q_8 **таблицей Кэли**.

Задача 2. Найдите мультипликативную группу Q_8 единичных **кватернионов** $\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$.

Ответ. Зададим Q_8 **таблицей Кэли**.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Решение задачи 3.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Получили одну из «экстремальных» ситуаций — $H = \{a\}$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Если $b \in H$, то

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Если $b \in H$, то $b^k \in H$, т.е. $c \in H, \quad d \in H$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.
Если $b \in H$, то $b^k \in H$, т.е. $c \in H, \quad d \in H$.
Тогда $H = G$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Пусть теперь $b \notin H$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Пусть теперь $b \notin H$.

Если $\in H$, то либо $H = \{a,\ c\}$, либо $d \in H$.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Пусть теперь $b \notin H$.

Если $\in H$, то либо $H = \{a,\ c\}$, либо $d \in H$.

Но в последнем случае $d^3 = d^2 * d \in H$

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Пусть теперь $b \notin H$.

Если $\in H$, то либо $H = \{a,\ c\}$, либо $d \in H$.

Но в последнем случае $d^3 = d^2 * d = c * d \in H$

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.
Пусть теперь $b \notin H$.
Если $\in H$, то либо $H = \{a,\ c\}$, либо $d \in H$.
Но в последнем случае $d^3 = d^2 * d = c * d = b \in H$, вопреки предположению.

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Итак, либо $H = G$,

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Итак, либо $H = G$, либо $H = \{a\}$,

Задача 3. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 1.

Ответ.

Таблица 1

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$.

Итак, либо $H = G$, либо $H = \{a\}$, либо $H = \{a,\ c\}$.

Решение задачи 4.

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$. Попробуйте найти остальные варианты.

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$. Сравним результаты?

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$.
$H = \{a; b\}$,

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$.
$H = \{a; b\}$, или $H = \{a; c\}$,

Задача 4. Найдите все подгруппы элементарной абелевой группы порядка 4, т.е. группы с таблицей Кэли 2.

Ответ.

Таблица 2

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Пусть H — искомая подгруппа. По определению подгруппы $a \in H$. Поэтому имеем два очевидных варианта: $H = \{a\}$ и $H = G$.
$H = \{a; b\}$, или $H = \{a; c\}$, или $H = \{a; d\}$.

Решение задачи 5.

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы:

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\qquad\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\quad\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ \ \ \ \}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\ \ \}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\ -j\}$,

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\ -j\}$, $\{1,\ k,\quad\quad\}$.

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\ -j\}$, $\{1,\ k,\ -1,\quad\}$.

Задача 5.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Найдите все подгруппы группы Q_8 кватернионов, с групповой операцией, заданной данной таблицей Кэли.

Ответ. Кроме единичной подгруппы $\{1\}$ и самой Q_8 имеются следующие подгруппы: $\{1,\ -1\}$, $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, $\{1,\ j,\ -1,\ -j\}$, $\{1,\ k,\ -1,\ -j\}$. Таким образом, все собственные (отличные от единичной и от самой группы) подгруппы группы Q_8 являются **циклическими**.

Решение задачи 6.

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G$, $B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G, \quad B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.
Ответ. Пусть $a \in A$. Тогда

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G, \quad B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.
Ответ. Пусть $a \in A$. Тогда $a =$

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G, \quad B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.

Ответ. Пусть $a \in A$. Тогда $a = \underbrace{a}_{A} * \underbrace{e}_{B} \in$.

Задача 6. Пусть G — группа, $A \leq G, \quad B \leq G$. Докажите, что $A \subseteq A * B$.

Ответ. Пусть $a \in A$. Тогда $a = \underbrace{a}_{A} * \underbrace{e}_{B} \in A * B$.

Решение задачи 7.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.
Ответ. Что надо доказать?

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств* можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P, \quad q \in Q$. Тогда

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств* можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} =$

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств* можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in$

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств* можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств*** **можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q =$

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств* можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P, \quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q = \underbrace{e}_{P} * \underbrace{q}_{Q} \in$

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств* можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q = \underbrace{e}_{P} * \underbrace{q}_{Q} \in P * Q$.

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств* можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q = \underbrace{e}_{P} * \underbrace{q}_{Q} \in P * Q$.

Итак, доказано, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$, значит,

Задача 7. Докажите, что если G — группа и $P \leq Q \leq G$, то $P * Q = Q$.

Ответ. Что надо доказать?

Равенство множеств.

Как **доказать равенство множеств**?

Как и другие равенства, ***равенство множеств* можно доказать**:

i) с помощью равносильных преобразований уже доказанных равенств;

ii) сведение к включениям $\subseteq$ и $\supseteq$;

iii) «от противного».

Применим второй способ: докажем, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$.

Пусть $p \in P, \quad q \in Q$. Тогда $\underbrace{p}_{P} * \underbrace{q}_{Q} = \underbrace{p}_{Q} * \underbrace{q}_{Q} \in Q$.

Докажем обратное включение $Q \subseteq P * Q$. Пусть $q \in Q$. Тогда $q = \underbrace{e}_{P} * \underbrace{q}_{Q} \in P * Q$.

Итак, доказано, что $P * Q \subseteq Q$ и $Q \subseteq P * Q$, значит, $P * Q = Q$, задача решена.

Решение задачи 8.

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**.

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p =$

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p = \underbrace{p}_{P} * \underbrace{e}_{Q} \in$

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p = \underbrace{p}_{P} * \underbrace{e}_{Q} \in P * Q =$

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p = \underbrace{p}_{P} * \underbrace{e}_{Q} \in P * Q = Q$.

Задача 8. Докажите, что если P и Q — подгруппы группы G, то для выполнения равенства $P * Q = Q$ необходимо и достаточно, чтобы $P \leq Q$.

Ответ. Достаточность мы **уже доказали**. Докажем необходимость.

Пусть $P * Q = Q$. Как **доказать, что** $P \leq Q$?

Пусть $p \in P$. Тогда $p = \underbrace{p}_{P} * \underbrace{e}_{Q} \in P * Q = Q$.

Задача решена.

Решение задачи 9.

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.
Ответ.

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ. Этот результат является очевидным следствием из теоремы Силова, но мы рассмотрим прямое доказательство.

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1,

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2,

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3 или 6.

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3 или 6.
Ясно, что в последних двух случаях утверждение выполнено.

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3 или 6.
Ясно, что в последних двух случаях утверждение выполнено.
Осталось рассмотреть случай, когда все элементы имеют порядок 2.

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3 или 6.
Ясно, что в последних двух случаях утверждение выполнено.
Осталось рассмотреть случай, когда все элементы имеют порядок 2.
Возьмём элементы $a \neq b \in G$.

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3 или 6.

Ясно, что в последних двух случаях утверждение выполнено.

Осталось рассмотреть случай, когда все элементы имеют порядок 2.

Возьмём элементы $a \neq b \in G$.

$$\begin{cases} a^2 = e, \\ b^2 = e, \\ e = (ab)^2 = abab, \end{cases} \Rightarrow$$

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3 или 6.

Ясно, что в последних двух случаях утверждение выполнено.

Осталось рассмотреть случай, когда все элементы имеют порядок 2.

Возьмём элементы $a \neq b \in G$.

$$\begin{cases} a^2 = e, \\ b^2 = e, \\ e = (ab)^2 = abab, \end{cases} \Rightarrow \; aeb = aababb \; \Rightarrow$$

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3 или 6.

Ясно, что в последних двух случаях утверждение выполнено.

Осталось рассмотреть случай, когда все элементы имеют порядок 2.

Возьмём элементы $a \neq b \in G$.

$$\begin{cases} a^2 = e, \\ b^2 = e, \\ e = (ab)^2 = abab, \end{cases} \Rightarrow \; aeb = aabbab \; \Rightarrow ab = ba.$$

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3 или 6.

Ясно, что в последних двух случаях утверждение выполнено.

Осталось рассмотреть случай, когда все элементы имеют порядок 2.

Возьмём элементы $a \neq b \in G$.

$$\begin{cases} a^2 = e, \\ b^2 = e, \\ e = (ab)^2 = abab, \end{cases} \Rightarrow \; aeb = aabbab \; \Rightarrow ab = ba.$$

Тогда $\{e, a, b, ab\} < G$, но порядок подгруппы $\{e, a, b, ab\}$ не делит порядок всей группы!

Задача 9. Докажите, что в группе G порядка 6 имеется элемент порядка 3.

Ответ.

Порядок любого элемента делит порядок группы G, т.е. это 1, 2, 3 или 6.

Ясно, что в последних двух случаях утверждение выполнено.

Осталось рассмотреть случай, когда все элементы имеют порядок 2.

Возьмём элементы $a \neq b \in G$.

$$\begin{cases} a^2 = e, \\ b^2 = e, \\ e = (ab)^2 = abab, \end{cases} \Rightarrow \; aeb = aababb \; \Rightarrow ab = ba.$$

Тогда $\{e, a, b, ab\} < G$, но порядок подгруппы $\{e, a, b, ab\}$ не делит порядок всей группы!

Получено противоречие, утверждение доказано.

Решение задачи 10.

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ.

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$X * Y$

$X \backslash Y$	

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$X * Y$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$
$\{-1;\ 1\}$	

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$X * Y$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-1;\ 1\}$		
$\{-i;\ i\}$		

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$X * Y$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-1;\ 1\}$			
$\{-i;\ i\}$			
$\{-j;\ j\}$			

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$X * Y$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$				
$\{-i;\ i\}$				
$\{-j;\ j\}$				
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$			
$\{-i;\ i\}$				
$\{-j;\ j\}$				
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$		
$\{-i;\ i\}$				
$\{-j;\ j\}$				
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	
$\{-i;\ i\}$				
$\{-j;\ j\}$				
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$				
$\{-j;\ j\}$				
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$			
$\{-j;\ j\}$				
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$		
$\{-j;\ j\}$				
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	
$\{-j;\ j\}$				
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$				
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$			
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$		
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$				

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$			

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$		

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-i;\ i\}$	

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$

Можно представить фактор-группу и с помощью алгебраического подхода:

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$

Можно представить фактор-группу и с помощью алгебраического подхода:
— в качестве базовых элементов возьмём подгруппы группы Q_8;

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$

Можно представить фактор-группу и с помощью алгебраического подхода:
— в качестве базовых элементов возьмём подгруппы группы Q_8;
— как типовые преобразования будем использовать **произведение подгрупп**, в первую очередь, **прямое** и **полупрямое**;

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{array} \right. \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \ \left\{ \begin{array}{l} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{array} \right.$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$X * Y$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$

Можно представить фактор-группу и с помощью алгебраического подхода:
— в качестве базовых элементов возьмём подгруппы группы Q_8;
— как типовые преобразования будем использовать **произведение подгрупп**, в первую очередь, **прямое** и **полупрямое**;
— механизм аппроксимирования включает в себя результаты о ситуациях, когда **произведение подгрупп является подгруппой**, проверку совпадения произведения подгрупп и др.

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$

Можно представить фактор-группу и с помощью алгебраического подхода:

$$Q_8/\{-1;\ 1\} = \big\{\{-1;\ 1\}, \{-i;\ i\}\big\} \times \big\{\{-1;\ 1\}, \{-j;\ j\}\big\} =$$

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$

Можно представить фактор-группу и с помощью алгебраического подхода:

$$Q_8/\{-1;\ 1\} = \big\{\{-1;\ 1\}, \{-i;\ i\}\big\} \times \big\{\{-1;\ 1\}, \{-j;\ j\}\big\} =$$

$$= \big\{\{-1;\ 1\}, \{-i;\ i\}\big\} \times \big\{\{-1;\ 1\}, \{-k;\ k\}\big\} =$$

Задача 10. Покажите, что для **группе кватернионов** Q_8 имеем $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$. Найдите **фактор-группу** $Q_8/\{-1;\ 1\}$.

Ответ. Проверим, что $\{-1;\ 1\}$ является **нормальной подгруппой** группы Q_8.

$$\begin{cases} -1 = i^2 = j^2 = k^2, \\ 1 = i^4 = j^4 = k^4 \end{cases} \Rightarrow \quad \forall x \in Q_8 \begin{cases} x * (-1) = (-1) * x, \\ x * 1 = 1 * x. \end{cases}$$

Значит, $\forall x \in Q_8 \qquad x * \{-1;\ 1\} = \{-1;\ 1\} * x$, т.е. $\{-1;\ 1\} \trianglelefteq Q_8$.

Фактор-группу $Q_8/\{-1;\ 1\}$ прежде мы задавали только таблицей Кэли:

$$X * Y$$

$X \backslash Y$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-1;\ 1\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$
$\{-i;\ i\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$
$\{-j;\ j\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-1;\ 1\}$	$\{-i;\ i\}$
$\{-k;\ k\}$	$\{-k;\ k\}$	$\{-j;\ j\}$	$\{-i;\ i\}$	$\{-1;\ 1\}$

Можно представить фактор-группу и с помощью алгебраического подхода:

$$Q_8/\{-1;\ 1\} = \big\{\{-1;\ 1\}, \{-i;\ i\}\big\} \times \big\{\{-1;\ 1\}, \{-j;\ j\}\big\} =$$

$$= \big\{\{-1;\ 1\}, \{-i;\ i\}\big\} \times \big\{\{-1;\ 1\}, \{-k;\ k\}\big\} = \big\{\{-1;\ 1\}, \{-j;\ j\}\big\} \times \big\{\{-1;\ 1\}, \{-k;\ k\}\big\}.$$

Решение задачи 11.

Задача 11. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Задача 11. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Задача 11. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbb{N}$.

Задача 11. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbb{N}$.

Разделим m на n с остатком: $m = kn + r$, $r \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$. Тогда $r = \underbrace{m}_{H} - \underbrace{kn}_{H}$

Задача 11. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbb{N}$.

Разделим m на n с остатком: $m = kn + r$, $r \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$. Тогда $r = \underbrace{m}_{H} - \underbrace{kn}_{H} \in H$.

Задача 11. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbb{N}$.

Разделим m на n с остатком: $m = kn + r$, $r \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$. Тогда $r = \underbrace{m}_{H} - \underbrace{kn}_{H} \in H$.

Но $r < n$, а n — наименьшее *положительное* число из H. Значит, $r = 0$, т.е. m делится на n нацело.

Задача 11. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».

Ответ. Пусть H — подгруппа группы $\mathbb{Z}$. Обозначим через n наименьшее положительное число из H.

Возьмем произвольный ненулевой элемент $m \in H$. Тогда $(-m) \in H$. Поэтому можно считать, что $m \in \mathbb{N}$.

Разделим m на n с остатком: $m = kn + r$, $r \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$. Тогда $r = \underbrace{m}_{H} - \underbrace{kn}_{H} \in H$.

Но $r < n$, а n — наименьшее *положительное* число из H. Значит, $r = 0$, т.е. m делится на n нацело.

Следовательно, H состоит из всех чисел, кратных n.

Задача 11. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».
Ответ. Пусть n — натуральное число. Тогда

$$\left\{ nz \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \right\} = n \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Так как $\mathbb{Z}$ — абелева группа, то $(n \cdot \mathbb{Z}) \trianglelefteq \mathbb{Z}$. Носитель фактор-группы $\mathbb{Z}/(n \cdot \mathbb{Z})$ состоит из следующих n смежных классов

$$\{0, n, -n, 2n, -2n, \ldots\}, \quad \{1, n+1, 1-n, 2n+1, 1-2n, \ldots\}, \ldots,$$
$$\ldots, \{n-2, 2n-2, -2, 3n-2, \ldots\}, \quad \{n-1, 2n-1, -1, 3n-1, \ldots\}.$$

Задача 11. Найти фактор-группы **циклической группы** $\mathbb{Z}$ с операцией «сложение».
Ответ. Пусть n — натуральное число. Тогда

$$\left\{ nz \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \right\} = n \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Так как $\mathbb{Z}$ — абелева группа, то $(n \cdot \mathbb{Z}) \trianglelefteq \mathbb{Z}$. Носитель фактор-группы $\mathbb{Z}/(n \cdot \mathbb{Z})$ состоит из следующих n смежных классов

$$\{0, n, -n, 2n, -2n, \ldots\}, \quad \{1, n+1, 1-n, 2n+1, 1-2n, \ldots\}, \ldots,$$
$$\ldots, \{n-2, 2n-2, -2, 3n-2, \ldots\}, \quad \{n-1, 2n-1, -1, 3n-1, \ldots\}.$$

Например, группа $\mathbb{Z}/(3 \cdot \mathbb{Z})$ состоит из смежных классов

$$\{0, 3, -3, 6, -6, \ldots\}, \quad \{1, 4, -2, 7, -5, \ldots\}, \quad \{2, 5, -1, 8, -4, \ldots\}.$$

Таблица Кэли групповой операции, индуцированной на этой фактор-группе, имеет вид

	$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$	$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$	$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$
$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$	$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$	$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$	$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$
$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$	$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$	$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$	$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$
$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$	$\{2,5,-1,8,-4,\ldots\}$	$\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$	$\{1,4,-2,7,-5,\ldots\}$

Решение задачи 12.

Задача 12. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Задача 12. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Носитель группы Σ_4 состоит из $4! = 24$ элементов. Группа Σ_4 обладает шестью элементами порядка 4:

x	1	2	3	4	
$u_1(x)$	2	3	4	1	$u_3^3(x) = u_2^{-1}(x)$
$u_2(x)$	4	1	2	3	$u_1^3(x) = u_1^{-1}(x)$
$u_3(x)$	2	4	1	3	$u_4^3(x) = u_4^{-1}(x)$
$u_4(x)$	3	1	4	2	$u_3^3(x) = u_3^{-1}(x)$
$u_5(x)$	4	3	1	2	$u_6^3(x) = u_6^{-1}(x)$
$u_6(x)$	3	4	2	1	$u_5^3(x) = u_5^{-1}(x)$

$u_1^2 = u_2^2$
$u_3^2 = u_4^2$
$u_5^2 = u_6^2$

Задача 12. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Носитель группы Σ_4 состоит из $4! = 24$ элементов. Группа Σ_4 обладает шестью элементами порядка 4:

x	1	2	3	4	
$u_1(x)$	2	3	4	1	$u_3^3(x) = u_2^{-1}(x)$
$u_2(x)$	4	1	2	3	$u_1^3(x) = u_1^{-1}(x)$
$u_3(x)$	2	4	1	3	$u_4^3(x) = u_4^{-1}(x)$
$u_4(x)$	3	1	4	2	$u_3^3(x) = u_3^{-1}(x)$
$u_5(x)$	4	3	1	2	$u_6^3(x) = u_6^{-1}(x)$
$u_6(x)$	3	4	2	1	$u_5^3(x) = u_5^{-1}(x)$

$$u_1^2 = u_2^2$$
$$u_3^2 = u_4^2$$
$$u_5^2 = u_6^2$$

Ясно, что стабилизатор[2] точки 4 в группе Σ_4 — это группа H, изоморфная Σ_3. Стабилизаторы всех четырех точек изоморфны между собой, более того,

$$_{\Sigma_4}(1) = H^{u_1} = H^{u_5}, \quad _{\Sigma_4}(2) = H^{u_4} = H^{u_6},$$

$$_{\Sigma_4}(3) = H^{u_2} = H^{u_3}, \quad _{\Sigma_4}(4) = H.$$

[2]Подгруппа, состоящая из всех тех перестановок, которые «оставляют неподвижной» точку 4.

Задача 12. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Носитель группы Σ_4 состоит из $4! = 24$ элементов. Группа Σ_4 обладает шестью элементами порядка 4:

x	1	2	3	4	
$u_1(x)$	2	3	4	1	$u_3^3(x) = u_2^{-1}(x)$
$u_2(x)$	4	1	2	3	$u_1^3(x) = u_1^{-1}(x)$
$u_3(x)$	2	4	1	3	$u_4^3(x) = u_4^{-1}(x)$
$u_4(x)$	3	1	4	2	$u_3^3(x) = u_3^{-1}(x)$
$u_5(x)$	4	3	1	2	$u_6^3(x) = u_6^{-1}(x)$
$u_6(x)$	3	4	2	1	$u_5^3(x) = u_5^{-1}(x)$

$u_1^2 = u_2^2$
$u_3^2 = u_4^2$
$u_5^2 = u_6^2$

В группе Σ_4 имеется нормальная подгруппа T порядка 4, состоящая из единичного элемента и трех инволюций f, g, h, приведенных ниже в таблице. В следующей таблице приведены 8 сопряженных между собой элементов[3] порядка 3: $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2, t_1, t_2$.

	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	4	3
$g(x)$	3	4	1	2
$h(x)$	4	3	2	1

$p_1^{u_1} = q_1,\ p_2^{u_1} = q_2,$
$q_1^{u_1} = r_1,\ q_2^{u_1} = r_2,$
$r_1^{u_1} = t_1,\ r_2^{u_1} = t_2,$
$t_1^{u_1} = p_1,\ t_2^{u_1} = p_2,$
$p_1^f = q_2,\ p_1^g = r_1,\ p_1^h = t_2,$

x	1	2	3	4	y	f	g	h
$p_1(x)$	1	3	4	2	y^{p_1}	g	h	f
$p_2(x)$	1	4	2	3	y^{p_2}	h	f	g
$q_1(x)$	3	2	4	1	y^{q_1}	h	f	g
$q_2(x)$	4	2	1	3	y^{q_2}	g	h	f
$r_1(x)$	2	4	3	1	y^{r_1}	g	h	f
$r_2(x)$	4	1	3	2	y^{r_2}	h	f	g
$t_1(x)$	2	3	1	4	y^{t_1}	h	f	g
$t_2(x)$	3	1	2	4	y^{t_2}	g	h	f

Задача 12. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Носитель группы Σ_4 состоит из $4! = 24$ элементов. Группа Σ_4 обладает шестью элементами порядка 4:

x	1	2	3	4	
$u_1(x)$	2	3	4	1	$u_3^3(x) = u_2^{-1}(x)$
$u_2(x)$	4	1	2	3	$u_1^3(x) = u_1^{-1}(x)$
$u_3(x)$	2	4	1	3	$u_4^3(x) = u_4^{-1}(x)$
$u_4(x)$	3	1	4	2	$u_3^3(x) = u_3^{-1}(x)$
$u_5(x)$	4	3	1	2	$u_6^3(x) = u_6^{-1}(x)$
$u_6(x)$	3	4	2	1	$u_5^3(x) = u_5^{-1}(x)$

$$u_1^2 = u_2^2$$
$$u_3^2 = u_4^2$$
$$u_5^2 = u_6^2$$

Как нетрудно заметить, если элементы третьего порядка сопряжены с помощью элементов u_1–u_2, то они действуют (сопряжениями) на $\{f, g, h\}$ неодинаково. Если же элементы третьего порядка сопряжены с помощью элементов f, g или h, то их действие (сопряжениями) на $\{f, g, h\}$ одинаковое.

	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	4	3
$g(x)$	3	4	1	2
$h(x)$	4	3	2	1

$$p_1^{u_1} = q_1,\ p_2^{u_1} = q_2,$$
$$q_1^{u_1} = r_1,\ q_2^{u_1} = r_2,$$
$$r_1^{u_1} = t_1,\ r_2^{u_1} = t_2,$$
$$t_1^{u_1} = p_1,\ t_2^{u_1} = p_2,$$
$$p_1^f = q_2,\ p_1^g = r_1,\ p_1^h = t_2,$$

x	1	2	3	4	y	f	g	h
$p_1(x)$	1	3	4	2	y^{p_1}	g	h	f
$p_2(x)$	1	4	2	3	y^{p_2}	h	f	g
$q_1(x)$	3	2	4	1	y^{q_1}	h	f	g
$q_2(x)$	4	2	1	3	y^{q_2}	g	h	f
$r_1(x)$	2	4	3	1	y^{r_1}	g	h	f
$r_2(x)$	4	1	3	2	y^{r_2}	h	f	g
$t_1(x)$	2	3	1	4	y^{t_1}	h	f	g
$t_2(x)$	3	1	2	4	y^{t_2}	g	h	f

Задача 12. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Как нетрудно заметить, если элементы третьего порядка сопряжены с помощью элементов u_1–u_2, то они действуют (сопряжениями) на $\{f, g, h\}$ неодинаково. Если же элементы третьего порядка сопряжены с помощью элементов f, g или h, то их действие (сопряжениями) на $\{f, g, h\}$ одинаковое. Это совершенно естественно, так как f, g, h коммутируют друг с другом, $u_1, u_2, \ldots, u_6$ с этими элементами не коммутируют:

x	f	g	h
$x^{u_1} = x^{u_2} = \ldots = x^{u_6}$	h	g	f

, $\quad u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = \ldots = u_6^2 = g.$

В подгруппе T содержатся все такие инволюции из Σ_4, каждая из которых переставляет между собой одновременно *2 пары* элементов из $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

Таким образом, все инволюции из T не оставляют неподвижными ни одного элемента из Ω. Помимо инволюций, содержащихся в T, имеется еще 6 вопряженных между собой инволюций w_1–w_6, каждая из которых переставляет в Ω лишь пару элементов, «не трогая» остальные.

x	1	2	3	4
$w_1(x)$	2	1	3	4
$w_2(x)$	3	2	1	4
$w_3(x)$	4	2	3	1
$w_4(x)$	1	3	2	4
$w_5(x)$	1	4	3	2
$w_6(x)$	1	2	4	3

.

Задача 12. Найдите **таблицу Кэли** групповой операции **группы перестановок** Σ_4. Найдите ее подгруппы и фактор-группы, неизоморфные единичной группе и самой группе Σ_4.

Ответ. Фактор-группа Σ_4/T изоморфна группе Σ_3. Один из изоморфизмов φ можно задать, например, следующей таблицей[4]:

y	$\varphi(y)$
$T = \{e', f, g, h\}$	e
$p_1T = \{p_1, q_2, r_1, t_2\}$	q
$p_2T = \{p_2, q_1, r_2, t_1\}$	p
$u_1T = \{u_1, u_2, w_2, w_5\}$	c
$u_3T = \{u_3, u_4, w_3, w_4\}$	b
$u_5T = \{u_5, u_6, w_1, w_6\}$	a

[4]Здесь e' — единичный элемент группы Σ_4, то есть подстановка, заданная таблицей

x	1	2	3	4
$e'(x)$	1	2	3	4

. Напомним также, что здесь $T = \{e', f, g, h\}$.

Решение задачи 13.

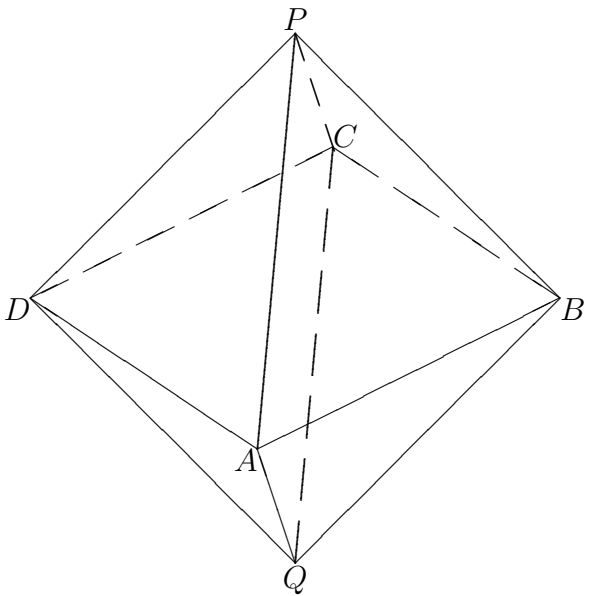
Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

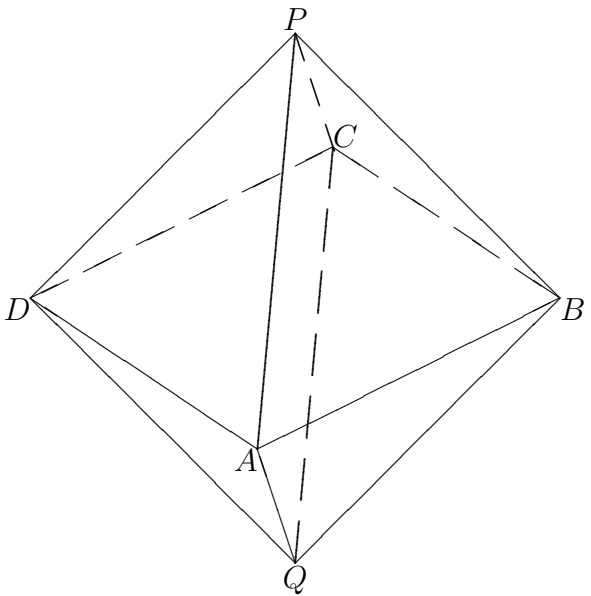
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C			
$a(x)$						
$a^2(x)$						
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

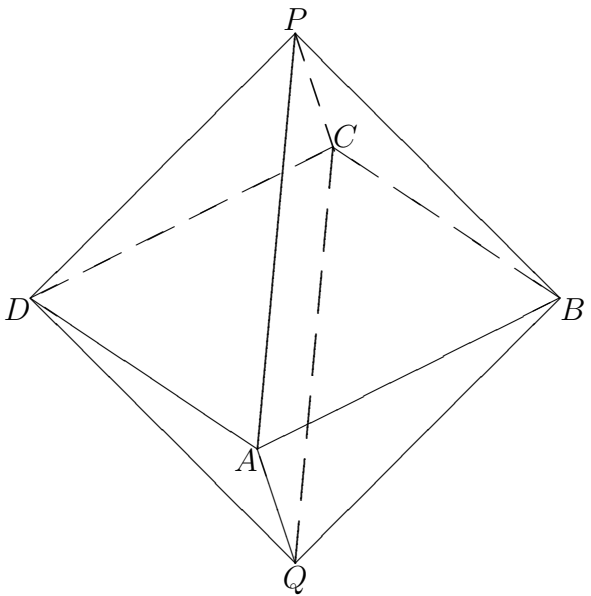
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D		
$a(x)$						
$a^2(x)$						
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

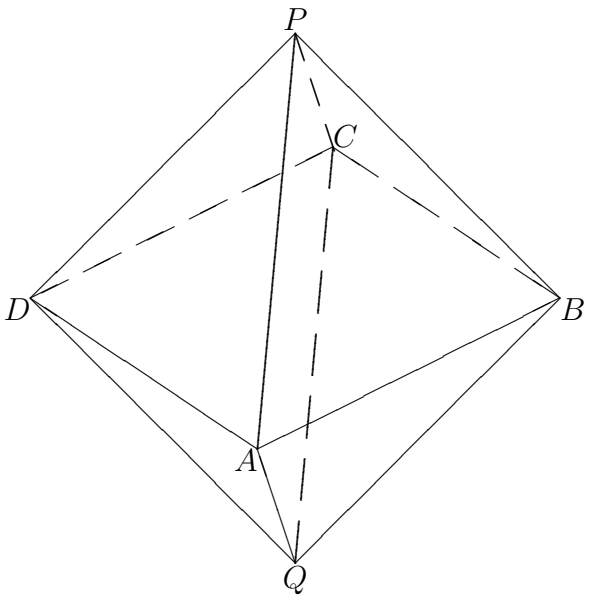
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	
$a(x)$						
$a^2(x)$						
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

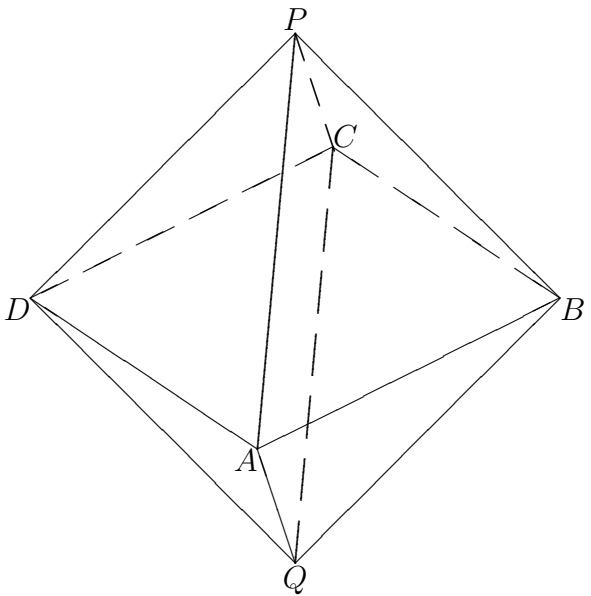
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$						
$a^2(x)$						
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

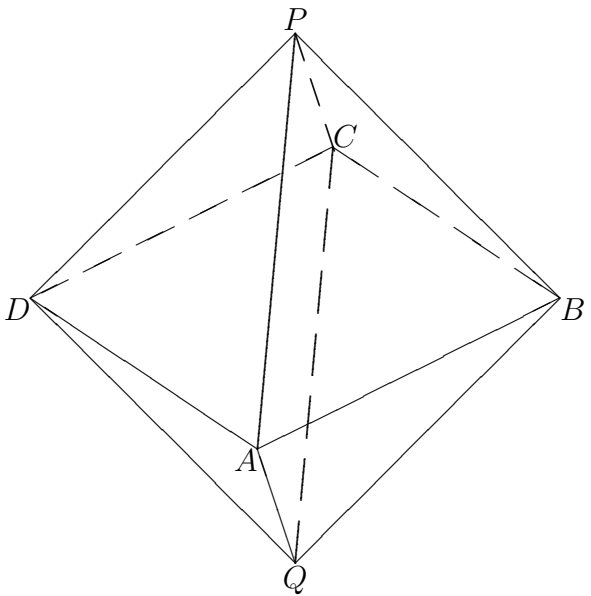
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B			
$a^2(x)$						
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

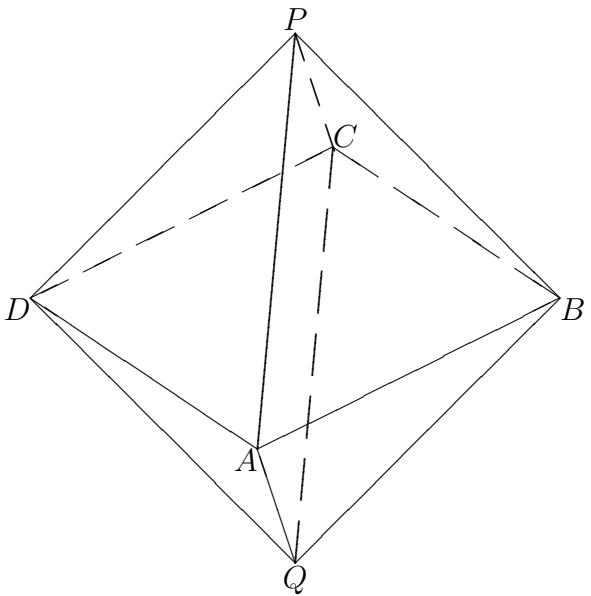
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C		
$a^2(x)$						
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

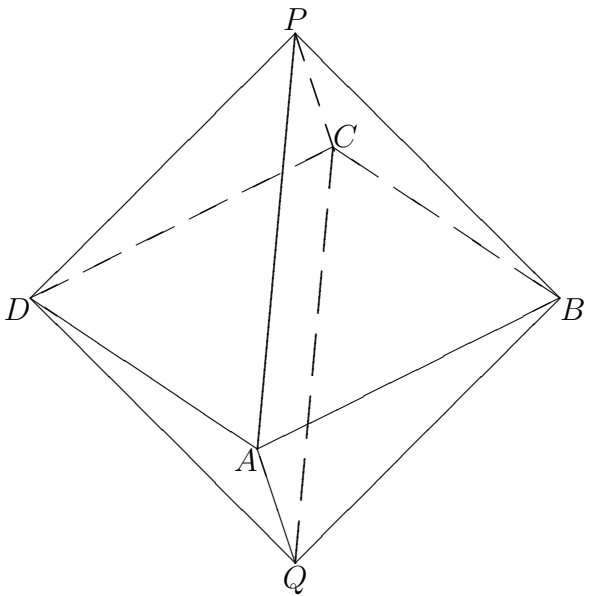
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	
$a^2(x)$						
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

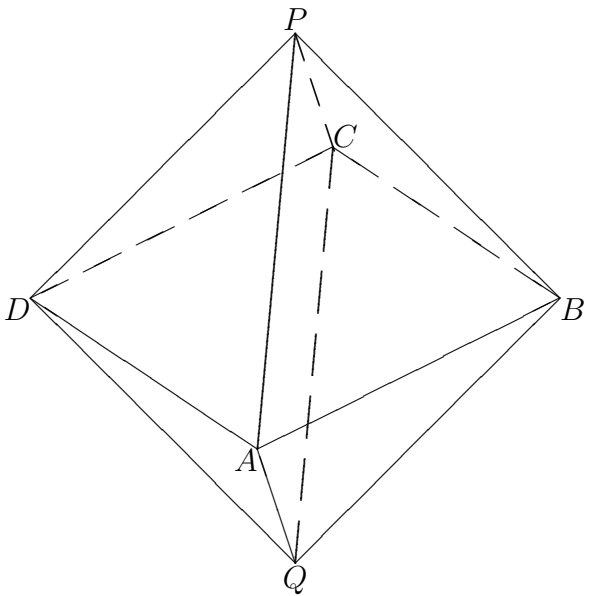
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$						
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

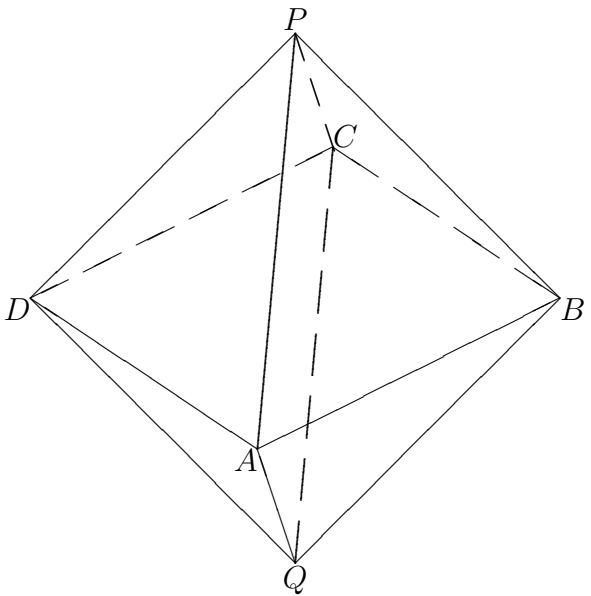
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A			
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

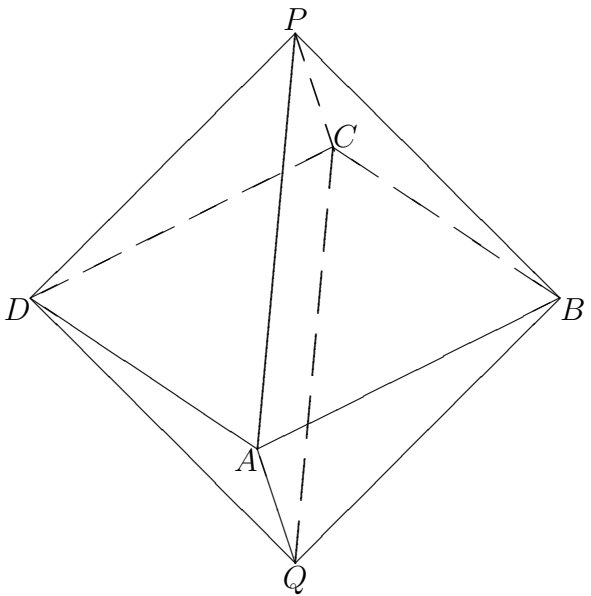
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B		
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

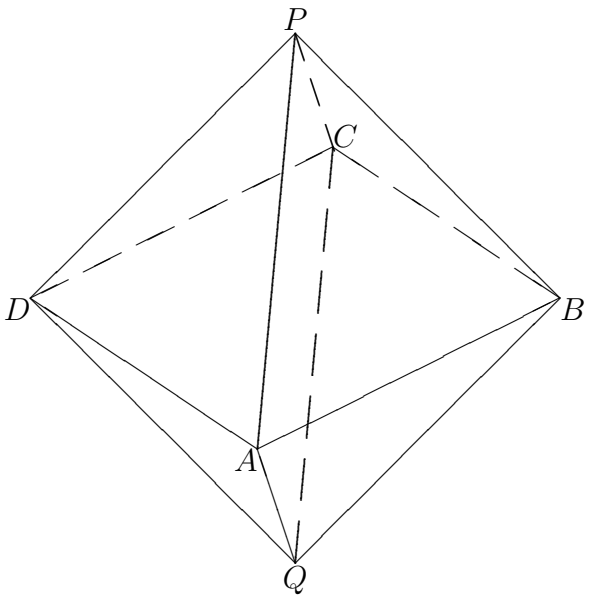
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

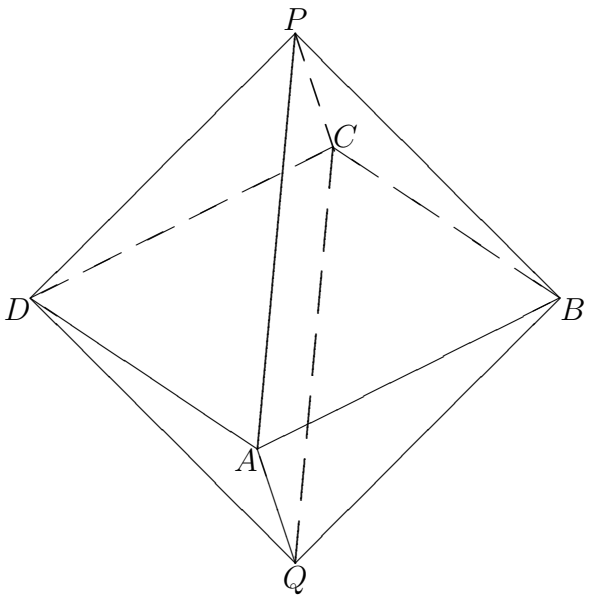
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$						
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

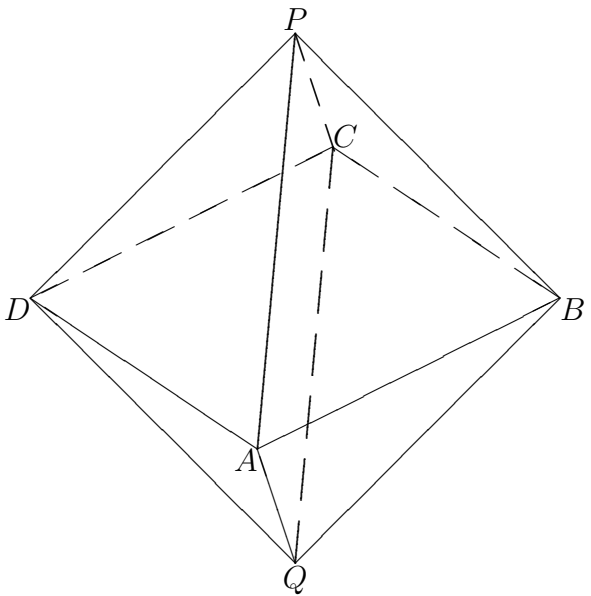
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A			
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

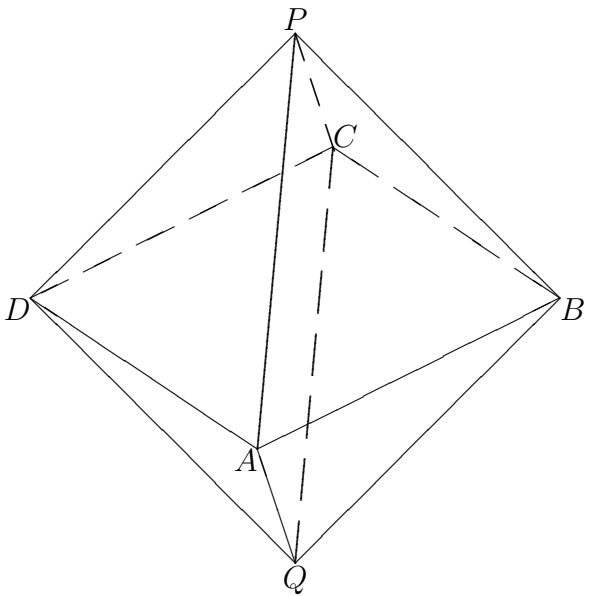
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B		
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

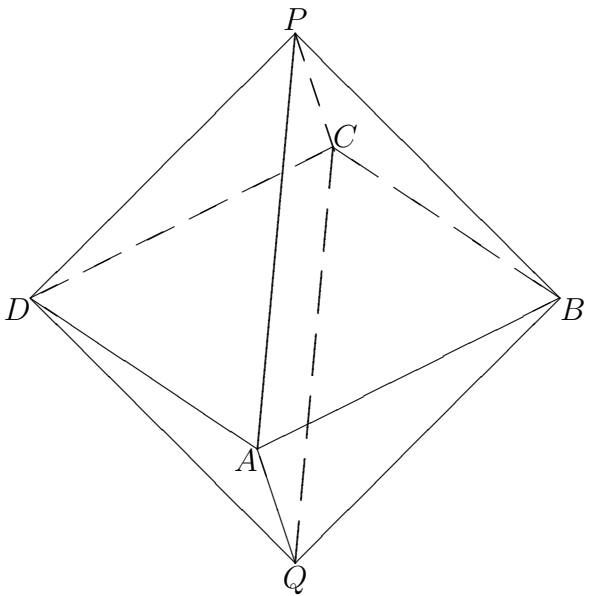
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

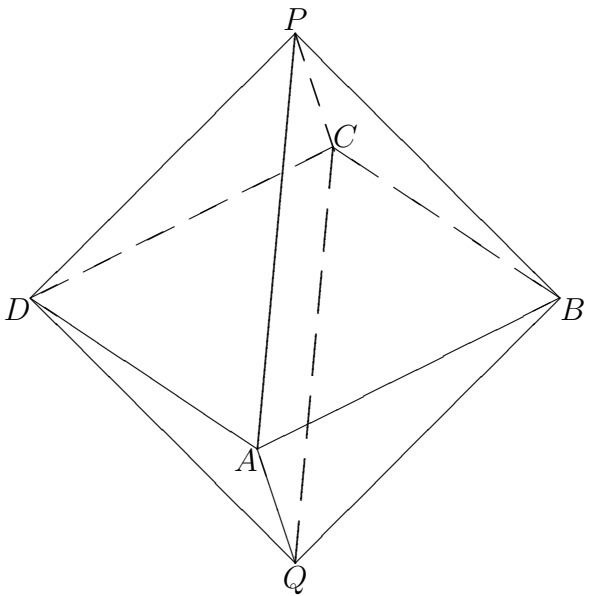
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$						
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

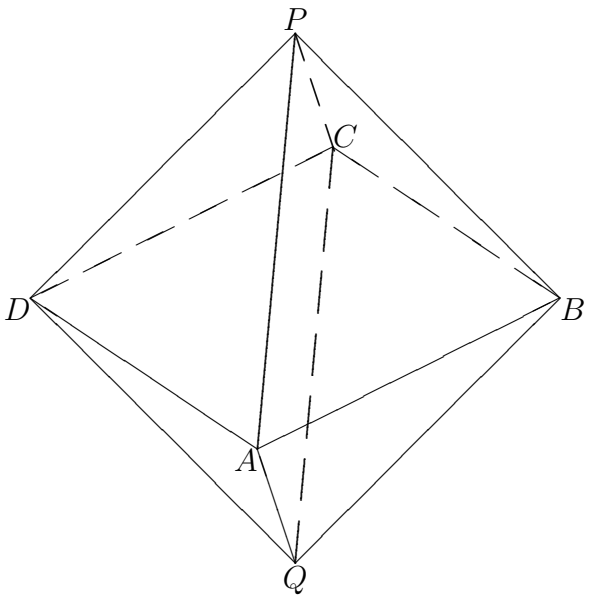
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A			
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

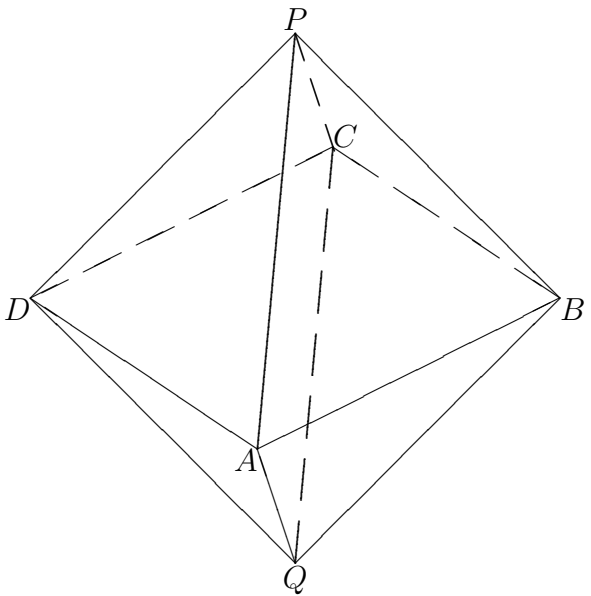
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D		
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

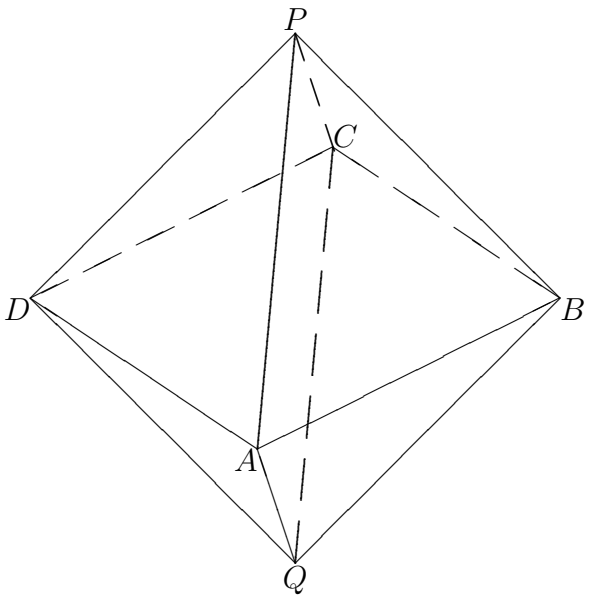
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

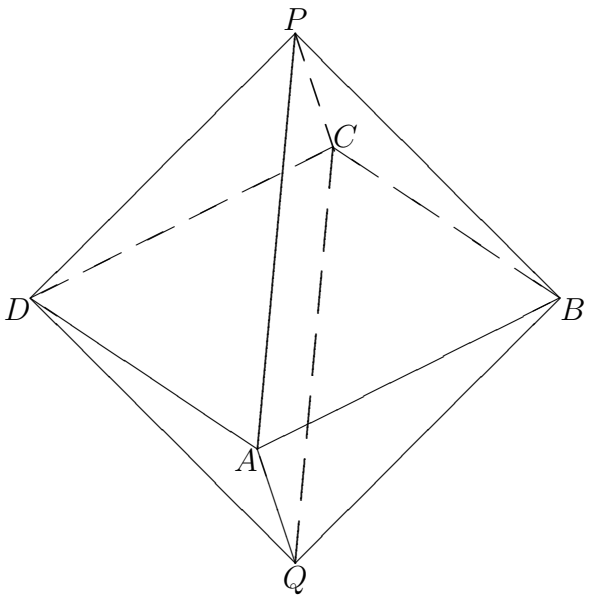
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$						
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

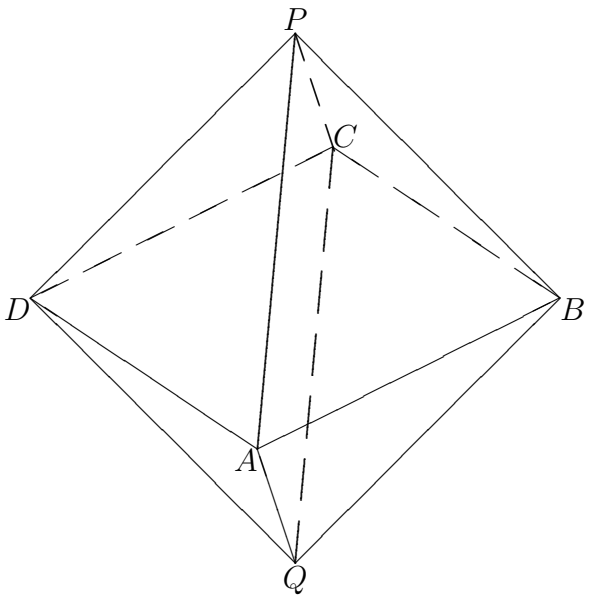
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C			
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

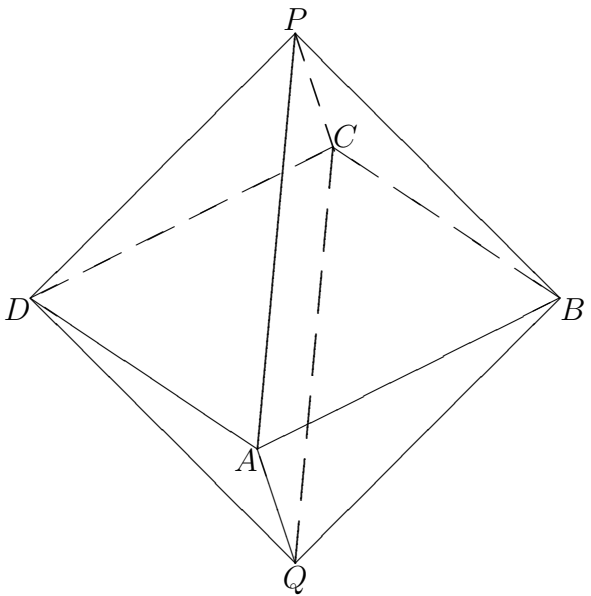
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B		
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

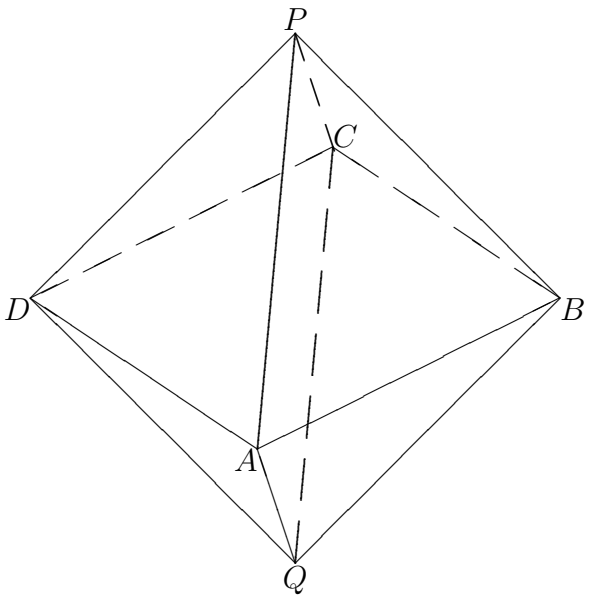
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

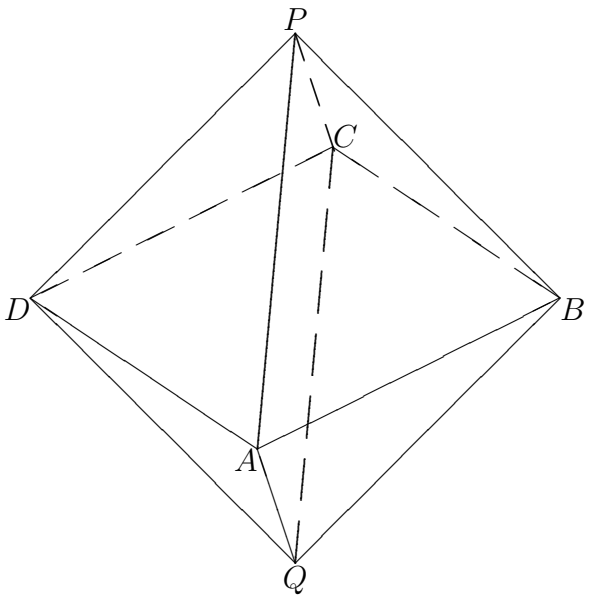
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$						
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

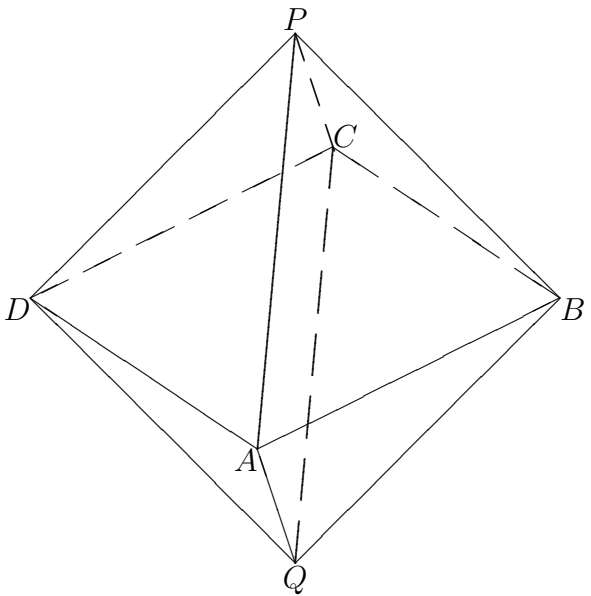
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D			
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

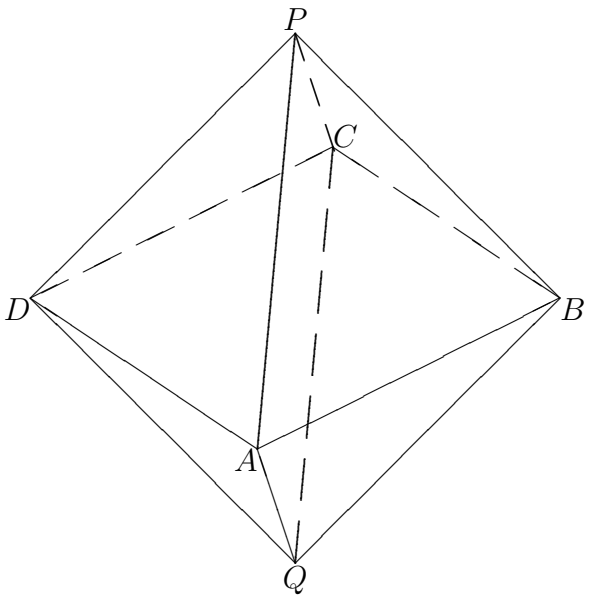
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C		
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

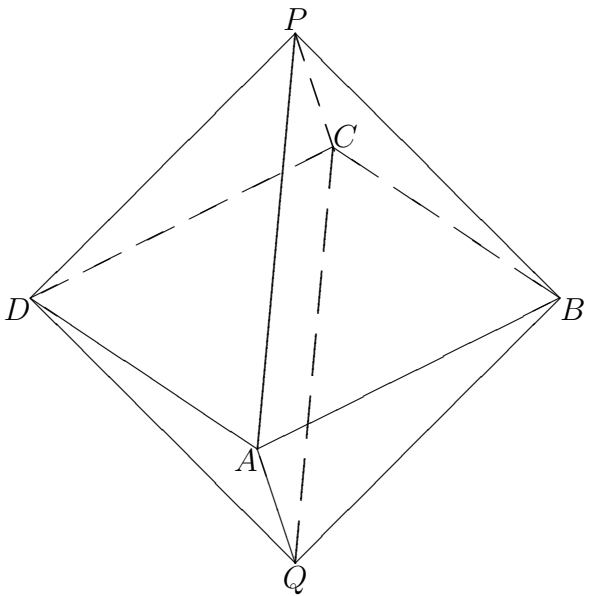
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

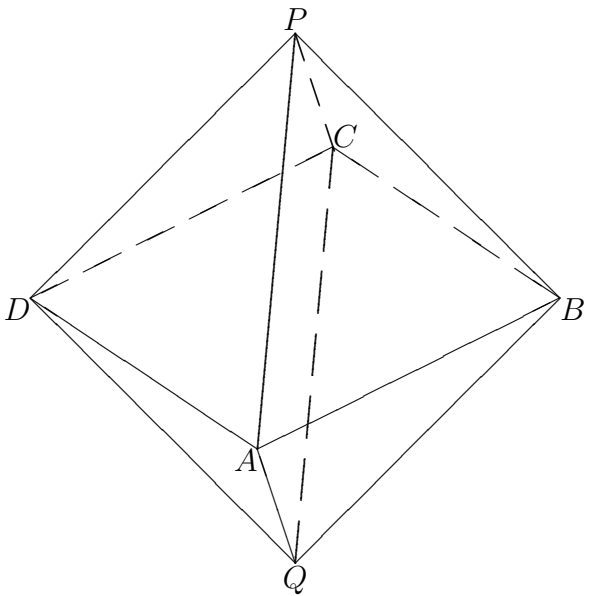
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$						

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

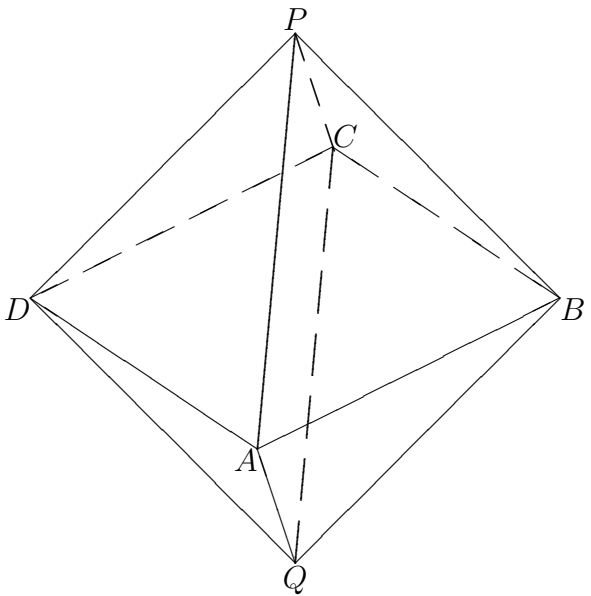
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B			

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

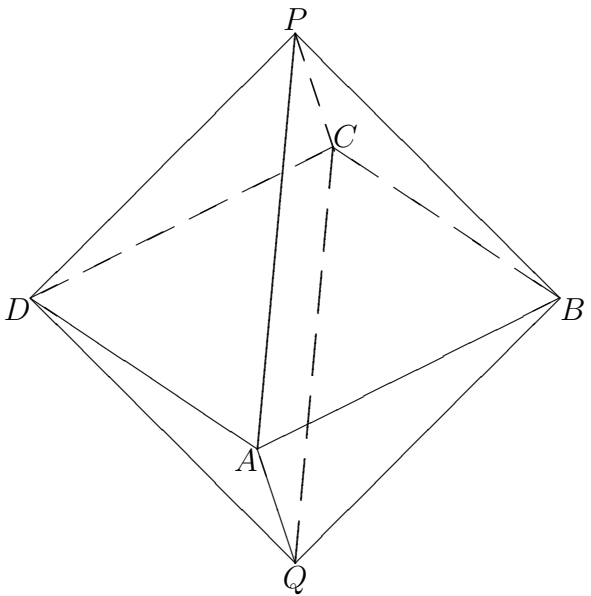
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A		

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

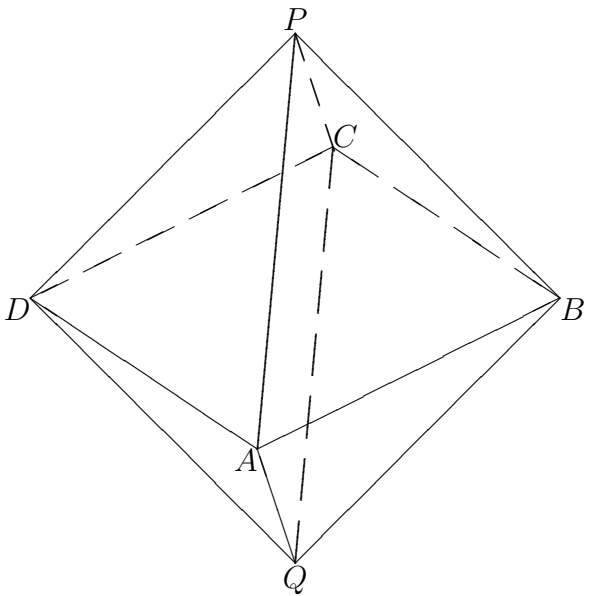
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

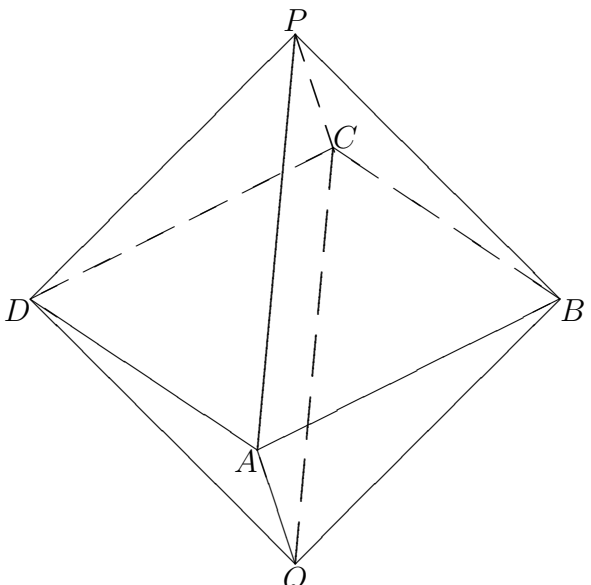
Ответ. Сначала зададим носитель группы D_8.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.

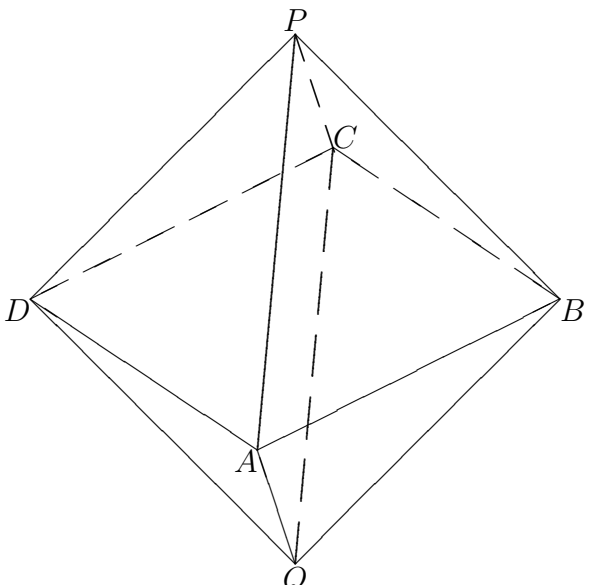


x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k =$

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.

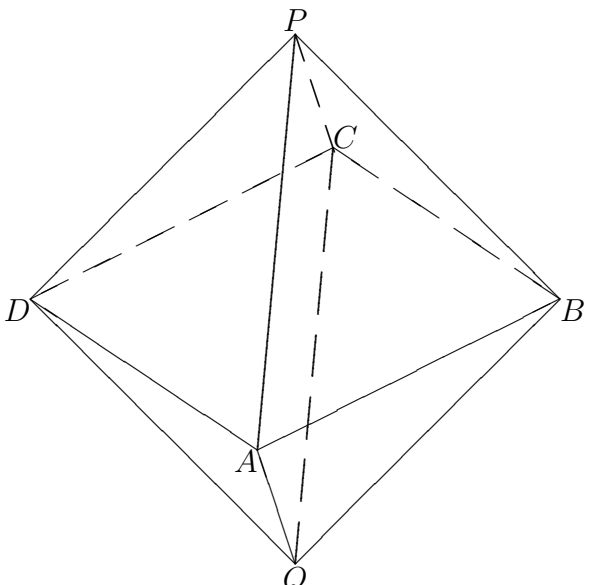


x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k = \qquad\qquad = a^3 =$

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.

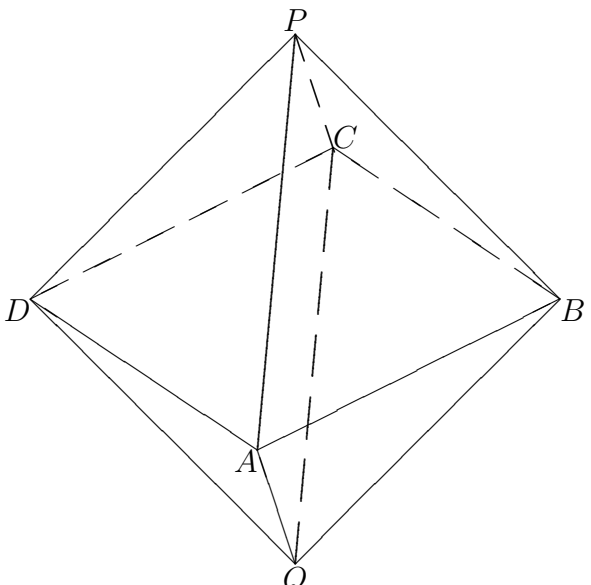


x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k = \qquad\qquad = a^3 = a^{-1}$.

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.

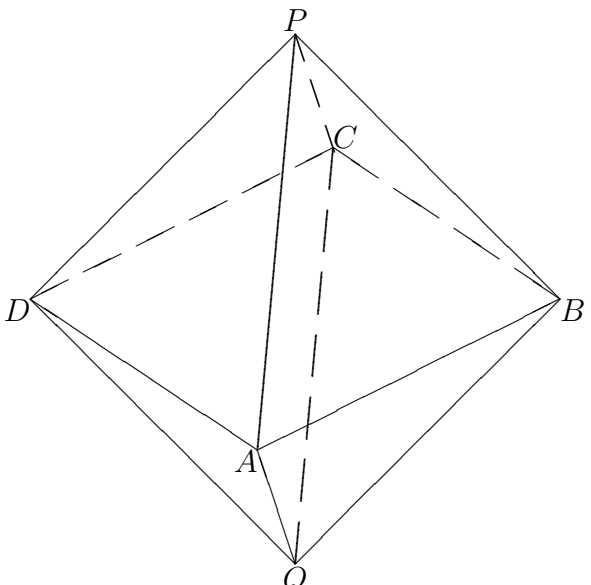


x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k = a^l = \qquad\qquad = a^3 = a^{-1}$.

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.

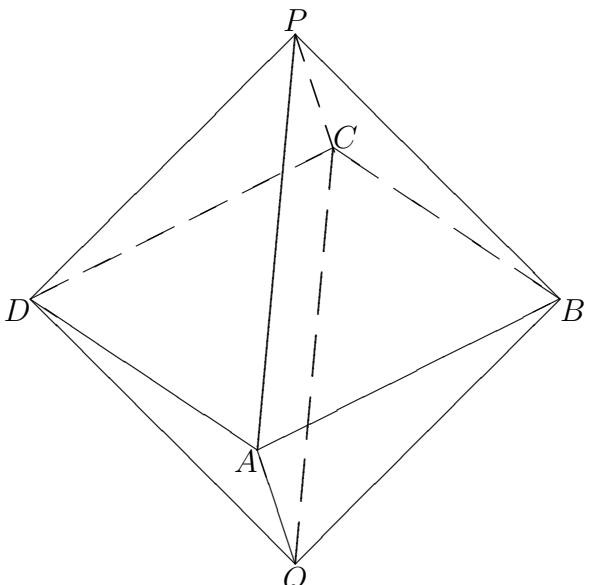


x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k = a^l = a^m = \quad = a^3 = a^{-1}$.

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.

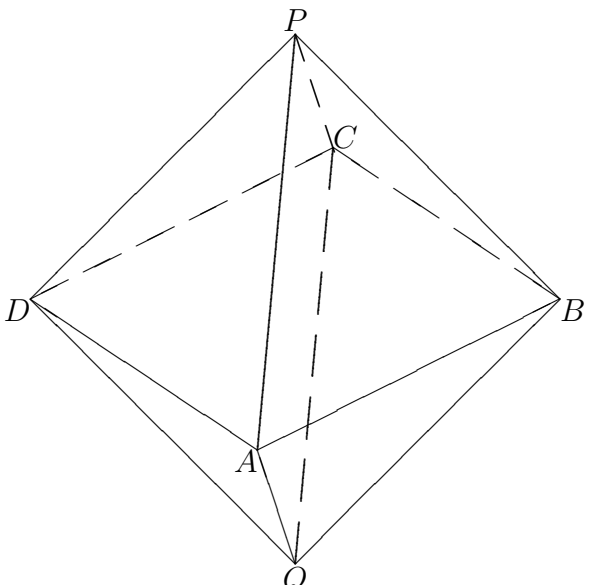


x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k = a^l = a^m = a^n = a^3 = a^{-1}$.

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.

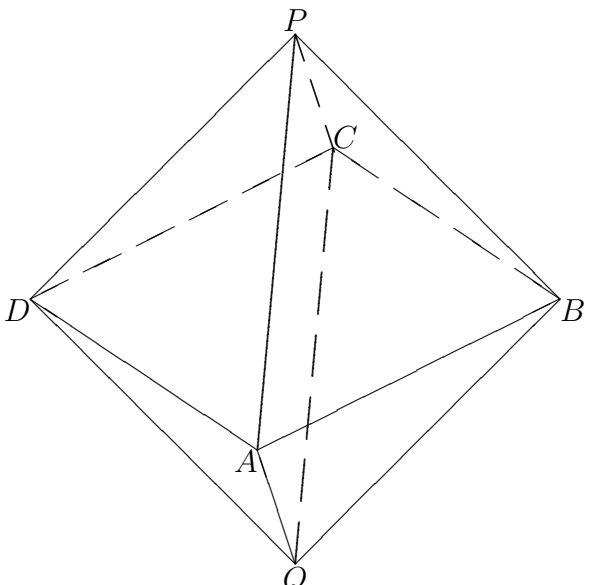


x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k = a^l = a^m = a^n = a^3 = a^{-1}$. $k * m = a$,

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

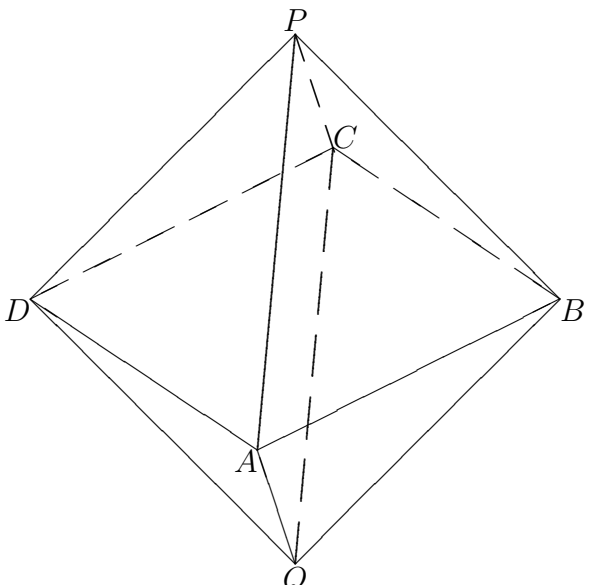
$a^k = a^l = a^m = a^n = a^3 = a^{-1}$. $k * m = a$,

Нетрудно понять, что

$D_8 = \{ \qquad \} \leftthreetimes \{ \quad \} = \{ \qquad \} \leftthreetimes \{ \quad \} =$

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

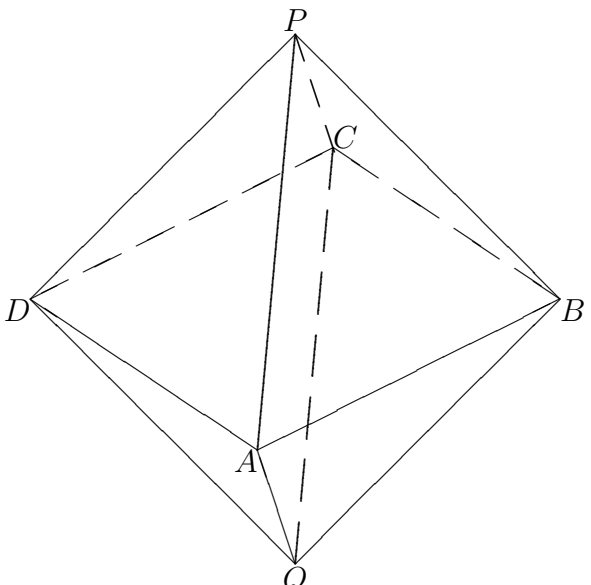
$a^k = a^l = a^m = a^n = a^3 = a^{-1}$. $k * m = a$,

Нетрудно понять, что

$D_8 = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, k\} = \{\qquad\qquad\} \leftthreetimes \{\quad\} =$

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

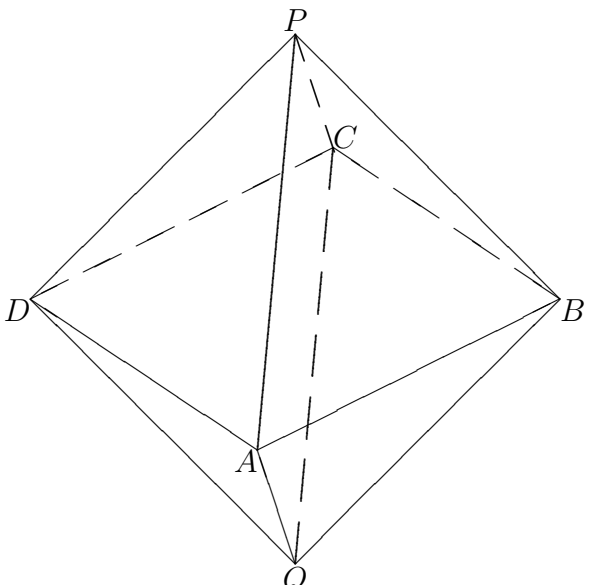
$a^k = a^l = a^m = a^n = a^3 = a^{-1}$. $k * m = a$,

Нетрудно понять, что

$$D_8 = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, k\} = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, l\} =$$

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k = a^l = a^m = a^n = a^3 = a^{-1}$. $k * m = a$,

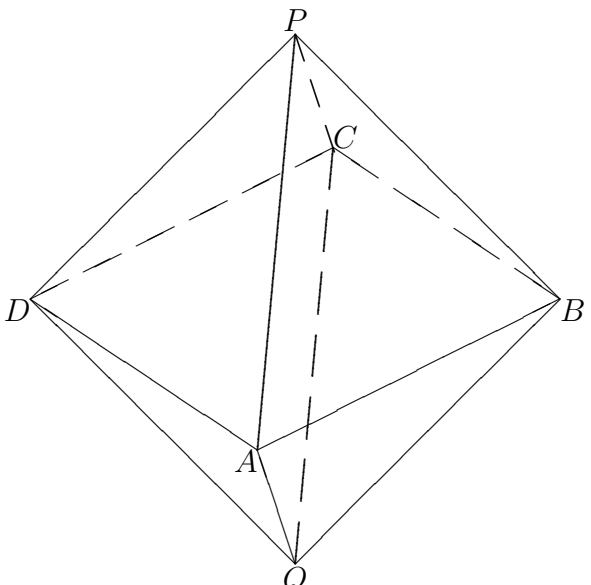
Нетрудно понять, что

$$D_8 = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, k\} = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, l\} =$$

$$= \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, m\} = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, n\} =$$

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k = a^l = a^m = a^n = a^3 = a^{-1}$. $k * m = a$,

Нетрудно понять, что

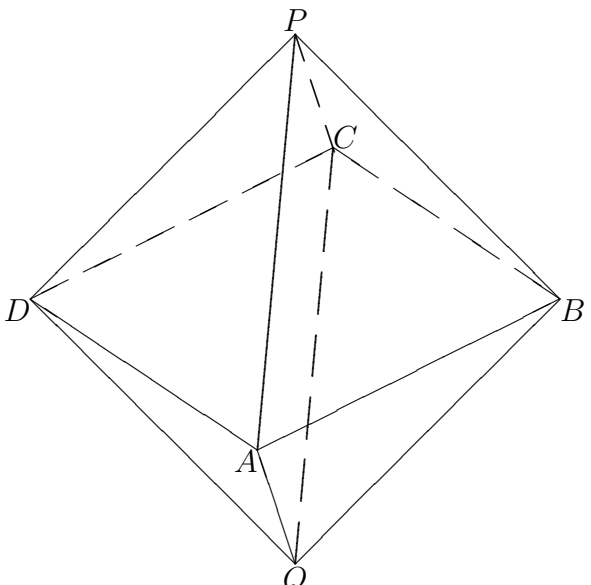
$$D_8 = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, k\} = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, l\} =$$

$$= \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, m\} = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, n\} =$$

$$= (\{e, a^2\} \times \{e, m\}) \leftthreetimes \{e, k\} =$$

Задача 13. Найдите разложение в полупрямое произведение подгрупп группы D_8 поворотов диедра с квадратным «основанием», приводящих к его самосовмещению.

Ответ.



x	A	B	C	D	P	Q
$e(x)$	A	B	C	D	P	Q
$a(x)$	D	A	B	C	P	Q
$a^2(x)$	C	D	A	B	P	Q
$a^3(x)$	C	D	A	B	P	Q
$k(x)$	C	B	A	D	Q	P
$l(x)$	A	D	C	B	Q	P
$m(x)$	B	A	D	C	Q	P
$n(x)$	D	C	B	A	Q	P

$a^k = a^l = a^m = a^n = a^3 = a^{-1}$. $k * m = a$,

Нетрудно понять, что

$$D_8 = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, k\} = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, l\} =$$

$$= \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, m\} = \{e, a, a^2, a^3\} \leftthreetimes \{e, n\} =$$

$$= (\{e, a^2\} \times \{e, m\}) \leftthreetimes \{e, k\} =$$

$$= (\{e, a^2\} \times \{e, k\}) \leftthreetimes \{e, m\}.$$

Решение задачи 14.

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ. Левые смежные классы по подгруппе $\{a,\ p\}$ (элементы множества Ω) равны:

$$\{a,\ p\}, \quad b * \{a,\ p\} = \qquad , \quad c * \{a,\ p\} =$$

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ. Левые смежные классы по подгруппе $\{a,\ p\}$ (элементы множества Ω) равны:

$$\{a,\ p\}, \quad b * \{a,\ p\} = \{b,\ q\}, \quad c * \{a,\ p\} =$$

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ. Левые смежные классы по подгруппе $\{a,\ p\}$ (элементы множества Ω) равны:

$$\{a,\ p\}, \quad b * \{a,\ p\} = \{b,\ q\}, \quad c * \{a,\ p\} = \{c,\ r\}.$$

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a			
b			
c			
p			
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$a * \{a,\ p\}$	$a * \{b,\ q\}$	$a * \{c,\ r\}$
b			
c			
p			
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$a * \{c,\ r\}$
b			
c			
p			
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b			
c			
p			
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$	$\{a,\ p\} =$	$b * \{a,\ p\} =$	$c * \{a,\ p\} =$
g	$= \{a,\ p\}$	$= \{b,\ q\}$	$= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$b * \{a,\ p\}$	$b * \{b,\ q\}$	$b * \{c,\ r\}$
c			
p			
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$b * \{b,\ q\}$	$b * \{c,\ r\}$
c			
p			
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$b * \{c,\ r\}$
c			
p			
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c			
p			
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p			
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q			
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$	$\{a,\ p\} =$	$b * \{a,\ p\} =$	$c * \{a,\ p\} =$
g	$= \{a,\ p\}$	$= \{b,\ q\}$	$= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r			

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a		
b		
c		
p		
q		
r		

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b		
c		
p		
q		
r		

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c		
p		
q		
r		

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p		
q		
r		

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q		
r		

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r		

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$	$\{a,\ p\} =$	$b * \{a,\ p\} =$	$c * \{a,\ p\} =$
g	$= \{a,\ p\}$	$= \{b,\ q\}$	$= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$	$\{a,\ b,\ c\} =$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$
g	$= \{a,\ b,\ c\}$	$= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ —

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ — единичное.

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ — единичное.
Ядро гомоморфизма ψ равно

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ — единичное.
Ядро гомоморфизма ψ равно $\{a,\ b,\ c\}$.

Задача 14. Найти **регулярные представления** φ и ψ **группы** D_6 по подгруппе $\{a,\ p\}$ и, соответственно, по подгруппе $\{a, b, c\}$. Найти **ядра гомоморфизмов** φ и ψ.

Ответ.

$x * \{a,\ p\}$ g	$\{a,\ p\} =$ $= \{a,\ p\}$	$b * \{a,\ p\} =$ $= \{b,\ q\}$	$c * \{a,\ p\} =$ $= \{c,\ r\}$
a	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$
b	$\{b,\ q\}$	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$
c	$\{c,\ r\}$	$\{a,\ p\}$	$\{b,\ q\}$
p	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$
q	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$	$\{c,\ r\}$
r	$\{c,\ r\}$	$\{b,\ q\}$	$\{a,\ p\}$

$x * \{a,\ b,\ c\}$ g	$\{a,\ b,\ c\} =$ $= \{a,\ b,\ c\}$	$p * \{a,\ b,\ c\} =$ $= \{p,\ q,\ r\}$
a	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
b	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
c	$\{a,\ b,\ c\}$	$\{p,\ q,\ r\}$
p	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
q	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$
r	$\{p,\ q,\ r\}$	$\{a,\ b,\ c\}$

Ядро гомоморфизма φ — единичное.
Ядро гомоморфизма ψ равно $\{a,\ b,\ c\}$.
Вернёмся к лекции?

Решение задачи 15.

Задача 15. Найдите **матричное представление** «группы **кватернионов**» Q_8.

Задача 15. Найдите **матричное представление** «группы **кватернионов**» Q_8.

Ответ. Для задания требуемого гомоморфизма естественно воспользоваться **соответствующей формулой**:

Задача 15. Найдите **матричное представление** «группы **кватернионов**» Q_8.

Ответ. Для задания требуемого гомоморфизма естественно воспользоваться **соответствующей формулой**:

x	1	-1	i	$-i$
$\psi(x)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

x	j	$-j$	k	$-k$
$\psi(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

Решение задачи 16.

Задача 16. Найти представление **группы диедра** D_6.

Задача 16. Найти представление **группы диедра** D_6.
Ответ. Пример точного неприводимого представления:

Задача 16. Найти представление **группы диедра** D_6.

Ответ. Пример точного неприводимого представления:

x	a	b	c
$\varphi(x)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

x	p	q	r
$\varphi(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?