Министерство науки и высшего образования РФ
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Ю. Б. Мельников

Элементы математической логики: исчисления

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекции

e-mail:
UriiMelnikov58@gmail.com

Екатеринбург
2020

I. Инструкция к пособию **9**

II. Алгебра высказываний **18**

II.1. Что такое высказывание 19

II.2. Логическая эквивалентность высказываний 40

II.3. Логические и булевы операции 56

II.3.1. Отрицание 74

II.3.2. Конъюнкция 104

II.3.3. Дизъюнкция 145

II.3.4. Импликация 186

II.3.5. Эквиваленция 212

II.4. Логические и булевы функции: итог 224

II.5. Отрицания к базовым логическим функциям 259

II.6. Предикаты и кванторы 260

II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция . . 265
II.6.2. Кванторы 281
II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами 306

III. Исчисления, языки, модели **331**
III.1. Исчисления 336
III.2. Теорема исчисления 340

IV. Неформальное введение в теорию моделей **342**

V. Доказательство **356**

VI. Исчисление высказываний **357**
VI.1. Система связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ 358
VI.1.1. Система аксиом исчисления высказываний (для $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$) 362

VI.1.2. Правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$) 363
VI.1.3. Истинность и выводимость формулы исчисления высказываний 366
VI.2. Система связок $\neg, \rightarrow$ 367
VI.2.1. Система аксиом исчисления высказываний (для $\neg, \rightarrow$) 368
VI.2.2. Правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \rightarrow$) 369

VII. Исчисления предикатов **370**
VII.1. Исчисление предикатов в ассертоническом пропозициональном исчислении 383
VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов 384
VII.1.2. Формула узкого исчисления предикатов 393

VII.1.3. Аксиомы и правила вывода ассертонического исчисления предикатов 398
VII.1.4. Аксиомы исчисления предикатов 399
VII.1.5. Правила вывода в ИП$^{\Sigma}$ 400
VII.2. Интерпретация формулы и теории (модель) 401

Пример 2 проверки истинности и выводимости формулы в дифференциальном исчислении 405

Пример 3 выводимости и истинности формулы 424

Пример 4 выводимости и истинности формулы 488

Пример 5 модели теории 521

Пример 6 исчисления 532

VIII. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ **557**
Пример поиска доказательства 558
Вспомогательная задача 1 561
Вспомогательная задача 2 572
Вспомогательная задача 3 578
Итоговое доказательство 580

Пример 8 доказательства секвенции **581**
Пример 1 обогащения правилами вывода 599
Пример 2 обогащения правилами вывода 611
Пример доказательства с использованием дополнительного правила и без него 615

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$ **619**
Пример поиска доказательства 620

Пример 9 термов 633

Примеры задач для самостоятельного решения 735

Поиск доказательств для исчисления с логическими связками $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ 735

Задача XI.1 736

Задача XI.2 737

Задача XI.3 738

Задача XI.4 739

Задача XI.5 740

Задача XI.6 741

Дополнительные правила вывода 741

Задача XII.7 742

Задача XII.8 743

Ответы и решения 744

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

Кроме того, имеются гиперссылки на пособия **«Математический анализ»** и **«Элементарная математика».**

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения. Имеются гиперссылки на тесты для самообучения и самоконтроля.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В программе `Adobe Reader` и `Acrobat Reader` переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для того, чтобы ***вызвать панель навигации*** в `Acrobat Reader` надо, во-первых, выйти из полноэкранного режима (например, нажатием `Esc`), и, во-вторых, нажать клавишу `F4` и выбрать на левой вертикальной панели вертикальный флажок «Закладки» 🔖.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Алгебра высказываний

Мы рассмотрим несколько основных понятий математической логики, во многом обобщающих так называемую формальную логику, разработанную Аристотелем.

Просим прощения у искушенных читателей за некоторые погрешности изложения, обусловленные необходимостью максимально упростить изложение.

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Как разобраться в непонятном материале?

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Как разобраться в непонятном материале?
Есть два способа.

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Как разобраться в непонятном материале?

Есть два способа.

Перечислим все три ;-)

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Как разобраться в непонятном материале?

Способы: индуктивный,

Рассмотреть большое число примеров.

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Как разобраться в непонятном материале?

Способы: индуктивный, дедуктивный,

Получить следствия из имеющихся утверждений, построить теорию.

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Как разобраться в непонятном материале?

Способы: индуктивный, дедуктивный, построение модели.

Опираться на аналогию, изучать модель.

Обычно этот способ применяется после применения первых двух способов.

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Примерами высказываний являются фразы:

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Примерами высказываний являются фразы:

на улице идет дождь;

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Примерами высказываний являются фразы:

на улице идет дождь;

AM — медиана треугольника ABC;

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Примерами высказываний являются фразы:

на улице идет дождь;

AM — медиана треугольника ABC;

$x^2 - 2x < 0$;

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Примерами высказываний являются фразы:

на улице идет дождь;

AM — медиана треугольника ABC;

$x^2 - 2x < 0$;

$\begin{cases} x + 2y = 2; \\ x - y = 1; \end{cases}$

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Примерами высказываний являются фразы:

на улице идет дождь;

AM — медиана треугольника ABC;

$x^2 - 2x < 0$;

$\begin{cases} x + 2y = 2; \\ x - y = 1; \end{cases}$

$x < y < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > y^2.$

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Не являются высказываниями фразы:

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Не являются высказываниями фразы:

$x^2 - 5x + 4$;

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Не являются высказываниями фразы:

$x^2 - 5x + 4$;

закройте дверь!

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Не являются высказываниями фразы:

$x^2 - 5x + 4$;

закройте дверь!

Является ли треугольник ABC равнобедренным?

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Отметим, что мы можем не знать ответ на вопрос: «верно ли высказывание...?», важно, что ответ существует в принципе.

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Отметим, что мы можем не знать ответ на вопрос: «верно ли высказывание...?», важно, что ответ существует в принципе.

Например, в настоящий момент нам не известно, верно ли высказывание «на марсе есть живые существа».

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Отметим, что мы можем не знать ответ на вопрос: «верно ли высказывание...?», важно, что ответ существует в принципе.

Например, в настоящий момент нам не известно, верно ли высказывание «на марсе есть живые существа».

На этот вопрос мы когда-то получим ответ. Но возможны высказывания, ответ на которые мы, возможно, не найдем однозначный ответ никогда.

II.1. Что такое высказывание

Под **высказыванием** мы будем понимать фразу, относительно которой осмысленным является вопрос, верна эта фраза или нет.

Отметим, что мы можем не знать ответ на вопрос: «верно ли высказывание...?», важно, что ответ существует в принципе.

Например, в настоящий момент нам не известно, верно ли высказывание «на марсе есть живые существа».

На этот вопрос мы когда-то получим ответ. Но возможны высказывания, ответ на которые мы, возможно, не найдем однозначный ответ никогда.

Важно лишь, что ответ в принципе существует!

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

Сравните фразы: «мамаша с детенышем пытается перейти дорогу» и «мама с ребенком пробует перейти дорогу».

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

Сравните фразы: «мамаша с детенышем пытается перейти дорогу» и «мама с ребенком пробует перейти дорогу».

В первой из этих фраз чувствуется пренебрежение: использование слова «мамаша», ребенка обозвали «детенышем» (этот термин обычно относят к животным).

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

Сравните фразы: «мамаша с детенышем пытается перейти дорогу» и «мама с ребенком пробует перейти дорогу».

В первой из этих фраз чувствуется пренебрежение: использование слова «мамаша», ребенка обозвали «детенышем» (этот термин обычно относят к животным).

Вторая фраза более нейтральная, во всяком случае, о ситуации сообщается более уважительно.

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

Сравните фразы: «этот компьютер дешёвый, но мощный», «этот компьютер дешёвый и мощный» и «этот компьютер и дешёвый, и мощный».

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

Сравните фразы: «этот компьютер дешёвый, но мощный», «этот компьютер дешёвый и мощный» и «этот компьютер и дешёвый, и мощный».

В первой фразе явно ощущается оттенок удивления, вторая фраза совершенно нейтральна, а в третьей фразе сделан упор на наличие обоих качеств (например, последняя фраза очень органично смотрелась бы в рекламе компьютера).

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:
эмоциональный окрас;

Сравните фразы: «этот компьютер дешёвый, но мощный», «этот компьютер дешёвый и мощный» и «этот компьютер и дешёвый, и мощный».

В первой фразе явно ощущается оттенок удивления, вторая фраза совершенно нейтральна, а в третьей фразе сделан упор на наличие обоих качеств (например, последняя фраза очень органично смотрелась бы в рекламе компьютера).

Однако, *логически* эти фразы равносильны, поскольку ответ на вопрос «верна ли эта фраза» будет одинаков в любой конкретной ситуации.

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

грамматическая сложность;

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

грамматическая сложность;

Например, сравните фразы «этот автомобиль является громоздким, к тому же данная машина имеет красный цвет, однако рассчитана только на двух пассажиров» и «этот двухместный красный автомобиль является громоздким».

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

грамматическая сложность;

Например, сравните фразы «этот автомобиль является громоздким, к тому же данная машина имеет красный цвет, однако рассчитана только на двух пассажиров» и «этот двухместный красный автомобиль является громоздким».

Другой пример: $3(2x-2)+2(4-4(x+2))=0$ и $x=-7$ верны одновременно, но вторая фраза, очевидно, гораздо короче, проще и понятнее.

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

грамматическая сложность;

используемый язык и т.д.

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

грамматическая сложность;

используемый язык и т.д.

Например, фразы «переменная x равна 3», «the variable x is equal to 3» и $x = 3$ означают одно и то же, но сформулированы на разных языках.

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

грамматическая сложность;

используемый язык и т.д.

Например, фразы «переменная x равна 3», «the variable x is equal to 3» и $x = 3$ означают одно и то же, но сформулированы на разных языках.

Более того, если известно, что через x обозначена длина отрезка, то фраза $\underbrace{\qquad x \qquad}_{3}$, сформулированная на языке геометрических чертежей, равносильна предыдущим трём фразам.

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:

эмоциональный окрас;

грамматическая сложность;

используемый язык и т.д.

Но в логике нас интересует только истинность или ложность высказывания, от остальных его характеристик мы абстрагируемся.

II.2. Логическая эквивалентность высказываний

У высказывания есть множество характеристик:
эмоциональный окрас;
грамматическая сложность;
используемый язык и т.д.
Но в логике нас интересует только истинность или ложность высказывания, от остальных его характеристик мы абстрагируемся.

Поэтому *мы будем считать высказывания (***логически***)* **эквивалентными** *или (***логически***)* **равносильными**, *если истинность одного из них влечет истинность другого.*

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Мы рассматриваем единственную характеристику высказывания: его истинность или ложность.

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Мы рассматриваем единственную характеристику высказывания: его истинность или ложность.

Если X — это высказывание, то через x будем обозначать его логическое значение:

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Мы рассматриваем единственную характеристику высказывания: его истинность или ложность.

Если X — это высказывание, то через x будем обозначать его логическое значение:

$x = 1$ тогда и только тогда, когда высказывание X истинно;

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Мы рассматриваем единственную характеристику высказывания: его истинность или ложность.

Если X — это высказывание, то через x будем обозначать его логическое значение:

$x = 1$ тогда и только тогда, когда высказывание X истинно;

$x = 0$ тогда и только тогда, когда высказывание X ложно.

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Если, например, Z — результат применения некоторой логической операции к упорядоченной паре высказываний X и Y, то логическое значение z зависит только от логических значений x и y, поскольку

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Если, например, Z — результат применения некоторой логической операции к упорядоченной паре высказываний X и Y, то логическое значение z зависит только от логических значений x и y, поскольку при замене высказывания X на **логически эквивалентное** высказывание X' логические значения сохраняются: $x = x'$.

Поэтому...

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Каждой **логической операции**, *оперирующей высказываниями, соответствует* **булева функция**, *оперирующая с логическими значениями.*

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Каждой **логической операции**, *оперирующей высказываниями, соответствует* **булева функция**, *оперирующая с логическими значениями.*

Справедливо и обратное, поскольку по логическому значению x нетрудно восстановить исходное высказывание X: _____

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Каждой **логической операции**, *оперирующей высказываниями, соответствует* **булева функция**, *оперирующая с логическими значениями.*

Справедливо и обратное, поскольку по логическому значению x нетрудно восстановить исходное высказывание X: _____

(отождествляем **логически эквивалентные высказывания**!)

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Каждой **логической операции**, *оперирующей высказываниями, соответствует* **булева функция**, *оперирующая с логическими значениями.*

Справедливо и обратное, поскольку по логическому значению x нетрудно восстановить исходное высказывание X: _____

(отождествляем **логически эквивалентные высказывания**!)

Какие высказывания можно поставить в соответствие числу x?

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Каждой **логической операции**, *оперирующей высказываниями, соответствует* **булева функция**, *оперирующая с логическими значениями.*

Справедливо и обратное, поскольку по логическому значению x нетрудно восстановить исходное высказывание X: $\underline{x = 1.}$
(отождествляем **логически эквивалентные высказывания**!)
Какие высказывания можно поставить в соответствие числу x?

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Булева функция упорядоченной n-ке нулей и единиц сопоставляет 0 или 1.

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Булева функция упорядоченной n-ке нулей и единиц сопоставляет 0 или 1.

По булевой функции восстанавливается соответствующая логическая функция, поскольку высказывание B восстанавливается по его логическому значению b:

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Булева функция упорядоченной n-ке нулей и единиц сопоставляет 0 или 1.

По булевой функции восстанавливается соответствующая логическая функция, поскольку высказывание B восстанавливается по его логическому значению b: $B \quad \sim$

(здесь $\sim$ — символ эквивалентности высказываний)

II.3. Логические и булевы операции

Мы отождествляем **логически эквивалентные высказывания.**

Высказывание будем задавать с помощью конкретной фразы, но она может быть заменена любой ***логически*** *эквивалентной.*

Логическая операция (**логическая функция**) высказыванию X или упорядоченной паре высказываний (X, Y) сопоставляет некоторое высказывание (которое может быть заменено на **логически** эквивалентное).

Булева функция упорядоченной n-ке нулей и единиц сопоставляет 0 или 1.

По булевой функции восстанавливается соответствующая логическая функция, поскольку высказывание B восстанавливается по его логическому значению b: $B \quad \sim \quad b = 1.$

(здесь $\sim$ — символ эквивалентности высказываний)

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Отметим, что высказывание $\neg X$ **логически эквивалентно** высказываниям «неверно, что X», «высказывание X ложно», «высказывание X неверно».

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$*, обозначаемое также* $\overline{X}$*,* ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$*, обозначаемое также* $\overline{X}$*,* ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Как разобраться в непонятном материале?

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Как разобраться в непонятном материале? Есть два способа.

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$*, обозначаемое также* $\overline{X}$*,* ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Как разобраться в непонятном материале?
Есть два способа.
Перечислим все три ;-)

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$*, обозначаемое также* $\overline{X}$*,* ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Как разобраться в непонятном материале?

Способы: индуктивный,

Рассмотреть большое число примеров.

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$*, обозначаемое также* $\overline{X}$*,* ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Как разобраться в непонятном материале?

Способы: индуктивный, дедуктивный,

Получить следствия из имеющихся утверждений, построить теорию.

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то
высказывание «неверно, что X» _____

Как разобраться в непонятном материале?
Способы: индуктивный, дедуктивный, построение модели.

Опираться на аналогию, изучать модель.
Обычно этот способ применяется после применения первых двух способов.

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание « » _____

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$*, обозначаемое также* $\overline{X}$*,* ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание « » _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание « » _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что $4 > 5$» _____

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что $4 > 5$» _____

Истинно или ложно?

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что $4 > 5$» истинно.

Истинно или ложно?

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	

Если высказывание X ложно, то высказывание «неверно, что X» истинно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что $4 > 5$» истинно.

Истинно или ложно?

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1

Если высказывание X ложно, то
высказывание «неверно, что X» истинно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$,
т.е. высказывание «неверно, что $4 > 5$» истинно.

Истинно или ложно?

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$*, обозначаемое также* $\overline{X}$*,* ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	

Если высказывание X истинно, то высказывание «неверно, что X» _____

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	

Если высказывание X истинно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что » _____

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$*, обозначаемое также* $\overline{X}$*,* ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	

Если высказывание X истинно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если X $\sim$, то высказывание $\neg X$ $\sim$ $\overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что » _____

Надо какое-нибудь верное утверждение...

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$*, обозначаемое также* $\overline{X}$*,* ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	

Если высказывание X истинно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что » _____

Надо какое-нибудь верное утверждение...

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	

Если высказывание X истинно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что $4 < 5$» _____

Надо какое-нибудь верное утверждение...

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	

Если высказывание X истинно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что $4 < 5$» _____

Истинно или ложно?

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	

Если высказывание X истинно, то высказывание «неверно, что X» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что $4 < 5$» ложно.

Истинно или ложно?

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	

Если высказывание X истинно, то высказывание «неверно, что X» ложно.

Например, если $X \sim 4 < 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что $4 < 5$» ложно.

Истинно или ложно?

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

Если высказывание X истинно, то высказывание «неверно, что X» ложно.

Например, если $X \sim 4 < 5$, то высказывание $\neg X \sim \overline{X}$, т.е. высказывание «неверно, что $4 < 5$» ложно.

Истинно или ложно?

II.3.1. Отрицание

Логическая *функция* **отрицание** *высказыванию* X *сопоставляет высказывание* $\neg X$, *обозначаемое также* $\overline{X}$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «не* X*».*

Логической операции «отрицание» соответствует одноименная **булева функция** отрицание, которую можно задать таблицей истинности.

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

Это стоит записать и запомнить!

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Отметим, что высказывание $X \wedge Y$ **логически эквивалентно** высказываниям «X, а Y», «X, но Y», «и X, и Y».

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x y	$x\&y = x \wedge y$

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Если вы способны сами заполнить таблицу, **сравните результат.**

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» _____

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim$ _____, и $Y \sim$ _____, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «_____ и _____» _____

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim$ _____, и $Y \sim$ _____, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «_____ и _____» _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и » _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и » _____

Надо ещё какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 5$» _____

Надо ещё какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 5$» _____

Истинно или ложно?

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 5$» ложно.

Истинно или ложно?

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» ложно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 5$» ложно.

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X и Y» ложно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 5$» ложно.

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» _____

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim$, и $Y \sim$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание « и » _____

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim$ _____, и $Y \sim$ _____, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «_____ и _____» _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и » _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и » _____

Теперь надо какое-нибудь верное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 4$» _____

Теперь надо какое-нибудь верное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 4$» _____

Истинно или ложно?

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 4$» ложно.

Истинно или ложно?

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» ложно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 4$» ложно.

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X и Y» ложно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ и $2^2 = 4$» ложно.

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» _____

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim$ _____, и $Y \sim$ _____, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «_____ и _____» _____

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim$, и $Y \sim$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание « и » _____

Надо какое-нибудь истинное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ и » _____

Надо какое-нибудь истинное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ и » _____

Теперь надо какое-нибудь ложное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ и $2^2 = 5$» _____

Теперь надо какое-нибудь ложное утверждение...

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ и $2^2 = 5$» _____

Истинно или ложно?

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ и $2^2 = 5$» ложно.

Истинно или ложно?

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» ложно.

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ и $2^2 = 5$» ложно.

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X и Y» ложно.

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \wedge Y \sim X\&Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ и $2^2 = 5$» ложно.

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	

Например, высказывание « и » _____

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	

Например, высказывание «$4 < 5$ и » _____

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	

Например, высказывание «$4 < 5$ и $2^2 = 4$» _____

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	

Например, высказывание «$4 < 5$ и $2^2 = 4$» истинно.

II.3.2. Конъюнкция

Логическая *функция* **конъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X\&Y$, *обозначаемое также* $X \wedge Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *и* Y*».*

Логической операции «конъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** конъюнкция, которую можно задать таблицей истинности.

x	y	$x\&y = x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Например, высказывание «$4 < 5$ и $2^2 = 4$» истинно.

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Отметим, что высказывание $X \vee Y$ **логически эквивалентно** высказыванию «либо X, либо Y, либо и X, и Y».

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если вы способны сами заполнить таблицу, **сравните результат.**

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» _____

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание « или » _____

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание « или » _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или » _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или » _____

Надо ещё какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 5$» _____

Надо ещё какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 5$» _____

Истинно или ложно?

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 5$» ложно.

Истинно или ложно?

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» ложно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 5$» ложно.

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0

Если высказывания X и Y ложны, то высказывание «X или Y» ложно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 5$» ложно.

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» _____

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание « или » _____

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание « или » _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или » _____

Надо какое-нибудь неверное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или » _____

Теперь надо какое-нибудь верное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 4$» _____

Теперь надо какое-нибудь верное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 4$» _____

Истинно или ложно?

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 4$» истинно.

Истинно или ложно?

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» истинно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 4$» истинно.

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1

Если высказывание X ложно, а Y истинно, то высказывание «X или Y» истинно.

Например, если $X \sim 4 > 5$, и $Y \sim 2^2 = 4$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 > 5$ или $2^2 = 4$» истинно.

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» _____

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание « или » _____

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание « или » _____

Надо какое-нибудь истинное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ или » _____

Надо какое-нибудь истинное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ или » _____

Теперь надо какое-нибудь ложное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ или $2^2 = 5$» _____

Теперь надо какое-нибудь ложное утверждение...

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ или $2^2 = 5$» _____

Истинно или ложно?

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» _____

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ или $2^2 = 5$» истинно.

Истинно или ложно?

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» истинно.

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ или $2^2 = 5$» истинно.

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1

Если высказывание X истинно, а Y ложно, то высказывание «X или Y» истинно.

Например, если $X \sim 4 < 5$, и $Y \sim 2^2 = 5$, то высказывание $X \vee Y$, т.е. высказывание «$4 < 5$ или $2^2 = 5$» истинно.

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	

Например, высказывание « или » _____

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	

Например, высказывание «$4 < 5$ или » _____

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	

Например, высказывание «$4 < 5$ или $2^2 = 4$» _____

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	

Например, высказывание «$4 < 5$ или $2^2 = 4$» истинно.

II.3.3. Дизъюнкция

Логическая *функция* **дизъюнкция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \vee Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *или* Y*».*

Логической операции «дизъюнкция» соответствует одноименная **булева функция** дизъюнкция, которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Например, высказывание «$4 < 5$ или $2^2 = 4$» истинно.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Отметим, что высказывание $X \Rightarrow Y$ **логически эквивалентно** высказываниям «из X следует Y», «X влечет Y», «из X вытекает Y».

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1		
1		

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	0	
1		

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	0	
1		

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

Если посылка X истинна, но заключение Y ложно, то импликация $X \Rightarrow Y$ _____

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	0	
1		

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

Если посылка X истинна, но заключение Y ложно, то импликация $X \Rightarrow Y$ ложна.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	0	0
1		

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

Если посылка X истинна, но заключение Y ложно, то импликация $X \Rightarrow Y$ ложна.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	0	0
1	1	

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	0	0
1	1	

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

Если и посылка X, и заключение Y истинны, то импликация $X \Rightarrow Y$ _____

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	0	0
1	1	

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

Если и посылка X, и заключение Y истинны, то импликация $X \Rightarrow Y$ истинна.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	0	0
1	1	1

Если высказывание X истинно, то, очевидно, истинность импликации $X \Rightarrow Y$ определяется истинностью Y.

Если и посылка X, и заключение Y истинны, то импликация $X \Rightarrow Y$ истинна.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	0	0
1	1	1

Теперь рассмотрим случай, когда посылка X ложна.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0		
0		
1	0	0
1	1	1

Теперь рассмотрим случай, когда посылка X ложна.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0		
0		
1	0	0
1	1	1

Теперь рассмотрим случай, когда посылка X ложна.

Если заключение Y тем не менее верно, то импликация $X \Rightarrow Y$ _____

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Теперь рассмотрим случай, когда посылка X ложна.

Если заключение Y тем не менее верно, то импликация $X \Rightarrow Y$ _____

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0		
0	1	
1	0	0
1	1	1

Теперь рассмотрим случай, когда посылка X ложна.

Если заключение Y тем не менее верно, то импликация $X \Rightarrow Y$ истинна.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Теперь рассмотрим случай, когда посылка X ложна.

Если заключение Y тем не менее верно, то импликация $X \Rightarrow Y$ истинна.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Теперь рассмотрим случай, когда посылка X ложна.

Осталось понять, верна ли импликация $X \Rightarrow Y$, если и посылка X, и заключение Y ложны.

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0	0	
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Верна ли теорема Пифагора «*в прямоугольном треугольнике квадрат длины наибольшей стороны равен сумме квадратов длин других сторон*» для равностороннего треугольника?

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0	0	
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Верна ли теорема Пифагора «*в прямоугольном треугольнике квадрат длины наибольшей стороны равен сумме квадратов длин других сторон*» для равностороннего треугольника?

Если неверна, то получается, что равносторонний треугольник опровергает теорему Пифагора!

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0	0	
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Верна ли теорема Пифагора «*в прямоугольном треугольнике квадрат длины наибольшей стороны равен сумме квадратов длин других сторон*» для равностороннего треугольника?

Если неверна, то получается, что равносторонний треугольник опровергает теорему Пифагора! Нонсенс!

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0	0	
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Верна ли теорема Пифагора «*в прямоугольном треугольнике квадрат длины наибольшей стороны равен сумме квадратов длин других сторон*» для равностороннего треугольника?

Значит, для равностороннего треугольника теорема Пифагора верна ***независимо от истинности её заключения!***

II.3.4. Импликация

Логическая *функция* **импликация** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Rightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «если* X, *то* Y*».*

Высказывание X называется **посылкой**, а Y — **заключением**.

Логической операции «импликация» соответствует одноименная **булева функция** импликация (но обозначаемая $x \to y$ по сравнению с логической функцией $X \Rightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Утверждение об истинности импликации с ложной посылкой на сленге звучит так: «***из лжи следует всё, что угодно***».

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Отметим, что высказывание $X \Leftrightarrow Y$ **логически эквивалентно** высказываниям «для X необходимо и достаточно, чтобы Y», «X равносильно Y», «X, если и только если Y».

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$

Если оба высказывания X и Y истинны или оба высказывания X и Y ложны, то очевидно, эквиваленция $X \Rightarrow Y$ является _____

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	
1	1	

Если оба высказывания X и Y истинны или оба высказывания X и Y ложны, то очевидно, эквиваленция $X \Rightarrow Y$ является _____

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	
1	1	

Если оба высказывания X и Y истинны или оба высказывания X и Y ложны, то очевидно, эквиваленция $X \Rightarrow Y$ является истинной.

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
1	1	1

Если оба высказывания X и Y истинны или оба высказывания X и Y ложны, то очевидно, эквиваленция $X \Rightarrow Y$ является истинной.

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
1	1	1

Если одно из высказываний X, Y истинно, а другое ложно, то очевидно, эквиваленция $X \Rightarrow Y$ является _____

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	
1	0	
1	1	1

Если одно из высказываний X, Y истинно, а другое ложно, то очевидно, эквиваленция $X \Rightarrow Y$ является _____

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	
1	0	
1	1	1

Если одно из высказываний X, Y истинно, а другое ложно, то очевидно, эквиваленция $X \Rightarrow Y$ является ложной.

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Если одно из высказываний X, Y истинно, а другое ложно, то очевидно, эквиваленция $X \Rightarrow Y$ является ложной.

II.3.5. Эквиваленция

Логическая *функция* **эквиваленция** *паре высказываний* X *и* Y *сопоставляет высказывание* $X \Leftrightarrow Y$, ***логически эквивалентное*** *высказыванию «*X *тогда и только тогда, когда* Y*».*

Логической операции «эквиваленция» соответствует одноименная **булева функция** эквиваленция (но обозначаемая $x \leftrightarrow y$ по сравнению с логической функцией $X \Leftrightarrow Y$), которую можно задать таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Очевидно, что эквиваленция является отрицанием «исключающего ИЛИ», т.е. отрицанием к высказыванию «либо X, либо Y».

II.4. Логические и булевы функции: итог

название					
логическая					

II.4. Логические и булевы функции: итог

название		КОНЪЮНКЦИЯ			
логическая					

II.4. Логические и булевы функции: итог

название	конъюнкция			
логическая	X и Y			
	$X \& Y$			

II.4. Логические и булевы функции: итог

название	конъюнкция			
логическая	X и Y			
	$X \& Y$			
x y				
0 0 0 1 1 0 1 1				

II.4. Логические и булевы функции: итог

название	конъюнкция			
логическая	X и Y			
	$X\&Y$			
x y	$x\&y = x \wedge y$			
0 0 0 1 1 0 1 1				

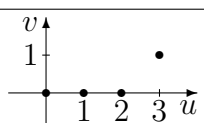
II.4. Логические и булевы функции: итог

название	конъюнкция			
логическая	X и Y			
	$X\&Y$			
x y	$x\&y = x \wedge y$			
0 0	0			
0 1	0			
1 0	0			
1 1	1			

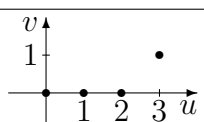
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция			
логическая			X и Y			
			$X\&Y$			
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$			
0	0	0	0			
1	0	1	0			
2	1	0	0			
3	1	1	1			
$u = 2^x + y$						

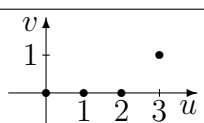
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция			
логическая			X и Y			
			$X\&Y$			
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$			
0	0	0	0			
1	0	1	0			
2	1	0	0			
3	1	1	1			
$u = 2^x + y$						

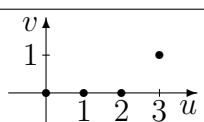
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция		
логическая			X и Y			
			$X\&Y$			
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$			
0	0	0	0			
1	0	1	0			
2	1	0	0			
3	1	1	1			
$u = 2^x + y$						

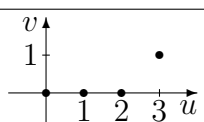
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция		
логическая			X и Y	X или Y		
			$X\&Y$	$X \vee Y$		
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$			
0	0	0	0			
1	0	1	0			
2	1	0	0			
3	1	1	1			
$u = 2^x + y$						

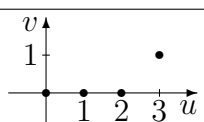
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция		
логическая			X и Y	X или Y		
			$X\&Y$	$X \vee Y$		
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$		
0	0	0	0			
1	0	1	0			
2	1	0	0			
3	1	1	1			
$u = 2^x + y$						

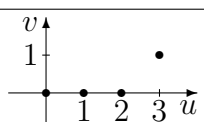
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция		
логическая			X и Y	X или Y		
			$X\&Y$	$X \vee Y$		
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$		
0	0	0	0	0		
1	0	1	0			
2	1	0	0			
3	1	1	1			
$u = 2^x + y$						

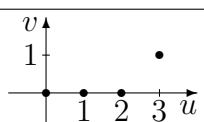
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция		
логическая			X и Y	X или Y		
			$X\&Y$	$X \vee Y$		
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$		
0	0	0	0	0		
1	0	1	0	1		
2	1	0	0			
3	1	1	1			
$u = 2^x + y$						

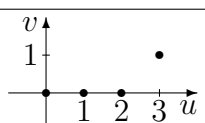
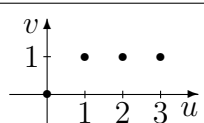
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция		
логическая			X и Y	X или Y		
			$X\&Y$	$X \vee Y$		
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$		
0	0	0	0	0		
1	0	1	0	1		
2	1	0	0	1		
3	1	1	1			
$u = 2^x + y$						

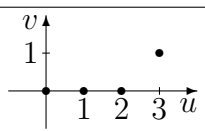
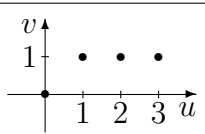
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция		
логическая			X и Y	X или Y		
			$X\&Y$	$X \vee Y$		
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$		
0	0	0	0	0		
1	0	1	0	1		
2	1	0	0	1		
3	1	1	1	1		
$u = 2^x + y$						

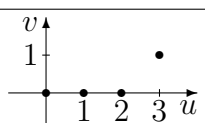
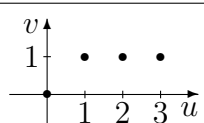
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция		
логическая			X и Y	X или Y		
			$X\&Y$	$X \vee Y$		
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$		
0	0	0	0	0		
1	0	1	0	1		
2	1	0	0	1		
3	1	1	1	1		
$u = 2^x + y$						

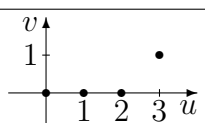
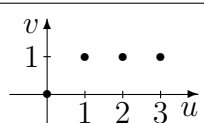
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	
логическая			X и Y	X или Y		
			$X\&Y$	$X \vee Y$		
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$		
0	0	0	0	0		
1	0	1	0	1		
2	1	0	0	1		
3	1	1	1	1		
$u = 2^x + y$						

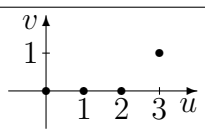
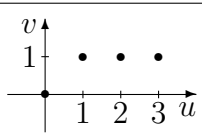
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$		
0	0	0	0	0		
1	0	1	0	1		
2	1	0	0	1		
3	1	1	1	1		
$u = 2^x + y$						

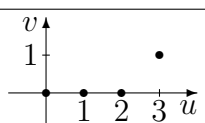
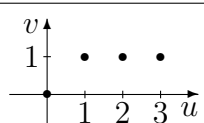
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	
0	0	0	0	0		
1	0	1	0	1		
2	1	0	0	1		
3	1	1	1	1		
$u = 2^x + y$						

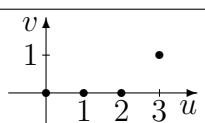
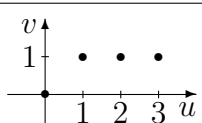
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	
0	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1		
2	1	0	0	1		
3	1	1	1	1		
$u = 2^x + y$						

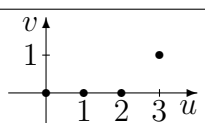
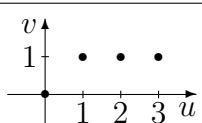
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	
0	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	1	
2	1	0	0	1		
3	1	1	1	1		
$u = 2^x + y$						

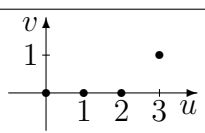
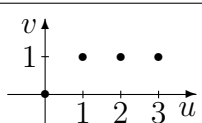
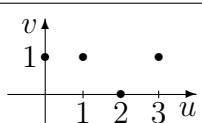
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	
0	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	1	
2	1	0	0	1	0	
3	1	1	1	1		
$u = 2^x + y$						

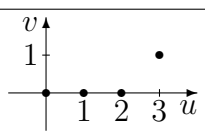
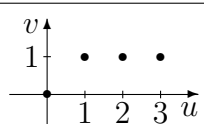
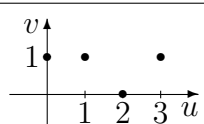
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	
0	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	1	
2	1	0	0	1	0	
3	1	1	1	1	1	
$u = 2^x + y$						

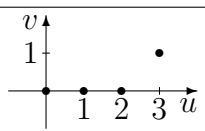
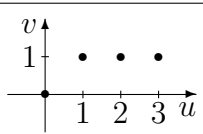
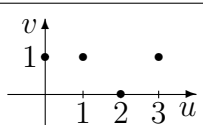
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	
0	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	1	
2	1	0	0	1	0	
3	1	1	1	1	1	
$u = 2^x + y$						

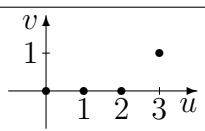
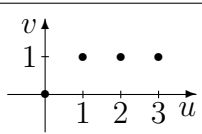
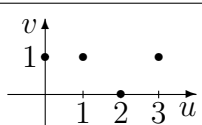
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	
0	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	1	
2	1	0	0	1	0	
3	1	1	1	1	1	
$u = 2^x + y$						

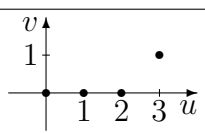
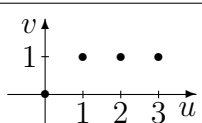
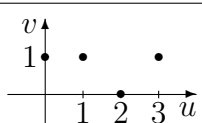
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	
0	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	1	
2	1	0	0	1	0	
3	1	1	1	1	1	
$u = 2^x + y$						

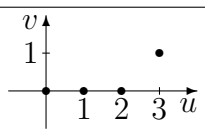
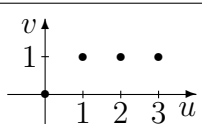
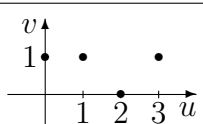
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	1	
2	1	0	0	1	0	
3	1	1	1	1	1	
$u = 2^x + y$						

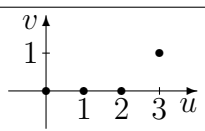
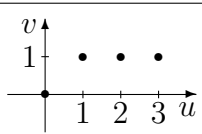
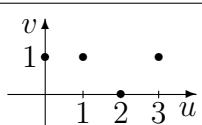
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	
2	1	0	0	1	0	
3	1	1	1	1	1	
$u = 2^x + y$						

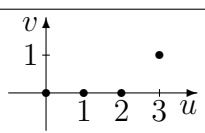
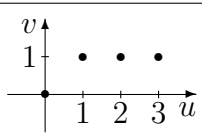
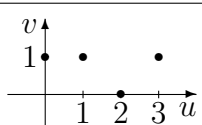
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
2	1	0	0	1	0	
3	1	1	1	1	1	
$u = 2^x + y$						

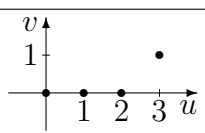
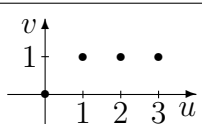
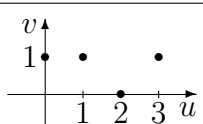
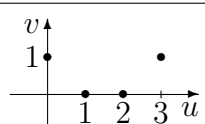
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	1	1	
$u = 2^x + y$						

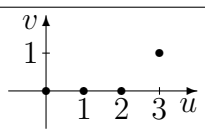
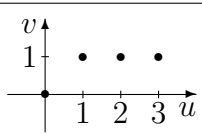
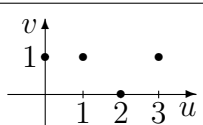
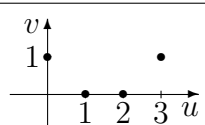
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	1	1	1
$u = 2^x + y$						

II.4. Логические и булевы функции: итог

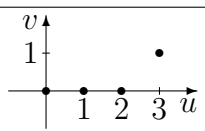
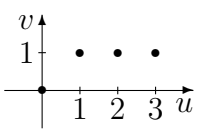
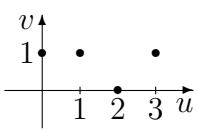
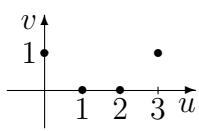
название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	1	1	1
$u = 2^x + y$						

II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	1	1	1
$u = 2^x + y$						

Восстановление высказывания X по его логическому значению x:

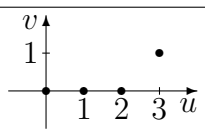
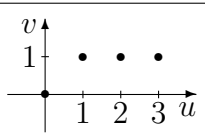
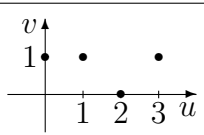
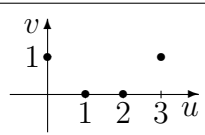
II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	1	1	1
$u = 2^x + y$						

Восстановление высказывания X по его логическому значению x:

$X \quad \sim$

II.4. Логические и булевы функции: итог

название			конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
логическая			X и Y	X или Y	если X, то Y	X, если и только если Y
			$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
u	x	y	$x\&y = x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	1	1	1
$u = 2^x + y$						

Восстановление высказывания X по его логическому значению x:

$$X \quad \sim \quad x = 1. \qquad (1)$$

II.5. Отрицания к базовым логическим функциям

1) $\neg(\neg x) = x$;

2) $\neg(x\&y) = \neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$:

3) $\neg(x \vee y) = (\neg x)\&(\neg y) = (\neg x) \wedge (\neg y)$:

} законы де-Моргана;

4) $\neg(x \to y) = x \wedge (\neg y)$;

5) $\neg(x \leftrightarrow y) = ((\neg x) \wedge y) \vee (x \wedge (\neg y))$.

II.6. Предикаты и кванторы

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ *определяется значениями некоторых параметров* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, говорят, что задан* **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

II.6. Предикаты и кванторы

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениями некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Например, значение высказывания $x < 0$ определяется значением переменной x:

при $x = 3$ высказывание $x < 0$ является

II.6. Предикаты и кванторы

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениями некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Например, значение высказывания $x < 0$ определяется значением переменной x:

при $x = 3$ высказывание $x < 0$ является ложным;

II.6. Предикаты и кванторы

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениями некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Например, значение высказывания $x < 0$ определяется значением переменной x:

при $x = 3$ высказывание $x < 0$ является ложным;

при $x = -5$ высказывание $x < 0$ является истинным;

II.6. Предикаты и кванторы

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениями некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Например, значение высказывания $x < 0$ определяется значением переменной x:

при $x = 3$ высказывание $x < 0$ является ложным;

при $x = -5$ высказывание $x < 0$ является истинным;

при $x = 0$ высказывание $x < 0$ является ложным.

II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ *определяется значениям и некоторых параметров* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, говорят, что задан* **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ *определяется значениям и некоторых параметров* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, говорят, что задан* **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Есть и принципиально другая трактовка понятия «предикат»: поскольку в логике важна только истинность или ложность высказывания $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (**остальными характеристиками** мы пренебрегаем), то предикатом («предикатом-функцией») на множестве $\mathbf{\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \Omega_n}$ называют ещё и функцию $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ *определяется значениям и некоторых параметров* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, говорят, что задан* **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Есть и принципиально другая трактовка понятия «предикат»: поскольку в логике важна только истинность или ложность высказывания $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (**остальными характеристиками** мы пренебрегаем), то предикатом («предикатом-функцией») на множестве $\mathbf{\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \Omega_n}$ называют ещё и функцию $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ *определяется значениям и некоторых параметров* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, говорят, что задан* **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Здесь $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ означает истинность высказывания $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ мы трактуем как ложность высказывания $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ *определяется значениям и некоторых параметров* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, говорят, что задан* **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.
Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < 0$» имеем:

$p(x) =$

II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ *определяется значениям и некоторых параметров* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, говорят, что задан* **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.
Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < 0$» имеем:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

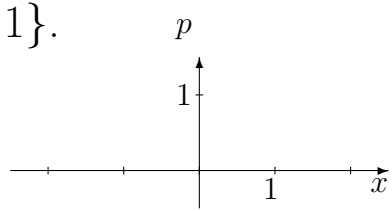
II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениям и некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < 0$» имеем:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$



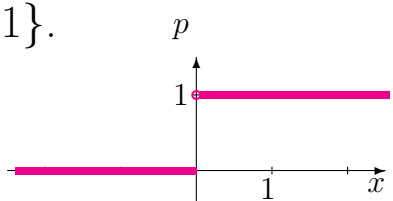
II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ *определяется значениям и некоторых параметров* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, говорят, что задан* **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < 0$» имеем:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$



II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ *определяется значениям и некоторых параметров* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, говорят, что задан* **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.
Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < y$» имеем:

$p(x, y) =$

II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениям и некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < y$» имеем:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \geqslant y, \\ 1, \text{ если } x < y. \end{cases}$$

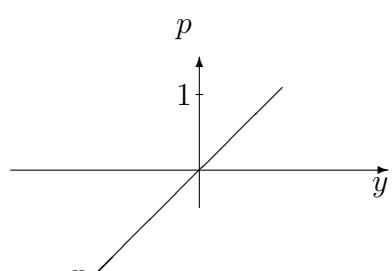
II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениям и некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < y$» имеем:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant y, \\ 1, & \text{если } x < y. \end{cases}$$



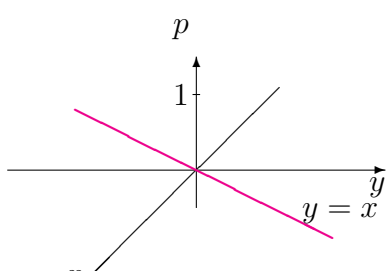
II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениям и некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < y$» имеем:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant y, \\ 1, & \text{если } x < y. \end{cases}$$



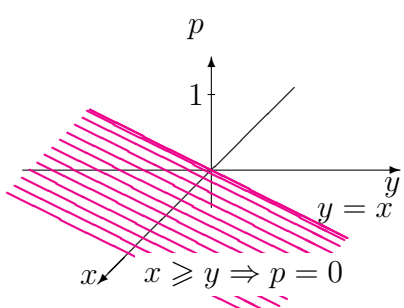
II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениям и некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < y$» имеем:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant y, \\ 1, & \text{если } x < y. \end{cases}$$



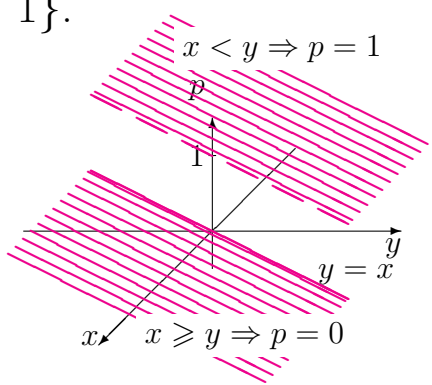
II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениям и некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < y$» имеем:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant y, \\ 1, & \text{если } x < y. \end{cases}$$



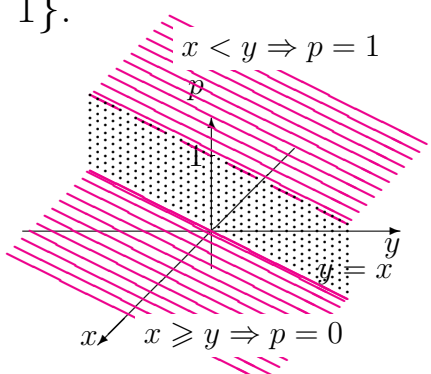
II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениям и некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < y$» имеем:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant y, \\ 1, & \text{если } x < y. \end{cases}$$



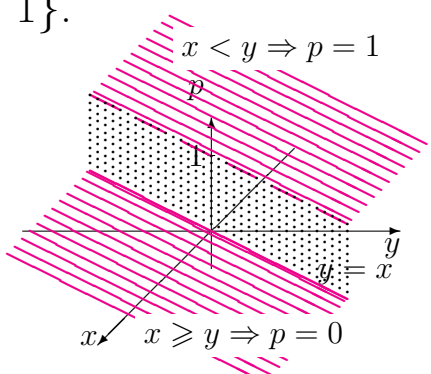
II.6.1. Предикат-высказывание и предикат-функция

Если истинность (и ложность) высказывания $\mathcal{P}$ определяется значениям и некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что задан **предикат** $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Высказыванию $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \Omega_i$ соответствует предикат («предикат-функция») $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область значений которой включается во множество $\{0;\ 1\}$.

Например, для $\mathcal{P}(x) \sim$ «$x < y$» имеем:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant y, \\ 1, & \text{если } x < y. \end{cases}$$



II.6.2. Кванторы

Для того, чтобы в формуле, использующей кванторы, зафиксировать некоторую информацию о переменных, применяются специальные символы, называемые **кванторами**.

II.6.2. Кванторы

Для того, чтобы в формуле, использующей кванторы, зафиксировать некоторую информацию о переменных, применяются специальные символы, называемые **кванторами**.

В математике чаще всего используется два квантора.

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

Для того, чтобы в формуле, использующей кванторы, зафиксировать некоторую информацию о переменных, применяются специальные символы, называемые **кванторами**.

В математике чаще всего используется два квантора.

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

Для того, чтобы в формуле, использующей кванторы, зафиксировать некоторую информацию о переменных, применяются специальные символы, называемые **кванторами**.

В математике чаще всего используется два квантора.

Символ $\forall$ обычно воспринимается как перевернутая латинская буква «A» из слова «**A**ll» (все).

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Для того, чтобы в формуле, использующей кванторы, зафиксировать некоторую информацию о переменных, применяются специальные символы, называемые **кванторами**.

В математике чаще всего используется два квантора.

Символ $\forall$ обычно воспринимается как перевернутая латинская буква «A» из слова «**A**ll» (все).

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,
и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,
и читается как «существует...», «найдётся».

Для того, чтобы в формуле, использующей кванторы, зафиксировать некоторую информацию о переменных, применяются специальные символы, называемые **кванторами**.

В математике чаще всего используется два квантора.

Символ $\forall$ обычно воспринимается как перевернутая латинская буква «A» из слова «**A**ll» (все).

Символ $\exists$ обычно воспринимается как перевернутая латинская буква «E» из слова «to **e**xist» (существовать).

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Таким образом, формула $\forall x \quad x^2 > 0$ читается так:

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Таким образом, формула $\forall x \quad x^2 > 0$ читается так:

для любого x

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Таким образом, формула $\forall x \quad x^2 > 0$ читается так:
для любого $x \quad x^2 > 0$.

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Таким образом, формула $\forall x \quad x^2 > 0$ читается так: для любого $x \quad x^2 > 0$. Отметим, что это верно? неверно?

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Таким образом, формула $\forall x \quad x^2 > 0$ читается так:
для любого $x \quad x^2 > 0$. Отметим, что это неверно: $0^2 = 0$.

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формула $\forall x \quad \exists y \quad x < y$ читается так:

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формула $\forall x \quad \exists y \quad x < y$ читается так:

для любого x

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формула $\forall x \quad \exists y \quad x < y$ читается так:

для любого x найдётся бóльший y.

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формула $\forall x \quad \exists y \quad x < y$ читается так:

для любого x найдётся бóльший y. Отметим, что это верно? неверно?

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формула $\forall x \quad \exists y \quad x < y$ читается так:

для любого x найдётся бóльший y. Отметим, что это верно.

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формулу «всякое натуральное число является делителем некоторого бóльшего натурального числа» можно записать так:

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формулу «всякое натуральное число является делителем некоторого бóльшего натурального числа» можно записать так:

$\forall n$

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формулу «всякое натуральное число является делителем некоторого бóльшего натурального числа» можно записать так:

$$\forall n \quad \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg),$$

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формулу «всякое натуральное число является делителем некоторого бóльшего натурального числа» можно записать так:

$$\forall n \quad \Big(n \in \mathbb{N} \qquad\qquad\qquad\qquad \Big),$$

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формулу «всякое натуральное число является делителем некоторого бóльшего натурального числа» можно записать так:

$$\forall n \quad \left(n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \qquad\qquad \right),$$

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формулу «всякое натуральное число является делителем некоторого бóльшего натурального числа» можно записать так:

$$\forall n \quad \left(n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \exists m \qquad\qquad \right),$$

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формулу «всякое натуральное число является делителем некоторого бóльшего натурального числа» можно записать так:

$$\forall n \quad \left(n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \exists m \quad \left\{ \begin{array}{l} m \in \mathbb{N}, \\ m > n, \\ m/n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \right),$$

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формулу «всякое натуральное число является делителем некоторого бóльшего натурального числа» можно записать так:

$$\forall n \quad \left(n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \exists m \quad \left\{ \begin{array}{l} m \in \mathbb{N}, \\ m > n, \\ m/n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \right), \quad \text{т.е.}$$

II.6.2. Кванторы

$\forall$ называется **квантором всеобщности**,

и читается как «для любого...»;

$\exists$ называется **квантором существования**,

и читается как «существует...», «найдётся».

Формулу «всякое натуральное число является делителем некоторого бóльшего натурального числа» можно записать так:

$$\forall n \quad \left(n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \exists m \quad \left\{ \begin{array}{l} m \in \mathbb{N}, \\ m > n, \\ m/n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \right), \quad \text{т.е.}$$

$$\forall n \quad \Big(n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \exists m \quad \big((m \in \mathbb{N}) \ \wedge \ (m > n) \ \wedge \ (m/n \in \mathbb{N}) \big) \Big).$$

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

Мы **уже рассматривали** отрицания к логическим функциям.

Рассмотрим правила построения отрицаний к формулам с предикатами.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.
«неверно, что для

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.
«неверно, что для любого x

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.
«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.
«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.
«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.
найдётся x, для которого

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.
«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.
найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim$

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x$

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$;

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$;

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

«Неверно, что $\exists x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$;

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

«Неверно, что $\exists x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что найдётся x, для которого предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен»

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$;

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

«Неверно, что $\exists x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что найдётся x, для которого предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$;

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

«Неверно, что $\exists x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что найдётся x, для которого предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что *для любого* x

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$;

«Неверно, что $\forall x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

«Неверно, что $\exists x \quad \mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что найдётся x, для которого предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что *для любого* $x \quad \mathcal{P}(x)$ не выполняется.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$; $\neg\,(\exists x\ \mathcal{P}(x)) \sim$

«Неверно, что $\forall x$ $\mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

«Неверно, что $\exists x$ $\mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что найдётся x, для которого предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что *для любого* x $\mathcal{P}(x)$ не выполняется.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$; $\neg\,(\exists x\ \mathcal{P}(x)) \sim \forall x$

«Неверно, что $\forall x$ $\mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

«Неверно, что $\exists x$ $\mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что найдётся x, для которого предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что *для любого* x $\mathcal{P}(x)$ не выполняется.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$; $\neg\,(\exists x\ \mathcal{P}(x)) \sim \forall x\ \neg\mathcal{P}(x)$.

«Неверно, что $\forall x$ $\mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что для любого x предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что $\mathcal{P}(x)$ выполняется «не для любого x», т.е.

найдётся x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно.

«Неверно, что $\exists x$ $\mathcal{P}(x)$», т.е.

«неверно, что найдётся x, для которого предикат $\mathcal{P}(x)$ истинен» означает, что *для любого* x $\mathcal{P}(x)$ не выполняется.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x); \quad \neg\,(\exists x\ \mathcal{P}(x)) \sim \forall x\ \neg\mathcal{P}(x).$

В случае, когда предикат $\mathcal{P}$ может быть выражен через **логические функции**, отрицание строится с использованием **соответствующих соотношений.**

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$; $\neg\,(\exists x\ \mathcal{P}(x)) \sim \forall x\ \neg\mathcal{P}(x)$.

В случае, когда предикат $\mathcal{P}$ может быть выражен через **логические функции**, отрицание строится с использованием **соответствующих соотношений.**

Например, отрицание к формуле (здесь «по умолчанию» x и y обозначают натуральные числа) $\exists x\ \forall y \quad x \geqslant y$ т.е.

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$; $\neg\,(\exists x\ \mathcal{P}(x)) \sim \forall x\ \neg\mathcal{P}(x)$.

В случае, когда предикат $\mathcal{P}$ может быть выражен через **логические функции**, отрицание строится с использованием **соответствующих соотношений.**

Например, отрицание к формуле (здесь «по умолчанию» x и y обозначают натуральные числа) $\exists x\ \forall y \quad x \geqslant y$ т.е.

«неверно, что найдется наибольшее натуральное число», имеет вид

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$; $\neg\,(\exists x\ \mathcal{P}(x)) \sim \forall x\ \neg\mathcal{P}(x)$.

В случае, когда предикат $\mathcal{P}$ может быть выражен через **логические функции**, отрицание строится с использованием **соответствующих соотношений.**

Например, отрицание к формуле (здесь «по умолчанию» x и y обозначают натуральные числа) $\exists x\ \forall y \quad x \geqslant y$ т.е.

«неверно, что найдется наибольшее натуральное число», имеет вид $\forall x$

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$; $\neg\,(\exists x\ \mathcal{P}(x)) \sim \forall x\ \neg\mathcal{P}(x)$.

В случае, когда предикат $\mathcal{P}$ может быть выражен через **логические функции**, отрицание строится с использованием **соответствующих соотношений.**

Например, отрицание к формуле (здесь «по умолчанию» x и y обозначают натуральные числа) $\exists x\ \forall y \quad x \geqslant y$ т.е.

«неверно, что найдется наибольшее натуральное число», имеет вид $\forall x\ \exists y$

II.7. Построение отрицаний к формулам с предикатами и кванторами

$\neg\,(\forall x\ \mathcal{P}(x)) \sim \exists x\ \neg\mathcal{P}(x)$; $\neg\,(\exists x\ \mathcal{P}(x)) \sim \forall x\ \neg\mathcal{P}(x)$.

В случае, когда предикат $\mathcal{P}$ может быть выражен через **логические функции**, отрицание строится с использованием **соответствующих соотношений.**

Например, отрицание к формуле (здесь «по умолчанию» x и y обозначают натуральные числа) $\exists x\ \forall y \quad x \geqslant y$ т.е.

«неверно, что найдется наибольшее натуральное число», имеет вид $\forall x\ \exists y \quad x < y$.

III. Исчисления, языки, модели

Одной из основных целей введения **исчисления** в каждом разделе математики (разумеется, не только математики) является обеспечение «работы» с соответствующими объектами на грамматическом, формальном уровне, без привлечения семантики (то есть смыслового значения) соответствующих грамматических конструкций: слов, символов, обозначений, выражений, формул и т.п.

Рассмотрим иллюстративный пример?

III. Исчисления, языки, модели

Основными инструментальными понятиями исчислений являются понятия *формулы* и *выводимости формулы*. Под формулой понимается высказывание, записанное средствами соответствующего языка, а под выводом формулы — некая жестко формализованная процедура доказательства этой формулы.

III. Исчисления, языки, модели

Основными инструментальными понятиями исчислений являются понятия *формулы* и *выводимости формулы*. Под формулой понимается высказывание, записанное средствами соответствующего языка, а под выводом формулы — некая жестко формализованная процедура доказательства этой формулы.

Истинность формулы в теории означает, что для любой модели этой теории при допустимых интерпретациях предметных переменных формула (с учетом специфики работы с кванторами) будет истинной.

Рассмотрим пример?

III. Исчисления, языки, модели

Основными инструментальными понятиями исчислений являются понятия *формулы* и *выводимости формулы*. Под формулой понимается высказывание, записанное средствами соответствующего языка, а под выводом формулы — некая жестко формализованная процедура доказательства этой формулы.

Следует отметить, что выразительные возможности различных языков существенно различаются. «Платой» за повышение универсальности языка часто является, например, большая громоздкость формул, существенное «уменьшение» (в том или ином смысле) множества доказуемых формул и т.п.

III. Исчисления, языки, модели

Одна из задач математической логики — построение процедур, которые позволяли бы на синтаксическом уровне выяснять, истинны ли те или иные утверждения в любой модели при определенной интерпретации грамматических конструкций.

Таким образом, с помощью исчислений работа с объектами «по существу» заменяется на формальное преобразование некоторых «слов», цепочек символов.

III.1. Исчисления

Определение 1. *Говорят, что задано* **исчисление** I, *если заданы следующие четыре множества:*

- **алфавит** $A(I)$;
- *множество* $E(I)$ *слов алфавита* $A(I)$, *называемое* **множеством выражений** *исчисления* I;
- *множество* $Ax(I)$ *выражений исчисления* I, *называемое* **множеством аксиом** *исчисления* I;
- *множество* $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ *частичных операций на множестве* $E(I)$, *называемых* **правилами вывода** *исчисления* I.

III.1. Исчисления

Выражения **исчисления** I называются **секвенциями** и **формулами**. Правило вывода $f : Y \to E(I)$ записываются так:

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n}{f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)}.$$

III.1. Исчисления

Выражения **исчисления** I называются **секвенциями** и **формулами**. Правило вывода $f : Y \to E(I)$ записываются так:

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n}{f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)}.$$

При этом указывается область определения функции f, если она не совпадает с $(E(I))^n$. При этом $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ называются **посылками**, а $f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ — **заключением**.

III.1. Исчисления

Выражения **исчисления** I называются **секвенциями** и **формулами**. Правило вывода $f : Y \to E(I)$ записываются так:

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n}{f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)}.$$

При этом указывается область определения функции f, если она не совпадает с $(E(I))^n$. При этом $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ называются **посылками**, а $f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ — **заключением**.

Пара $\langle A(I), E(I) \rangle$ называется **языком исчисления** I и обозначим через $\mathcal{L}(I)$.

Рассмотрим пример?

III.2. Теорема исчисления

Определение 2. *Пусть $T(I)$ — подмножество множества выражений $E(I)$, определяемое индуктивным правилом (то есть наименьшее множество, для которого выполняются следующие утверждения)*

- $Ax(I) \subseteq T(I)$;
- *если $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \subseteq T(I)$, то для любого n-местного правила вывода f* ***исчисления*** *I имеем $f(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in T(I)$.*

Тогда множество $T(I)$ называется **множеством теорем** ***исчисления*** *I или* **множеством доказуемых выражений** ***исчисления*** *I, а его элементы —* **теоремами** ***исчисления*** *I.*

III.2. Теорема исчисления

Определение 2. *Пусть $T(I)$ — подмножество множества выражений $E(I)$, определяемое индуктивным правилом (то есть наименьшее множество, для которого выполняются следующие утверждения)*

- $Ax(I) \subseteq T(I)$;
- *если $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \subseteq T(I)$, то для любого n-местного правила вывода f* ***исчисления*** *I имеем $f(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in T(I)$.*

Тогда множество $T(I)$ называется **множеством теорем** ***исчисления*** *I или* **множеством доказуемых выражений** ***исчисления*** *I, а его элементы —* **теоремами** ***исчисления*** *I.*

Теория языка $L(I)$ — произвольное множество теорем этого языка.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

Под **высказыванием** понимается фраза, относительно которой является осмысленным вопрос «верна эта фраза или не верна». Например, фразы

- на Марсе есть жизнь;
- у всех кошек по 8 ног;
- $x + y < 6$;

являются высказываниями, а фразы типа «закройте, пожалуйста, дверь», или «который час?» высказываниями (в теоретико-логическом понимании) не являются.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

В математической логике рассматриваются фразы, запись которых формализована, то есть фразы, которые имеют, например, вид $\forall x\ \exists y\ x + y > 1$. При этом вся эта формула может быть заменена, например, каким-либо символом.

Простейшая логика — логика высказываний — получается, когда мы работаем только с фразами, представляющими некоторые «абсолютные» утверждения, то есть фразами, в которых нет «переменных». Например, фразу «на улице прекрасная погода» можно считать в этом смысле «абсолютной», в ней отсутствует явная ссылка на какую-либо «переменную», и ее истинность определяется только контекстом (когда она сказана, что понимается под «прекрасной погодой» и т.п.).

IV. Неформальное введение в теорию моделей

Фраза «x окончил учебное заведение y» является «относительной», в ней явно указаны «переменные», от которых зависит истинность или ложность этого высказывания. Например, бланк анкеты обычно состоит из таких «относительных» высказываний, и предполагается, что человек заполняет ее так, чтобы в ней были только верные высказывания. Важный пример: $x + y = 2$ является «относительным» высказыванием, истинность которого зависит от значений явно указанных переменных x, y, а высказывание $\forall x\ \exists y\ x + y = 2$ или высказывание $\exists y\ \forall x\ x + y = 2$ являются «безусловными», «абсолютными». Конечно, здесь все зависит от того, как что понимаем под «явным указанием переменной» и вообще, что мы понимаем под «переменной» в конкретном случае.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

Например, можно считать, что высказывание «на улице прекрасная погода» переменных не имеет, а можно считать, что здесь «прекрасная погода» — это переменная, ведь каждый в эти слова вкладывает свой смысл, в зависимости от склонностей и ситуации. Предполагается, что мы заранее договорились о том, есть ли в рассматриваемых высказываниях переменные, и каковы они.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

В **исчислении высказываний** рассматриваются только формулы, использующие, кроме переменных и вспомогательных символов: скобок, запятых и т.п., только символы логических связок, т.е. **логических функций**. При этом, на самом деле, семантика всех рассматриваемых символов, включая логические связки, не фиксируется, и, в принципе, может быть нетрадиционной.

Например, символ $\wedge$ может обозначать как булеву функцию «дизъюнкция», так и одноименную логическую функцию, то есть функцию, определенную на множестве высказываний, которая паре высказываний P, Q ставит в соответствие высказывание «P и Q».

IV. Неформальное введение в теорию моделей

В **исчислении высказываний** рассматриваются только формулы, использующие, кроме переменных и вспомогательных символов: скобок, запятых и т.п., только символы логических связок, т.е. **логических функций**. При этом, на самом деле, семантика всех рассматриваемых символов, включая логические связки, не фиксируется, и, в принципе, может быть нетрадиционной.

Однако, в принципе, можно считать, что $\wedge$ — это обозначение операции пересечение множеств, или «вложить» в этот символ какой-либо «экзотический» смысл. Как обычно, требуется лишь, чтобы выполнялись соответствующие требования: аксиомы соответствующего **исчисления**, правила вывода, и чтобы при этом обеспечивалось соответствующее «согласование» модельного и теоретико-логического подхода, основанного на понятиях выводимости, доказуемости.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

В **исчислении предикатов** рассматриваются два типа переменных: предметные и пропозициональные (высказывательные). Обычная семантика: пропозициональная переменная обозначает некоторое высказывание, в частности, предикат (в смысле предикат-высказывание), а предметная переменная, вообще говоря, обозначает некоторый «объект», относительно которого «сформулировано» данное высказывание. Например, если p — пропозициональная переменная местности 3, то $p(x, y, z)$ может обозначать и высказывание $x + y < y + z$, и высказывание «если человек x является физиком, а y — художником, то человек z будет для них интересным собеседником». Здесь x, y, z — предметные переменные. В ассертоническом исчислении высказываний рассматривается два квантора: квантор всеобщности $\forall$ и квантор существования $\exists$. В модальной, темпоральной и других логиках вводятся дополнительные кванторы.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

Одним из центральных моментов в рассматриваемой теории является понятие **модели**. Моделью теории T, то есть некоторого множества формул языка называется такая интерпретация (каждый раз необходимо четко определить, что это такое) формальных конструкций языка: слов, отдельных символов и т.п., при которой все формулы из T являются истинными высказываниями.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

Одним из центральных моментов в рассматриваемой теории является понятие **модели**. Моделью теории T, то есть некоторого множества формул языка называется такая интерпретация (каждый раз необходимо четко определить, что это такое) формальных конструкций языка: слов, отдельных символов и т.п., при которой все формулы из T являются истинными высказываниями.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

Одним из центральных моментов в рассматриваемой теории является понятие **модели**. Моделью теории T, то есть некоторого множества формул языка называется такая интерпретация (каждый раз необходимо четко определить, что это такое) формальных конструкций языка: слов, отдельных символов и т.п., при которой все формулы из T являются истинными высказываниями.

Отметим, что *смысл* высказываний, на самом деле для исчислении высказываний несущественен. Важно лишь, какие из пропозициональных переменных истинны, а какие — ложны. Поэтому естественно в качестве модели теории в исчислении высказываний рассматривать не сами *высказывания* (при этом необходимо учитывать ситуацию, к которой относятся эти высказывания), а *значения истинности* всех пропозициональных переменных.

В случае исчисления предикатов такое упрощение неприемлемо. Интерпретация формулы теперь должна учитывать области изменения предметных переменных и «смысл» предикатов и термов, который определяется семантикой пропозициональных переменных и терминальных символов. Например, для интерпретации формулы $\forall x\ \exists y\ P(x) \to Q(x, f(y))$ необходимо указать, во-первых, множество всех возможных значений предметных переменных x, y, во-вторых, какие предикаты (одноместный и, соответственно, двуместный) взяты в качестве P и Q, и, в-третьих, какая одноместная операция обозначена символом f.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

Естественно, что теория может не иметь моделей. Это оказывается либо «патологией» рассматриваемого **исчисления**, либо «дефектом» самой теории. Для «классических» исчислений: исчисления высказываний, предикатов; а также «конкретных» исчислений: интегрального, дифференциального, матричного и т.п., отсутствие моделей той или иной теории означает противоречивость теории.

IV. Неформальное введение в теорию моделей

Зафиксируем некоторое **исчисление** I. Особую роль в исчислении I играют формулы, которые оказываются верными в любой модели теории T. Естественно такие формулы считать *следствиями* теории T. Особенно важную роль играют формулы, которые верны в любой модели *любой* теории T рассматриваемого **исчисления** I. Например, такими формулами являются всевозможные тождества типа $(AB)C = A(BC)$ в матричном исчислении. Такие формулы называются **истинными в исчислении** I. Чисто семантическая проверка того, что данная формула является следствием теории T (а тем более, что она истинна в исчислении I) оказывается возможной только в таких «бедных» (в смысле количества моделей) исчислениях, как **исчисление** высказываний. Для, например, узкого исчисления предикатов пришлось бы рассматривать бесконечно много моделей теории (разумеется, если эта теория не противоречива).

Поэтому для проверки истинности формулы обычно используют «чисто синтаксическую» процедуру — процедуру формального доказательства. Аксиомы и правила вывода соответствующего **исчисления** стараются вводить таким образом, чтобы обеспечить выполнение в исчислении I теоремы: формула Φ из $E(I)$ **исчисления** I является истинной тогда и только тогда, когда она доказуема (теорема о полноте).

V. Доказательство

Определение 3. Линейным доказательством *в исчислении высказываний называется такая последовательность* $S_0, S_1, \ldots, S_n$ *секвенций ИВ, что каждая секвенция* S_i *этой последовательности является либо аксиомой ИВ, либо получается из предыдущих секвенций* S_j *с помощью правил вывода 1-12. При этом секвенция* S_n *называется* **доказуемой в исчислении высказываний**. *Формула* Φ *называется* **доказуемой в исчислении высказываний** *тогда и только тогда, когда в ИВ доказуема секвенция* $\vdash \Phi$.

Можно предложить форму записи линейного доказательства в виде **дерева**.

VI. Исчисление высказываний

Мы рассмотрим два варианта исчисления высказываний.

VI.1. Система связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Словосочетание «**исчисление** высказываний» сокращенно будем записывать, как ИВ.

Предполагается, что в алфавите $\mathcal{A}$ нет знака $=$.

Алфавит исчисления высказываний состоит из трех групп символов:

Пропозициональные переменные: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$, где n - натуральное число.

Логические символы или связки: импликация $\rightarrow$, конъюнкция $\&$ или $\wedge$, дизъюнкция $\vee$, отрицание $\neg$ или $^-$, символ следования $\vdash$.

Вспомогательные символы: левая круглая скобка, правая круглая скобка, запятая.

VI.1. Система связок $\neg, \wedge, \vee, \to$

Определение 4. Формулой исчисления высказываний *назовем слова алфавита исчисления высказываний, удовлетворяющие следующему индуктивному определению:*

База: *Пропозициональная переменная является формулой (будем называть ее* **атомарной***).*

Индуктивный шаг: *Если* Φ *и* Ψ *— формулы, то* $(\Phi \to \Psi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\neg\Phi)$ *— формулы.*

В целях сокращения записи внешние скобки будем опускать.

VI.1. Система связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Определение 5. Секвенциями *исчисления высказываний называются последовательности следующих видов:*

- $\Phi_0, \Phi_1, \ldots \Phi_n \vdash \Psi$;
- $\Phi_0, \Phi_1, \ldots \Phi_n \vdash$;
- $\vdash \Psi$;
- $\vdash$.

Множество допустимых выражений в исчислении высказываний состоит из формул и секвенций исчисления высказываний.

VI.1. Система связок $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Обозначим через $\mathcal{B}$ алфавит, содержащий кроме алфавита исчисления высказываний также переменные для формул и последовательностей формул. Обычно переменные для формул мы будем обозначать через Φ, Ψ, Ω, а переменные для последовательностей формул через Γ, Δ, Θ (возможно, с индексами).

Определение 6. Схемой секвенций *(схемой формул) исчисления высказываний будем называть такое слово в алфавите $\mathcal{B}$, что при любых подстановках в это слово вместо переменных для формул и вместо переменных для последовательностей формул конкретных формул и, соответственно, последовательностей формул, получаются секвенции (формулы) исчисления высказываний.*

VI.1.1. Система аксиом исчисления высказываний (для $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$)

Система аксиом исчисления высказываний образуется единственной схемой секвенций: $\Phi \vdash \Phi$.

Запись типа $\Gamma \vdash$ обычно интепретируется, как утверждение о противоречивости набора формул Γ.

VI.1.2. Правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \wedge, \vee, \to$)

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$

2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$

3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$

4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$

7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$

10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$

11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$

12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$

VI.1.2. Правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$)

Правила 1-3 фактически разъясняют смысл конъюнкции, а правила 4-5 — дизъюнкции. Правило 6 позволяет проводить доказательство с помощью разбора двух возможных случаев. Правило 7 позволяет проводить эквивалентную переформулировку теоремы. Правило 8 — это так называемое правило **modus ponens** или «правило отделения», позволяющее сводить доказательство теоремы к уже доказанному утверждению. Правило 9, как нетрудно заметить, — это «доказательство от противного». Правило 10 позволяет доказывать противоречивость системы формул Г. Правило 11 говорит о том, что порядок посылок на самом деле не существенен. Правило 12, называется иногда «утончением» или «правилом лишней посылки».

Правила 1-10 называются **основными**, а правила 11-12 — **структурными**.

Пример 1. *Обозначим через A_1 первую аксиому теории групп:*

$$\forall x\ \forall y\ \forall z \quad x \in G\ \&\ y \in G\ \&\ z \in G\ \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z),$$

через A_2 — вторую аксиому теории групп:

$$\exists e\ e \in G \& \forall x \quad x \in G \Rightarrow (x * e = x\ \&\ e * x = x),$$

через A_3 — третью аксиому теории групп:

$$\forall x \quad x \in G\ \Rightarrow \exists x'\ x' \in G\ \&\ x * x' = e\ \&\ x' * x = e.$$

Выразимы ли в логике высказываний следующие утверждения (некоторые из элементарных теорем теории групп): $\forall x\ \forall y\ x * y = x \Leftrightarrow y = e$ (критерий единичного элемента), $\forall x\ \forall y\ x * y = e \Leftrightarrow y = x'$ (критерий обратного элемента)?

Интуитивно очевидно, что эти теоремы не выразимы в логике высказываний. Таким образом, в логике высказываний выразимы, в основном только суждения типа $x \vee \neg x$. Строгое доказательство мы приводить не будем.

VI.1.3. Истинность и выводимость формулы исчисления высказываний

Смысловое значение формулы исчисления высказываний состоит в том, что ее можно рассматривать как функцию, описывающую зависимость значения истинности некоторого «составного» высказывания через значения истинности составляющих это «сложное» высказывание «простых» высказываний. Поэтому в исчислении высказываний интерпретация формулы сводится к присвоению всем переменным каких-либо значений. Формула называется **истинной** тогда и только тогда, когда она истинна в любой модели, при любой интерпретации этой формулы.

Рассмотрим пример?

VI.2. Система связок $\neg, \to$

Здесь используется так называемое **исчисление гильбертовского типа**. О гильбертовой аксиоматизации с использованием связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ см. [?][стр.52].

Отличие: обедняем систему связок — нет $\vee, \wedge$, меньше аксиом и правил вывода. Исключить эти связки можно, так как система связок $\neg, \to$ полна: $x \wedge y = \neg(x \to \neg y)$, $x \vee y = (\neg x) \to y$.

VI.2.1. Система аксиом исчисления высказываний (для $\neg, \to$)

Система аксиом исчисления высказываний «порождается» в этом случае следующими тремя схемами секвенций (в отличие от единственной секвенции):

1. $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

Мендельсон записывает аксиомы в виде Φ вместо $\vdash \Phi$.

VI.2.2. Правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \to$)

В данном случае можно ограничиться единственным правилом вывода: правилом **modus ponens** или **правилом отделения**: $\dfrac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$ (это «смесь» обозначений Мендельсона и Ершова, Мендельсон «дроби» не использует, применяя вместо этого чисто словесные формулировки, и вместо $\vdash \Phi$ пишет Φ).

Определение 7. *Формулы* Φ *и* Ψ *называются* **эквивалентными** *тогда и только тогда, когда доказуемы секвенции* $\Phi \vdash \Psi$ *и* $\Psi \vdash \Phi$.

Тот факт, что формулы Φ и Ψ эквивалентны записывается так: $\Phi \equiv \Psi$.

Рассмотреть пример?

VII. Исчисления предикатов

Пропозициональная переменная — это переменная, значениями которой могут быть только предикаты.

VII. Исчисления предикатов

Пропозициональная переменная — это переменная, значениями которой могут быть только предикаты.

Предметная переменная пробегает элементы некоторого множества **носителя модели**.

VII. Исчисления предикатов

Пропозициональная переменная — это переменная, значениями которой могут быть только предикаты.

Предметная переменная пробегает элементы некоторого множества **носителя модели**.

Интерпретация формулы: имеется множество D, называемое **областью интерпретации** и интерпретирующая функция, каждому функциональному символу f_j^n ставящая в соответствие n-местную операцию на множестве D, каждому предикатному символу p_j^n — n-местный предикат на множестве D. Интерпретация кванторов — естественная.

VII. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

VII. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

Например, рассмотрим формулу $p^2(x, y) \to p\left(f_1^2(x, z), f_2^2(y, z)\right)$. В качестве области интерпретации возьмем множество целых чисел, положим $s(f_1^2)$ — сумма, $s(f_2^2)$ — произведение, $s(p^2)$ — отношение $\leq$.

VII. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

Например, рассмотрим формулу $p^2(x, y) \to p\left(f_1^2(x, z), f_2^2(y, z)\right)$. В качестве области интерпретации возьмем множество целых чисел, положим $s(f_1^2)$ — сумма, $s(f_2^2)$ — произведение, $s(p^2)$ — отношение $\leq$.

Тогда исходная формула верна на последовательности $1, 2, 3$, так как исходная формула «превращается» в высказывание

VII. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

Например, рассмотрим формулу $p^2(x, y) \to p\left(f_1^2(x, z), f_2^2(y, z)\right)$. В качестве области интерпретации возьмем множество целых чисел, положим $s(f_1^2)$ — сумма, $s(f_2^2)$ — произведение, $s(p^2)$ — отношение $\leq$.

Тогда исходная формула верна на последовательности $1, 2, 3$, так как исходная формула «превращается» в высказывание

$$1 \leq 2 \to 1 + 3 \leq 2 \cdot 3.$$

VII. Исчисления предикатов

Формула **истинна на последовательности** элементов из D в интерпретации s тогда и только тогда, когда при подстановке этих элементов вместо свободных предметных переменных получается истинное высказывание.

Например, рассмотрим формулу $p^2(x, y) \to p\left(f_1^2(x, z), f_2^2(y, z)\right)$. В качестве области интерпретации возьмем множество целых чисел, положим $s(f_1^2)$ — сумма, $s(f_2^2)$ — произведение, $s(p^2)$ — отношение $\leq$.

Тогда исходная формула верна на последовательности $1, 2, 3$, так как исходная формула «превращается» в высказывание

$$1 \leq 2 \to 1 + 3 \leq 2 \cdot 3.$$

На последовательности $4, 4, 1$ эта формула неверна: $4 \leq 4 \to 4 + 1 \leq 4 \cdot 1$ — неверно, так как посылка импликации верна, а заключение — ложно.

Если формула верна на любой последовательности, то она называется **истинной** (в данной интерпретации).

VII. Исчисления предикатов

Если формула верна на любой последовательности, то она называется **истинной** (в данной интерпретации).

Например, если в вышеприведенном примере несколько изменить интерпретацию, положив терм $s(f_2^2)$ равным сумме, формула $p^2(x, y) \to p\left(f_1^2(x, z), f_2^2(y, z)\right)$ будет истинной, так как в данной интерпретации на любой последовательности x, y, z из $D = \mathbb{Z}$ получаем верное утверждение $(x \leq y) \ \to \ (x + z \leq y + z)$.

VII. Исчисления предикатов

В этом разделе речь идет о так называемом «узком исчислении предикатов» (УИП), в котором применение кванторов допускается только к предметным переменным, и не допускается их применение к пропозициональным переменным.

VII. Исчисления предикатов

В этом разделе речь идет о так называемом «узком исчислении предикатов» (УИП), в котором применение кванторов допускается только к предметным переменным, и не допускается их применение к пропозициональным переменным.

Модель теории T — такая интерпретация, в которой любая формула из T истинна. Теория называется **противоречивой** тогда и только тогда, когда она не имеет моделей. В противном случае она называется **непротиворечивой** теорией.

VII. Исчисления предикатов

В этом разделе речь идет о так называемом «узком исчислении предикатов» (УИП), в котором применение кванторов допускается только к предметным переменным, и не допускается их применение к пропозициональным переменным.

Модель теории T — такая интерпретация, в которой любая формула из T истинна. Теория называется **противоречивой** тогда и только тогда, когда она не имеет моделей. В противном случае она называется **непротиворечивой** теорией.

Система аксиом и правил вывода строится таким образом, чтобы теория T была противоречивой тогда и только тогда, когда $T \vdash \Phi$ и $T \vdash \neg\Phi$ для *некоторой* формулы Φ. При этом оказывается, что теория T противоречива тогда и только тогда, когда $T \vdash \Phi$ и $T \vdash \neg\Phi$ для *любой* формулы Φ.

VII.1. Исчисление предикатов в ассертоническом пропозициональном исчислении

VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Зафиксируем некоторую сигнатуру Σ. Определим ***исчисление*** *предикатов сигнатуры* Σ, сокращенно ИП^Σ.

Алфавит равен

$$V \cup F \cup R \cup \{\wedge, \vee, \to, \neg, \approx\} \cup \{\forall, \exists\} \cup \{(,)\} \cup \{,\}.$$

Семантика: $\approx$ обычно означает **эквивалентность формул**, V — множество предметных переменных, F — множество функциональных переменных (обозначающих алгебраические операции), R — множество предикатных символов (обозначающих предикаты).

VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Рассмотрим пример?

VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Семантика: термы являются обозначениями операций, получающихся из основных операций с помощью суперпозиции операций. Можно на терм смотреть, и как на значение операции на элементах, обозначенных соответствующими переменными.

VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Например, пусть $f, g \in F$, где «местность» этих операций «указана» в сигнатуре Σ, например, они двуместные.

VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Терм $f(x, g(x, y))$ определяет новую (двуместную) операцию, причем определяется эта операция тем, что указывается *значение* этой операции на элементах x, y.

VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Терм $f(x, g(x, y))$ определяет новую (двуместную) операцию, причем определяется эта операция тем, что указывается *значение* этой операции на элементах x, y. Если фиксировать интерпретацию этих переменных, получим элемент из носителя.

VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

Если в выражении $f(x, g(x, y))$ значения переменных x, y произвольны, например, в формулах типа $\forall x \forall y\ f(x, g(x, y)) < A$, то $f(x, g(x, y))$ задает операцию.

VII.1.1. Алфавит, слова и секвенции ассертонического исчисления предикатов

Терм сигнатуры Σ — это слово в алфавите, содержащем символы открывающей и закрывающей круглой скобки, запятой, счетного множества V переменных (их мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, возможно, с индексами) и символов из R, F из сигнатуры Σ, определяется следующим индуктивным правилом:

База: переменные из V являются термами;

Шаг: если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, $f \in F$, и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ.

В формулах типа $\exists z\ f(A, g(A, B)) < z$, где A, B — некоторые константы (то есть нульместные операции), терм $f(A, g(A, B))$ определяет некоторый элемент носителя соответствующей алгебраической системы.

VII.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

Сейчас мы определим понятие **формулы** в УИП — узком исчислении предикатов. Как обычно, формула обозначает некоторое *высказывание* о термах и предикатах алгебраической системы сигнатуры Σ. Здесь приходится учитывать одно обстоятельство, приводящее к разделению теорий, сформулированных в терминах исчисления предикатов, на теории первого и второго порядка.

VII.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

В случае теорий первого порядка (узкое **исчисление** предикатов) формула фактически представляет собой высказывание о термах этой алгебраической системы *в терминах* основных предикатов этой системы. Например, если отношение $<$ входит в множество основных предикатов алгебраической системы сигнатуры Σ, то $x < y$ является высказыванием о термах $x, y \in V$. Если же $<$ не входит множество основных предикатов, то такое высказывание в рамках соответствующей теории невозможно. Например, отношение «меньше» определено для действительных чисел, но не определено для комплексных чисел, поэтому утверждение $x < y$ для комплексных значений переменных x, y является бессмысленным, то есть в соответствующей теории слово $x < y$ не является формулой.

VII.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

Отметим, что $p(x, y)$ естественно считать формулой, так как вопрос «верно ли, что $p(x, y)$» является осмысленным. В случае теорий второго порядка формула может являться высказыванием о предикатах алгебраической системы, то есть *о других формулах*. Например, «формула» $\exists p\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, p(x, y) \wedge p(y, z) \to p(x, z)$ является утверждением о том, что в алгебраической системе имеется транзитивное отношение. В принципе, такие формулы могут обозначать высказывание об этой же формуле, то есть получим «высказывание формулы о самой себе» — ситуация, как хорошо известно, чреватая парадоксами и другими «неприятностями».

VII.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

Для того, чтобы исключить указанные трудности, возникающие в теориях второго порядка, оказывается, достаточно потребовать, чтобы в формулах нельзя было бы навешивать кванторы на предикатные символы. Это обстоятельство приводит к следующему понятию **формулы узкого исчисления предикатов** или, сокращенно, **формулы УИП**.

VII.1.2. Формула узкого исчисления предикатов

Определение 8. *Множество* **формул** $ИП^{\Sigma}$ *или* **формул сигнатуры** Σ *определяется следующим индуктивным правилом:*

База: *1. если* $r \in R$, $\mu(r) = n$ *и* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *— термы, то слово* $r(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *является формулой* $ИП^{\Sigma}$*;*

2. если t_1, t_2 *— термы, то слово* $t_1 \approx t_2$ *является формулой* $ИП^{\Sigma}$*;*

Шаг: *1. если* Φ, Ψ *— формулы* $ИП^{\Sigma}$*, то* $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$ *и* $\neg\Phi$ *— формулы* $ИП^{\Sigma}$*;*

2. если Φ *— формула* $ИП^{\Sigma}$*,* $x \in V$*, то* $\forall x\ \Phi$ *и* $\exists x\ \Phi$ *— формулы* $ИП^{\Sigma}$*.*

VII.1.3. Аксиомы и правила вывода ассертонического исчисления предикатов

Свободное вхождение переменной. Множество свободных переменных формулы Φ обозначим через $\mathrm{FV}(\Phi)$

Если Φ — формула ИП^{Σ}, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные из V, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Σ, то запись $(\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{t_1,t_2,\ldots,t_n}$ обозначает результат подстановки термов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ вместо всех свободных вхождений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в формулу Φ, причем предполагается, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ ни одно свободное вхождение в Φ переменной x_i не входит в подформулу формулы Φ вида $\forall y \Phi_1$ или $\exists y \Phi_1$ для $y \in \mathrm{FV}(t_i)$.

VII.1.4. Аксиомы исчисления предикатов

Аксиомы ИП$^\Sigma$ имеют вид:

1. $\Phi \vdash \Phi$, где Φ — формула ИП$^\Sigma$;
2. $\vdash x \approx x$, где x — переменная;
3. $x \approx y, (\Phi)^z_x \vdash (\Phi)^z_y$, где x, y, z — переменные, Φ — формула ИП$^\Sigma$, удовлетворяющая условию на записи $(\Phi)^z_x$ и $(\Phi)^z_y$.

VII.1.5. Правила вывода в ИП^{Σ}

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Omega, \quad \Gamma, \Psi \vdash \Omega, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}{\Gamma \vdash \Omega}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$;

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$;

11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$; 13. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \forall x \Phi}$, где x не входит в члены Γ свободно;

14. $\dfrac{\Gamma, (\Phi)_t^x \vdash \Psi}{\Gamma, \forall x \Phi \vdash \Psi}$; 15. $\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi)_t^x}{\Gamma \vdash \exists x \Phi}$; 16. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \exists x \Phi \vdash \Psi}$, где x не входит в Ψ и члены Γ свободно.

VII.2. Интерпретация формулы и теории (модель)

Определение 9. *Формула* Ψ^{Σ} *называется* **тавтологией** *тогда и только тогда, когда она получается из доказуемой в исчислении высказываний формулы* Φ *ИВ путем замены всех ее пропозициональных переменных* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *на формулы* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ *ИП*$^{\Sigma}$. *Формулу* Φ *при этом называют* **основой тавтологии** Ψ.

VII.2. Интерпретация формулы и теории (модель)

Определение 9. *Формула* Ψ^{Σ} *называется* **тавтологией** *тогда и только тогда, когда она получается из доказуемой в исчислении высказываний формулы* Φ *ИВ путем замены всех ее пропозициональных переменных* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *на формулы* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ *ИП*$^{\Sigma}$. *Формулу* Φ *при этом называют* **основой тавтологии** Ψ.

Теорема 1 (о доказуемости тавтологии). *Любая тавтология* Ψ *сигнатуры* Σ *доказуема в ИП*$^{\Sigma}$.

Доказательство.

VII.2. Интерпретация формулы и теории (модель)

Определение 9. *Формула* Ψ^{Σ} *называется* **тавтологией** *тогда и только тогда, когда она получается из доказуемой в исчислении высказываний формулы* Φ *ИВ путем замены всех ее пропозициональных переменных* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *на формулы* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ *ИП*$^{\Sigma}$. *Формулу* Φ *при этом называют* **основой тавтологии** Ψ.

Теорема 1 (о доказуемости тавтологии). *Любая тавтология* Ψ *сигнатуры* Σ *доказуема в ИП*$^{\Sigma}$.

Доказательство. Пусть Ψ получена из основы Φ заменой пропозициональных переменных $P_1, P_2, \ldots, P_n$ на формулы $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ ИП$^{\Sigma}$ соответственно.

VII.2. Интерпретация формулы и теории (модель)

Определение 9. *Формула* Ψ^{Σ} *называется* **тавтологией** *тогда и только тогда, когда она получается из доказуемой в исчислении высказываний формулы* Φ *ИВ путем замены всех ее пропозициональных переменных* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *на формулы* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ *ИП*$^{\Sigma}$. *Формулу* Φ *при этом называют* **основой тавтологии** Ψ.

Теорема 1 (о доказуемости тавтологии). *Любая тавтология* Ψ *сигнатуры* Σ *доказуема в ИП*$^{\Sigma}$.

Доказательство. Пусть Ψ получена из основы Φ заменой пропозициональных переменных $P_1, P_2, \ldots, P_n$ на формулы $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ ИП$^{\Sigma}$ соответственно.

В дереве доказательства формулы Φ заменим все P_i на Ψ_i, а все остальные переменные — на произвольную формулу Ψ_{n+1} сигнатуры Σ. Очевидно, что получим требуемое доказательство.

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение.

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Для того, чтобы проверить истинность **формулы (3)** можно

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Для того, чтобы проверить истинность **формулы (3)** можно

— либо проверить равенство непосредственной подстановкой *всех возможных значений* переменной x (семантическая проверка);

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Для того, чтобы проверить истинность **формулы (3)** можно

— либо проверить равенство непосредственной подстановкой *всех возможных значений* переменной x (семантическая проверка);

— либо получить эту формулу с помощью правил дифференцирования (грамматическая проверка, использующая только формальные правила, без учета смысла обозначений).

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Семантическая проверка истинности **формулы (3)** состоит в проверке равенства непосредственной подстановкой *всех возможных значений* переменной x.

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Семантическая проверка истинности **формулы (3)** состоит в проверке равенства непосредственной подстановкой *всех возможных значений* переменной x.

Мы (с некоторой «натяжкой») заменим этот процесс на вывод **формулы (3)**, используя определение производной функции.

Решение. Семантическая проверка истинности **формулы (3)**:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)\sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x} =$$

Решение. Семантическая проверка истинности **формулы (3)**:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x+\Delta x) =$$

Решение. Семантическая проверка истинности **формулы (3)**:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x+\Delta x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x\cos\Delta x + x\cos x\sin\Delta x - x\sin x}{\Delta x} + \sin x =$$

Решение. Семантическая проверка истинности **формулы (3)**:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x+\Delta x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x\cos\Delta x + x\cos x\sin\Delta x - x\sin x}{\Delta x} + \sin x =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} x\cos x + \sin x =$$

Решение. Семантическая проверка истинности **формулы (3)**:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x+\Delta x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x\cos\Delta x + x\cos x\sin\Delta x - x\sin x}{\Delta x} + \sin x =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} x\cos x + \sin x =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x\left(-2\sin^2\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} + x\cos x + \sin x =$$

Решение. Семантическая проверка истинности **формулы (3)**:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x+\Delta x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x\cos\Delta x + x\cos x\sin\Delta x - x\sin x}{\Delta x} + \sin x =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} x\cos x + \sin x =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x\left(-2\sin^2\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} + x\cos x + \sin x = x\cos x + \sin x.$$

Проверена ***истинность*** **формулы (3)**.

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Грамматическая проверка **формулы (3)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)',$$

Используем правило $(fg)' = f'g + fg'$...

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Грамматическая проверка **формулы (3)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

Используем правило $(fg)' = f'g + fg'$...

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Грамматическая проверка **формулы (3)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

Теперь применим правило $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$...

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Грамматическая проверка **формулы (3)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

$$F'(x) = \sin x + x (\sin x)',$$

Теперь применим правило $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$...

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Грамматическая проверка **формулы (3)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

$$F'(x) = \sin x + x (\sin x)',$$

Осталось воспользоваться правилом $(\sin x)' = \cos x$...

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Грамматическая проверка **формулы (3)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

$$F'(x) = \sin x + x (\sin x)', \quad F'(x) = \sin x + x \cos x.$$

Осталось воспользоваться правилом $(\sin x)' = \cos x$...

Пример 2. *Рассмотрим формулу*

$$F(x) = x \sin x. \tag{2}$$

Как можно проверить истинность формулы

$$F'(x) = \sin x + x \cos(x)? \tag{3}$$

Решение. Грамматическая проверка **формулы (3)** (вывод формулы):

$$F'(x) = (x \sin x)', \quad F'(x) = x' \sin x + x (\sin x)',$$

$$F'(x) = \sin x + x (\sin x)', \quad F'(x) = \sin x + x \cos x.$$

Формула (3) ***доказана***.

Ранее мы проверили ***истинность*** **формулы (3)**.

Вернемся к лекции?

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. В дальнейшем мы будем использовать аппарат исчислений, а сейчас докажем «по-простому»:

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. В дальнейшем мы будем использовать аппарат исчислений, а сейчас докажем «по-простому»:

$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. В дальнейшем мы будем использовать аппарат исчислений, а сейчас докажем «по-простому»:

$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = a \circledcirc (b \circledcirc (c \circledcirc d)) =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. В дальнейшем мы будем использовать аппарат исчислений, а сейчас докажем «по-простому»:

$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = a \circledcirc (b \circledcirc (c \circledcirc d)) = a \circledcirc ((b \circledcirc c) \circledcirc d) =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. В дальнейшем мы будем использовать аппарат исчислений, а сейчас докажем «по-простому»:

$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = a \circledcirc (b \circledcirc (c \circledcirc d)) = a \circledcirc ((b \circledcirc c) \circledcirc d) =$

$= (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = \cup$, $\quad a = \{1; 2; 3\}$, $\quad b = \{3; 4\}$, $\quad c = \{1; 3; 5\}$, $\quad d = \{2\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.
$(a \cup b) \cup (c \cup d) =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.
$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d = (\{1; 2; 3\} \cup (\{3; 4\} \cup \{1; 3; 5\})) \cup \{2\} =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d = (\{1; 2; 3\} \cup (\{3; 4\} \cup \{1; 3; 5\})) \cup \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cup \quad\quad\quad\quad) \cup \{2\} =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d = (\{1; 2; 3\} \cup (\{3; 4\} \cup \{1; 3; 5\})) \cup \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cup \{1; 3; 4; 5\}) \cup \{2\} =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d = (\{1; 2; 3\} \cup (\{3; 4\} \cup \{1; 3; 5\})) \cup \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cup \{1; 3; 4; 5\}) \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\} \cup \{2\} =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d = (\{1; 2; 3\} \cup (\{3; 4\} \cup \{1; 3; 5\})) \cup \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cup \{1; 3; 4; 5\}) \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\} \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d = (\{1; 2; 3\} \cup (\{3; 4\} \cup \{1; 3; 5\})) \cup \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cup \{1; 3; 4; 5\}) \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\} \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d = (\{1; 2; 3\} \cup (\{3; 4\} \cup \{1; 3; 5\})) \cup \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cup \{1; 3; 4; 5\}) \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\} \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d = (\{1; 2; 3\} \cup (\{3; 4\} \cup \{1; 3; 5\})) \cup \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cup \{1; 3; 4; 5\}) \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\} \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cup$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) \cup (\{1; 3; 5\} \cup \{2\}) =$

$= \{1; 2; 3; 4\} \cup \{1; 2; 3; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$(a \cup (b \cup c)) \cup d = (\{1; 2; 3\} \cup (\{3; 4\} \cup \{1; 3; 5\})) \cup \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cup \{1; 3; 4; 5\}) \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\} \cup \{2\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = \cap, \quad a = \{1; 2; 3\}, \quad b = \{3; 4\}, \quad c = \{1; 3; 5\}, \quad d = \{2\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.
$(a \cap b) \cap (c \cap d) =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.
$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap, \quad a = \{1; 2; 3\}, \quad b = \{3; 4\}, \quad c = \{1; 3; 5\}, \quad d = \{2\}.$

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$.

$(a \cap (b \cap c)) \cap d =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$.

$(a \cap (b \cap c)) \cap d = (\{1; 2; 3\} \cap (\{3; 4\} \cap \{1; 3; 5\})) \cap \{2\} =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$.

$(a \cap (b \cap c)) \cap d = (\{1; 2; 3\} \cap (\{3; 4\} \cap \{1; 3; 5\})) \cap \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cap \quad) \cap \{2\} =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$.

$(a \cap (b \cap c)) \cap d = (\{1; 2; 3\} \cap (\{3; 4\} \cap \{1; 3; 5\})) \cap \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cap \{3\}) \cap \{2\} =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$.

$(a \cap (b \cap c)) \cap d = (\{1; 2; 3\} \cap (\{3; 4\} \cap \{1; 3; 5\})) \cap \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cap \{3\}) \cap \{2\} = \{3\} \cap \{2\} =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$.

$(a \cap (b \cap c)) \cap d = (\{1; 2; 3\} \cap (\{3; 4\} \cap \{1; 3; 5\})) \cap \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cap \{3\}) \cap \{2\} = \{3\} \cap \{2\} = \emptyset$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$.

$(a \cap (b \cap c)) \cap d = (\{1; 2; 3\} \cap (\{3; 4\} \cap \{1; 3; 5\})) \cap \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cap \{3\}) \cap \{2\} = \{3\} \cap \{2\} = \emptyset$.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap, \quad a = \{1; 2; 3\}, \quad b = \{3; 4\}, \quad c = \{1; 3; 5\}, \quad d = \{2\}.$

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset.$

$(a \cap (b \cap c)) \cap d = (\{1; 2; 3\} \cap (\{3; 4\} \cap \{1; 3; 5\})) \cap \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cap \{3\}) \cap \{2\} = \{3\} \cap \{2\} = \emptyset.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset.$

$(a \cap (b \cap c)) \cap d = (\{1; 2; 3\} \cap (\{3; 4\} \cap \{1; 3; 5\})) \cap \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cap \{3\}) \cap \{2\} = \{3\} \cap \{2\} = \emptyset.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = \cap$, $a = \{1; 2; 3\}$, $b = \{3; 4\}$, $c = \{1; 3; 5\}$, $d = \{2\}$.

$(a \cap b) \cap (c \cap d) = (\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\}) \cap (\{1; 3; 5\} \cap \{2\}) =$

$= \{3\} \cap \emptyset = \emptyset.$

$(a \cap (b \cap c)) \cap d = (\{1; 2; 3\} \cap (\{3; 4\} \cap \{1; 3; 5\})) \cap \{2\} =$

$= (\{1; 2; 3\} \cap \{3\}) \cap \{2\} = \{3\} \cap \{2\} = \emptyset.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно). Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).
Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$
$(a + b) + (c + d) =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).
Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$
$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x +$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + \qquad) + x =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x = 2x + x =$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x = 2x + x = 3x.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x = 2x + x = 3x.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x = 2x + x = 3x.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x = 2x + x = 3x.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x = 2x + x = 3x.$

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x = 2x + x = 3x.$

Ясно, что полный перебор всех вариантов невозможен.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x = 2x + x = 3x.$

Ясно, что полный перебор всех вариантов невозможен.

Поэтому проверка истинности для более-менее нетривиальной формулы обычно невозможна.

Пример 3. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Теперь проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пусть $\circledcirc = +, \quad a = x + 2, \quad b = 1 - 3x, \quad c = 4x - 3, \quad d = x.$

$(a + b) + (c + d) = (x + 2 + 1 - 3x) + (4x - 3 + x) =$

$= 3 - 2x + 5x - 3 = 3x.$

$(a + (b + c)) + d = (x + 2 + (1 - 3x + 4x - 3)) + x =$

$= (x + 2 + x - 2) + x = 2x + x = 3x.$

Ясно, что полный перебор всех вариантов невозможен.

Поэтому проверка истинности для более-менее нетривиальной формулы обычно невозможна.

Вернемся к лекции или рассмотрим **другой пример?**

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение.

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Сначала докажем эту формулу без использования аппарата исчислений (который будет рассматриваться позднее).

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Сначала докажем эту формулу.

Выберем произвольное значение α переменной x.

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Сначала докажем эту формулу.

Выберем произвольное значение α переменной x.

По условию для нее найдется значение β переменной y такое, что $\alpha \prec \beta$.

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Сначала докажем эту формулу.

Выберем произвольное значение α переменной x.

По условию для нее найдется значение β переменной y такое, что $\alpha \prec \beta$.

В доказываемой формуле достаточно положить $a =$ $b =$

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Сначала докажем эту формулу.

Выберем произвольное значение α переменной x.

По условию для нее найдется значение β переменной y такое, что $\alpha \prec \beta$.

В доказываемой формуле достаточно положить $a = \beta, \quad b =$

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Сначала докажем эту формулу.

Выберем произвольное значение α переменной x.

По условию для нее найдется значение β переменной y такое, что $\alpha \prec \beta$.

В доказываемой формуле достаточно положить $a = \beta, \quad b = \alpha$.

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $\prec$ отношение $<$.

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).
Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $\prec$ отношение $<$.
Если $x = 2$, можно положить $y =$

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).
Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $\prec$ отношение $<$.
Если $x = 2$, можно положить $y = 3$:

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).
Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $\prec$ отношение $<$.
Если $x = 2$, можно положить $y = 3 : \quad 2 < 3$.

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $\prec$ отношение $<$.

Если $x = 2$, можно положить $y = 3 : \quad 2 < 3$.

Если $x = 7$, можно положить $y =$

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $\prec$ отношение $<$.

Если $x = 2$, можно положить $y = 3 : \quad 2 < 3$.

Если $x = 7$, можно положить $y = 10 :$

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $\prec$ отношение $<$.

Если $x = 2$, можно положить $y = 3 : \quad 2 < 3$.

Если $x = 7$, можно положить $y = 10 : \quad 7 < 10$.

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $x \prec y$ отношение «y делится нацело на x».

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $x \prec y$ отношение «y делится нацело на x».

Если $x = 2$, можно положить $y =$

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $x \prec y$ отношение «y делится нацело на x».

Если $x = 2$, можно положить $y = 4$:

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $x \prec y$ отношение «y делится нацело на x».

Если $x = 2$, можно положить $y = 4$: «4 делится нацело на 2».

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $x \prec y$ отношение «y делится нацело на x».

Если $x = 2$, можно положить $y = 4$: «4 делится нацело на 2».

Если $x = 7$, можно положить $y =$

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $x \prec y$ отношение «y делится нацело на x».

Если $x = 2$, можно положить $y = 4$: «4 делится нацело на 2».

Если $x = 7$, можно положить $y = 14$:

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и положим в качестве $x \prec y$ отношение «y делится нацело на x».

Если $x = 2$, можно положить $y = 4$: «4 делится нацело на 2».

Если $x = 7$, можно положить $y = 14$: «14 делится нацело на 7».

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y =$

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y = t^2$:

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y = t^2$: «степень многочлена $(3t + 4)$ меньше степени многочлена t^2».

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y = t^2$: «степень многочлена $(3t + 4)$ меньше степени многочлена t^2».

Если $x = (t - 1)^3$, можно положить $y =$

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y = t^2$: «степень многочлена $(3t + 4)$ меньше степени многочлена t^2».

Если $x = (t - 1)^3$, можно положить $y = t^5$:

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y = t^2$: «степень многочлена $(3t + 4)$ меньше степени многочлена t^2».

Если $x = (t - 1)^3$, можно положить $y = t^5$: «степень многочлена $(t - 1)^3$ меньше степени многочлена t^5».

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y = t^2$: «степень многочлена $(3t + 4)$ меньше степени многочлена t^2».

Если $x = (t - 1)^3$, можно положить $y = t^5$: «степень многочлена $(t - 1)^3$ меньше степени многочлена t^5».

Ясно, что и в этом случае полный перебор невозможен.

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y = t^2$: «степень многочлена $(3t + 4)$ меньше степени многочлена t^2».

Если $x = (t - 1)^3$, можно положить $y = t^5$: «степень многочлена $(t - 1)^3$ меньше степени многочлена t^5».

Важно: по условию значение переменной x может быть любым, а возможности интерпретации переменной y ограничены.

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y = t^2$: «степень многочлена $(3t + 4)$ меньше степени многочлена t^2».

Если $x = (t - 1)^3$, можно положить $y = t^5$: «степень многочлена $(t - 1)^3$ меньше степени многочлена t^5».

Важно: по условию значение переменной x может быть любым, а возможности интерпретации переменной y ограничены.

Это мы и имели в виду под «спецификой работы с кванторами».

Пример 4. *Рассмотрим теорию, в которой истинна формула (аксиома)* $\forall x \quad \exists y \quad x \prec y$. *Проверьте выводимость и (частично) истинность формулы* $\exists a \quad \exists b \quad b \prec a$.

Решение. Проверим истинность (частично, фрагментарно).

Рассмотрим многочлены от переменной t и пусть $x \prec y$ — это отношение «степень многочлена x меньше степени многочлена y».

Если $x = 3t + 4$, можно положить $y = t^2$: «степень многочлена $(3t + 4)$ меньше степени многочлена t^2».

Если $x = (t - 1)^3$, можно положить $y = t^5$: «степень многочлена $(t - 1)^3$ меньше степени многочлена t^5».

Вернемся к лекции?

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение.

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

$$p = a \circledcirc b,$$

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $\quad Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $\quad f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

$$p = a \circledcirc b, \quad p \circledcirc (c \circledcirc d) = (p \circledcirc c) \circledcirc d$$

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $\quad Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $\quad f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

$$\frac{p = a \circledcirc b, \quad p \circledcirc (c \circledcirc d) = (p \circledcirc c) \circledcirc d}{}(f_1)$$

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $\quad Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $\quad f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

$$\frac{p = a \circledcirc b, \quad p \circledcirc (c \circledcirc d) = (p \circledcirc c) \circledcirc d}{(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = ((a \circledcirc b) \circledcirc c) \circledcirc d}(f_1)$$

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $\quad Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $\quad f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

$$(a \circledcirc b) \circledcirc c = a \circledcirc (b \circledcirc c), \quad \frac{p = a \circledcirc b, \quad p \circledcirc (c \circledcirc d) = (p \circledcirc c) \circledcirc d}{(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = ((a \circledcirc b) \circledcirc c) \circledcirc d}(f_1)$$

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

$$\dfrac{(a \circledcirc b) \circledcirc c = a \circledcirc (b \circledcirc c), \quad \dfrac{p = a \circledcirc b, \quad p \circledcirc (c \circledcirc d) = (p \circledcirc c) \circledcirc d}{(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = ((a \circledcirc b) \circledcirc c) \circledcirc d}(f_1)}{}(f_2)$$

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

$$\dfrac{(a \circledcirc b) \circledcirc c = a \circledcirc (b \circledcirc c), \quad \dfrac{p = a \circledcirc b, \quad p \circledcirc (c \circledcirc d) = (p \circledcirc c) \circledcirc d}{(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = ((a \circledcirc b) \circledcirc c) \circledcirc d}(f_1)}{(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d}(f_2)$$

Пример 5. *Рассмотрим исчисление:* $I = \{a, b, \ldots, g, h, \circledcirc, (,)\}$;
$E(I) = \{(f \circledcirc g) \circledcirc h = d \circledcirc e, \ldots\}$; $Ax(I) = \{(x \circledcirc y) \circledcirc z = x \circledcirc (y \circledcirc z)\}$;
$f_1(X = Y;\ L(X) = R) = "L(Y) = R"$; $f_2(X = Y;\ L = R(X)) = "L = R(Y)"$.

Проверьте выводимость и истинность (частично) формулы
$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d$.

Решение. Сначала проверим выводимость...

$$\dfrac{(a \circledcirc b) \circledcirc c = a \circledcirc (b \circledcirc c), \quad \dfrac{p = a \circledcirc b, \quad p \circledcirc (c \circledcirc d) = (p \circledcirc c) \circledcirc d}{(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = ((a \circledcirc b) \circledcirc c) \circledcirc d}(f_1)}{(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc (b \circledcirc c)) \circledcirc d}(f_2)$$

Вернемся к лекции или рассмотрим **другой пример?**

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение.

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$, где

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$, где
Sv (subject variables) — предметные переменные: $Sv = \{a, b, \ldots\}$,

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$, где

Sv (subject variables) — предметные переменные: $Sv = \{a, b, \ldots\}$,

Fv (fucnctional variables) — функциональные переменные:

$$Fv = \{+, -, \cdot, /, \bullet^{\alpha}, \alpha^{\bullet}, \log_{\alpha} \bullet, \sin, \cos, \mathrm{tg}, \arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, f, g, \ldots\},$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$, где
Sv (subject variables) — предметные переменные: $Sv = \{a, b, \ldots\}$,
Fv (fucnctional variables) — функциональные переменные:
$Fv = \{+, -, \cdot, /, \bullet^{\alpha}, \alpha^{\bullet}, \log_{\alpha} \bullet, \sin, \cos, \mathrm{tg}, \arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, f, g, \ldots\}$,
As (auxiliary symbols) — вспомогательные символы: $As = \{(,)\}$.

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.
$E(I) =$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.
$E(I) = \{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\}$.

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.
$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)},$ $\}$.

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.
$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.
$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.
$Ax(I)$ —

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода —

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' =}$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u + v}$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u + v} \qquad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f \cdot g)' =}$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u + v} \qquad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f \cdot g)' = u \cdot g + f \cdot v}$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u+v} \qquad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f\cdot g)' = u\cdot g + f\cdot v} \qquad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f(g))' = u(g)\cdot v}$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u+v}(1), \quad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f\cdot g)' = u\cdot g + f\cdot v}(2), \ldots \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f(g))' = u(g)\cdot v}(3), \ldots$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u+v}(1), \quad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f\cdot g)' = u\cdot g + f\cdot v}(2), \ldots \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f(g))' = u(g)\cdot v}(3), \ldots$$

Пример вывода формулы $\left(x^2 \sin x^2\right)' =$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u+v}(1), \quad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f\cdot g)' = u\cdot g + f\cdot v}(2), \ldots \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f(g))' = u(g)\cdot v}(3), \ldots$$

Пример вывода формулы $\left(x^2 \sin x^2\right)' = 2x \sin x^2 + x^2 \cdot 2x \cdot \cos x^2$.

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения
$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u+v}(1), \quad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f\cdot g)' = u\cdot g + f\cdot v}(2), \ldots \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f(g))' = u(g)\cdot v}(3), \ldots$$

Пример вывода формулы $\left(x^2 \sin x^2\right)' = 2x \sin x^2 + x^2 \cdot 2x \cdot \cos x^2$.

$$(x^2 \sin x)' = 2x \sin x^2 + x^2 \cdot 2x \cdot \cos x^2$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u+v}(1), \quad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f\cdot g)' = u\cdot g + f\cdot v}(2), \ldots \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f(g))' = u(g)\cdot v}(3), \ldots$$

Пример вывода формулы $\left(x^2 \sin x^2\right)' = 2x\sin x^2 + x^2\cdot 2x\cdot\cos x^2$.

$$\frac{}{(x^2\sin x)' = 2x\sin x^2 + x^2\cdot 2x\cdot\cos x^2}(2)$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u+v}(1), \quad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f\cdot g)' = u\cdot g + f\cdot v}(2), \ldots \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f(g))' = u(g)\cdot v}(3), \ldots$$

Пример вывода формулы $\left(x^2 \sin x^2\right)' = 2x \sin x^2 + x^2 \cdot 2x \cdot \cos x^2$.

$$\frac{(x^2)' = 2x, \qquad (\sin(x^2))' = 2x\cdot\cos x^2}{(x^2\sin x)' = 2x\sin x^2 + x^2\cdot 2x\cdot\cos x^2}(2)$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u+v}(1), \quad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f\cdot g)' = u\cdot g + f\cdot v}(2), \ldots \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f(g))' = u(g)\cdot v}(3), \ldots$$

Пример вывода формулы $\left(x^2 \sin x^2\right)' = 2x \sin x^2 + x^2 \cdot 2x \cdot \cos x^2$.

$$\frac{(x^2)' = 2x, \qquad \dfrac{(\sin x)' = \cos x, \quad \left(x^2\right)' = 2x}{(\sin(x^2))' = 2x\cdot\cos x^2}(3)}{(x^2 \sin x)' = 2x \sin x^2 + x^2 \cdot 2x \cdot \cos x^2}(2)$$

Пример 6. *Формализуйте дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.*

Решение. $I = \{Sv, Fv, As\}$.

$E(I) = \{2^{\sin(3\cdot x)}, \log_5\left(\arccos(x^2)\right), \ldots\}$.

$Ax(I)$ — таблица производных основных элементарных функций:
$\left(x^2\right)' = 2x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad \ldots$

Правила вывода — формулы дифференцирования суммы, произведения

$$\frac{f' = u, \quad g' = v}{(f+g)' = u+v}(1), \quad \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f\cdot g)' = u\cdot g + f\cdot v}(2), \ldots \frac{f' = u, \quad g' = v}{(f(g))' = u(g)\cdot v}(3), \ldots$$

Пример вывода формулы $\left(x^2 \sin x^2\right)' = 2x \sin x^2 + x^2 \cdot 2x \cdot \cos x^2$.

$$\frac{(x^2)' = 2x, \quad \dfrac{(\sin x)' = \cos x, \quad \left(x^2\right)' = 2x}{(\sin(x^2))' = 2x\cdot\cos x^2}(3)}{(x^2 \sin x)' = 2x\sin x^2 + x^2\cdot 2x\cdot\cos x^2}(2)$$

Вернемся к лекции?

VIII. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \wedge, \vee, \to$

Алфавит ИВ состоит из трех групп символов:

Пропозициональные переменные: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$.

Логические символы или связки: импликация $\to$, конъюнкция $\&$ или $\wedge$, дизъюнкция $\vee$, отрицание $\neg$ или $\overline{\ }$, символ следования $\vdash$.

Вспомогательные символы: левая круглая скобка «(», правая круглая скобка «)», запятая «,».

Аксиома: $\Phi \vdash \Phi$.

Правила вывода:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$;
2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$;
3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$;
7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$;
8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$;
10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$;
11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$;
12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Как доказать $\ldots \wedge \ldots$?

$$\overline{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \wedge \Psi}}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

В правилах вывода доказуемая секвенция с заключением в виде $\ldots \wedge \ldots$ встречается только в правиле 1.

$$\frac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \qquad \neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Значит, надо доказать две секвенции. Сначала докажем **первую** из них.

$$\dfrac{\neg(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vdash \neg\mathbf{P} \qquad \neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 1. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

У нас нет правила вывода с отрицанием в качестве доказываемой секвенции. Остается применение правила

$$\dfrac{}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \mathbf{\Phi}}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 1. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

У нас нет правила вывода с отрицанием в качестве доказываемой секвенции. Остается применение правила 9.

$$\overline{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Как можно доказать противоречивость теории?

$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{\Phi},\quad \Gamma \vdash \mathbf{\neg\Phi}}{\mathbf{\Gamma} \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

Что взять в качестве выводимых из $\neg(P \vee Q), \neg\neg P$ формул Φ и $\neg\Phi$?

$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{\Phi},\quad \Gamma \vdash \mathbf{\neg\Phi}}{\mathbf{\Gamma} \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

Что взять в качестве выводимых из $\neg(P \vee Q), \neg\neg P$ формул Φ и $\neg\Phi$?

Наиболее естественные варианты: $(P \vee Q)$ или $\neg P$.

$$\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{\Phi},\quad \Gamma \vdash \mathbf{\neg\Phi}}{\mathbf{\Gamma} \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Утверждение о противоречивости можно доказать только с помощью правила 10.

Вариант $\neg P$ вернет нас к первоначальной ситуации, поэтому выберем $(P \vee Q)$ в качестве Φ.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q} \qquad \overline{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Вторая секвенция быстро сводится к аксиоме.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q} \qquad \dfrac{}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}(10)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}(9)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\mathbf{\Gamma, \Psi} \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Для оставшейся секвенции одно из условий можно убрать (она все равно остается истинной и, значит, доказуемой).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}(11, 12)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \mathbf{\Phi \vee \Psi}}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Дизъюнкцию можно доказать только с помощью правил 4 и 5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg\neg P \vdash P \vee Q}}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q}(11,12) \quad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}(11,12)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Осталось доказать секвенцию $\neg\neg P \vdash P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{\neg\neg P \vdash P}}{\neg\neg P \vdash P \vee Q}(4)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q}(11, 12) \quad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}(11, 12)}{\dfrac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}(9)}(10)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\neg\Phi} \vdash}{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi}}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Надо «уменьшить» разницу в количестве отрицаний $\neg$ между $\neg(\neg P)$ и P. Для этого естественно воспользоваться правилом 9.

$$\overline{\neg\neg P \vdash P}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Противоречивость теории можно доказать только с помощью правила

$$\frac{\neg\neg P, \neg P \vdash}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Противоречивость теории можно доказать только с помощью правила 10.

$$\frac{\neg\neg P, \neg P \vdash}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Что взять в качестве Φ и $\neg\Phi$?

Очевидно, что оптимальным является выбор $\neg P$ в качестве Φ.

$$\dfrac{\dfrac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\mathbf{\Gamma} \vdash \Phi}{\mathbf{\Gamma, \Psi} \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Осталось «убрать лишнее».

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}(11,12) \quad \dfrac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}(12)}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\mathbf{\Gamma} \vdash \Phi}{\mathbf{\Gamma, \Psi} \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 2. *Докажите секвенцию* $\neg\neg P \vdash P$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Осталось «убрать лишнее».

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}(11,12) \quad \dfrac{\neg\neg P \vdash \neg\neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}(12)}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\neg\neg P \vdash P}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 3. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

Аналогично **доказательству вспомогательной задачи 1** получаем следующее доказательство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\neg\neg Q \vdash Q}}{\neg\neg Q \vdash P \vee Q}(4)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash P \vee Q}(11,12) \quad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash \neg(P \vee Q)}(11,12)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 3. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

При этом доказательство секвенции $\neg\neg Q \vdash Q$ аналогично **доказательству утверждения** $\neg\neg P \vdash P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\neg\neg Q \vdash Q}}{\neg\neg Q \vdash P \vee Q}(4)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash P \vee Q}(11,12) \quad \dfrac{\neg(P \vee Q) \vdash \neg(P \vee Q)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash \neg(P \vee Q)}(11,12)}{\neg(P \vee Q), \neg\neg Q \vdash}(10)}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}(9)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Вспом. задача 3. *Докажите секвенцию* $\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q$.

Поиск доказательства: метод восходящего анализа.

В итоге получили следующее доказательство.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P}\ \textbf{Решение}\ \text{вспом. задачи 1} \qquad \dfrac{}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg Q}\ \textbf{Решение}\ \text{вспом. задачи 2}}{\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q}(1)$$

Вернёмся к лекции или рассмотрим **другой пример?**

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

Решение.

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; *2.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; *3.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; *4.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; *5.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; *7.* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; *8.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; *10.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; *11.* $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; *12.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P} \quad (7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; *2.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; *3.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; *4.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; *5.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; *7.* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; *8.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; *10.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; *11.* $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; *12.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P} \quad (7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; *2.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; *3.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; *4.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; *5.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; *7.* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; *8.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; *10.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; *11.* $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; *12.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}(10)}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; *2.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; *3.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; *4.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; *5.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; *7.* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; *8.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; *10.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; *11.* $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; *12.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}(11,12), \quad \dfrac{}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}(10)}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; *2.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; *3.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; *4.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; *5.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; *7.* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; *8.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; *10.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; *11.* $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; *12.* $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg Q, \vdash \neg Q}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}(11,12), \quad \dfrac{}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}(10)}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg Q, \vdash \neg Q}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}(11,12), \quad \dfrac{}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}(10)}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{P \to Q}, \mathbf{\neg Q}, \mathbf{\neg\neg P} \vdash \mathbf{Q}}(8)}{\dfrac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}(11, 12),\quad \mathbf{P \to Q}, \mathbf{\neg Q}, \mathbf{\neg\neg P} \vdash \mathbf{Q}}(10)}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11,12) \quad \dfrac{}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11,12)}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}(8)}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}(11,12), \quad \dfrac{}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}(10)}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11,12) \quad \dfrac{}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11,12)}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}(8)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg Q, \vdash \neg Q}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}(11,12), \quad \dfrac{}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}(10)}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

$$\textit{1. } \frac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}; \quad \textit{2. } \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad \textit{3. } \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad \textit{4. } \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}; \quad \textit{5. } \frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$$

$$\textit{6. } \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}; \quad \textit{7. } \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}; \quad \textit{8. } \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$$

$$\textit{9. } \frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}; \quad \textit{10. } \frac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}; \quad \textit{11. } \frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}; \quad \textit{12. } \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}.$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11, 12) \qquad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11, 12)}{\color{blue}{\mathbf{P} \to \mathbf{Q}, \neg\mathbf{Q}, \neg\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}}(8)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}(11, 12), \qquad \dfrac{}{\color{blue}{\mathbf{P} \to \mathbf{Q}, \neg\mathbf{Q}, \neg\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}(10)}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11,12) \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11,12)}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}(8)}{\dfrac{\dfrac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}(11,12), \quad \dfrac{}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}(10)}}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}(9)}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11,12) \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11,12)}{\mathbf{P \to Q}, \mathbf{\neg Q}, \mathbf{\neg\neg P} \vdash \mathbf{Q}}(8)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

$$
\dfrac{\dfrac{\color{magenta}{\neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11,12) \qquad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11,12)}{\color{blue}{\mathbf{P} \to \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}}(8)
$$

$$
\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\color{magenta}{\neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}}(9)
$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}(11,12), \quad \dfrac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}(11,12)}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\mathbf{\neg\neg P \vdash P}}(9) \quad \mathbf{\neg\neg P \vdash P}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11,12) \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11,12)$$
$$\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}(8)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}(11,12), \qquad \dfrac{}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}(11,12)}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\color{magenta}{\mathbf{\neg\neg P \vdash P}}}(9)$$

$$\dfrac{\dfrac{\color{magenta}{\mathbf{\neg\neg P \vdash P}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11,12) \qquad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11,12)}{\color{blue}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}}(8)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}(11,12), \quad \dfrac{\neg\neg P \vdash \neg\neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}(11,12)}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\mathbf{\neg\neg P \vdash P}}(9) \quad \dfrac{\mathbf{\neg\neg P \vdash P}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11,12) \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11,12)}{\mathbf{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash Q}}(8)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример 8. *Докажите, что* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg P}(11,12), \quad \dfrac{\neg\neg P \vdash \neg\neg P}{\neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P}(11,12)}{\neg\neg P, \neg P \vdash}(10)}{\neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}(9)$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{P}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P,}(11,12) \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash P \to Q}(11,12)}{\mathbf{P} \to \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}(8)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, \vdash \neg Q}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash \neg Q}(11,12), \quad \dfrac{}{\mathbf{P} \to \mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q}, \neg\neg \mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}}{P \to Q, \neg Q, \neg\neg P \vdash}(10)}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}(7)$$

Вернёмся к лекции или рассмотрим **другой пример?**

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Какие следствия можно получить из секвенции $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$?

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{???}\quad ,\quad ???,\quad \ldots,\quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\boldsymbol{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Какие следствия можно получить из секвенции $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$? Такое условие имеется только в правиле вывода 7.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{???}\quad ,\quad ???,\quad \ldots,\quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\boldsymbol{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

$$\frac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7),\quad ???,\quad \ldots,\quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

В каких правилах вывода присутствует импликация?

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7),\quad ???,\quad \ldots,\quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Импликация присутствует только в правиле вывода 8) (правило отделения, modus ponens).

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7),\quad ???,\quad \ldots,\quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{\Phi},\quad \Gamma \vdash \mathbf{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Импликация присутствует только в правиле вывода 8) (правило отделения, modus ponens). Для этого надо использовать секвенцию, в которой выводится Φ.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7),\quad ???,\quad \ldots,\quad ???}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{\Phi}, \quad \Gamma \vdash \mathbf{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Импликация присутствует только в правиле вывода 8) (правило отделения, modus ponens). Для этого надо использовать секвенцию, в которой выводится Φ.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7), \quad ??? \vdash \Phi, \quad \ldots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi},\quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Надо использовать секвенцию, в которой выводится Φ, и в условии должно присутствовать $\neg(\neg\Phi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7),\quad ???, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi,\quad \ldots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi},\quad \Gamma \vdash \boldsymbol{\Phi \to \Psi}}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Условие секвенции $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi$ можно «обогатить» формулой $\neg(\neg\Phi)$ с помощью правила 12.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7),\quad ???, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi,\quad \ldots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Поиск доказательства: метод нисходящего анализа.

Доказательство секвенции $\neg(\neg\Phi) \vdash \Phi$ было осуществлено при решении **вспомогательной задачи**.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7),\quad ???, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi,\quad \ldots}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Докажите, что правило вывода* $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}$ *не увеличивает множество доказуемых секвенций.*

Решение.

Применение этого правила надо заменить на следующий фрагмент дерева доказательства:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}(7)}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi \to \Psi,}(11,12) \quad \dfrac{\underline{\text{Вспомогательная задача}}}{\dfrac{\neg(\neg\Phi) \vdash \Phi}{\Gamma,\ \neg(\neg\Phi) \vdash \Phi}(11,12)}}{\Gamma, \neg(\neg\Phi) \vdash \Psi}(8)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать, что применение правила вывода* $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$ *не расширяет множество доказуемых секвенций.*

Решение.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать, что применение правила вывода* $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$ *не расширяет множество доказуемых секвенций.*

Решение. Применим стратегию предвкушения. Для применения этого правила надо было предварительно вывести противоречивость совокупности формул Γ.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать, что применение правила вывода* $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$ *не расширяет множество доказуемых секвенций.*

Решение. Применим стратегию предвкушения. Для применения этого правила надо было предварительно вывести противоречивость совокупности формул Γ. Сделать это можно было только с помощью правила вывода 10. Значит, до этого были получены секвенции $\Gamma \vdash \Psi$ и $\Gamma \vdash \neg\Psi$ для некоторой формулы Ψ.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать, что применение правила вывода* $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$ *не расширяет множество доказуемых секвенций.*

Решение. Применение данного правила надо заменить на следующий фрагмент дерева доказательства:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash \Psi,}(12) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \neg\Psi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash \neg\Psi}(12)}{\Gamma, \neg\Phi \vdash}(10)}{\Gamma \vdash \Phi}(9).$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать секвенцию* $\neg P \vee Q \vdash P \to Q$ *с использованием* ***дополнительного правила вывода****, и без использования этого правила.*

Решение.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать секвенцию* $\neg P \vee Q \vdash P \to Q$ *с использованием* ***дополнительного правила вывода****, и без использования этого правила.*

Решение с использованием **дополнительного правила**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash P,}(12) \quad \dfrac{\neg P \vdash \neg P}{P, \neg P \vdash \neg P}(12,11)}{\dfrac{\mathbf{P, \neg P \vdash}}{\mathbf{P, \neg P \vdash Q}}(\mathbf{7})}(10)}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q,}(12,11) \qquad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q,}(12,11) \quad \dfrac{\neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q}(12)}{\dfrac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q \vdash P \to Q}(7)}(6)$$

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Пример. *Доказать секвенцию* $\neg P \vee Q \vdash P \to Q$ *с использованием* ***дополнительного правила вывода****, и без использования этого правила.*

Решение. Для того, чтобы получить «нормальное» доказательство, использующее только правила вывода 1-12, надо, как указано в примере 7, удалить «дробь» $\dfrac{P, \neg P \vdash}{P, \neg P \vdash Q}$ и сделать следующие «вставки» (выделены прямоугольниками)

Решение с использованием **дополнительного правила**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash P,}(12) \quad \dfrac{\neg P \vdash \neg P}{P, \neg P \vdash \neg P}(12,11)}{\mathbf{P, \neg P \vdash}}(10)}{\dfrac{\mathbf{P, \neg P \vdash Q}}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q,}(12,11)}(7) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q,}(12,11) \quad \dfrac{\neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q}(12)}{\dfrac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q \vdash P \to Q}(7)}(6)$$

Решение без применения **дополнительного правила**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash P}(12)}{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash P}}(12) \quad \dfrac{\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{P, \neg P \vdash \neg P}(12,11)}{\boxed{P, \neg P, \neg Q \vdash \neg P}}(12)}{\dfrac{\boxed{\dfrac{P, \neg P, \neg Q \vdash}{P, \neg P \vdash Q}}(12)}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q}(12,11)}(10) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q}(12,11) \quad \dfrac{\neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q}(12)}{\dfrac{\neg P \vee Q, P \vdash Q}{\neg P \vee Q \vdash P \to Q}(7)}$$

Вернёмся к лекции?

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

Система аксиом исчисления высказываний «порождается» в этом случае следующими тремя схемами секвенций (в отличие от единственной секвенции):

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

В данном случае можно ограничиться единственным правилом вывода: правилом **modus ponens** или **правилом отделения**:
$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$. Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки Φ этого правила.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$.
Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки Φ этого правила.
Брать $P \to P$, видимо, не имеет смысла, так как доказательство формулы $(P \to P) \to (P \to P)$ вряд ли проще доказательства исходной формулы.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$.
Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки Φ этого правила.
Отметим, что посылка должна быть выводима, поэтому первой посылкой должна быть либо аксиома, либо доказуемая формула.
Например, P не годится, так как эта формула «не обязана» быть истинной в любой модели.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \mathbf{\Phi \to (\Psi \to \Phi)}$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение. *Генерация доказательства.* Мы можем пользоваться только правилом отделения, причем понятно, что $\Psi = P \to P$. Поэтому вопрос лишь в том, что мы возьмем в качестве первой посылки Φ этого правила.

Отметим, что посылка должна быть выводима, поэтому первой посылкой должна быть либо аксиома, либо доказуемая формула.

Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу $P \to P$.*

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Следовательно, для того, чтобы можно было воспользоваться правилом modus ponens, надо еще доказать формулу $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

Эту формулу можно получить тоже только с помощью правила modus ponens.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \mathbf{\Phi \to (\Psi \to \Phi)}$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

Попытка использовать для второго аргумента в правиле modus ponens результат подстановки соответствующих формул в схему аксиом 1, по-видимому, бесперспективна.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \mathbf{\Phi \to (\Psi \to \Phi)}$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

В этом случае придется брать в качестве Φ формулу $P \to P$, то есть ту самую формулу, которую мы доказываем, а она к моменту использования в доказательстве должна уже быть доказана.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\boldsymbol{\Phi} \to (\boldsymbol{\Psi} \to \boldsymbol{\Theta})\big) \to \big((\boldsymbol{\Phi} \to \boldsymbol{\Psi}) \to (\boldsymbol{\Phi} \to \boldsymbol{\Theta})\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

Поэтому остается применить схему аксиом 2.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \mathbf{\Phi \to (\Psi \to \Phi)}$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.

Решение. *Генерация доказательства.* Самой «короткой» аксиомой является аксиома, полученная подстановкой в первую схему аксиом формулы P в качестве Φ и Ψ: $P \to (P \to P)$.

Надо доказать $\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)$.

В схеме аксиом 2 придется положить $\Phi = P$, $\Psi = P \to P$, $\Theta = P$. Следовательно, для применения правила отделения, надо доказать формулу $\Phi \to (\Psi \to \Theta) = P \to \big((P \to P) \to P\big)$. Но это результат подстановки в схему аксиом 1 формулы P в качестве Φ и формулы $P \to P$ в качестве Ψ.

IX. Исчисление высказываний с системой связок $\neg, \to$

1. $\vdash \Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
2. $\vdash \big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$;
3. $\vdash \Big((\neg\Psi \to \neg\Phi) \to \big((\neg\Psi \to \Phi) \to \Psi\big)\Big)$.

$$\frac{\vdash \Phi,\ \vdash \Phi \to \Psi}{\vdash \Psi}$$

Пример. *Доказать формулу* $P \to P$.
Решение.

$$\dfrac{\dfrac{P \to \big((P \to P) \to P\big),\ \Big(P \to \big((P \to P) \to P\big)\Big) \to \Big(\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P)\Big)}{\big(P \to (P \to P)\big) \to (P \to P),} \qquad P \to (P \to P)}{P \to P}$$

Вернёмся к лекции?

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$:

x, y — **термы**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$:

x, y — **термы**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$:

x, y — **термы**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$:
x, y — **термы**, $f(x)$ — терм,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$:

x, y — **термы**, $f(x)$ — терм, $g(f(x), y)$ —

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$:

x, y — **термы**, $f(x)$ — терм, $g(f(x), y)$ —

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$:

x, y — **термы**, $f(x)$ — терм, $g(f(x), y)$ — терм.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. b) $f(q(x, y))$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. b) $f(q(x, y))$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. b) $f(q(x, y))$:

x, y — **термы**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. b) $f(q(x, y))$:

x, y — **термы**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. b) $f(q(x, y))$:

x, y — **термы**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. b) $f(q(x, y))$:

x, y — **термы**, $q(x, y)$ — предикат...

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ***b)*** $f(q(x, y))$; ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. b) $f(q(x, y))$:

x, y — **термы**, $q(x, y)$ — предикат...

$f(q(x, y))$ не является выражением языка данного исчисления, тем более термом!

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. c) $q(x, f(x))$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. c) $q(x, f(x))$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. c) $q(x, f(x))$:

x — терм,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. c) $q(x, f(x))$:

x — терм,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. c) $q(x, f(x))$:

x — терм,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. c) $q(x, f(x))$:
x — **терм**, $f(x)$ — терм,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. c) $q(x, f(x))$:

x — **терм**, $f(x)$ — терм, $q(x, f(x))$ —

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. c) $q(x, f(x))$:

x — **терм**, $f(x)$ — терм, $q(x, f(x))$ —

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. c) $q(x, f(x))$:

x — **терм**, $f(x)$ — терм, $q(x, f(x))$ — предикат, не терм!

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. d) $f(h(x, y), g(y, x))$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. d) $f(h(x, y), g(y, x))$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. d) $f(h(x, y), g(y, x))$:

x, y — **термы**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. d) $f(h(x, y), g(y, x))$:

x, y — **термы**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. d) $f(h(x, y), g(y, x))$:

x, y — **термы**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. d) $f(h(x, y), g(y, x))$:

x, y — **термы**, $h(x, y)$, $g(y, x)$ — термы,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. d) $f(h(x, y), g(y, x))$:

x, y — **термы**, $h(x, y)$, $g(y, x)$ — термы,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$; ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. d) $f(h(x, y), g(y, x))$:

x, y — **термы**, $h(x, y)$, $g(y, x)$ — термы,

$f(h(x, y), g(y, x))$ не является выражением языка данного исчисления, тем более термом!

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. e) $f(g(x, x))$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. e) $f(g(x, x))$:

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. e) $f(g(x, x))$:

x — терм,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. e) $f(g(x, x))$:

x — **терм**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. e) $f(g(x, x))$:

x — **терм**,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. e) $f(g(x, x))$:
x — **терм**, $g(x, x)$ — терм,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. e) $f(g(x, x))$:

x — **терм**, $g(x, x)$ — терм,

$f(g(x, x))$ —

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. e) $f(g(x, x))$:

x — **терм**, $g(x, x)$ — терм,

$f(g(x, x))$ —

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. e) $f(g(x, x))$:

x — **терм**, $g(x, x)$ — терм,

$f(g(x, x))$ — терм.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.
c) $q(x, f(x))$ — формула, но не терм.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t)$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$,

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t)$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

При, например, $x = 2$, $y = 3$ получим $g(f(2), 3) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

При, например, $x = 2$, $y = 3$ получим $g(f(2), 3) = 7$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

При, например, $x = 2$, $y = 3$ получим $g(f(2), 3) = 7$ — элемент из области интерпретации $\mathbb{N}$.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

b) $f(q(x, y)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

b) $f(q(x, y)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

b) $f(q(x, y)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

b) $f(q(x, y)) = f(x > y)$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

b) $f(q(x, y)) = f(x > y)$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

b) $f(q(x, y)) = f(x > y)$???

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

b) $f(q(x, y)) = f(x > y)???$ — бессмыслица!

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) = q(x, x^2)$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) = q(x, x^2)$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) = q(x, x^2) \equiv x > x^2$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) = q(x, x^2) \equiv x > x^2$ — предикат!

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) = q(x, x^2) \equiv x > x^2$ — предикат!

При, например, $x = 2$ получим $q(2, f(2)) \equiv$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) = q(x, x^2) \equiv x > x^2$ — предикат!

При, например, $x = 2$ получим $q(2, f(2)) \equiv 2 > 2^2$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) = q(x, x^2) \equiv x > x^2$ — предикат!

При, например, $x = 2$ получим $q(2, f(2)) \equiv 2 > 2^2$ — ложное утверждение.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

c) $q(x, f(x)) = q(x, x^2) \equiv x > x^2$ — предикат!

При, например, $x = 2$ получим $q(2, f(2)) \equiv 2 > 2^2$ — ложное утверждение.

d) $f(h(x, y), g(y, x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

d) $f(h(x, y), g(y, x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

d) $f(h(x, y), g(y, x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

d) $f(h(x, y), g(y, x)) = f(x \cdot y, g(y, x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

d) $f(h(x, y), g(y, x)) = f(x \cdot y, g(y, x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

d) $f(h(x, y), g(y, x)) = f(x \cdot y, g(y, x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

d) $f(h(x, y), g(y, x)) = f(x \cdot y, g(y, x)) = f(x \cdot y, y + x)$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

d) $f(h(x, y), g(y, x)) = f(x \cdot y, g(y, x)) = f(x \cdot y, y + x)$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

d) $f(h(x, y), g(y, x)) = f(x \cdot y, g(y, x)) = f(x \cdot y, y + x)$ — бессмыслица!

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

е) $f(g(x, x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

е) $f(g(x, x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

e) $f(g(x, x)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

е) $f(g(x, x)) = f(x + x) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

e) $f(g(x, x)) = f(x + x) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

е) $f(g(x, x)) = f(x + x) = (x + x)^2 = 4x^2$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

е) $f(g(x, x)) = f(x + x) = (x + x)^2 = 4x^2$ — алгебраическая операция.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

e) $f(g(x, x)) = f(x + x) = (x + x)^2 = 4x^2$ — алгебраическая операция.

При, например, $x = 2$ получим $f(g(2, 2)) =$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

е) $f(g(x, x)) = f(x + x) = (x + x)^2 = 4x^2$ — алгебраическая операция.

При, например, $x = 2$ получим $f(g(2, 2)) = 16$

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. а) $g(f(x), y)$; **е)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

а) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

е) $f(g(x, x)) = f(x + x) = (x + x)^2 = 4x^2$ — алгебраическая операция.

При, например, $x = 2$ получим $f(g(2, 2)) = 16$ — элемент из области интерпретации $\mathbb{N}$.

Пример 9. *Рассмотрим сигнатуру* $\Sigma = \langle \{f, g, h\}, \{p, q\}, \mu \rangle$, *где* μ *задана таблицей значений:*

x	f	g	h	p	q
$\mu(x)$	1	2	2	1	2

Какие из выражений являются ***термами****:* ***a)*** $g(f(x), y)$; ~~***b)*** $f(q(x, y))$;~~ ***c)*** $q(x, f(x))$; ~~***d)*** $f(h(x, y), g(y, x))$;~~ ***e)*** $f(g(x, x))$. *Приведите примеры интерпретации термов.*

Решение. a) $g(f(x), y)$; **e)** $f(g(x, x))$ — термы.

Пусть $\mathbb{N}$ — область интерпретации, $f(t) = t^2$, $g(s, t) = s + t$, $h(s, t) = s \cdot t$, $p(t) \Leftrightarrow t > 10$, $q(s, t) \Leftrightarrow s > t$.

a) $g(f(x), y) = g(x^2, y) = x^2 + y$ — алгебраическая операция.

e) $f(g(x, x)) = f(x + x) = (x + x)^2 = 4x^2$ — алгебраическая операция.

Вернемся к лекции?

Задания для самостоятельного выполнения

Задача XI.1. (Ответ приведен на стр.746.) Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача XI.2. (Ответ приведен на стр.755.) Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача XI.3. (Ответ приведен на стр.769.) Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Задача XI.4. (Ответ приведен на стр.787.) Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача XI.5. (Ответ приведен на стр.811.) Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача XI.6. (Ответ приведен на стр.842.) Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача XII.7. (Ответ приведен на стр.879.) Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача XII.8. (Ответ приведен на стр.890.) Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

r1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. Составив истинностную таблицу этой функции, легко убеждаемся в том, что эта функция тождественно равна 1, то есть истинна. Проверим доказуемость.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Нам надо доказать секвенцию $\vdash P \vee \neg P$. «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Нам надо доказать секвенцию $\vdash P \vee \neg P$. «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Попробуем так же поступить и здесь: согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Нам надо доказать секвенцию $\vdash P \vee \neg P$. «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Попробуем так же поступить и здесь: согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$.

Единственное правило вывода, позволяющее в качестве вывода получить секвенцию такого вида — это правило 10.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Нам надо доказать секвенцию $\vdash P \vee \neg P$. «В обыденной жизни» это утверждение мы бы доказывали, скорее всего, методом «от противного».

Попробуем так же поступить и здесь: согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$.

Единственное правило вывода, позволяющее в качестве вывода получить секвенцию такого вида — это правило 10.

В качестве $\Gamma \vdash \neg P$ можно взять аксиому $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$, при этом к посылке этой секвенции, согласно правилу 12, можно дописать любую формулу. В качестве первой секвенции посылки из правила 10 попробуем взять $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$. Используем правило 10, в качестве $\Gamma \vdash \neg P$ возьмем $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$. В качестве первой секвенции посылки из правила 10 возьмем $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$.

Согласно правилу 4 для доказательства последней секвенции достаточно доказать, например, секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash P$). Единственное правило, «нетривиальным» следствием в котором может быть эта формула, является правило 9.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Генерация» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Согласно правилу 9 нам достаточно получить секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash$. Используем правило 10, в качестве $\Gamma \vdash \neg P$ возьмем $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$. В качестве первой секвенции посылки из правила 10 возьмем $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$.

Согласно правилу 4 для доказательства последней секвенции достаточно доказать, например, секвенцию $\neg(P \vee \neg P) \vdash P$). Единственное правило, «нетривиальным» следствием в котором может быть эта формула, является правило 9.

Итак, надо доказать, $\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash$. Как мы уже отмечали, такое заключение можно получить только из правила 10. Одной из секвенций посылки можно взять $\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$, в которой, согласно правилу 12 посылку можно «расширить». Во второй секвенции посылки правила 10 должно быть правило, вывод в котором имеет вид $P \vee \neg P$. В качестве посылки можно взять один из «дизъюнктов», например, $\neg P$. Секвенция $\neg P \vdash P \vee \neg P$ следует из аксиомы $\neg P \vdash \neg P$ и правила 5.

Задача 1. Проверить истинность формулы $P \vee \neg P$. Доказать эту формулу.

Ответ. *«Оформление» доказательства.*

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Оформим результат в виде так называемого **дерева доказательства**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg P \vdash P \vee \neg P}}{\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash P \vee \neg P;} \quad \dfrac{\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)}{\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash \neg(P \vee \neg P)}}{\dfrac{\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P}\,(9)}\,(10)}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P;}\,(4) \quad \neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)}{\dfrac{\neg(P \vee \neg P) \vdash}{\vdash P \vee \neg P}}\,(10)$$

Решение задачи 2.

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ.

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$P, Q \vdash P \wedge Q$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{P, Q \vdash P}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{P, Q \vdash P \qquad P, Q \vdash Q}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P} \qquad P, Q \vdash Q}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}(12) \qquad P, Q \vdash Q}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, Q \vdash P}(12) \qquad P, Q \vdash Q}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, Q \vdash P}(12) \quad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, Q \vdash P}(12) \quad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}(11, 12)}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, Q \vdash P}(12) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{P, Q \vdash Q}(11, 12)}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Задача 2. Доказать формулу $P, Q \vdash P \wedge Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, Q \vdash P}(12) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{P, Q \vdash Q}(11, 12)}{P, Q \vdash P \wedge Q}(1)$$

Генценовское дерево доказательства построено.

Решение задачи 3.

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ.

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{}{P \wedge Q \vdash P \to Q}$$

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$P \wedge Q \vdash P \to Q$

В заключении импликация встречается только в правиле ( )

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$P \wedge Q \vdash P \to Q$

В заключении импликация встречается только в правиле (7)

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

В заключении импликация встречается только в правиле (7)

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{P \wedge Q, P \vdash Q}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

В заключении импликация встречается только в правиле (7)

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, P \vdash Q}}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, P \vdash Q}}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Утверждение $P \wedge Q$ сильнее утверждения Q.

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, P \vdash Q}}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Утверждение $P \wedge Q$ сильнее утверждения Q.
Утверждение P в посылке можно не учитывать.

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, P \vdash Q}(12)}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Утверждение $P \wedge Q$ сильнее утверждения Q.
Утверждение P в посылке можно не учитывать.

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \wedge Q \vdash Q}{P \wedge Q, P \vdash Q}(12)}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Утверждение $P \wedge Q$ сильнее утверждения Q.
Утверждение P в посылке можно не учитывать.

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash Q}}{P \wedge Q, P \vdash Q}(12)}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Осталось применить правило ( ).

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash Q}}{P \wedge Q, P \vdash Q}(12)}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Осталось применить правило (3).

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash Q}(3)}{P \wedge Q, P \vdash Q}(12)}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Осталось применить правило (3).

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}{P \wedge Q \vdash Q}(3)}{P \wedge Q, P \vdash Q}(12)}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Осталось применить правило (3).

Задача 3. Доказать формулу $P \wedge Q \vdash P \to Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}{P \wedge Q \vdash Q}(3)}{P \wedge Q, P \vdash Q}(12)}{P \wedge Q \vdash P \to Q}(7)$$

Генценовское дерево доказательства построено.

Решение задачи 4.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$P \vee Q \vdash Q \vee P$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$P \vee Q \vdash Q \vee P$

Доказать секвенции $P \vee Q \vdash Q$ и $P \vee Q \vdash P$ невозможно, поскольку при истинной формуле $P \vee Q$ формула Q может быть неверна.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$P \vee Q \vdash Q \vee P$$

Доказать секвенции $P \vee Q \vdash Q$ и $P \vee Q \vdash P$ невозможно, поскольку при истинной формуле $P \vee Q$ формула Q может быть неверна.

Например, так будет в случае, когда P истинно, а Q ложно.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$P \vee Q \vdash Q \vee P$

Применим правило (6) рассмотрения двух случаев.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{}{P \vee Q \vdash Q \vee P}\,(6)$$

Применим правило (6) рассмотрения двух случаев.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Применим правило (6) рассмотрения двух случаев.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{P \vee Q, P \vdash Q \vee P \qquad\qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Применим правило (6) рассмотрения двух случаев.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{P \vee Q, P \vdash Q \vee P \qquad P \vee Q, Q \vdash Q \vee P \qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Применим правило (6) рассмотрения двух случаев.

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P} \qquad P \vee Q, Q \vdash Q \vee P \qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P} (6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11, 12) \qquad P \vee Q, Q \vdash Q \vee P \qquad\qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash Q \vee P}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \qquad P \vee Q, Q \vdash Q \vee P \qquad\qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash Q \vee P}}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \qquad P \vee Q, Q \vdash Q \vee P \qquad\qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash Q \vee P}(5)}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \qquad P \vee Q, Q \vdash Q \vee P \qquad\qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P \vdash Q \vee P}(5)}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \qquad P \vee Q, Q \vdash Q \vee P \qquad\qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P \vdash Q \vee P}(5)}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \qquad \dfrac{}{P \vee Q, Q \vdash Q \vee P} \qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P \vdash Q \vee P}(5)}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \quad \dfrac{}{P \vee Q, Q \vdash Q \vee P}(11,12) \quad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P \vdash Q \vee P}(5)}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \quad \dfrac{Q \vdash Q \vee P}{P \vee Q, Q \vdash Q \vee P}(11,12) \quad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P \vdash Q \vee P}(5)}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \quad \dfrac{\dfrac{}{Q \vdash Q \vee P}}{P \vee Q, Q \vdash Q \vee P}(11,12) \quad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P \vdash Q \vee P}(5)}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \quad \dfrac{\dfrac{}{Q \vdash Q \vee P}(4)}{P \vee Q, Q \vdash Q \vee P}(11,12) \quad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P \vdash Q \vee P}(5)}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \quad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q}{Q \vdash Q \vee P}(4)}{P \vee Q, Q \vdash Q \vee P}(11,12) \quad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Задача 4. Доказать формулу $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P \vdash Q \vee P}(5)}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}(11,12) \quad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q}{Q \vdash Q \vee P}(4)}{P \vee Q, Q \vdash Q \vee P}(11,12) \qquad P \vee Q \vdash P \vee Q}{P \vee Q \vdash Q \vee P}(6)$$

Генценовское дерево доказательства построено.

Решение задачи 5.

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ.

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ.

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$\neg P, P \vee Q \vdash Q$

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$\neg P, P \vee Q \vdash Q$

Наличие в посылке формулы $P \vee Q$ наталкивает на мысль применить правило рассмотрения двух случаев — правило ( ).

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$\neg P, P \vee Q \vdash Q$

Наличие в посылке формулы $P \vee Q$ наталкивает на мысль применить правило рассмотрения двух случаев — правило (6).

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}\,(6)$$

Наличие в посылке формулы $P \vee Q$ наталкивает на мысль применить правило рассмотрения двух случаев — правило (6).

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q \qquad \neg P, P \vee Q, Q \vdash Q \quad \neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash Q} \quad (6)$$

Наличие в посылке формулы $P \vee Q$ наталкивает на мысль применить правило рассмотрения двух случаев — правило (6).

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q \qquad \neg P, P \vee Q, Q \vdash Q \quad \neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash Q} \quad (6)$$

ВНИМАНИЕ! ЭТО ВАЖНО!

Все три секвенции в посылке истинны!

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q \qquad \neg P, P \vee Q, Q \vdash Q \qquad \overline{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q \qquad \neg P, P \vee Q, Q \vdash Q \quad \overline{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q} \quad (6)$$

Очевидно, что секвенция $\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q$ после удаления лишней посылки становится аксиомой!

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q \qquad \neg P, P \vee Q, Q \vdash Q \quad \overline{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q} \quad (6)$$

Очевидно, что секвенция $\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q$ после удаления лишней посылки становится аксиомой!

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q \qquad \neg P, P \vee Q, Q \vdash Q \qquad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q} \quad (6)$$

Очевидно, что секвенция $\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q$ после удаления лишней посылки становится аксиомой!

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q \qquad \dfrac{}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \qquad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q \qquad \dfrac{}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \qquad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q} \quad (6)$$

Здесь также все сразу сводится к аксиоме...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \qquad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}\ (6)$$

Здесь также все сразу сводится к аксиоме...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q} \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q} \quad (6)$$

Попробуем «от противного», т.е. с помощью правила ( )...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q} \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}(6)}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}$$

Попробуем «от противного», т.е. с помощью правила (9)...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Попробуем «от противного», т.е. с помощью правила (9)...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Попробуем «от противного», т.е. с помощью правила (9)...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

У нас есть только одно правило вывода, позволяющее доказать противоречивость — правило ( )...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

У нас есть только одно правило вывода, позволяющее доказать противоречивость — правило (10)...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

У нас есть только одно правило вывода, позволяющее доказать противоречивость — правило (10)...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash P \quad \neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash \neg P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

У нас есть только одно правило вывода, позволяющее доказать противоречивость — правило (10)...

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash P} \quad \overline{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash \neg P}}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}(9)}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q} \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Последние утверждения сводятся к аксиомам с помощью правил (11,12).

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash P} \quad \dfrac{}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash \neg P}}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Последние утверждения сводятся к аксиомам с помощью правил (11,12).

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash P} \quad \dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash \neg P}}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Последние утверждения сводятся к аксиомам с помощью правил (11,12).

Задача 5. Докажите секвенцию $\neg P, P \vee Q \vdash Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash P} \quad \dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash \neg P}}{\neg P, P \vee Q, P, \neg Q \vdash}}{\neg P, P \vee Q, P \vdash Q}(9) \quad \dfrac{Q \vdash Q}{\neg P, P \vee Q, Q \vdash Q} \quad \dfrac{P \vee Q \vdash P \vee Q}{\neg P, P \vee Q \vdash P \vee Q}}{\neg P, P \vee Q \vdash Q}(6)$$

Получено Генценовское дерево доказательства.

Решение задачи 6.

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ.

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$P \to Q \vdash \neg P \vee Q$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$P \to Q \vdash \neg P \vee Q$$

Похоже, придется «рассуждать от противного»: применим правило ( )...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$P \to Q \vdash \neg P \vee Q$$

Похоже, придется «рассуждать от противного»: применим правило (9)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\frac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Похоже, придется «рассуждать от противного»: применим правило (9)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash$$

$$P \to Q \vdash \neg P \vee Q$$

Вывести противоречие можно только с помощью правила ( )...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash$$

$$P \to Q \vdash \neg P \vee Q$$

Вывести противоречие можно только с помощью правила (10)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q \qquad \ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Вывести противоречие можно только с помощью правила (10)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q \qquad \overline{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Вывести противоречие можно только с помощью правила (10)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Вывести противоречие можно только с помощью правила (10)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Применим правило ( ), чтобы потом воспользоваться правилом ( ) modus ponens.....

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Применим правило (5), чтобы потом воспользоваться правилом ( ) modus ponens.....

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Применим правило (5), чтобы потом воспользоваться правилом (8) modus ponens.....

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Применим правило (5), чтобы потом воспользоваться правилом (8) modus ponens.....

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}$$
$$P \to Q \vdash \neg P \vee Q$$

Применим правило (5), чтобы потом воспользоваться правилом (8) modus ponens.....

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Применим правило (5), чтобы потом воспользоваться правилом (8) modus ponens.....

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P \qquad P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Применим правило (5), чтобы потом воспользоваться правилом (8) modus ponens.....

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P \qquad \overline{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P \qquad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Вывести противоречие можно только с помощью правила ( )...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Вывести противоречие можно только с помощью правила (10)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots \vdash \neg P \vee Q}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \qquad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \dots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\dots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Вывести противоречие можно только с помощью правила (10)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots \vdash \neg P \vee Q \qquad \dots \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \qquad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \dots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\dots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}$$

$$P \to Q \vdash \neg P \vee Q$$

Вывести противоречие можно только с помощью правила (10)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots \vdash \neg P \vee Q \qquad \dfrac{}{\dots \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \qquad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \dots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \qquad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\dots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{\ldots \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{\ldots \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{}{P \to Q \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \qquad \dfrac{}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \qquad \dfrac{}{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q} \qquad \dfrac{}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\ldots \vdash \neg P \vee Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\ldots \vdash \neg P \vee Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Осталось применить правило ( )...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\ldots \vdash \neg P \vee Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P} \quad \dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q} \quad \dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}$$

Осталось применить правило (4)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\ldots \vdash \neg P \vee Q}
\qquad
\dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots \vdash \neg(\neg P \vee Q)}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P}
\qquad
\dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}
\qquad
\dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}
}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}
$$

Осталось применить правило (4)...

Задача 6. Докажите секвенцию $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg P \vdash \neg P}{\ldots \vdash \neg P \vee Q}
\quad
\dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots \vdash \neg(\neg P \vee Q)}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), \neg P \vdash}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash P}
\quad
\dfrac{P \to Q \vdash P \to Q}{P \to Q, \ldots \vdash P \to Q}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash Q}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}
\quad
\dfrac{\neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}{\ldots, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q)}
}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash}
}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}
$$

Генценовское дерево доказательства построено.

Решение задачи 7.

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ.

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент

$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ на

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент

$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ на $\qquad\qquad \Gamma \vdash \Theta$

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент

$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ на $\begin{matrix}\Gamma \vdash \Psi \\ \\ \Gamma \vdash \Theta\end{matrix}$

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta} \text{ на } \begin{array}{c} \Gamma, \Psi \vdash \Theta \\ \Gamma \vdash \Psi \\ \hline \Gamma \vdash \Theta \end{array}$$

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент

$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ на $\Gamma \vdash \Psi \quad \dfrac{\Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}(7)$

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta} \text{ на } \begin{array}{l} \Gamma \vdash \Psi \\ \Gamma \vdash \Theta \end{array} \dfrac{\Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Psi \to \Theta}(7)$$

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент

$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ на $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi \quad \dfrac{\Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Psi \to \Theta}(7)}{\Gamma \vdash \Theta}(8)$

Задача 7. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi,\quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi,\quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi,\quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент

$\dfrac{\Gamma \vdash \Psi;\ \Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$ на $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi \qquad \dfrac{\Gamma, \Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Psi \to \Theta}(7)}{\Gamma \vdash \Theta}(8)$

Утверждение доказано.

Решение задачи 8.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

Попробуем применить правило ( ) modus ponens.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

Попробуем применить правило (8) modus ponens.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

Попробуем применить правило (8) modus ponens.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Попробуем применить правило (8) modus ponens.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Попробуем применить правило (8) modus ponens.

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

«Избавимся от лишнего» с помощью (быть может, многократного) применения правил ( ).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

«Избавимся от лишнего» с помощью (быть может, многократного) применения правил (11,12).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

«Избавимся от лишнего» с помощью (быть может, многократного) применения правил (11,12).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Для сведения к аксиоме достаточно применить правило ( ).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Для сведения к аксиоме достаточно применить правило (2).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Для сведения к аксиоме достаточно применить правило (2).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Попытаемся свести к доказательству $\Psi \to \Theta$ с помощью правил ( ) и ( ).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Попытаемся свести к доказательству $\Psi \to \Theta$ с помощью правил (7) и ( ).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Попытаемся свести к доказательству $\Psi \to \Theta$ с помощью правил (7) и ( ).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Попытаемся свести к доказательству $\Psi \to \Theta$ с помощью правил (7) и ( ).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Попытаемся свести к доказательству $\Psi \to \Theta$ с помощью правил (7) и (8).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \quad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Попытаемся свести к доказательству $\Psi \to \Theta$ с помощью правил (7) и (8).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \quad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \quad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

$$\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \quad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta} \qquad \Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}$$

$$\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \qquad \dfrac{}{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \quad \dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Сведем доказательство импликации $\Psi \to \Theta$ к доказательству Θ при истинном Ψ с помощью правила ( ).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \qquad \dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}$$

$$\dfrac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Сведем доказательство импликации $\Psi \to \Theta$ к доказательству Θ при истинном Ψ с помощью правила (7).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \qquad \dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2, \Psi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}$$

$$\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$$

Сведем доказательство импликации $\Psi \to \Theta$ к доказательству Θ при истинном Ψ с помощью правила (7).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \qquad \dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2, \Psi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}$$

$$\dfrac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

«Избавимся от лишнего» с помощью (быть может, многократного) применения правил ( ).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \qquad \dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2, \Psi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}$$

$$\dfrac{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \qquad \Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

«Избавимся от лишнего» с помощью (быть может, многократного) применения правил (11,12).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2, \Psi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

«Избавимся от лишнего» с помощью (быть может, многократного) применения правил (11,12).

Задача 8. Докажите, что правило вывода $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ не расширяет множество доказуемых секвенций.

Ответ. 1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$; 2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$; 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$; 4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$; 5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$; 7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$; 8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$; 10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$; 11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$; 12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

В дереве доказательства надо заменить фрагмент $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$ на

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2, \Psi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash \Psi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2, \Phi \vdash \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Phi \to \Theta}}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta}$$

Доказательство завершено.

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?