Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Многочлены

Раздел **электронного учебника**
для сопровождения лекций и практик

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2016

I. Инструкция к пособию **12**

II. Типовой план алгебраического исследования **22**

III. Определения **35**

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена 43
III.2. Степень многочлена 63
III.3. Равенство многочленов 66
III.4. Критерий равенства многочленов 73
III.5. Операции алгебры многочленов 83
III.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов . . 89
III.7. Линейное пространство многочленов 95
III.8. Кольцо многочленов 99

IV. Делимость многочленов **105**
IV.1. Алгоритм Евклида 115
IV.2. Теорема о делении с остатком 126
IV.3. Н.О.Д. и Н.О.К. многочленов 147
IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления 148

V. Корни многочленов **168**
V.1. Теорема Безу 175
V.2. Кратность корня 206
V.3. Теорема Виета 214
V.4. Проблема приближённого нахождения кратных корней . 217
V.5. Производная многочлена 223
V.6. Теорема о кратных корнях и производной 224
V.7. Теорема об избавлении от кратных корней 234
V.8. Разложимые и неразложимые (неприводимые) многочлены 246

V.9. Теорема о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ . . . 249
V.10. Следствие о количестве комплексных корней 250
V.10.1. Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени 255
V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами 262
V.12. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами 283
V.13. Схема Горнера 288
V.14. Результант многочленов 291
V.15. Теорема о результанте многочленов 299
V.16. Определение результанта многочленов 300
V.17. Теорема о представлении результанта 301
V.18. Многочлены над полем рациональных чисел 303
V.19. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами . 308

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов 312
V.21. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел 325
V.22. Критерий Эйзентштейна 331
V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами 347
V.24. Рациональные корни многочлена с рациональными коэффициентами 366
V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом 367
V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом 376
V.26. Алгебраические числа 385
V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах 391

V.26.2. Сопряженные алгебраические числа 418
V.26.3. Теорема об операциях над алгебраическими числами 420
V.26.4. Следствие о поле алгебраических чисел 421
V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа 424

VI. Многочлены от нескольких переменных **437**
VI.1. Формы (однородные многочлены) 466
VI.2. Симметрические многочлены 474
VI.3. Теорема о разложении симметричного многочлена по основным 493

VII. Дробно-рациональная функция **494**
VII.1. Определение дробно-рациональной функции 495
VII.2. Теорема о разложении дробно-рациональной функции 496

Пример 1 деления многочленов 497

Пример 2 поиска НОД и НОК многочленов 519

Пример 3 вычисления кратности корня 566

Пример 4 избавления от кратных корней 600

Пример 5 разложения многочлена на множители 624

Пример 6 применения схемы Горнера 675

Пример 7 нахождения результанта 682

Пример 8 формулы интерполяционного многочлена Лагранжа 700

Пример 9 интерполяционного многочлена Лагранжа 727

Пример 10 графиков интеполяционного многочлена Лагранжа 764

Пример 11 разложения в сумму основных симметрических полиномов 774

Пример 12 разложения дробно-рациональной функции в сумму простейших 795

Решение примера 12 методом сокращения 827

Деление многочленов 836

Задача XVII.1 837

НОК и НОД многочленов 837

Задача XVIII.2 838

Задача XVIII.3 839

Задача XVIII.4 840

Избавление от кратных корней 840

Задача XIX.5 841

Разложение многочлена в произведение 841

Задача XX.6 842

Задача XX.7 843

Задача XX.8 844

Нахождение результанта 844

Задача XXI.9 845

Интерполяционный многочлен Лагранжа 845

Задача XXII.10 846

Разложение симметрического многочлена в сумму основных 846

Задача XXIII.11 847

Задача XXIII.12 848

Задача XXIII.13 849

Разложение дробно-рациональной функции в сумму

простейших 849

Задача XXIV.14 850

Задача XXIV.15 851

Задача XXIV.16 852

Ответы и решения 853

I. Инструкция к пособию

I. Инструкция к пособию

Данная работа представлена в формате pdf и, следовательно, может использоваться на различных аппаратных и программных платформах.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

Данная работа представлена в формате pdf и, следовательно, может использоваться на различных аппаратных и программных платформах.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

Данная работа представлена в формате pdf и, следовательно, может использоваться на различных аппаратных и программных платформах.

В других программах встроенные скрипты могут не работать или работать некорректно.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

Данная работа представлена в формате pdf и, следовательно, может использоваться на различных аппаратных и программных платформах.

Вернуться из презентации любой лекции и практического занятия к файлу 0000Spisok.pdf можно двумя способами:
во-первых, с титульного листа с помощью гиперссылки, отмеченной словосочетанием «электронного учебника» во фразе «Раздел электронного учебника»;
во-вторых, с последней страницы, по гиперссылке «Вернуться к списку презентаций».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

В программе Adobe Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш `Ctrl+L` (т.е. одновременным нажатием клавиш «`Ctrl`» и «`L`»).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

В программе Adobe Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш `Ctrl+L` (т.е. одновременным нажатием клавиш «`Ctrl`» и «`L`»).

Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «`Page Up`» или «`Page Down`».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

В программе Adobe Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш `Ctrl+L` (т.е. одновременным нажатием клавиш «`Ctrl`» и «`L`»).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

В программе Adobe Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш `Ctrl+L` (т.е. одновременным нажатием клавиш «`Ctrl`» и «`L`»).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука).

«Откат», т. е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш `Alt` и $\leftarrow$.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader` версии 11 или `DC`.

В программе Adobe Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш `Ctrl+L` (т.е. одновременным нажатием клавиш «`Ctrl`» и «`L`»).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука).

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Пример: объект исследования — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$.

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Пример: объект исследования — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Типовые способы задания: римская и арабская формы записи,

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Пример: объект исследования — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Типовые способы задания: представление в виде $n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$.

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ определяется характеристика «число разрядов»

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ определяется характеристика «число разрядов», операция «сложение»

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ определяются характеристика «число разрядов», операция «сложение» и отношения «меньше», «больше».

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ вводится операция «умножение» (как кратное сложение)

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ вводится операция «умножение» (как кратное сложение) и отношения «делиться нацело», «быть четным числом».

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

II. Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

Например, для натуральных чисел $\mathbb{N}$ рассматриваются подмножества $\mathbb{N}_2$ — четных чисел, множество простых чисел и др.

III. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: многочленом

или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

III. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: многочленом

или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

Разница здесь в том, что при алгебраическом подходе нас интересует не функция, а *выражение*, ее задающее. В частности, при «алгебраическом» подходе не предполагается, что в этом выражении вместо x надо подставлять число.

III. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: многочленом

или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

Например, можно вместо x, при необходимости, подставлять и квадратную матрицу, и другие математические объекты.

III. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

В качестве основного определения мы сейчас примем «алгебраическое» определение. Таким образом, для нас многочлен — это *выражение*, а не функция.

III. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

В алгебре нас в большей степени интересуют не свойства многочлена как функции (монотонность, экстремумы и т.п.), а возможности преобразований, алгебраические соотношения для многочленов.

III. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

В данном разделе мы будем отождествлять выражения x^0 и 1. В частности, мы будем считать, что $x^0 = 1$ для любого x, в том числе и для $x = 0$.

III. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

Таким образом, многочлен — это ***линейная комбинация переменной*** x ***в различных степенях***. Поэтому элементы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются **коэффициентами многочлена** $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

III. Определения

Многочлен и полином — слова-синонимы. Можно предложить, как минимум, два подхода к понятию многочлена.

Определение, естественное для математического анализа:

многочлен или **полином** над **кольцом** K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, обычно применяющееся в алгебре: **многочленом** или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

Если все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ многочлена $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ являются элементами **поля** K, то говорят, что $f(x)$ — это **многочлен над полем** K.

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;

Например, многочлен $2 - 3x^2 + 5x^3$ состоит из одночленов $2x^0, \quad -3x^2, \quad 5x^3$.

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

Например, у многочлена $2 - 3x^2 + 5x^3$ коэффициент перед x^0 равен 2,

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

Например, у многочлена $2 - 3x^2 + 5x^3$ коэффициент перед x^0 равен 2, перед x — нулю,

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

Например, у многочлена $2 - 3x^2 + 5x^3$ коэффициент перед x^0 равен 2, перед x — нулю, перед x^2 равен (-3),

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые **коэффициентами многочлена**.

Например, у многочлена $2 - 3x^2 + 5x^3$ коэффициент перед x^0 равен 2, перед x — нулю, перед x^2 равен (-3), перед x^3 — равен 5.

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена.

Если все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ многочлена $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ являются элементами поля K, то говорят, что $f(x)$ — это **многочлен над полем** K.

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

Например, в многочлене $2 - 3x^2 + 5x^3$ переменная x имеет степени

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

Например, в многочлене $2 - 3x^2 + 5x^3$ переменная x имеет степени x^0 (т.к. $2 = 2x^0$),

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

Например, в многочлене $2 - 3x^2 + 5x^3$ переменная x имеет степени x^0, x^2,

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;

Например, в многочлене $2 - 3x^2 + 5x^3$ переменная x имеет степени $x^0, \quad x^2, \quad x^3$.

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;
- операции сложения одночленов и умножения одночлена на скаляр.

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;
- операции сложения одночленов и умножения одночлена на скаляр.

Таким образом, многочлен — это ***линейная комбинация переменной*** x ***в различных степенях***.

III.1. Определение основных структурных элементов многочлена

Многочлен — выражение вида: $\boxed{a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n}$.

Элементами многочлена являются:

- одночлены $a_k x^k$;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — элементы кольца K, называемые коэффициентами многочлена;
- переменная x в различных степенях;
- показатель степени переменной в одночлене;
- операции сложения одночленов и умножения одночлена на скаляр.

Перейдем к следующему пункту плана:

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов. Рассматривается множество многочленов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов. Рассматривается множество многочленов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования. *Рассмотрим степень многочлена, равенство многочленов, операции алгебры многочленов.*

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

4. Применить **стратегию перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

III.2. Степень многочлена

Определение 1. **Степенью многочлена**

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$$

называется

- *наибольшее такое число* m, *что* $a_m \neq 0$, *если такое* m *найдется;*
- *если все коэффициенты этого многочлена равны* 0, *то, согласно некоторым источникам, степень такого многочлена не определяется. Другие авторы определяют степень такого многочлена, как* $-\infty$ *(«минус-бесконечность»).*

III.2. Степень многочлена

Определение 1. **Степенью многочлена**

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$$

называется

- *наибольшее такое число m, что $a_m \neq 0$, если такое m найдется;*
- *если все коэффициенты этого многочлена равны 0, то, согласно некоторым источникам, степень такого многочлена не определяется. Другие авторы определяют степень такого многочлена, как $-\infty$ («минус-бесконечность»).*

Степень многочлена $f(x)$ обычно обозначается через[1] $\deg(f(x))$ или даже через $\deg(f)$.

[1] От английского слова degree — степень, ранг и т.п.

III.2. Степень многочлена

Определение степени многочлена $0 \cdot x^0$ как $-\infty$ обусловлено желанием обеспечить выполнение свойств

- $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$;
- $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}$;

даже для случая, когда один из этих многочленов — нулевой. В ситуации, когда оба эти многочлена — ненулевые, справедливость этих свойств очевидна[2]. Для нулевого многочлена выполнение этих свойств обусловлено тем, что сложение с $-\infty$ естественно определить следующим образом: $n + (-\infty) = (-\infty) + n = -\infty$ и $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, кроме того, естественно считать, что $-\infty < n$ для любого целого числа n.

[2] Напомним, что слово «очевидно» означает «легко могу доказать». Можете?

III.3. Равенство многочленов

Определение 2. *Многочлены (полиномы)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

степени n и m соответственно, называются **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, $n = m$, и, во-вторых, для любого i имеют место равенства $a_i = b_i$.*

III.3. Равенство многочленов

Определение 2. *Многочлены (полиномы)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

степени n и m соответственно, называются **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, $n = m$, и, во-вторых, для любого i имеют место равенства $a_i = b_i$.*

Понятно, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны (как *выражения*), то имеет место тождество $f(x) \equiv g(x)$ (то есть равны *функции*, задаваемые этими многочленами).

III.3. Равенство многочленов

Определение 2. *Многочлены (полиномы)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

степени n и m соответственно, называются **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, $n = m$, и, во-вторых, для любого i имеют место равенства $a_i = b_i$.*

Верно ли, что если многочлены тождественно равны, (то есть равны, как функции), то они равны, как выражения?

III.3. Равенство многочленов

Определение 2. *Многочлены (полиномы)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

степени n и m соответственно, называются **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, $n = m$, и, во-вторых, для любого i имеют место равенства $a_i = b_i$.*

Верно ли, что если многочлены тождественно равны, (то есть равны, как функции), то они равны, как выражения? Для выражений некоторых типов ответ может быть отрицательным.

III.3. Равенство многочленов

Например, рассмотрим выражения типа $a + b \cdot \sin^2(\varphi) + c \cdot \cos^2(\varphi)$, и равенство выражений определим так же, как для многочленов:

$$a_1 + b_1 \cdot \sin^2(\varphi) + c_1 \cdot \cos^2(\varphi) = a_2 + b_2 \cdot \sin^2(\varphi) + c_2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

III.3. Равенство многочленов

Например, рассмотрим выражения типа $a + b \cdot \sin^2(\varphi) + c \cdot \cos^2(\varphi)$, и равенство выражений определим так же, как для многочленов:

$$a_1 + b_1 \cdot \sin^2(\varphi) + c_1 \cdot \cos^2(\varphi) = a_2 + b_2 \cdot \sin^2(\varphi) + c_2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

В этом случае для *функций* имеет место тождество $\sin^2(\varphi) \equiv 1 - \cos^2(\varphi)$, но эти *выражения* не равны.

III.3. Равенство многочленов

Например, рассмотрим выражения типа $a + b \cdot \sin^2(\varphi) + c \cdot \cos^2(\varphi)$, и равенство выражений определим так же, как для многочленов:

$$a_1 + b_1 \cdot \sin^2(\varphi) + c_1 \cdot \cos^2(\varphi) = a_2 + b_2 \cdot \sin^2(\varphi) + c_2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

В этом случае для *функций* имеет место тождество $\sin^2(\varphi) \equiv 1 - \cos^2(\varphi)$, но эти *выражения* не равны.

Для многочленов это, однако, не так: многочлены совпадают, как функции тогда и только тогда, когда они равны, как выражения.

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1. *Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны тогда и только тогда, когда тождественно равны функции f и g, задаваемые этими многочленами.*

Слишком много слов...

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Вот теперь хорошо!

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Замечание. Отметим, что здесь речь идет не о равенстве **значений** многочленов на некотором элементе x, а о равенстве многочленов «в целом», то есть, при «аналитическом подходе», тождественном равенстве. Иными словами, равенство $f(x) = g(x)$ должно иметь место **для любого** x из K: $f(x) \equiv g(x)$.

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Необходимость в этом критерии очевидна, докажем достаточность.

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Отказавшись от требования, что m, n — степени соответствующих многочленов, можно считать, что $m = n$ (полагая, что все «недостающие» коэффициенты a_i или b_i равны 0). Пусть $f(x) \equiv g(x)$.

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Отказавшись от требования, что m, n — степени соответствующих многочленов, можно считать, что $m = n$ (полагая, что все «недостающие» коэффициенты a_i или b_i равны 0). Пусть $f(x) \equiv g(x)$. Рассмотрим многочлен

$$h(x) = f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) \cdot x + \ldots + (a_n - b_n) \cdot x^n.$$

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство.

$$h(x) = f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) \cdot x + \ldots + (a_n - b_n) \cdot x^n.$$

Так как $f(x)$ и $g(x)$ тождественно равны, то $h(x) = 0$ для любого x.

Поэтому $\begin{cases} h(0) = 0, \\ h(1) = 0, \\ \ldots \\ h(n) = 0. \end{cases}$

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство.

$h(x) = f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) \cdot x + \ldots + (a_n - b_n) \cdot x^n.$

$\begin{cases} h(0) = 0, \\ h(1) = 0, \\ \ldots \\ h(n) = 0, \end{cases}$ откуда имеем, что столбец $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - b_0 \\ a_1 - b_1 \\ \ldots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$ есть

решение ОСЛУ $\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_0 + y_1 \cdot 1 + \ldots + y_n \cdot 1 = 0, \\ \ldots \\ y_0 + y_1 \cdot n + \ldots + y_n \cdot n^n = 0. \end{cases}$

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Вычисление определителя матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & & \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix}$ этой системы уравнений сводится к вычислению так называемого **определителя Вандермонда**, который часто встречается в различных областях алгебры.

III.4. Критерий равенства многочленов

Теорема 1.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \equiv g(x).$$

Доказательство. Вычисление определителя матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & & \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix}$ этой системы уравнений сводится к вычислению так называемого **определителя Вандермонда**, который часто встречается в различных областях алгебры. Можно показать, что он отличен от нуля. Значит, эта ОСЛУ имеет единственное решение — нулевое, то есть $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$, что и требовалось доказать.

III.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$

III.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$

$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+\ldots+(a_n+b_n)\cdot x^n,$$

здесь n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

III.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x) = (a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n) =$$

$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+\ldots+(a_n+b_n)\cdot x^n,$$

здесь n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Умножение на элемент λ из K:

$$\lambda\cdot f(x) = \lambda\cdot(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n) =$$

III.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+\ldots+(a_n+b_n)\cdot x^n,$$

здесь n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Умножение на элемент λ из K:

$$\lambda\cdot f(x)=\lambda\cdot(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)=$$
$$=(\lambda\cdot a_0)+(\lambda\cdot a_1)\cdot x+\ldots+(\lambda\cdot a_n)\cdot x^n.$$

III.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$

$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+\ldots+(a_n+b_n)\cdot x^n,$$

здесь n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Умножение на элемент λ из K:

$$\lambda\cdot f(x)=\lambda\cdot(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)=$$

$$=(\lambda\cdot a_0)+(\lambda\cdot a_1)\cdot x+\ldots+(\lambda\cdot a_n)\cdot x^n.$$

Произведение многочленов :

$$\left(\sum_{s=0}^{n}a_sx^s\right)\cdot\left(\sum_{t=0}^{m}b_tx^t\right)=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{s+t=k}a_s\cdot b_t\right)\cdot x^k=$$

III.5. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)+(b_0+b_1\cdot x+\ldots+b_n\cdot x^n)=$$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)\cdot x+\ldots+(a_n+b_n)\cdot x^n,$$

здесь n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Умножение на элемент λ из K:

$$\lambda\cdot f(x)=\lambda\cdot(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n)=$$
$$=(\lambda\cdot a_0)+(\lambda\cdot a_1)\cdot x+\ldots+(\lambda\cdot a_n)\cdot x^n.$$

Произведение многочленов :

$$\left(\sum_{s=0}^{n}a_sx^s\right)\cdot\left(\sum_{t=0}^{m}b_tx^t\right)=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{s=0}^{k}a_s\cdot b_{k-s}\right)\cdot x^k.$$

III.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;
2. $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$;
3. $f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x)$, где $\mathbf{0}(x) = 0x^0$.
4. $f(x) + (-f(x)) = \mathbf{0}(x)$, где $(-f(x)) = -\sum\limits_{m=0}^{n} a_m x^m = \sum\limits_{m=0}^{n} (-a_m)\, x^m$;

III.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;
2. $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$;
3. $f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x)$, где $\mathbf{0}(x) = 0x^0$.
4. $f(x) + (-f(x)) = \mathbf{0}(x)$, где $(-f(x)) = -\sum\limits_{m=0}^{n} a_m x^m = \sum\limits_{m=0}^{n} (-a_m)\, x^m$;
5. $\lambda\,(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$;
6. $(\lambda + \mu)\, f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$;

III.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;
2. $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$;
3. $f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x)$, где $\mathbf{0}(x) = 0x^0$.
4. $f(x) + (-f(x)) = \mathbf{0}(x)$, где $(-f(x)) = -\sum\limits_{m=0}^{n} a_m x^m = \sum\limits_{m=0}^{n} (-a_m)\, x^m$;
5. $\lambda\,(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$;
6. $(\lambda + \mu)\, f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$;
7. $(\lambda\mu)\ f(x) = \lambda\,(\mu f(x))$;
8. $1 \cdot f(x) = f(x)$.

III.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

Итак, мы получили множество многочленов с определенными на нем операциями сложения, умножения и умножения на скаляр.

1. Операция «+» **коммутативна, ассоциативна**, с нулевым и противоположными элементами для любого многочлена.

III.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

Итак, мы получили множество многочленов с определенными на нем операциями сложения, умножения и умножения на скаляр.

1. Операция «+» **коммутативна, ассоциативна**, с нулевым и противоположными элементами для любого многочлена.

2. Операция «·» **коммутативна, ассоциативна**, с единичным элементом.

III.6. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

Итак, мы получили множество многочленов с определенными на нем операциями сложения, умножения и умножения на скаляр.

1. Операция «+» **коммутативна, ассоциативна**, с нулевым и противоположными элементами для любого многочлена.

2. Операция «·» **коммутативна, ассоциативна**, с единичным элементом.

3. Верен закон дистрибутивности:

$$f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x).$$

III.7. Линейное пространство многочленов

Из этих свойств следует, что, множество многочленов является линейным пространством над **полем** K относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент из K.

III.7. Линейное пространство многочленов

Из этих свойств следует, что, множество многочленов является линейным пространством над **полем** K относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент из K. Отметим, что при алгебраическом подходе (то есть когда многочлен — это просто выражение), соответствующие соотношения, зафиксированные в аксиомах линейного пространства, следуют из определения соответствующих операций.

III.7. Линейное пространство многочленов

Из этих свойств следует, что, множество многочленов является линейным пространством над **полем** K относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент из K. Отметим, что при алгебраическом подходе (то есть когда многочлен — это просто выражение), соответствующие соотношения, зафиксированные в аксиомах линейного пространства, следуют из определения соответствующих операций.

Очевидно, что для любого неотрицательного целого числа m множество многочленов степени не выше m является подпространством размерности $m+1$ в бесконечномерном линейном пространстве всех многочленов с коэффициентами из K.

III.7. Линейное пространство многочленов

Из этих свойств следует, что, множество многочленов является линейным пространством над **полем** K относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент из K. Отметим, что при алгебраическом подходе (то есть когда многочлен — это просто выражение), соответствующие соотношения, зафиксированные в аксиомах линейного пространства, следуют из определения соответствующих операций.

Очевидно, что для любого неотрицательного целого числа m множество многочленов степени не выше m является подпространством размерности $m+1$ в бесконечномерном линейном пространстве всех многочленов с коэффициентами из K. Поэтому все результаты, полученные нами для произвольных линейных пространств, справедливы и для пространства многочленов.

III.8. Кольцо многочленов

Множество всех многочленов $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ от переменной x над **полем** K обозначается через $K[x]$. Наиболее важными в этом курсе являются многочлены над полем действительных чисел и над полем комплексных чисел, то есть многочлены из $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$. Учитывая свойства операций множества многочленов, можно отметить что для любого поля K множество многочленов $K[x]$ является **кольцом** относительно операций *суммирования многочленов* и *умножения многочленов*, точнее *ассоциативным кольцом*.

III.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

III.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

Для ответа на этот вопрос осталось выяснить, существует ли обратный «по умножению» элемент для любого многочлена.

Пусть $g(x)$ — обратный «по умножению» элемент к многочлену $f(x)$ степени, большей 0.

III.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

Для ответа на этот вопрос осталось выяснить, существует ли обратный «по умножению» элемент для любого многочлена.

Пусть $g(x)$ — обратный «по умножению» элемент к многочлену $f(x)$ степени, большей 0. Тогда $f(x) \cdot g(x) = 1$.

III.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

Для ответа на этот вопрос осталось выяснить, существует ли обратный «по умножению» элемент для любого многочлена.

Пусть $g(x)$ — обратный «по умножению» элемент к многочлену $f(x)$ степени, большей 0. Тогда $f(x) \cdot g(x) = 1$.

В левой части равенства стоит многочлен ненулевой степени, а справа – нулевой.

III.8. Кольцо многочленов

Возникает естественный вопрос: является ли **кольцо** многочленов **полем**?

Для ответа на этот вопрос осталось выяснить, существует ли обратный «по умножению» элемент для любого многочлена.

Пусть $g(x)$ — обратный «по умножению» элемент к многочлену $f(x)$ степени, большей 0. Тогда $f(x) \cdot g(x) = 1$.

В левой части равенства стоит многочлен ненулевой степени, а справа – нулевой.

Полученное противоречие показывает, что кольцо многочленов полем **не является**.

IV. Делимость многочленов

Многочлен является выражением, представляющим собой сумму некоторых слагаемых. Естественно, что нередко возникает необходимость в представлении многочлена в виде произведения.

IV. Делимость многочленов

Многочлен является выражением, представляющим собой сумму некоторых слагаемых. Естественно, что нередко возникает необходимость в представлении многочлена в виде произведения.

Итак, одну из целей дальнейшего исследования можно было бы сформулировать следующим образом.

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

IV. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом:

IV. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения.

IV. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы

IV. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы ни один из множителей не имел степень 0.

IV. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы ни один из множителей не имел степень 0. Степень произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей, поэтому последнее условие равносильно требованию, чтобы

IV. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы ни один из множителей не имел степень 0. Степень произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей, поэтому последнее условие равносильно требованию, чтобы степени каждого из сомножителей были меньше степени произведения.

IV. Делимость многочленов

Цель 1. *Представить многочлен в виде произведения многочленов.*

Однако, в этой постановке цель 1 может быть достигнута тривиальным образом: $f(x) = x^0 \cdot f(x) = \dfrac{x^0}{2} \cdot (2f(x)) = \ldots$. Следовательно, задача требует уточнения. Наиболее естественным является требование, чтобы ни один из множителей не имел степень 0. Степень произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей, поэтому последнее условие равносильно требованию, чтобы степени каждого из сомножителей были меньше степени произведения.

Следовательно, цель 1 можно уточнить, например, следующим образом.

IV. Делимость многочленов

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

IV.1. Алгоритм Евклида

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

В поисках путей достижения цели 2 наиболее перспективным представляется применение **стратегии поиска аналогии**.

IV.1. Алгоритм Евклида

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

В поисках путей достижения цели 2 наиболее перспективным представляется применение **стратегии поиска аналогии**. Многочлен есть линейная комбинация степеней некоторой переменной. Представление «объекта» в виде линейной комбинации степеней встречается, например, при позиционной записи числа. Скажем, в записи числа 528 цифры рассматриваются как символы.

IV.1. Алгоритм Евклида

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

В поисках путей достижения цели 2 наиболее перспективным представляется применение **стратегии поиска аналогии**. Многочлен есть линейная комбинация степеней некоторой переменной. Представление «объекта» в виде линейной комбинации степеней встречается, например, при позиционной записи числа. Скажем, в записи числа 528 цифры рассматриваются как символы. Напомним, что цифра — это буква, символ.

IV.1. Алгоритм Евклида

Цель 2. *Представить многочлен в виде произведения многочленов меньшей степени.*

В поисках путей достижения цели 2 наиболее перспективным представляется применение **стратегии поиска аналогии**. Многочлен есть линейная комбинация степеней некоторой переменной. Представление «объекта» в виде линейной комбинации степеней встречается, например, при позиционной записи числа. Скажем, в записи числа 528 цифры рассматриваются как символы. Напомним, что цифра — это буква, символ. Каждой цифре «по умолчанию» сопоставляется однозначное число.

IV.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 =$

IV.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 +$

IV.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 +$

IV.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$.

IV.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$.

Выражение в правой части можно рассматривать как значение многочлена $5x^2 + 2x + 8$ при $x =$

IV.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$.

Выражение в правой части можно рассматривать как значение многочлена $5x^2 + 2x + 8$ при $x = 10$.

IV.1. Алгоритм Евклида

Если мы применим **стратегию смены ролей и приоритетов**, и поставим задачу представления числа 528 с помощью чисел, обозначаемых цифрами 5, 2 и 8, то получим выражение $528 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$.

Выражение в правой части можно рассматривать как значение многочлена $5x^2 + 2x + 8$ при $x = 10$.

Эта аналогия между натуральными числами и многочленами позволяет перенести некоторые полезные операции теории чисел в теорию многочленов. В частности, мы перенесем на алгебру многочленов *алгоритм Евклида* деления одного натурального числа на другое.

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции:

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

Например, пусть $f(x) = 3 - 4x, \quad g(x) = 2 - x - x^2$. Тогда

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

Например, пусть $f(x) = 3 - 4x, \quad g(x) = 2 - x - x^2$. Тогда

$$3 - 4x = \quad 0 \quad \cdot \left(2 - x - x^2\right) + (3 - 4x)$$

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

Например, пусть $f(x) = 3 - 4x, \quad g(x) = 2 - x - x^2$. Тогда

$$\underbrace{3-4x}_{f(x)} = \underbrace{0}_{p(x)} \cdot \underbrace{\left(2 - x - x^2\right)}_{g(x)} + \underbrace{(3-4x)}_{r(x)}$$

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

База индукции: если $\deg(f) < \deg(g)$, то можно положить $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

База индукции доказана.

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$. Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$. Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$. Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.

$h(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5 - \dfrac{(-2)}{(-1)} x^{5-2} \left(2 - x - 1x^2\right)$

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$. Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.

$h(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5 - \dfrac{(-2)}{(-1)} x^3 \cdot 2 - \dfrac{(-2)}{(-1)} x^4 - \dfrac{(-2)}{(-1)} (-1) x^5$

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$. Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.

$h(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 \qquad - \dfrac{(-2)}{(-1)} x^3 \cdot 2 - \dfrac{(-2)}{(-1)} x^4$

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$. Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Например, пусть $f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3 - x^4 - 2x^5, \quad g(x) = 2 - x - x^2$.
$h(x) = 2 + x - x^2 + x^3 - 2x^4$ — степень понизилась!

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n$, $\quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$. Тогда степень многочлена $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$ меньше n.

Поэтому для $h(x)$ утверждение теоремы верно: $h(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$, $\deg(r) < \deg(g)$.

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n$, $\quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$.

$h(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$, $\deg(r) < \deg(g)$. Следовательно,

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x) = h(x)$$

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n$, $\quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $h(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x)$.

$h(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$, $\deg(r) < \deg(g)$. Следовательно,

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x) = h(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x),$$

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n$, $\quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$,

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \quad \deg(r) < \deg(g),$$

$$f(x) = g(x) \cdot \left(q(x) + \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \right) + r(x),$$

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n$, $\quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$,

$$f(x) = g(x) \cdot \left(q(x) + \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \right) + r(x), \quad \deg(r) < \deg(g).$$

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что $\deg(r) < \deg(g)$ и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

Доказательство. Индукция по $\deg(f)$.

Шаг индукции: пусть $\deg(f) \geq \deg(g)$ и для всех многочленов степени меньшей, чем $\deg(f)$ утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n \cdot x^n$, $\quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$,

$$f(x) = g(x) \cdot \underbrace{\left(q(x) + \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \right)}_{p(x)} + r(x), \quad \deg(r) < \deg(g).$$

Теорема доказана.

IV.2. Теорема о делении с остатком

Теорема 2. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *с коэффициентами из поля* K*, где степень многочлена* $g(x)$ *не равна* $-\infty$*, найдутся такие многочлены* $p(x)$ *и* $r(x)$*, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и* $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Рассмотреть пример?

IV.3. Н.О.Д. и Н.О.К. многочленов

Продолжая поиск путей достижения цели 2, вернемся к аналогии между многочленами и числами. Одними из основных операций для введения понятия **«рациональное число»** в форме обыкновенных дробей являются операции вычисления **наибольшего общего делителя** (Н.О.Д.) и **наименьшего общего кратного** (Н.О.К.). В данном разделе мы осуществим перенос этих конструкций в теорию многочленов.

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство.

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Достаточно доказать, что всякий общий делитель многочленов $f(x)$ *и* $g(x)$ *делит нацело многочлен* $r(x)$ *и наоборот,*

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Достаточно доказать, что всякий общий делитель многочленов $f(x)$ *и* $g(x)$ *делит нацело многочлен* $r(x)$ *и наоборот, всякий общий делитель многочленов* $r(x)$ *и* $g(x)$ *делит нацело многочлен* $f(x)$.

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Если $\deg(g(x)) \geq \deg(f(x))$, то $r(x) = f(x)$ и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\deg(g(x)) \leq \deg(f(x))$.

Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \leq \deg(f(x)). \end{cases}$$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x)$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$u(x)d(x) = p(x)v(x)d(x) + r(x)$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$u(x)d(x) = p(x)v(x)d(x) + r(x)$, откуда

$r(x) = u(x)d(x) - p(x)v(x)d(x) =$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Надо доказать, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = u(x)d(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = v(x)d(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$u(x)d(x) = p(x)v(x)d(x) + r(x)$, откуда

$$r(x) = u(x)d(x) - p(x)v(x)d(x) = \Big(u(x) - p(x)v(x)\Big)\, d(x).$$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ *— ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$*, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Значит, если $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то $r(x) = \Big(v(x) - p(x)v(x)\Big)\, d(x)$. Это означает, что $d(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$.

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$.

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$f(x) = p(x)g(x) + r(x)$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$f(x) = p(x)\alpha(x)c(x) + r(x)$$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$f(x) = p(x)\alpha(x)c(x) + r(x)$$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$f(x) = p(x)\alpha(x)c(x) + \beta(x)c(x)$$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Пусть теперь $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$. Надо доказать, что $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$. Переведем эти утверждения на «язык равенств и неравенств»:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)g(x) + r(x), \\ g(x) = \alpha(x)c(x), \\ r(x) = \beta(x)c(x), \\ 0 \le \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \le \deg(f(x)). \end{cases}$$

$$f(x) = p(x)\alpha(x)c(x) + \beta(x)c(x) = \Big(p(x)\alpha(x) + \beta(x)\Big)\, c(x).$$

IV.4. Теорема о Н.О.Д. делителя и остатка от деления

Теорема 3. *Если* $r(x)$ — *ненулевой остаток от деления многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, *то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

Доказательство. Итак, если $c(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$, то

$$f(x) = \Big(p(x)\alpha(x) + \beta(x)\Big)\, c(x).$$

Следовательно, $c(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$.

Итак, доказано, что всякий общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ делит нацело многочлен $r(x)$ и наоборот, всякий общий делитель многочленов $r(x)$ и $g(x)$ делит нацело многочлен $f(x)$.

Отсюда следует заключение теоремы.

Рассмотреть пример?

V. Корни многочленов

Аналогия между многочленами и числами не является исчерпывающей. Полезно провести аналогию с другими объектами. Многочлену можно сопоставить функцию, задаваемую этим алгебраическим выражением.

V. Корни многочленов

Аналогия между многочленами и числами не является исчерпывающей. Полезно провести аналогию с другими объектами. Многочлену можно сопоставить функцию, задаваемую этим алгебраическим выражением.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** естественно рассмотреть ситуации, когда

V. Корни многочленов

Аналогия между многочленами и числами не является исчерпывающей. Полезно провести аналогию с другими объектами. Многочлену можно сопоставить функцию, задаваемую этим алгебраическим выражением.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** естественно рассмотреть ситуации, когда либо значение переменной равно «самому экстремальному» числу, либо значение многочлена равно «самому экстремальному» числу.

V. Корни многочленов

Аналогия между многочленами и числами не является исчерпывающей. Полезно провести аналогию с другими объектами. Многочлену можно сопоставить функцию, задаваемую этим алгебраическим выражением.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** естественно рассмотреть ситуации, когда либо значение переменной равно «самому экстремальному» числу, либо значение многочлена равно «самому экстремальному» числу.

«Самым экстремальным» числом является, очевидно, 0. Это обстоятельство явилось одной из причин для введения специального понятия — корня многочлена.

V. Корни многочленов

Определение 3. *Пусть* $f(x)$ *— многочлен над* ***кольцом*** K*. Элемент* a *кольца* K *называется* **корнем** *многочлена* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(a) = 0$*, где* 0 *— нулевой элемент кольца* K*.*

V. Корни многочленов

Формула для отыскания корней многочлена первой степени была известна в глубокой древности. Корни квадратного уравнения умели находить еще древние греки. Для кубического уравнения соответствующие формулы были получены в 1535 году итальянским математиком Никколо Тартальи[3]. Джеронимо Кардано в 1545 году опубликовал в своей книге «Великое искусство, или О правилах алгебры» формулы для корней многочлена степени 4, полученные учеником Кардано Лудовико Феррари. Казалось, что еще немного — и будет получена формула для корней многочлена любой степени! Но...

[3] Изначально Тарталья — в переводе «заика» — было прозвищем Никколо Фонтана, но потом превратилось в фамилию.

V. Корни многочленов

Французский математик Эварист Галуа[4] доказал, что для многочлена степени больше 4 не существует формулы вычисления их корней, использующих арифметические операции и радикалы. Какую проблематику в теории многочленов, связанную с корнями многочленов, можно предложить? Можно рассматривать иные способы поиска корней многочленов, в первую очередь, приближенные вычисления. Этот подход можно рассматривать как результат применения **стратегии построения модели**. Значительные успехи были достигнуты при применении **стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов** и **стратегии обогащения модели**. Соответствующие результаты будут приведены ниже.

[4] Годы жизни 1811–1832. Он погиб, когда ему еще не исполнился 21 год!

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени (то есть $f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$.*

Много слов...

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. *a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Как-то невнятно...

Надо на языке равенств!

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

Надо доказать

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

Надо доказать равенство.

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

Надо доказать равенство.

Есть 3 способа доказательства равенства $L = R$:

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

Надо доказать равенство.

Есть 3 способа доказательства равенства $L = R$:

— использование равносильных преобразований;

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

Надо доказать равенство.

Есть 3 способа доказательства равенства $L = R$:

— использование равносильных преобразований;

— сведение к неравенствам $L \leq R$ и $L \geq R$;

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

Надо доказать равенство.

Есть 3 способа доказательства равенства $L = R$:

— использование равносильных преобразований;

— сведение к неравенствам $L \leq R$ и $L \geq R$;

— метод «от противного».

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

Надо доказать равенство.

Есть 3 способа доказательства равенства $L = R$:

— использование равносильных преобразований;

— сведение к неравенствам $L \leq R$ и $L \geq R$;

— метод «от противного».

Применим метод равносильных преобразований:

в равенстве $f(a) = 0$ заменим $f(a)$ эквивалентным выражением.

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(x) = \end{cases} \Rightarrow$$

Согласно **теореме о делении с остатком**

$$\begin{cases} f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r(x), \\ \deg(r(x)) < \deg(x - a) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(x) = \end{cases} \Rightarrow$$

Согласно **теореме о делении с остатком**

$$\begin{cases} f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r(x), \\ \deg(r(x)) < \deg(x - a) = 1 \end{cases} \Rightarrow \deg(r(x)) \leq 0 \Rightarrow$$

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(x) = \end{cases} \Rightarrow$$

Согласно **теореме о делении с остатком**

$$\begin{cases} f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r(x), \\ \deg(r(x)) < \deg(x - a) = 1 \end{cases} \Rightarrow \deg(r(x)) \leq 0 \Rightarrow r(x) = r \in K.$$

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r \end{cases} \Rightarrow$$

Согласно **теореме о делении с остатком**

$$\begin{cases} f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r(x), \\ \deg(r(x)) < \deg(x - a) = 1 \end{cases} \Rightarrow \deg(r(x)) \leq 0 \Rightarrow r(x) = r \in K.$$

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r \end{cases} \Rightarrow \quad (a - a) \cdot p(a) + r = 0 \quad \Rightarrow$$

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r \end{cases} \Rightarrow \quad (a - a) \cdot p(a) + r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0.$$

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Необходимость.*

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(x) = (x - a) \cdot p(x) + r \end{cases} \Rightarrow \quad (a - a) \cdot p(a) + r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0.$$

Итак, $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$, что и требовалось доказать.

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Достаточность* очевидна:

$$f(x) = (x - a)p(x) \quad \Rightarrow \quad f(a) =$$

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Достаточность* очевидна:

$$f(x) = (x - a)p(x) \quad \Rightarrow \quad f(a) = (a - a) \cdot p(a) =$$

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Доказательство. *Достаточность* очевидна:

$$f(x) = (x - a)p(x) \quad \Rightarrow \quad f(a) = (a - a) \cdot p(a) = 0.$$

Теорема доказана.

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1. *Если a и b — различные корни многочлена $f(x)$ над полем K, то $f(x) = (x - a)(x - b)g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$.*

Много слов...

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f(x) =$$

По теореме Безу...

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f(x) = (x - a)p(x) =$$

По теореме Безу...

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f(x) = (x - a)p(x) =$$

Подставим b в полученное выражение для $f(x)$...

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f(x) = (x - a)p(x) =$$

$$0 = f(b) =$$

Подставим b в полученное выражение для $f(x)$...

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f(x) = (x - a)p(x) =$$

$$0 = f(b) = (b - a)p(b) \Rightarrow$$

Подставим b в полученное выражение для $f(x)$...

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f(x) = (x - a)p(x) =$$

$$0 = f(b) = (b - a)p(b) \;\Rightarrow\; p(b) = 0.$$

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f(x) = (x - a)p(x) =$$

$$0 = f(b) = (b - a)p(b) \Rightarrow p(b) = 0.$$

Применим теорему Безу к $p(x)$...

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f(x) = (x - a)p(x) = (x - a)(x - b)g(x).$$

$$0 = f(b) = (b - a)p(b) \Rightarrow p(b) = 0.$$

Применим теорему Безу к $p(x)$...

V.1. Теорема Безу

Теорема 4. $f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ *(1).*

Следствие 1.

$$\begin{cases} f(a) = 0, \\ f(b) = 0, \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = (x - a)(x - b)g(x). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f(x) = (x - a)p(x) = (x - a)(x - b)g(x).$$

Следствие доказано.

V.2. Кратность корня

Пусть a — корень многочлена $f(x)$. По **теореме Безу**

$f(x) =$

V.2. Кратность корня

Пусть a — корень многочлена $f(x)$. По **теореме Безу** $f(x) = (x - a)\, g(x)$.

V.2. Кратность корня

Пусть a — корень многочлена $f(x)$. По **теореме Безу** $f(x) = (x - a)\, g(x)$.

Если a для $g(x)$ также является корнем, то по теореме Безу $g(x) = (x - a)\, h(x)$, то есть $f(x) =$

V.2. Кратность корня

Пусть a — корень многочлена $f(x)$. По **теореме Безу** $f(x) = (x - a)\, g(x)$.

Если a для $g(x)$ также является корнем, то по теореме Безу $g(x) = (x - a)\, h(x)$, то есть $f(x) = (x - a)^2\, h(x)$.

V.2. Кратность корня

Пусть a — корень многочлена $f(x)$. По **теореме Безу** $f(x) = (x - a)\, g(x)$.

Если a для $g(x)$ также является корнем, то по теореме Безу $g(x) = (x - a)\, h(x)$, то есть $f(x) = (x - a)^2\, h(x)$.

Продолжая этот процесс, получаем в конце концов представление многочлена $f(x)$ в виде $f(x) = (x - a)^k\, p(x)$, где $p(a) \neq 0$ и $p(x)$ — многочлен.

V.2. Кратность корня

Пусть a — корень многочлена $f(x)$. По **теореме Безу** $f(x) = (x - a)\, g(x)$.

Если a для $g(x)$ также является корнем, то по теореме Безу $g(x) = (x - a)\, h(x)$, то есть $f(x) = (x - a)^2\, h(x)$.

Продолжая этот процесс, получаем в конце концов представление многочлена $f(x)$ в виде $f(x) = (x - a)^k\, p(x)$, где $p(a) \neq 0$ и $p(x)$ — многочлен.

Во многих приложениях используется число k, что явилось основанием для введения следующего понятия.

V.2. Кратность корня

Определение 4. *Если a — корень многочлена $f(x)$, то* **кратностью корня** *называется такое натуральное число k, что*

$$f(x) = (x - a)^k g(x), \tag{3}$$

где $g(x)$ — такой многочлен, что a не является его корнем.

V.2. Кратность корня

Определение 4. *Если a — корень многочлена $f(x)$, то* **кратностью корня** *называется такое натуральное число k, что*

$$f(x) = (x-a)^k g(x), \tag{3}$$

где $g(x)$ — такой многочлен, что a не является его корнем.

Рассмотреть пример?

V.3. Теорема Виета

Теорема 5. *Если многочлен* $a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *разложим над полем* K *в произведение многочленов первой степени:* $a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n) = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$, *где* $\alpha_i \in K$, *то*

$$\begin{cases} a_0 = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n, \\ a_1 = (-1)^{n-1}\left(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots\right. \\ \qquad \left.\ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\right), \\ \ldots \\ a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_{n-1} + \ldots \\ \qquad + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ a_{n-1} = -\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\right), \end{cases} \tag{4}$$

Франсуа Виета — французский математик, 1540–1608.

V.3. Теорема Виета

Теорема 5. *Если многочлен* $a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *разложим над полем* K *в произведение многочленов первой степени:* $a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n) = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$, *где* $\alpha_i \in K$, *то* $a_j =$

$$= (-1)^{n-j} \sum_{k_1=1}^{n-j} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-j+1} \ldots \sum_{k_{j-1}=k_{j-2}+1}^{n-1} \sum_{k_j=k_{j-1}+1}^{n} \left(\prod_{m \in \{1;\,\ldots;\,n\} \setminus \{k_1;\ldots;\,k_j\}} \alpha_m \right).$$

V.3. Теорема Виета

Теорема 5. *Если многочлен* $a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *разложим над полем* K *в произведение многочленов первой степени:* $a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n) = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$, *где* $\alpha_i \in K$, *то* $a_j =$

$$= (-1)^{n-j} \sum_{k_1=1}^{n-j} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-j+1} \ldots \sum_{k_{j-1}=k_{j-2}+1}^{n-1} \sum_{k_j=k_{j-1}+1}^{n} \left(\prod_{m \in \{1;\,\ldots;\,n\} \setminus \{k_1;\ldots;\,k_j\}} \alpha_m \right).$$

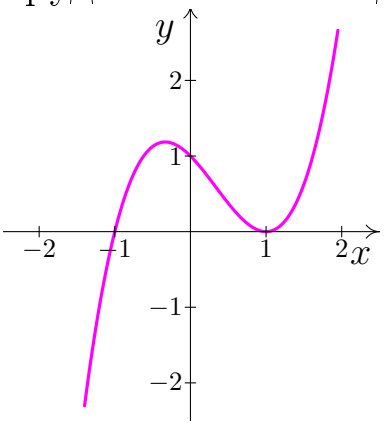
Доказательство этой теоремы мы приводить не будем.

V.4. Проблема приближённого нахождения кратных корней

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

V.4. Проблема приближённого нахождения кратных корней

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

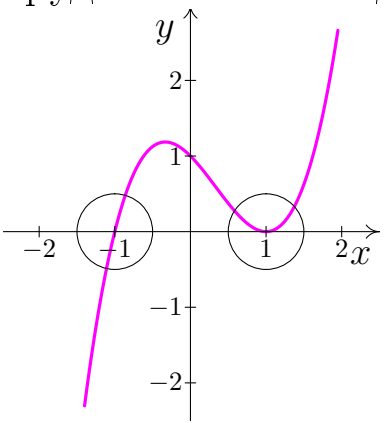


Рассмотрим график функции $f(x) = (x+1)(x-1)^2$.

Обычно при численных вычислениях корня близость найденного приближенного значения x_n к точному знанию корня функции f определяют с помощью значения $f(x_n)$.

V.4. Проблема приближённого нахождения кратных корней

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

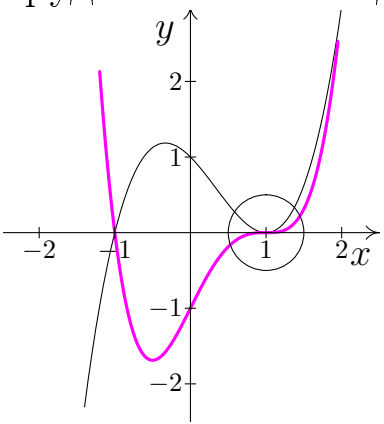


Рассмотрим график функции $f(x) = (x+1)(x-1)^2$. Обратите внимание на значения функции в окрестности точек с координатами $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.

Обычно при численных вычислениях корня близость найденного приближенного значения x_n к точному знанию корня функции f определяют с помощью значения $f(x_n)$.

V.4. Проблема приближённого нахождения кратных корней

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

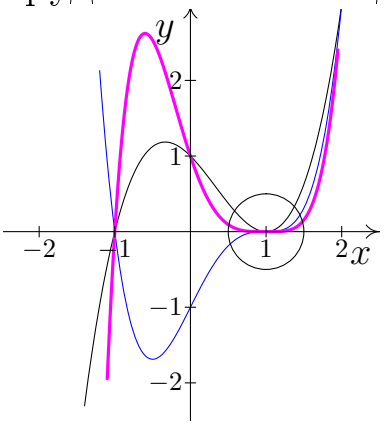


Сравните «поведение» в окрестности точки $(1, 0)$ графиков функций
$f(x) = (x + 1)(x - 1)^2$,
$f(x) = (x + 1)(x - 1)^3$ и

Обычно при численных вычислениях корня близость найденного приближенного значения x_n к точному знанию корня функции f определяют с помощью значения $f(x_n)$.

V.4. Проблема приближённого нахождения кратных корней

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.

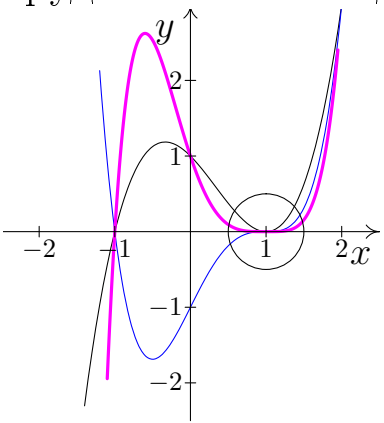


Сравните «поведение» в окрестности точки $(1, 0)$ графиков функций
$f(x) = (x+1)(x-1)^2$,
$f(x) = (x+1)(x-1)^3$ и
$f(x) = (x+1)(x-1)^4$.

Обычно при численных вычислениях корня близость найденного приближенного значения x_n к точному знанию корня функции f определяют с помощью значения $f(x_n)$.

V.4. Проблема приближённого нахождения кратных корней

При приближенных вычислениях корней многочленов возникают трудности с нахождением кратных корней.



Сравните «поведение» в окрестности точки $(1, 0)$ графиков функций
$f(x) = (x+1)(x-1)^2$,
$f(x) = (x+1)(x-1)^3$ и
$f(x) = (x+1)(x-1)^4$.

Поэтому актуальной является проблема избавления от кратных корней. В этом направлении получен решающий результат, рассмотренный в данном разделе.

V.5. Производная многочлена

Определение 5. Производной многочлена

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

назовем многочлен $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n\, a_n x^{n-1}$.

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство.

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По **определению кратности корня**

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По **определению кратности корня**

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По **определению кратности корня**

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По **определению кратности корня**

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) =$$

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По **определению кратности корня**

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) = \big((x-\alpha)^k q(x)\big)' =$$

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По **определению кратности корня**

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) = \big((x-\alpha)^k q(x)\big)' = k(x-\alpha)^{k-1} q(x) + (x-\alpha)^k q'(x) =$$

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По **определению кратности корня**

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) = \big((x-\alpha)^k q(x)\big)' = k(x-\alpha)^{k-1} q(x) + (x-\alpha)^k q'(x) =$$

$$= (x-\alpha)^{k-1} \left(k\, q(x) + (x-\alpha) q'(x)\right).$$

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По **определению кратности корня**

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

По формуле дифференцирования производной произведения

$$p'(x) = \big((x-\alpha)^k q(x)\big)' = k(x-\alpha)^{k-1} q(x) + (x-\alpha)^k q'(x) =$$

$$= (x-\alpha)^{k-1}\left(k\, q(x) + (x-\alpha) q'(x)\right).$$

При этом $k \underbrace{q(\alpha)}_{\neq 0} + \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0} q'(\alpha) \neq 0.$

V.6. Теорема о кратных корнях и производной

Теорема 6. *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности $k \geq 2$, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Доказательство. По **определению кратности корня**

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

$$p'(x) = (x-\alpha)^{k-1}\left(k\,q(x) + (x-\alpha)q'(x)\right).$$

При этом $k\underbrace{q(\alpha)}_{\neq 0} + \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0} q'(\alpha) \neq 0$. Следовательно, по определению кратности корня элемент α является корнем многочлена $p'(x)$ кратности $(k-1)$. Теорема доказана.

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если* $p(x)$ *многочлен и* $f(x) = \dfrac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) всякий корень многочлена $p(x)$ *является корнем многочлена* $f(x)$ *и всякий корень многочлена* $f(x)$ *является корнем многочлена* $p(x)$;

2) все корни многочлена $\dfrac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$ *имеют кратность 1.*

Много слов естественного языка...

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если* $p(x)$ *многочлен и* $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ *имеют кратность 1.*

Доказательство.

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если* $p(x)$ *многочлен и* $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ *имеют кратность 1.*

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$p(x) =$

По **определению кратности корня** и **теореме о кратных корнях и производной**...

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если* $p(x)$ *многочлен и* $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ *имеют кратность 1.*

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$p(x) = (x - \alpha)^k q(x), \qquad q(\alpha) \neq 0,$

По **определению кратности корня** и **теореме о кратных корнях и производной**...

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если* $p(x)$ *многочлен и* $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ *имеют кратность 1.*

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$

По **определению кратности корня** и **теореме о кратных корнях и производной**...

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если* $p(x)$ *многочлен и* $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ *имеют кратность 1.*

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} =$$

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если* $p(x)$ *многочлен и* $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ *имеют кратность 1.*

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} = \frac{(x-\alpha)^k q(x)}{\text{Н.О.Д.}\,((x-\alpha)^k q(x); (x-\alpha)^{k-1} r(x))} =$$

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если $p(x)$ многочлен и $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ имеют кратность 1.

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} = \frac{(x-\alpha)^k q(x)}{\text{Н.О.Д.}\,((x-\alpha)^k q(x); (x-\alpha)^{k-1} r(x))} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)^k q(x)}{(x-\alpha)^{k-1} \cdot \text{Н.О.Д.}\,((x-\alpha) q(x); r(x))} =$$

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если $p(x)$ многочлен и $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ имеют кратность 1.

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} = \frac{(x-\alpha)^k q(x)}{\text{Н.О.Д.}\,((x-\alpha)^k q(x); (x-\alpha)^{k-1} r(x))} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)^k q(x)}{(x-\alpha)^{k-1} \cdot \text{Н.О.Д.}\,((x-\alpha) q(x); r(x))} =$$

$$= (x-\alpha) \cdot \frac{q(x)}{\text{Н.О.Д.}\,((x-\alpha) q(x); r(x))}.$$

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если $p(x)$ многочлен и $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ имеют кратность 1.

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} = (x-\alpha) \cdot \frac{q(x)}{\text{Н.О.Д.}\,((x-\alpha)q(x); r(x))}$$

Значит, во-первых, α является корнем многочлена $f(x)$.

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если $p(x)$ многочлен и $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ имеют кратность 1.

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} = (x-\alpha) \cdot \frac{q(x)}{\text{Н.О.Д.}\,((x-\alpha)q(x); r(x))}$$

Значит, во-первых, α является корнем многочлена $f(x)$.

Поскольку очевидно, что всякий корень многочлена $f(x)$ является корнем и для $p(x)$, то первое утверждение **теоремы об избавлении от кратных корней** доказано.

V.7. Теорема об избавлении от кратных корней

Теорема 7. *Если $p(x)$ многочлен и $f(x) = \dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\forall a \quad p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a) = 0$;

2) все корни многочлена $f(x)$ имеют кратность 1.

Доказательство. Пусть α — корень многочлена $p(x)$ кратности k.

$$p(x) = (x-\alpha)^k q(x), \quad p'(x) = (x-\alpha)^{k-1} r(x), \quad q(\alpha) \neq 0, \quad r(\alpha) \neq 0.$$

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))} = (x-\alpha) \cdot \frac{q(x)}{\text{Н.О.Д.}\,((x-\alpha)q(x); r(x))}$$

Во-вторых, кратность корня α многочлена $\dfrac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x); p'(x))}$ равна 1, т.е. второе утверждение доказано.

Теорема доказана. **Рассмотреть пример?**

V.8. Разложимые и неразложимые (неприводимые) многочлены

Поиск путей достижения цели 2, требует специального понятийного аппарата. Его основой является следующее понятие.

Определение 6. *Многочлен* $f(x)$ *называется* **разложимым** *над полем* K *или* **приводимым** *над полем* K, *если существуют такие многочлены* $p(x)$ *и* $q(x)$ *из* $K[x]$, *что,* **во-первых**, $\deg(p) < \deg(f)$ *и* $\deg(q) < \deg(f)$; **во-вторых**, $f(x) = p(x) \cdot q(x)$. *В противном случае многочлен* $f(x)$ *называется* **неразложимым** *или* **неприводимым** *над полем* K.

V.8. Разложимые и неразложимые (неприводимые) многочлены

Поиск путей достижения цели 2, требует специального понятийного аппарата. Его основой является следующее понятие.

Определение 6. *Многочлен* $f(x)$ *называется* **разложимым** *над полем* K *или* **приводимым** *над полем* K, *если существуют такие многочлены* $p(x)$ *и* $q(x)$ *из* $K[x]$, *что,* **во-первых**, $\deg(p) < \deg(f)$ *и* $\deg(q) < \deg(f)$; **во-вторых**, $f(x) = p(x) \cdot q(x)$. *В противном случае многочлен* $f(x)$ *называется* **неразложимым** *или* **неприводимым** *над полем* K.

Иными словами, $f(x)$ неразложим над полем K тогда и только тогда, когда равенство $f(x) = p(x) \cdot q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены с коэффициентами из K, выполняется только в случае $\deg(p) = 0$ или $\deg(q) = 0$.

V.8. Разложимые и неразложимые (неприводимые) многочлены

Поиск путей достижения цели 2, требует специального понятийного аппарата. Его основой является следующее понятие.

Определение 7. *Многочлен* $f(x)$ *называется* **вполне приводимым** *над полем* K, *если*

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k)^{\beta_k}, \tag{5}$$

где $\alpha_k \in K, \quad \beta_k \in \mathbb{N}.$

V.9. Теорема о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

Теорема 8. *Над полем действительных чисел неразложимыми являются только многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Над полем комплексных чисел неразложимыми являются только многочлены первой степени. В частности, любой многочлен над полем комплексных чисел* ***вполне приводим****.*

Без доказательства.

Из этой теоремы следует, что все корни многочлена с комплексными коэффициентами принадлежат полю комплексных чисел, то есть поле комплексных чисел является **алгебраически замкнутым**.

V.10. Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2. *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. Будем вести индукцию по степени многочлена $f(x)$.

База индукции. Если эта степень равна 1, то $f(x) = a_1 \cdot \left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)$, то есть этот многочлен имеет единственный корень $-\frac{a_0}{a_1}$. База доказана.

V.10. Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2. *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. Будем вести индукцию по степени многочлена $f(x)$.

Шаг индукции. Пусть степень n многочлена $f(x)$ больше 1 и для любого многочлена с комплексными коэффициентами, имеющего меньшую степень, утверждение этого следствия верно. По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше n.

V.10. Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2. *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше n.

Тогда, по предположению индукции, утверждение следствия верно для этих многочленов, откуда получаем требуемое утверждение, учитывая тот факт, что,

во-первых, если a — корень кратности k в точности одного из многочленов $g(x)$ или $h(x)$, то a является корнем кратности k многочлена $f(x)$;

V.10. Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2. *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше n.

Тогда, по предположению индукции, утверждение следствия верно для этих многочленов, откуда получаем требуемое утверждение, учитывая тот факт, что,

во-вторых, если a является корнем кратности k_1 для многочлена $g(x)$, и корнем кратности k_2 для многочлена $h(x)$, то для многочлена $f(x)$ число a является корнем кратности $k_1 + k_2$. Шаг индукции доказан.

V.10. Следствие о количестве комплексных корней

Следствие 2. *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. Итак, база индукции и шаг индукции доказаны. Следовательно, согласно принципу математической индукции доказываемое следствие верно для многочлена любой степени, большей 0.

V.10.1. Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3. *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. Будем вести индукцию по $\deg(f(x))$.

База индукции. Если эта степень равна 1, то $f(x) = a_1 \cdot \left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)$, то есть этот многочлен имеет вещественный корень $-\frac{a_0}{a_1}$. База доказана.

V.10.1. Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3. *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* Пусть степень n многочлена $f(x)$ больше 1 (то есть, с учетом ее нечетности, эта степень не меньше 3), и для любого многочлена с вещественными коэффициентами, имеющего меньшую степень, утверждение этого следствия верно.

V.10.1. Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3. *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$.

V.10.1. Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3. *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$. Степень одного из многочленов $g(x)$, $h(x)$ является нечетным числом, так как при умножении многочленов их степени складываются.

V.10.1. Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3. *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$. Степень одного из многочленов $g(x),\ h(x)$ является нечетным числом. Поэтому по предположению индукции он имеет вещественный корень, являющийся, очевидно, корнем многочлена $f(x)$.

V.10.1. Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3. *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$. Степень одного из многочленов $g(x),\ h(x)$ является нечетным числом. Поэтому по предположению индукции он имеет вещественный корень, являющийся, очевидно, корнем многочлена $f(x)$. Шаг индукции доказан.

V.10.1. Следствие о вещественном корне многочлена нечетной степени

Следствие 3. *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. *Шаг индукции.* По теореме 8 о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, $f(x) = g(x)\,h(x)$, где степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ меньше степени многочлена $f(x)$. Степень одного из многочленов $g(x),\ h(x)$ является нечетным числом. Поэтому по предположению индукции он имеет вещественный корень, являющийся, очевидно, корнем многочлена $f(x)$. Шаг индукции доказан.

Согласно принципу математической индукции доказываемое следствие верно для многочлена любой нечетной степени.

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

Если мы найдем действительный корень этого многочлена, то для ответа на поставленный вопрос можно

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

Если мы найдем действительный корень этого многочлена, то для ответа на поставленный вопрос можно воспользоваться теоремой Безу.

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

Если мы найдем действительный корень этого многочлена, то для ответа на поставленный вопрос можно воспользоваться теоремой Безу.

Существуют довольно эффективные численные методы поиска корней многочлена. Но как быть, если у многочлена нет действительных корней?

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Как разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами?

Если мы найдем действительный корень этого многочлена, то для ответа на поставленный вопрос можно воспользоваться теоремой Безу.

Существуют довольно эффективные численные методы поиска корней многочлена. Но как быть, если у многочлена нет действительных корней?

Один из подходов к решению вопроса о разложении многочлена на множители с вещественными коэффициентами основан на следующей теореме.

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство.

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Дальнейшие рассуждения построены на следующем тождестве: $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$. Это тождество легко доказывается:

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Дальнейшие рассуждения построены на следующем тождестве: $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$. Это тождество легко доказывается:

$$\overline{f(\overline{z})} =$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Дальнейшие рассуждения построены на следующем тождестве: $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$. Это тождество легко доказывается:

$$\overline{f(\overline{z})} = \overline{\sum_{m=0}^{n} a_m \overline{z}^m} =$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Дальнейшие рассуждения построены на следующем тождестве: $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$. Это тождество легко доказывается:

$$\overline{f(\overline{z})} = \overline{\sum_{m=0}^{n} a_m \overline{z}^m} = \sum_{m=0}^{n} \overline{a_m \overline{z}^m} =$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Дальнейшие рассуждения построены на следующем тождестве: $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$. Это тождество легко доказывается:

$$\overline{f(\overline{z})} = \overline{\sum_{m=0}^{n} a_m \overline{z}^m} = \sum_{m=0}^{n} \overline{a_m \overline{z}^m} = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m,$$

так как $\overline{a_m} = a_m$ в силу вещественности коэффициентов a_m.

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})} =$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{(\overline{z} - z_0)^k \cdot p(\overline{z})} =$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{(\overline{z} - z_0)^k \cdot p(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}.$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем $f(z) = \overline{f(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}$.

Заметим, что

$$\overline{p(\overline{z})} =$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем $f(z) = \overline{f(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}$.

Заметим, что

$$\overline{p(\overline{z})} = \overline{\left(\sum_{m=0}^{n-k} b_m \overline{z}^m\right)} =$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем $f(z) = \overline{f(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}$.

Заметим, что

$$\overline{p(\overline{z})} = \overline{\left(\sum_{m=0}^{n-k} b_m \overline{z}^m\right)} = \sum_{m=0}^{n-k} \overline{b_m} \cdot \overline{\overline{z}^m} =$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем $f(z) = \overline{f(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}$.

Заметим, что

$$\overline{p(\overline{z})} = \overline{\left(\sum_{m=0}^{n-k} b_m \overline{z}^m\right)} = \sum_{m=0}^{n-k} \overline{b_m} \cdot \overline{\overline{z}^m} = \sum_{m=0}^{n-k} \overline{b_m} z^m =$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем $f(z) = \overline{f(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}$.

Заметим, что

$$\overline{p(\overline{z})} = \overline{\left(\sum_{m=0}^{n-k} b_m \overline{z}^m\right)} = \sum_{m=0}^{n-k} \overline{b_m} \cdot \overline{\overline{z}^m} = \sum_{m=0}^{n-k} \overline{b_m} z^m = q(z).$$

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Пусть корень z_0 имеет кратность k. Тогда по теореме Безу $f(z) = (z - z_0)^k \cdot p(z)$. Используя доказанное тождество, получаем $f(z) = \overline{f(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \cdot \overline{p(\overline{z})}$.

Так как $\overline{p(\overline{z})} = q(z)$, то $f(z) = (z - \overline{z_0})^k \cdot q(z)$. Таким образом, доказано, что $\overline{z_0}$ является корнем кратности, не ниже k.

V.11. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ *являются вещественными, и* z_0 *— корень этого многочлена кратности* k*, то* $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена кратности* k*.*

Доказательство. Итак, если z_0 — корень кратности k, то $\overline{z_0}$ является корнем кратности, не ниже k.

Применяя эти рассуждения к корню $\overline{z_0}$, получаем, что кратность корня $\overline{(\overline{z_0})}$, равного z_0, не ниже кратности корня $\overline{z_0}$. Таким образом, $\overline{z_0}$ — корень многочлена $f(z)$ той же кратности, что и z_0. Теорема доказана.

V.12. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1. *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство.

V.12. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1. *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $z_0 = a + bi$. Тогда

V.12. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1. *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $z_0 = a + bi$. Тогда

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) =$$

V.12. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1. *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $z_0 = a + bi$. Тогда

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = (x - a - bi)(x - a + bi) =$$

V.12. Замечание о получении многочлена с вещественными коэффициентами

Замечание 1. *Если* z_0 *— комплексное число, то многочлен* $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ *имеет вещественные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $z_0 = a + bi$. Тогда

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + \left(a^2 + b^2\right),$$

то есть все его коэффициенты — вещественные числа.

Рассмотреть пример?

V.13. Схема Горнера

В полном объеме достичь цели 2 нам не удалось, так как практическое решение вопроса о представлении многочлена в виде произведения упирается, в конечном итоге, в задачу нахождения всех корней многочлена. Но для многочленов степени больше 4 эта задача в общем виде может быть решена только приближенно, так как формулы для вычисления корней с помощью коэффициентов уравнения, использующей только арифметические операции, включая извлечение корней. В связи с этим особый интерес представляют формулы, относящиеся к наиболее важным и часто возникающим ситуациям.

В соответствии со **стратегией приоритетного изучения экстремальных ситуаций** рассмотрим задачу деления на «наиболее простой» многочлен. В качестве такого многочлена возьмем многочлен $x - \alpha$.

V.13. Схема Горнера

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$$
$$= (x - \alpha)\left(x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0\right).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l|l} a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha & \text{при } x^{n-1}, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2} & \text{при } x^{n-2}, \\ a_{n-3} = b_{n-4} - \alpha b_{n-3} & \text{при } x^{n-3}, \\ \ldots & \\ a_1 = b_0 - \alpha b_1 & \text{при } x, \\ a_0 = -\alpha b_0 & \text{при } x^0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_0 = -\dfrac{a_0}{\alpha}, \\ b_1 = \dfrac{b_0 - a_1}{\alpha}, \\ \ldots \\ b_{n-3} = \dfrac{b_{n-4} - a_{n-3}}{\alpha}, \\ b_{n-2} = \dfrac{b_{n-3} - a_{n-2}}{\alpha}. \end{array}\right.$$

V.13. Схема Горнера

$$\left\{\begin{array}{l|l} a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha & \text{при } x^{n-1}, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2} & \text{при } x^{n-2}, \\ a_{n-3} = b_{n-4} - \alpha b_{n-3} & \text{при } x^{n-3}, \\ \dots & \\ a_1 = b_0 - \alpha b_1 & \text{при } x, \\ a_0 = -\alpha b_0 & \text{при } x^0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_0 = -\dfrac{a_0}{\alpha}, \\ b_1 = \dfrac{b_0 - a_1}{\alpha}, \\ \dots \\ b_{n-3} = \dfrac{b_{n-4} - a_{n-3}}{\alpha}, \\ b_{n-2} = \dfrac{b_{n-3} - a_{n-2}}{\alpha}. \end{array}\right.$$

Вычисление по рекуррентным формулам

$$b_0 = -\frac{a_0}{\alpha}, \quad b_k = \frac{b_{k-1} - a_k}{\alpha}, \tag{6}$$

называются вычислениями по **схеме Горнера**.

Рассмотрим пример?

V.14. Результант многочленов

Корни многочленов — один из наиболее востребованных инструментов решения задач, в которых используются многочлены. Как доказал Э.Галуа, для многочленов степени 5 и больше ***не существует формулы для нахождения корней***. Особую актуальность приобретают инструменты, с помощью которых удается решать некоторые ***проблемы, связанные с корнями многочленов, не находя эти корни явно.*** Примером такой проблемы является следующая задача.

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

Эту задачу можно рассматривать как результат применения **стратегии перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов**.

V.14. Результант многочленов

Корни многочленов — один из наиболее востребованных инструментов решения задач, в которых используются многочлены. Как доказал Э.Галуа, для многочленов степени 5 и больше ***не существует формулы для нахождения корней***. Особую актуальность приобретают инструменты, с помощью которых удается решать некоторые ***проблемы, связанные с корнями многочленов, не находя эти корни явно.*** Примером такой проблемы является следующая задача.

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

Мы решим эту задачу в ситуации, когда оба многочлена над данным полем разложимы в произведение многочленов первой степени.

V.14. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

Идея решения этой задачи состоит в том, чтобы ввести функцию от этих многочленов, которая обращается в ноль тогда и только тогда, когда у многочленов имеется хотя бы один общий корень. При этом функцию определим через корни многочленов, и получим выражение для ее задания через коэффициенты многочленов.

V.14. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

Идея решения этой задачи состоит в том, чтобы ввести функцию от этих многочленов, которая обращается в ноль тогда и только тогда, когда у многочленов имеется хотя бы один общий корень. При этом функцию определим через корни многочленов, и получим выражение для ее задания через коэффициенты многочленов.

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов.

V.14. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов. Например, для многочленов $(x-1)(x-3)(x+2)^2$ и $(x-4)(x-2)$ такое произведение имеет вид:

$$(1-4)(1-2)(3-4)(3-2)(-2-4)(-2-2)(-2-4)(-2-2)$$

V.14. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов. Например, для многочленов $(x-1)(x-3)(x+2)^2$ и $(x-4)(x-2)$ такое произведение имеет вид:

$$(1-4)(1-2)(3-4)(3-2)(-2-4)(-2-2)(-2-4)(-2-2)$$

Выражение $(-2-4)(-2-2)$ в этом произведении повторилось дважды, поскольку -2 является корнем кратности 2. В данном случае исходные многочлены не имеют общих корней, поэтому рассматриваемое произведение всех разностей между корнями первого и корнями второго уравнений отлично от нуля.

V.14. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов. Иная ситуация возникает, например, для многочленов $(x-1)(x-3)(x+2)^2$ и $(x-4)(x+2)$, для которых

$$(1-4)(1-2)(3-4)(3-2)(-2-4)(-2-(-2))(-2-4)(-2-(-2))=0.$$

V.14. Результант многочленов

Задача 1. *Для двух произвольных многочленов определить, имеются ли у них общие корни.*

В качестве такой функции естественно взять произведение всех разностей между корнями первого и второго многочленов. Иная ситуация возникает, например, для многочленов $(x-1)(x-3)(x+2)^2$ и $(x-4)(x+2)$, для которых

$$(1-4)(1-2)(3-4)(3-2)(-2-4)(-2-(-2))(-2-4)(-2-(-2))=0.$$

Оказалось, что для выражения этого произведения через коэффициенты многочленов удобнее это выражение «подправить» множителем, как это сделано в приведенной ниже формуле (7).

V.15. Теорема о результанте многочленов

Теорема 10. *Если многочлены* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *и* $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$ *разложимы над полем* K *в произведение многочленов первой степени:*

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = a_n(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n) = a_n\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i), \\ b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m = b_m(x - \beta_1)\ldots(x - \beta_m) = b_m\prod_{j=1}^{m}(x - \beta_j), \end{cases}$$

где $\{\alpha_i; \beta_j\} \subseteq K$, *то выражение*

$$R(f(x), g(x)) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j) \tag{7}$$

равно 0 тогда и только тогда, когда многочлены $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют хотя бы один общий корень.*

Доказательство. Очевидно.

V.16. Определение результанта многочленов

Определение 8. *Выражение (7)*

$$R(f(x), g(x)) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j) \tag{7}$$

называется **результантом** *многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$.

V.17. Теорема о представлении результанта

Теорема 11. *Если многочлены* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *и* $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$ *разложим над полем* K *в произведение многочленов первой степени:*

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = a_n(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n) = a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i), \\ b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m = b_m(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_m) = b_m\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j), \end{cases}$$

где $\{\alpha_i; \beta_j\} \subseteq K$, *то результант* $R(f(x), g(x))$ *равен*

$$\left|\begin{array}{cccccccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & \ldots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_{m-n} & b_{m-n-1} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_{m-n+1} & b_{m-n} & \ldots & b_1 & b_0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m & \ldots & b_{n-m} & b_{n-m-1} & \ldots & b_1 & b_0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} n \end{array} \qquad (8)$$

V.17. Теорема о представлении результанта

Рассмотреть примеры?

V.18. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

V.18. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

— получение информации о корнях многочленов с **рациональными** коэффициентами;

V.18. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

— получение информации о корнях многочленов с **рациональными** коэффициентами;

— представление многочлена с **рациональными** коэффициентами в виде результата применения **операций алгебры многочленов**, в частности, в виде произведения таких многочленов;

V.18. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

— получение информации о корнях многочленов с **рациональными** коэффициентами;

— представление многочлена с **рациональными** коэффициентами в виде результата применения **операций алгебры многочленов**, в частности, в виде произведения таких многочленов;

— получение информации о производной многочлена с **рациональными** коэффициентами;

V.18. Многочлены над полем рациональных чисел

Выделим некоторые актуальные проблемы (не все эти проблемы мы будем решать в этом курсе).

— получение информации о корнях многочленов с **рациональными** коэффициентами;

— представление многочлена с **рациональными** коэффициентами в виде результата применения **операций алгебры многочленов**, в частности, в виде произведения таких многочленов;

— получение информации о производной многочлена с **рациональными** коэффициентами;

— сведение к более простым ситуациям, например, к многочленам с целыми коэффициентами и др.

V.19. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами

Для того, чтобы свести решение задач о многочленах с **рациональными** коэффициентами к задачам о многочленах с целыми коэффициентами, сначала изучим последние.

V.19. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами

Для того, чтобы свести решение задач о многочленах с **рациональными** коэффициентами к задачам о многочленах с целыми коэффициентами, сначала изучим последние.

Определение 9. *Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами называется* **примитивным**, *если все его коэффициенты в совокупности взаимно просты, т.е. их Н.О.Д. равен 1.*

V.19. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами

Для того, чтобы свести решение задач о многочленах с **рациональными** коэффициентами к задачам о многочленах с целыми коэффициентами, сначала изучим последние.

Определение 9. *Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами называется* **примитивным**, *если все его коэффициенты в совокупности взаимно просты, т.е. их Н.О.Д. равен 1.*

Какие проблемы о многочленах с целыми коэффициентами можно отнести к первоочередным для нас?

V.19. Сведение к многочленам с целыми коэффициентами

Для того, чтобы свести решение задач о многочленах с **рациональными** коэффициентами к задачам о многочленах с целыми коэффициентами, сначала изучим последние.

Определение 9. *Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами называется* **примитивным**, *если все его коэффициенты в совокупности взаимно просты, т.е. их Н.О.Д. равен 1.*

Какие проблемы о примитивных многочленах можно отнести к первоочередным для нас?

— Какие операции сохраняют примитивность многочленов?

— Какие проблемы о многочленах с целыми коэффициентами можно свести к примитивным многочленам?

— Как проверить примитивность многочлена без утомительного вычисления **наибольшего общего делителя** его коэффициентов?

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12. *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство.

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12. *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Допустим, что многочлены $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ являются примитивными, но $c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m} =$

$$= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\,(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$$

примитивным не является.

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12. *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Допустим, что многочлены $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ являются примитивными, но $c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m} =$

$$= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\,(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$$

примитивным не является. Обозначим через p простое число, являющееся общим делителем коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m}$.

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12. *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Допустим, что многочлены $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ являются примитивными, но $c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m} =$

$$= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\,(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$$

примитивным не является. Обозначим через p простое число, являющееся общим делителем коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m}$. Последнее утверждение на «языке равенств» можно представить в виде формул

.

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12. *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Допустим, что многочлены $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ являются примитивными, но $c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m} =$

$$= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\,(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$$

примитивным не является. Обозначим через p простое число, являющееся общим делителем коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m}$. Последнее утверждение на «языке равенств» можно представить в виде формул $c_j = p \cdot d_j$.

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \ldots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \ldots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β.

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \ldots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $p \cdot d_{\alpha+\beta} =$

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$p \cdot d_0 + p \cdot d_1 x + p \cdot d_2 x^2 + \ldots + p \cdot d_{n+m} x^{n+m} =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\,(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \ldots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $p \cdot d_{\alpha+\beta} =$
$$= a_\alpha b_\beta + a_{\alpha+1} b_{\beta-1} + a_{\alpha-1} b_{\beta+1} + a_{\alpha+2} b_{\beta-2} + a_{\alpha-2} b_{\beta+2} + \ldots$$

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \dots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $p \cdot d_{\alpha+\beta} =$

$$= a_\alpha b_\beta + a_{\alpha+1} b_{\beta-1} + a_{\alpha-1} b_{\beta+1} + a_{\alpha+2} b_{\beta-2} + a_{\alpha-2} b_{\beta+2} + \dots$$

В правой части последнего равенства все слагаемые, кроме $a_\alpha b_\beta$, делятся на p нацело.

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

$$\begin{cases} p \cdot d_0 = a_0 b_0, \\ p \cdot d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ p \cdot d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \dots \\ p \cdot d_{n+m} = a_n b_m. \end{cases}$$

Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $p \cdot d_{\alpha+\beta} =$

$$= a_\alpha b_\beta + a_{\alpha+1} b_{\beta-1} + a_{\alpha-1} b_{\beta+1} + a_{\alpha+2} b_{\beta-2} + a_{\alpha-2} b_{\beta+2} + \dots$$

В правой части последнего равенства все слагаемые, кроме $a_\alpha b_\beta$, делятся на p нацело.

Но это означает, что $p \cdot d_{\alpha+\beta}$ не делится на p, что противоречие.

V.20. Теорема Гаусса о произведении примитивных многочленов

Теорема 12. *Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен.*

Доказательство. Пусть α — наименьший такой номер, что a_α не делится на p, а β — наименьший такой номер, что на p не делится b_β. Тогда $p \cdot d_{\alpha+\beta} =$

$$= a_\alpha b_\beta + a_{\alpha+1} b_{\beta-1} + a_{\alpha-1} b_{\beta+1} + a_{\alpha+2} b_{\beta-2} + a_{\alpha-2} b_{\beta+2} + \dots$$

В правой части последнего равенства все слагаемые, кроме $a_\alpha b_\beta$, делятся на p нацело.

Но это означает, что $p \cdot d_{\alpha+\beta}$ не делится на p, что противоречие. Теорема доказана.

V.21. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13. *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство.

V.21. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13. *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ являются целыми числами и $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m, \quad h(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k$$

являются **рациональными** числами: $b_i = \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$, $c_j = \dfrac{\gamma_j}{\delta_j}$.

V.21. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13. *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ являются целыми числами и $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m, \quad h(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k$$

являются **рациональными** числами: $b_i = \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$, $c_j = \dfrac{\gamma_j}{\delta_j}$.

Очевидно, что существуют такие несократимые дроби $\dfrac{u}{v}$ и $\dfrac{s}{t}$, что многочлены $\dfrac{u}{v} \cdot g(x)$ и $\dfrac{s}{t} \cdot h(x)$ являются **примитивными**.

V.21. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13. *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ являются целыми числами и $f(x) = g(x)h(x)$, где многочлены $\frac{u}{v} \cdot g(x)$ и $\frac{s}{t} \cdot h(x)$ являются **примитивными**. По **теореме Гаусса о произведении примитивных многочленов** многочлен $\frac{u}{v} \cdot \frac{s}{t} \cdot f(x) = \left(\frac{u}{v} \cdot g(x)\right) \cdot \left(\frac{s}{t} \cdot h(x)\right)$ является **примитивным**.

V.21. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13. *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ являются целыми числами и $f(x) = g(x)h(x)$, где многочлены $\frac{u}{v} \cdot g(x)$ и $\frac{s}{t} \cdot h(x)$ являются **примитивными**. По **теореме Гаусса о произведении примитивных многочленов** многочлен $\frac{u}{v} \cdot \frac{s}{t} \cdot f(x) = \left(\frac{u}{v} \cdot g(x)\right) \cdot \left(\frac{s}{t} \cdot h(x)\right)$ является **примитивным**.

Значит, $\frac{u}{v} \cdot \frac{s}{t} = \frac{1}{\mu}$, где $\mu = \text{Н.О.Д.}\{a_0, \ldots, a_n\}$.

V.21. Разложимость многочленов над полем рациональных чисел и над кольцом целых чисел

Теорема 13. *Многочлен с целыми коэффициентами является разложимым над полем* ***рациональных*** *чисел тогда и только тогда, когда он разложим над кольцом целых чисел.*

Доказательство. Таким образом,

$$f(x) = \left(\mu \cdot \frac{u}{v} \cdot g(x)\right) \cdot \left(\frac{s}{t} \cdot h(x)\right),$$

теорема доказана.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14. *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14. *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Применим метод доказательства «от противного».

V.22. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14. *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ разложим: $f(x) =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$.

V.22. Критерий Эйзенштейна

Теорема 14. *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ разложим: $f(x) =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

V.22. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right) \left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} a_0 = b_0 c_0, \\ a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ a_3 = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0, \\ \ldots \\ a_{n-1} = b_{k-1} a_m + b_k a_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

V.22. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} a_0 = b_0 c_0, \\ a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ a_3 = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0, \\ \ldots \\ a_{n-1} = b_{k-1} a_m + b_k a_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

По условию для $i \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$ имеем $a_i = \alpha_i p$.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 c_0, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k a_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

По условию для $i \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ (n-1)\}$ имеем $a_i = \alpha_i p$.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 c_0, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k a_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Коэффициент a_0 не делится на p^2, где p — простое число. Значит, один из коэффициентов b_0 или c_0 не делится на p.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 c_0, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k a_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что b_0 не делится на p и $c_0 = d_0 p$.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 d_0 p, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 d_0 p, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 d_0 p, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 d_0 p, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k c_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что b_0 не делится на p и $c_0 = d_0 p$.

Из второго уравнения $b_0 c_1 = p\,(\alpha_1 - b_1 d_0)$. Значит,

V.22. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 d_0 p, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 d_0 p, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 d_0 p, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 d_0 p, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k c_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что b_0 не делится на p и $c_0 = d_0 p$.

Из второго уравнения $b_0 c_1 = p\,(\alpha_1 - b_1 d_0)$. Значит, $c_1 = d_1 p$.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$

$$= \left(b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_kx^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1}x^{m-1} + c_mx^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 d_0 p, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 d_0 p, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 d_0 p, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 d_0 p, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k c_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Имеем b_0 не делится на p, $c_0 = d_0 p, \quad c_1 = d_1 p$.

Используя метод индукции получаем, что все c_i делятся на p.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Доказательство. $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n =$

$$= \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k\right)\left(c_0 + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m\right),$$

где $\{b_i, c_j\} \subseteq \mathbb{Q}$. Сравним коэффициенты при равных степенях:

$$\begin{cases} \alpha_0 p = b_0 d_0 p, \\ \alpha_1 p = b_0 c_1 + b_1 d_0 p, \\ \alpha_2 p = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 d_0 p, \\ \alpha_3 p = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 d_0 p, \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} p = b_{k-1} a_m + b_k c_{m-1}, \\ a_n = b_k a_m. \end{cases}$$

Имеем b_0 не делится на p, $c_0 = d_0 p, \quad c_1 = d_1 p$.

Используя метод индукции получаем, что все c_i делятся на p. Следовательно, a_n делится нацело на p.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14. *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Итак, a_n делится нацело на p,

V.22. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14. *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Итак, a_n делится нацело на p, что противоречит условию теоремы.

V.22. Критерий Эйзентштейна

Теорема 14. *Пусть у многочлена*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

все коэффициенты целые и существует простое число p такое, что
1) коэффициент a_n не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_0 делится на p, но не на p^2.
Тогда многочлен $f(x)$ является неприводимым над полем ***рациональных*** *чисел.*

Доказательство. Итак, a_n делится нацело на p, что противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Как показал Галуа, не существует алгебраической формулы для вычисление корней многочлена степени, большей 4.

Поэтому

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Как показал Галуа, не существует алгебраической формулы для вычисление корней многочлена степени, большей 4.

Поэтому актуальной является задача отыскания корней многочлена для частных случаев.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Рассмотрим задачу отыскания целочисленных корней многочлена $f(x)$ с **рациональными** коэффициентами.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Рассмотрим задачу отыскания целочисленных корней многочлена $f(x)$ с **рациональными** коэффициентами.

Эта задача равносильна задаче отыскания целочисленных корней многочлена $\mu \cdot f(x)$ с целыми коэффициентами, где μ — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $f(x)$.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Рассмотрим задачу отыскания целочисленных корней многочлена $f(x)$ с **рациональными** коэффициентами.

Эта задача равносильна задаче отыскания целочисленных корней многочлена $\mu \cdot f(x)$ с целыми коэффициентами, где μ — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $f(x)$.

Более того, таким образом задача сводится к поиску корней **примитивного** многочлена.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Пусть α — корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. По **теореме Безу**

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x - \alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** или доказательство **теоремы о делении с остатком**, получаем, что $b_i \in \mathbb{Q}$.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Пусть α — корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. По **теореме Безу**

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x - \alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** или доказательство **теоремы о делении с остатком**, получаем, что $b_i \in \mathbb{Q}$.

В силу **теоремы о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$** коэффициенты b_i являются целыми числами.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x - \alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** получаем, что a_0 ***делится нацело на*** α.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** получаем, что a_0 ***делится нацело на*** α.

Этот результат позволяет ограничить перебор возможных «кандидатов» на «роль корня» многочлена.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n.$$

Используя **схему Горнера** получаем, что a_0 ***делится нацело на*** α.

Этот результат позволяет ограничить перебор возможных «кандидатов» на «роль корня» многочлена.

Но в случае, когда a_0 имеет большое число делителей, такой перебор может оказаться чрезмерно утомительным. Поэтому продолжим анализ.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x - \alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}\right)$, где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α.

Для поиска метода уменьшения объема перебора применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n,$$

и a_0 ***делится нацело на*** α.

Для поиска метода уменьшения объема перебора применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Внимание к a_0 обусловлено тем, что это значение исходного многочлена при $x = 0$. Помимо 0 в качестве «экстремального» значения аргумента естественно взять

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n,$$

и a_0 ***делится нацело на*** α.

Для поиска метода уменьшения объема перебора применим **стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций**.

Внимание к a_0 обусловлено тем, что это значение исходного многочлена при $x = 0$. Помимо 0 в качестве «экстремального» значения аргумента естественно взять $x = 1$ и $x = -1$.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x - \alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}\right)$, где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) =$$

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x - \alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n,$$

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1 - \alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right),$$ где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1-\alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(-1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha + 1)$.

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x - \alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}\right)$, где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1 - \alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(-1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha + 1)$.

При $x = 1$

$$f(1) =$$

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right),$$ где $b_{n-1} = a_n$,

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1-\alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(-1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha + 1)$.

При $x = 1$

$$f(1) = (1-\alpha)\left(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}\right),$$

V.23. Целые корни многочлена с рациональными коэффициентами

Итак, если α — целый корень **примитивного** многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то для некоторых коэффициентов $b_i \in \mathbb{Z}$

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = (x-\alpha)\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}\right), \text{ где } b_{n-1} = a_n,$$

и a_0 ***делится нацело на*** α. При $x = -1$

$$f(-1) = (-1-\alpha)\left(b_0 + b_1(-1) + \ldots + b_{n-1}(-1)^{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(-1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha + 1)$.

При $x = 1$

$$f(1) = (1-\alpha)\left(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}\right),$$

откуда следует, что $f(1)$ ***делится нацело на*** $(\alpha - 1)$.

V.24. Рациональные корни многочлена с рациональными коэффициентами

Сведение задачи отыскания рациональных корней многочлена с рациональными коэффициентами к поиску целых корней многочлена с целыми коэффициентами осуществляется с помощью **теоремы о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом** и **теоремы о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом**.

V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15. *Если число* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* α *является целым числом.*

Доказательство.

V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15. *Если число* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* α *является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\frac{u}{v}$.

V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15. *Если число* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* α *является целым числом.*

Доказательство. Представим рациональное число α в виде несократимой дроби $\frac{u}{v}$. Тогда

$$a_0 + a_1\frac{u}{v} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \left(\frac{u}{v}\right)^n = 0,$$

откуда

V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15. *Если число* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* α *является целым числом.*

Доказательство. Представим рациональное число α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$. Тогда

$$a_0 + a_1\frac{u}{v} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \left(\frac{u}{v}\right)^n = 0,$$

откуда $a_0 v^n + a_1 u v^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}v + u^n = 0.$

V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15. *Если число* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* α *является целым числом.*

Доказательство. Представим рациональное число α в виде несократимой дроби $\frac{u}{v}$. Тогда

$$a_0 + a_1\frac{u}{v} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \left(\frac{u}{v}\right)^n = 0,$$

откуда $a_0 v^n + a_1 u v^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}v + u^n = 0$.

Следовательно, $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$.

V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15. *Если число* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* α *является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\frac{u}{v}$.

Получили $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$. Значит, если число v делится нацело на простое число p, то число u делится на p.

V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15. *Если число* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* α *является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\frac{u}{v}$.

Получили $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$. Значит, если число v делится нацело на простое число p, то число u делится на p.

Но числа u и v являются взаимно простыми, значит такого числа p не существует.

V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15. *Если число* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* α *является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\dfrac{u}{v}$.

Получили $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$. Значит, если число v делится нацело на простое число p, то число u делится на p.

Но числа u и v являются взаимно простыми, значит такого числа p не существует. Следовательно, $v = 1$, т.е. $\alpha = \dfrac{u}{1} = u$.

V.25. Теорема о рациональных корнях многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 15. *Если число* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* α *является целым числом.*

Доказательство. Представим **рациональное число** α в виде несократимой дроби $\frac{u}{v}$.

Получили $v\left(a_0 v^{n-1} + a_1 u v^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}\right) = u\left(-u^{n-1}\right)$. Значит, если число v делится нацело на простое число p, то число u делится на p.

Но числа u и v являются взаимно простыми, значит такого числа p не существует. Следовательно, $v = 1$, т.е. $\alpha = \frac{u}{1} = u$.

Теорема доказана.

V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16. *Если число* α *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* (αa_n) *является корнем многочлена* $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.

Доказательство.

V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16. *Если число* α *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* (αa_n) *является корнем многочлена* $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16. *Если число* α *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* (αa_n) *является корнем многочлена* $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = a_0 + a_1\frac{y}{a_n} + \ldots + a_{n-1}\frac{y^{n-1}}{a_n^{n-1}} + \frac{y^n}{a_n^{n-1}} =$$

V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16. *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1 y + \ldots + a_n a_{n-1} y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = a_0 + a_1\frac{y}{a_n} + \ldots + a_{n-1}\frac{y^{n-1}}{a_n^{n-1}} + \frac{y^n}{a_n^{n-1}} =$$

$$= \frac{a_0 a_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n}{a_n^{n-1}}.$$

V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16. *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1 y + \ldots + a_n a_{n-1} y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = \frac{a_0 a_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n}{a_n^{n-1}} = \frac{1}{a_n^{n-1}} g(y).$$

По условию $0 = f(\alpha) =$

V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16. *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = \frac{a_0a_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n}{a_n^{n-1}} = \frac{1}{a_n^{n-1}}g(y).$$

По условию $0 = f(\alpha) = f\left(\dfrac{(\alpha a_n)}{a_n}\right) =$

V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16. *Если число α является корнем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ с целыми коэффициентами a_i, то (αa_n) является корнем многочлена $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.*

Доказательство. Достаточно в многочлене $f(x)$ провести замену переменной $x = \dfrac{y}{a_n}$:

$$f\left(\frac{y}{a_n}\right) = \frac{a_0a_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + y^n}{a_n^{n-1}} = \frac{1}{a_n^{n-1}}g(y).$$

По условию $0 = f(\alpha) = f\left(\dfrac{(\alpha a_n)}{a_n}\right) = \dfrac{1}{a_n^{n-1}}g\left(\alpha a_n\right).$

V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16. *Если число* α *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* (αa_n) *является корнем многочлена* $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.

Доказательство. Итак, $\dfrac{1}{a_n^{n-1}}g(\alpha a_n) = 0$, т.е. (αa_n) является корнем многочлена $g(y)$.

V.25.1. Теорема о сведении к корням многочлена с единичным старшим коэффициентом

Теорема 16. *Если число* α *является корнем многочлена* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *с целыми коэффициентами* a_i, *то* (αa_n) *является корнем многочлена* $g(y) = a_n^{n-1}a_0 + a_n^{n-2}a_1y + \ldots + a_na_{n-1}y^{n-1} + y^n$.

Доказательство. Итак, $\dfrac{1}{a_n^{n-1}}g(\alpha a_n) = 0$, т.е. (αa_n) является корнем многочлена $g(y)$.

Теорема доказана.

V.26. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что

V.26. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \end{cases}$

V.26. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \end{cases}$

V.26. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \end{cases}$ но $\mathbb{R} \not\subset P$ и

V.26. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \end{cases}$ но $\mathbb{R} \not\subset P$ и $P \not\subset \mathbb{R}$.

V.26. Алгебраические числа

Полученные нами результаты позволяют ввести подполе поля комплексных чисел, включающее в себя $\mathbb{Q}$, но не инцидентное с $\mathbb{R}$, т.е. такое поле P, что $\begin{cases} \mathbb{Q} \subset P \subset \mathbb{C}, \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \end{cases}$ но $\mathbb{R} \not\subset P$ и $P \not\subset \mathbb{R}$.

Определение 10. *Комплексное число α называется* **алгебраическим**, *если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. В противном случае число α называется* **трансцендентным**.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются **рациональными числами**. По **теореме о разложении многочленов над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$** можно считать, что коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Итак, мы показали, что если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами. Но в этом случае $0 = f(\alpha) =$

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Итак, мы показали, что если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами. Но в этом случае $0 = f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha)$,

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Итак, мы показали, что если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами. Но в этом случае $0 = f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha)$, откуда следует, что α является корнем многочлена $g(x)$ или $h(x)$.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Итак, мы показали, что если $f(x)$ **приводим** над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)h(x)$, где все коэффициенты многочленов $g(x)$ и $h(x)$ являются целыми числами. Но в этом случае $0 = f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha)$, откуда следует, что α является корнем многочлена $g(x)$ или $h(x)$. Но степень каждого из них меньше степени многочлена $f(x)$.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Мы показали, что $f(x)$ **неприводим** над $\mathbb{Q}$.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Мы показали, что $f(x)$ **неприводим** над $\mathbb{Q}$.

Если β — **наибольший общий делитель** всех коэффициентов многочлена $f(x)$, то $f(x) = \beta \cdot s(x) = (-\beta) \cdot (-s(x))$, где $s(x)$ — **примитивный многочлен**, и α — его корень.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По определению **алгебраического числа** α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Среди всех таких многочленов $f(x)$ возьмем один из многочленов наименьшей степени. Мы показали, что $f(x)$ **неприводим** над $\mathbb{Q}$.

Значит, можно считать, что $f(x)$ — **примитивный многочлен** и что коэффициент при старшей степени положителен.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Осталось показать, что многочлен $f(x)$ определяется **однозначно**.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Пусть α является корнем примитивных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ минимальной степени с целыми коэффициентами и положительным коэффициентом при старшей степени.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. По **теореме о делении с остатком** $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Из доказательства **теоремы о делении с остатком** следует, что все коэффициенты многочленов $p(x)$ и $r(x)$ являются **рациональными числами**.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

$$\beta f(\alpha) = \beta p(\alpha)g(\alpha) + \beta r(\alpha)$$

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

$$\beta \underbrace{f(\alpha)}_{=0} = \beta p(\alpha) \underbrace{g(\alpha)}_{=0} + \beta r(\alpha)$$

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

$$0 = \beta \underbrace{f(\alpha)}_{=0} = \beta p(\alpha) \underbrace{g(\alpha)}_{=0} + \beta r(\alpha)$$

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда

$$0 = \beta \underbrace{f(\alpha)}_{=0} = \beta p(\alpha) \underbrace{g(\alpha)}_{=0} + \beta r(\alpha) \;\Rightarrow\; \beta r(\alpha) = 0.$$

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда $\beta r(\alpha) = 0$. Таким образом α является корнем многочлена $\beta r(x)$ с целыми коэффициентами.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. $f(x) = p(x)g(x) + r(x)$, где $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Пусть $r(x) \not\equiv 0$ и β — **наименьшее общее кратное** знаменателей всех коэффициентов многочлена $r(x)$. Тогда $\beta r(\alpha) = 0$. Таким образом α является корнем многочлена $\beta r(x)$ с целыми коэффициентами. Но его степень меньше степени многочлена $f(x)$, противоречие.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0. По определению **примитивного многочлена** из равенства $f(x) = p \cdot g(x)$ следует, что $p \in \{-1;\ 1\}$.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0. По определению **примитивного многочлена** из равенства $f(x) = p \cdot g(x)$ следует, что $p \in \{-1;\ 1\}$. Но у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ коэффициент при старшей степени положителен, поэтому $p = 1$.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0. По определению **примитивного многочлена** из равенства $f(x) = p \cdot g(x)$ следует, что $p \in \{-1;\ 1\}$. Но у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ коэффициент при старшей степени положителен, поэтому $p = 1$.

Следовательно, $f(x) = g(x)$, т.е. многочлен $f(x)$ определяется **однозначно**.

V.26.1. Теорема о сопряженных алгебраических числах

Теорема 17. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Доказательство. Следовательно, $f(x) = p(x)g(x)$. Так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то степень многочлена $p(x)$ равна 0. По определению **примитивного многочлена** из равенства $f(x) = p \cdot g(x)$ следует, что $p \in \{-1;\ 1\}$. Но у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ коэффициент при старшей степени положителен, поэтому $p = 1$.

Следовательно, $f(x) = g(x)$, т.е. многочлен $f(x)$ определяется **однозначно**. Теорема доказана.

V.26.2. Сопряженные алгебраические числа

Теорема 18. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Определение 11. *Алгебраические числа α и β называются* **сопряженными**, *если для числа α и числа β совпадают многочлены, определенные в* ***теореме 17 о сопряженных алгебраических числах***. *Если $f(x)$ — этот многочлен из теоремы 17, то алгебраические числа α и β называются* **сопряженными через многочлен** $f(x)$.

V.26.2. Сопряженные алгебраические числа

Теорема 18. *Для любого алгебраического числа α существует единственный* **неприводимый** *над $\mathbb{Q}$* ***примитивный многочлен*** *с положительным старшим коэффициентом, корнем которого является α.*

Определение 11. *Алгебраические числа α и β называются* **сопряженными**, *если для числа α и числа β совпадают многочлены, определенные в* ***теореме 17 о сопряженных алгебраических числах***. *Если $f(x)$ — этот многочлен из теоремы 17, то алгебраические числа α и β называются* **сопряженными через многочлен** $f(x)$.

Не следует путать сопряженность алгебраических чисел и сопряженность комплексных чисел!

V.26.3. Теорема об операциях над алгебраическими числами

Теорема 19. *Сумма, разность, произведение и частное алгебраических чисел являются алгебраическими числами.*

V.26.4. Следствие о поле алгебраических чисел

Следствие 4. *Множество алгебраических чисел с операциями сумма и произведение алгебраических чисел является полем.*

Доказательство.

V.26.4. Следствие о поле алгебраических чисел

Следствие 4. *Множество алгебраических чисел с операциями сумма и произведение алгебраических чисел является полем.*

Доказательство. По **теореме об операциях над алгебраическими числами** множество алгебраических чисел замкнуто относительно сложения и умножения. Значит, остается только проверить выполнение **аксиом поля** в алгебре алгебраических чисел.

V.26.4. Следствие о поле алгебраических чисел

Следствие 4. *Множество алгебраических чисел с операциями сумма и произведение алгебраических чисел является полем.*

Доказательство. По **теореме об операциях над алгебраическими числами** множество алгебраических чисел замкнуто относительно сложения и умножения. Значит, остается только проверить выполнение **аксиом поля** в алгебре алгебраических чисел.

Но эти аксиомы выполняются для любых комплексных чисел, и, поскольку 0 и 1 являются алгебраическими числами, то эти аксиомы выполняются и для подмножества комплексных чисел — для алгебраических чисел. Следствие доказано.

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Как построить функцию, график которой проходит через точки

$$M_0\left(x_0; y_0\right), \quad M_1\left(x_1; y_1\right), \quad M_2\left(x_2; y_2\right), \quad \ldots, \quad M_n\left(x_n; y_n\right)?$$

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Как построить функцию, график которой проходит через точки

$$M_0\left(x_0; y_0\right), \quad M_1\left(x_1; y_1\right), \quad M_2\left(x_2; y_2\right), \quad \ldots, \quad M_n\left(x_n; y_n\right)?$$

Естественно выбрать функцию «попроще». Самой «простой» функцией для решения этой задачи является, видимо, многочлен.

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Как построить функцию, график которой проходит через точки

$$M_0\left(x_0; y_0\right), \quad M_1\left(x_1; y_1\right), \quad M_2\left(x_2; y_2\right), \quad \ldots, \quad M_n\left(x_n; y_n\right)?$$

Естественно выбрать функцию «попроще». Самой «простой» функцией для решения этой задачи является, видимо, многочлен.

Решение поставленной задачи обеспечивает **следующая теорема**.

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 20. *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{8}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Рассмотреть пример?

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 20. *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{8}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство.

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 20. *Для многочлена*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m\neq k}(x-x_m)}{\prod\limits_{m\neq k}(x_k-x_m)}= \tag{8}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})\,(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})\,(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p)=y_p$.

Доказательство. Имеем $f(x_p)=\sum\limits_{k=0}^{n} y_k \cdot \dfrac{\prod\limits_{m\neq k}(x_p-x_m)}{\prod\limits_{m\neq k}(x_k-x_m)},$

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 20. *Для многочлена*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m\neq k}(x-x_m)}{\prod\limits_{m\neq k}(x_k-x_m)}= \tag{8}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})\,(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})\,(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p)=y_p$.

Доказательство. Имеем $f(x_p)=\sum\limits_{k=0}^{n} y_k \cdot \dfrac{\prod\limits_{m\neq k}(x_p-x_m)}{\prod\limits_{m\neq k}(x_k-x_m)}$, причем

$$\frac{\prod\limits_{m\neq k}(x_p - x_m)}{\prod\limits_{m\neq k}(x_k - x_m)} = \delta_{k,p} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq p, \\ 1, & \text{если } k = p \end{cases} \quad - \delta\text{-символ Кронекера.}$$

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 20. *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{8}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Поэтому

$$f(x_p) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \delta_{k,p} =$$

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 20. *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{8}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Поэтому

$$f(x_p) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \delta_{k,p} =$$

$$= y_1 \cdot 0 + \dots + y_{p-1} \cdot 0 + y_p \cdot 1 + y_{p+1} \cdot 0 + \dots + y_n \cdot 0 =$$

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 20. *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{8}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Поэтому

$$f(x_p) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \delta_{k,p} =$$

$$= y_1 \cdot 0 + \ldots + y_{p-1} \cdot 0 + y_p \cdot 1 + y_{p+1} \cdot 0 + \ldots + y_n \cdot 0 = y_p.$$

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 20. *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{8}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

Доказательство. Поэтому $f(x_p) = y_p$.

Теорема доказана.

Рассмотреть пример?

V.26.5. Интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема 20. *Для многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \tag{8}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

справедливы равенства $f(x_p) = y_p$.

С увеличением степени многочлена точность аппроксимации не обязательно увеличивается.

Рассмотреть пример?

VI. Многочлены от нескольких переменных

Одним из естественных направлений исследований является направление, обусловленное применением **стратегии обогащения модели**. В данном случае мы применим ее следующим образом: рассмотрим многочлены от нескольких переменных.

VI. Многочлены от нескольких переменных

Одним из естественных направлений исследований является направление, обусловленное применением **стратегии обогащения модели**. В данном случае мы применим ее следующим образом: рассмотрим многочлены от нескольких переменных.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

VI. Многочлены от нескольких переменных

Одним из естественных направлений исследований является направление, обусловленное применением **стратегии обогащения модели**. В данном случае мы применим ее следующим образом: рассмотрим многочлены от нескольких переменных.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Примерами многочленов являются выражения

$$5x_1x_3 - 4x_1^3x_2 + \frac{2}{3}x_2^4x_3^2, \quad 2xyz^3 - yz^2 - \sqrt{5}y^2z + 0,2xz.$$

Типовой план алгебраического исследования

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить «экстремальные» объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

3. Обогатить набор операций и отношений за счет теорем и вторичных операций.

VI. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

VI. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

— **одночлены** вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

VI. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

— одночлены вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

— **степени одночленов**;

VI. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

— одночлены вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

— степени одночленов;

— **переменные** x_i, входящие в состав одночленов;

VI. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочлена от нескольких переменных можно выделить:

— одночлены вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

— степени одночленов;

— переменные x_i, входящие в состав одночленов;

— **степени каждой переменной** x_i.

VI. Многочлены от нескольких переменных

1. Определить элементы, из которых состоит объект исследования, выбрать или сформировать типовые способы представления объекта и его элементов.

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Среди составных элементов многочленов от нескольких переменных можно выделить:

— одночлены вида $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α_i — неотрицательное целое число;

— степени одночленов *(??? Как определить ???)*;

— переменные x_i, входящие в состав одночленов;

— степени каждой переменной x_i.

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. **Многочленом от переменных** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 13. **Степенью одночлена** $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 14. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\left(5x_1x_3 - 4x_1^3x_2 + \tfrac{2}{3}x_2^4x_3^2\right) =$$

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 14. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(5\underbrace{x_1^1 x_3^1}_{1+1=2} - 4\underbrace{x_1^3 x_2^1}_{3+1=4} + \tfrac{2}{3}\underbrace{x_2^4 x_3^2}_{4+2=6}\Big) =$$

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 14. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\left(5\underbrace{x_1^1 x_3^1}_{1+1=2} - 4\underbrace{x_1^3 x_2^1}_{3+1=4} + \tfrac{2}{3}\underbrace{x_2^4 x_3^2}_{4+2=6}\right) = \max\{2;\ 4;\ 6\} =$$

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 14. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\left(5\underbrace{x_1^1 x_3^1}_{1+1=2} - 4\underbrace{x_1^3 x_2^1}_{3+1=4} + \frac{2}{3}\underbrace{x_2^4 x_3^2}_{4+2=6}\right) = \max\{2;\ 4;\ 6\} = 6.$$

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 14. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\left(2xyz^3 - yz^2 - \sqrt{5}y^2z + 0,2xz\right) =$$

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 14. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\left(2x^1y^1z^3 - y^1z^2 - \sqrt{5}y^2z^1 + 0,2x^1z^1\right) =$$

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 14. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(2\underbrace{x^1y^1z^3}_{1+1+3=5} - \underbrace{y^1z^2}_{1+2=3} - \sqrt{5}\underbrace{y^2z^1}_{2+1=3} + 0,2\underbrace{x^1z^1}_{1+1=2}\Big) =$$

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 14. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(2\underbrace{x^1y^1z^3}_{1+1+3=5} - \underbrace{y^1z^2}_{1+2=3} - \sqrt{5}\underbrace{y^2z^1}_{2+1=3} + 0,2\underbrace{x^1z^1}_{1+1=2}\Big) = \max\{5;\ 3;\ 3;\ 2\} =$$

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определение 12. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i — *неотрицательное целое число.*

Определение 14. Степенью одночлена $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$, *где* $A \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

$$\deg\Big(2\underbrace{x^1y^1z^3}_{1+1+3=5} - \underbrace{y^1z^2}_{1+2=3} - \sqrt{5}\underbrace{y^2z^1}_{2+1=3} + 0,2\underbrace{x^1z^1}_{1+1=2}\Big) = \max\{5;\ 3;\ 3;\ 2\} = 5.$$

VI. Многочлены от нескольких переменных

Определив основные элементы многочлена от нескольких переменных, переходим ко второму пункту типового плана алгебраического исследования.

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

VI. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

VI. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— **принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны** 0, $-\infty$),

VI. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— **принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны** 0, $-\infty$),

но такие многочлены вырождаются, являются «практически числом». Такие случаи нам мало интересны.

VI. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— **принятие характеристиками элементов объекта равных значений,**

VI. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— **принятие характеристиками элементов объекта равных значений,**

например, равенство всех степеней одночленов. Это направление требует дальнейшего исследования.

VI. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— принятие характеристиками элементов объекта равных значений,

— **неизменность формы объекта при изменении его содержания** и т.д.

VI. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— принятие характеристиками элементов объекта равных значений,

— **неизменность формы объекта при изменении его содержания** и т.д.

Например, можно рассмотреть случай, когда при перестановке переменных x_i и x_k мы получаем тот же самый многочлен.

VI. Многочлены от нескольких переменных

2. Определить характеристики элементов и объекта в целом, операции над элементами, отношения. С их помощью выделить *«экстремальные»* объекты и их элементы — наиболее перспективные для исследования.

Отметим приоритетность исследования именно экстремальных ситуаций:

— принятие характеристиками объекта крайних значений (когда степени одночленов, входящих в многочлен, равны 0, $-\infty$),

— **принятие характеристиками элементов объекта равных значений,**

— неизменность формы объекта при изменении его содержания и т.д.

Итак, остановимся на первом выделенном направлении исследования.

VI.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 15. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k.

VI.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 15. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k.

Например, формой степени 3 являются многочлены
$3x^3 - 2x^2y + 7y^3$,

VI.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 15. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k.

Например, формой степени 3 являются многочлены
$3x^3 - 2x^2y + 7y^3, \quad -x^2y + xyz - 4xzt + y^2t,$

VI.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 15. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k.

Например, формой степени 3 являются многочлены

$$3x^3 - 2x^2y + 7y^3, \quad -x^2y + xyz - 4xzt + y^2t, \quad 5x^3 - 2y^3 + 7z^3 - t^3.$$

VI.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 15. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k.

Формой степени 5 являются многочлены
$7x^3yz - 2x^2y^3$,

VI.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 15. Однородным многочленом степени k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k.

Формой степени 5 являются многочлены
$7x^3yz - 2x^2y^3, \quad -x^5 + 5y^5 - 4z^5.$

VI.1. Формы (однородные многочлены)

Итак, экстремальная ситуация принятия характеристиками элементов объекта равных значений, позволила получить понятие *однородного многочлена*.

Обратимся ко второй экстремальной ситуации

— **неизменности формы объекта при изменении его содержания.**

VI.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Например, симметрическими являются многочлены $2x^2y + 2xy^2$,

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Например, симметрическими являются многочлены
$2x^2y + 2xy^2$, $\quad 4x^3 + 4y^3 + 4z^3$,

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Например, симметрическими являются многочлены
$2x^2y + 2xy^2$, $\quad 4x^3 + 4y^3 + 4z^3$,
$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3$.

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Появление нового объекта порождает новое исследование по типовой схеме. Это означает, что в первую очередь нас будет интересовать структура симметрических многочленов. А точнее, ответ на вопрос: *Из каких элементов состоит симметрический многочлен?*

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$
$$= \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}.$$

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$
$$= \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}.$$
$$x^5 + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^5 + y^3z + yz^2x + yx^3 +$$
$$+yz^3 + yx^2z + xy^2z + z^5 =$$

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$
$$= \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}.$$
$$x^5 + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^5 + y^3z + yz^2x + yx^3 +$$
$$+yz^3 + yx^2z + xy^2z + z^5 =$$
$$= \underbrace{x^5 + y^5 + z^5} + \underbrace{xy^3 + xz^3 + yx^3 + yz^3 + zx^3 + zy^3} +$$
$$+ \underbrace{yx^2z + yz^2x + xy^2z}.$$

VI.2. Симметрические многочлены

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$
$$= \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}.$$

$$x^5 + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^5 + y^3z + yz^2x + yx^3 +$$
$$+yz^3 + yx^2z + xy^2z + z^5 =$$
$$= \underbrace{x^5 + y^5 + z^5} + \underbrace{xy^3 + xz^3 + yx^3 + yz^3 + zx^3 + zy^3} +$$
$$+ \underbrace{yx^2z + yz^2x + xy^2z}.$$

Видно, что в состав симметрическиого многочлена входят

VI.2. Симметрические многочлены

Примеры:

$$x^4y + x^4z + x^3 + y^4z + y^3 + z^3 =$$
$$= \underbrace{x^3 + y^3 + z^3} + \underbrace{x^4y + x^4z + y^4z}.$$

$$x^5 + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^5 + y^3z + yz^2x + yx^3 +$$

$$+yz^3 + yx^2z + xy^2z + z^5 =$$
$$= \underbrace{x^5 + y^5 + z^5} + \underbrace{xy^3 + xz^3 + yx^3 + yz^3 + zx^3 + zy^3} +$$
$$+ \underbrace{yx^2z + yz^2x + xy^2z}.$$

Видно, что в состав симметрическиого многочлена входят *многочлены, состоящие из одночленов с одинаковыми степенями,* то есть *однородные многочлены.*

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Теорема 21. *Любой симметрический полином может быть представлен в виде суммы симметрических форм, т.е. однородных многочленов*[5].

[5] Все одночлены в которых имеют одну и ту же степень.

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Итак, мы выяснили, из каких элементов состоит симметрический многочлен: из однородных многочленов.

Следующий пункт исследования связан с *характеристиками* симметрического многочлена. В первую очередь, характеристики возникают при изучении *экстремальных ситуаций*.

Экстремальная ситуация в структуре симметрического многочлена связана со строением ее однородных многочленов.

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Итак, мы выяснили, из каких элементов состоит симметрический многочлен: из однородных многочленов.

Следующий пункт исследования связан с *характеристиками* симметрического многочлена. В первую очередь, характеристики возникают при изучении *экстремальных ситуаций*.

Экстремальная ситуация в структуре симметрического многочлена связана со строением ее однородных многочленов.

Пусть однородные многочлены, входящие в состав симметрического многочлена, состоят из переменных только в первой степени.

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 16. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{9}$$

Экстремальная ситуация в структуре симметрического многочлена связана со строением ее однородных многочленов.

Пусть однородные многочлены, входящие в состав симметрического многочлена, состоят из переменных только в первой степени.

Получаемые таким образом многочлены мы назовем **основными симметрическими многочленами.**

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 17. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (10)$$

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 17. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (10)$$

Например, основными симметрическими многочленами являются $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$,

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 17. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (10)$$

Например, основными симметрическими многочленами являются

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 17. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (10)$$

Например, основными симметрическими многочленами являются

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$,

VI.2. Симметрические многочлены

Определение 17. *Основными симметрическими многочленами называются многочлены*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \qquad (10)$$

Например, основными симметрическими многочленами являются

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$,

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$.

VI.3. Теорема о разложении симметричного многочлена по основным

Теорема 22. *Любой симметрический полином может быть представлен в виде полинома от основных симметрических полиномов. Коэффициенты в таком представлении представляются целочисленными линейными комбинациями коэфициентов исходного полинома.*

Рассмотреть примеры?

VII. Дробно-рациональная функция

Несмотря на название «функция» мы рассмотрим один важный с практической точки зрения класс выражений. Это обусловлено тем, что основное применение представленный ниже результат находит в математическом анализе, в котором алгебраические выражения рассматриваются исключительно как способ задания функции.

VII.1. Определение дробно-рациональной функции

Определение 18. *Функция, задаваемая выражением вида* $\frac{p(x)}{q(x)}$, *где* $p(x)$ *и* $q(x)$ *— многочлены с вещественными коэффициентами, называется* **дробно-рациональной функцией**. *Дробно-рациональная функция* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *называется* **правильной**, *если* $\deg(p) < \deg(q)$, *в противном случае она называется* **неправильной**. *Дробно-рациональные функции вида* $\frac{a}{(x-b)^n}$ *и* $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$, *где* $n \in \mathbb{N}$ *и многочлен* x^2+cx+d *не имеет вещественных корней, называются* **простейшими дробно-рациональными функциями**.

VII.2. Теорема о разложении дробно-рациональной функции

Теорема 23. *Всякая дробно рациональная функция*

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-n_n)^{\alpha_n}\cdot s_1(x)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot s_m(x)^{\beta_m}},$$

где $s_1(x),\ldots,s_m(x)$ *— неразложимые над* $\mathbb{R}$ *многочлены второй степени, представима в виде*

$$q(x)+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_{n\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}}+$$
$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{s_1(x)}+\ldots+\frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{s_1(x)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{M_{m\beta_m}x+N_{m\beta_m}}{s_m(x)^{\beta_m}},$$

где $q(x)$ *— многочлен*[6].

Рассмотреть пример?

[6] Многочлен $q(x)$ называется **целой частью** этой дробно-рациональной функции.

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ | $2x^3 + x^2 - 2x - 1$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 \quad \big| \; 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \hline & 3x \end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \\ & 3x \end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \\ -\,2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & 3x \end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \hline -6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x \\ \hline -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \\ -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & 3x - 1 \end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\
\underline{-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \\
\quad -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & 3x - 1 \\
\underline{-\,-2x^3 - x^2 + 2x + 1} & \\
\end{array}
$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\
\underline{-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \\
-2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & 3x - 1 \\
\underline{-\,-2x^3 - x^2 + 2x + 1} & \\
-x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\
\cline{2-2}
-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\
\cline{1-1}
\quad -\,2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
-\,-2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\
\cline{1-1}
\quad -\,x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Степень многочлена $\left(-x^2 + 1\right)$ меньше степени делителя, т.е. степени многочлена $\left(2x^3 + x^2 - 2x - 1\right)$. Поэтому многочлен $\left(-x^2 + 1\right)$ является остатком от деления многочлена $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ на многочлен $\left(2x^3 + x^2 - 2x - 1\right)$.

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \hline 3x - 1 \\ -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\ \underline{-\,-2x^3 - x^2 + 2x + 1} & \\ -x^2 + 1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) =$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \hline 3x - 1 \\ -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\ \underline{-\,-2x^3 - x^2 + 2x + 1} & \\ -x^2 + 1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) =$

Если «Ой, а как это?», перейдите к следующему слайду.

Если вы уже получили искомое выражение, наведите указатель мыши на эту надпись и «кликните» левой кнопкой.

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2} -6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{1-1} \quad -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\ -(-2x^3 - x^2 + 2x + 1) & \\ \cline{1-1} \quad -x^2 + 1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) =$

Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2} -6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{1-1} \quad -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\ -\,-2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-1} \quad -x^2 + 1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) =$

Рассмотрим пример: $\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$ $\qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \hline 3x - 1 \\ -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\ \underline{-(-2x^3 - x^2 + 2x + 1)} & \\ -x^2 + 1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) =$

Рассмотрим пример: $\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \underline{20} & \hline 5 \\ 1 & \end{array}$ $\qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \underline{} \\ -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & 3x - 1 \\ \underline{-(-2x^3 - x^2 + 2x + 1)} & \\ -x^2 + 1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = \left(3x - 1\right) \cdot$$

Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \underline{20} & \underline{} \\ 1 & 5 \end{array} \qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \hline -6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \hline -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\ -\,-2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \hline -x^2 + 1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = (3x - 1) \cdot$$

Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \hline 20 & 5 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \\ -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & 3x - 1 \\ \underline{-(-2x^3 - x^2 + 2x + 1)} & \\ -x^2 + 1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = (3x - 1) \cdot \left(2x^3 + x^2 - 2x - 1\right) +$$

Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \underline{20} & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x} & \hline 3x - 1 \\ \quad -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\ \underline{-(-2x^3 - x^2 + 2x + 1)} & \\ \quad -x^2 + 1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = (3x - 1) \cdot \left(2x^3 + x^2 - 2x - 1\right) +$$

Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \underline{20} & \hline 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4+x^3-8x^2-x+2$ *на многочлен* $2x^3+x^2-2x-1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+x^3-8x^2-x+2 & 2x^3+x^2-2x-1 \\ \cline{2-2} -6x^4+3x^3-6x^2-3x & 3x-1 \\ \cline{1-1} \quad -2x^3-2x^2+2x+2 & \\ -\,-2x^3-x^2+2x+1 & \\ \cline{1-1} \quad -x^2+1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4+x^3-8x^2-x+2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$$\left(6x^4+x^3-8x^2-x+2\right)=(3x-1)\cdot\left(2x^3+x^2-2x-1\right)+\left(-x^2+1\right)$$

Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \qquad 21=5\cdot 4+1.$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4+x^3-8x^2-x+2$ *на многочлен* $2x^3+x^2-2x-1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+x^3-8x^2-x+2 & 2x^3+x^2-2x-1 \\ \underline{-6x^4+3x^3-6x^2-3x} & \hline 3x-1 \\ -2x^3-2x^2+2x+2 & \\ \underline{-(-2x^3-x^2+2x+1)} & \\ -x^2+1 & \end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4+x^3-8x^2-x+2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$$\left(6x^4+x^3-8x^2-x+2\right)=(3x-1)\left(2x^3+x^2-2x-1\right)+\left(-x^2+1\right).$$

Вернемся к лекции?

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad и$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение.

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad и$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Воспользуемся теоремой об Н.О.Д. делителя и остатка от деления.

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Разделим один из многочленов на другой:

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \;\big|\; x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Разделим один из многочленов на другой:

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \;\big|\; x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Разделим один из многочленов на другой:

$$\begin{array}{l|l} x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ \hline & x \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Разделим один из многочленов на другой:

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ \hline - & \underline{x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x} & x \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Разделим один из многочленов на другой:

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ \cline{3-3} - & x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x & x \\ \cline{1-2} & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad и$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Степень разности не меньше

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ \hline - & x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x & x \\ \hline & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \text{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Степень разности не меньше степени делителя.

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ \hline - & x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x & \hline x \\ \hline & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Поэтому продолжим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ - & \underline{x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x} & \hline x \\ & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Поэтому продолжим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ \hline - & x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x & x - 3 \\ \hline & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad и$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Поэтому продолжим:

$$\begin{array}{l|l}
x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\
\underline{-\ x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x} & \hline
\quad - 3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & x - 3 \\
\underline{-\ \ -3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12x + 12} & \\
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Поэтому продолжим:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\
- & \underline{x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x} & \hline x - 3 \\
 & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \\
- & \underline{-3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12x + 12} & \\
 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 &
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Теперь степень разности

$$\begin{array}{l|l}
x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\
\underline{-\ x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x} & \underline{x - 3} \\
\quad -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \\
\underline{-\ \ -3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12x + 12} & \\
\quad x^3 + 9x^2 - 12x - 20 &
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \text{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Теперь степень разности меньше степени делителя:

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ - & x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x & \hline x - 3 \\ \hline & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \\ - & -3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12x + 12 & \\ \hline & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \text{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Значит, эта разность является остатком.

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ - & x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x & \hline x - 3 \\ \hline & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \\ - & -3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12x + 12 & \\ \hline & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad и$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Поэтому разделим делитель

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ - & x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x & \hline x - 3 \\ \hline & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \\ - & -3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12x + 12 & \\ \hline & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \text{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Теперь разделим делитель на остаток от деления:

$$\begin{array}{rl|l} & x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ - & x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x & \hline x - 3 \\ \hline & -3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 8 & \\ - & -3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12x + 12 & \\ \hline & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad и$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. В результате деления делителя на остаток от деления получим:

$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \quad \Big| \; x^3 + 9x^2 - 12x - 20$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \qquad \left| \begin{array}{l} x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\ \hline x^2 \end{array} \right.$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\ \cline{3-3} - & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\ \cline{3-3} - & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 \\ \cline{1-2} & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\ \cline{3-3} - & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 \\ \cline{1-2} & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\ \cline{3-3} - & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 - 10x \\ \cline{1-2} & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\ \cline{3-3} - & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 - 10x \\ \cline{1-2} & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\ - & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\
- & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & \hline x^2 - 10x \\
\hline
 & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\
- & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\
\hline
 & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 &
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\ \cline{3-3} - & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 - 10x \\ \cline{1-2} & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\ - & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\ \cline{1-2} & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\ \cline{3-3} - & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 - 10x + 101 \\ \cline{1-2} & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\ - & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\ \cline{1-2} & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\
\cline{3-3}
- & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 - 10x + 101 \\
\cline{2-2}
 & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\
- & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\
\cline{2-2}
 & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 & \\
- & 101x^3 + 909x^2 - 1212x - 2020 & \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Продолжим:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\
- & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & \hline x^2 - 10x + 101 \\
\cline{1-2}
 & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\
- & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\
\cline{1-2}
 & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 & \\
- & 101x^3 + 909x^2 - 1212x - 2020 & \\
\cline{1-2}
 & -1008x^2 + 1008x + 2016 &
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Теперь степень разности

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\
- & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & \hline
 & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & x^2 - 10x + 101 \\
- & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\ \hline
 & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 & \\
- & 101x^3 + 909x^2 - 1212x - 2020 & \\ \hline
 & -1008x^2 + 1008x + 2016 &
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad и$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Теперь степень разности меньше степени делителя

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\
\hline
- & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 - 10x + 101 \\
\hline
 & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\
- & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\
\hline
 & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 & \\
- & 101x^3 + 909x^2 - 1212x - 2020 & \\
\hline
 & -1008x^2 + 1008x + 2016 &
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Поэтому разделим делитель на

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\
\cline{3-3}
- & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 - 10x + 101 \\
\cline{1-2}
 & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\
- & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\
\cline{1-2}
 & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 & \\
- & 101x^3 + 909x^2 - 1212x - 2020 & \\
\cline{1-2}
 & -1008x^2 + 1008x + 2016 &
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \text{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Поэтому разделим делитель на остаток.

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\
\cline{3-3}
- & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 - 10x + 101 \\
\cline{1-2}
 & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\
- & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\
\cline{1-2}
 & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 & \\
- & 101x^3 + 909x^2 - 1212x - 2020 & \\
\cline{1-2}
 & -1008x^2 + 1008x + 2016 &
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Н.О.Д. многочленов определяется с точностью до скалярного множителя. Поэтому делитель разделим на

$$\frac{1}{-1008}\left(-1008x^2 + 1008x + 2016\right)$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \\
\cline{3-3}
- & x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 20x^2 & x^2 - 10x + 101 \\
\cline{1-2}
 & -10x^4 + 11x^3 + 21x^2 - 4x - 4 & \\
- & -10x^4 - 90x^3 + 120x^2 + 200x & \\
\cline{1-2}
 & 101x^3 - 99x^2 - 204x - 4 & \\
- & 101x^3 + 909x^2 - 1212x - 2020 & \\
\cline{1-2}
 & -1008x^2 + 1008x + 2016 &
\end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Получим:

$$x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \qquad \left| \begin{array}{l} x^2 - x - 2 \\ \hline \\ \end{array} \right.$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Получим:

$$x^3 + 9x^2 - 12x - 20 \qquad \begin{array}{|l} x^2 - x - 2 \\ \hline x \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Получим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & x^2 - x - 2 \\ \cline{3-3} - & x^3 - x^2 - 2x & x \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Получим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & x^2 - x - 2 \\ \cline{3-3} - & x^3 - x^2 - 2x & x \\ \cline{1-2} & 10x^2 - 10x - 20 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Получим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & x^2 - x - 2 \\ \cline{3-3} - & x^3 - x^2 - 2x & x + 10 \\ \cline{1-2} & 10x^2 - 10x - 20 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Получим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & x^2 - x - 2 \\ \cline{3-3} - & x^3 - x^2 - 2x & x + 10 \\ \cline{1-2} & 10x^2 - 10x - 20 & \\ & - \ 10x^2 - 10x - 20 & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Получим:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & x^2 - x - 2 \\ \cline{3-3} - & x^3 - x^2 - 2x & x + 10 \\ \cline{1-2} & 10x^2 - 10x - 20 & \\ & - \ 10x^2 - 10x - 20 & \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение.

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & x^2 - x - 2 \\ - & x^3 - x^2 - 2x & \hline x + 10 \\ \hline & 10x^2 - 10x - 20 & \\ - & 10x^2 - 10x - 20 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Согласно теореме об Н.О.Д. делителя и остатка от деления Н.О.Д. многочленов из условия задачи равен

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение.

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 9x^2 - 12x - 20 & x^2 - x - 2 \\ \cline{3-3} - & x^3 - x^2 - 2x & x + 10 \\ \cline{2-2} & 10x^2 - 10x - 20 & \\ - & 10x^2 - 10x - 20 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Согласно теореме об Н.О.Д. делителя и остатка от деления Н.О.Д. многочленов из условия задачи равен $x^2 - x - 2$.

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Итак, Н.О.Д. многочленов из условия задачи равен $x^2 - x - 2$. Следовательно, наибольшее общее кратное имеет вид:

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad и$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Итак, Н.О.Д. многочленов из условия задачи равен $x^2 - x - 2$. Следовательно, наибольшее общее кратное имеет вид:

$$\frac{\left(x^6 - 4x^5 + \ldots - 4x - 8\right)\left(x^5 - x^4 - \ldots - 4\right)}{x^2 - x - 2} =$$

Пример 2. *Найти Н.О.К. и Н.О.Д. двух многочленов:*

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad \textit{и}$$
$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

Решение. Итак, Н.О.Д. многочленов из условия задачи равен $x^2 - x - 2$. Следовательно, наибольшее общее кратное имеет вид:

$$\frac{\left(x^6 - 4x^5 + \ldots - 4x - 8\right)\left(x^5 - x^4 - \ldots - 4\right)}{x^2 - x - 2} =$$
$$= x^9 - 4x^8 + 3x^7 + 3x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 16x - 16.$$

Вернемся к лекции?

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение.

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. Сначала следует

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. Сначала следует проверить, что (-2) — корень этого многочлена:

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. Сначала следует проверить, что (-2) — корень этого многочлена:

$$(-2)^4 + 5(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4(-2) - 8 =$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. Сначала следует проверить, что (-2) — корень этого многочлена:

$$(-2)^4 + 5(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4(-2) - 8 = 16 - 40 + 24 + 8 - 8 =$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. Сначала следует проверить, что (-2) — корень этого многочлена:

$$(-2)^4 + 5(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4(-2) - 8 = 16 - 40 + 24 + 8 - 8 = 0.$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. Сначала следует проверить, что (-2) — корень этого многочлена:

$$(-2)^4 + 5(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4(-2) - 8 = 16 - 40 + 24 + 8 - 8 = 0.$$

Итак, (-2) является корнем.

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\Big(\qquad\qquad\Big) =$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\Big(\qquad\qquad\Big) =$$

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-8 \;\Big|\; x+2$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\Big(\qquad\qquad\Big) =$$

$$\begin{array}{r|l} x^4+5x^3+6x^2-4x-8 & x+2 \\ \hline & x^3 \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\Big(\qquad\qquad\Big) =$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+5x^3+6x^2-4x-8 & x+2 \\ \underline{x^4+2x^3} & \hline x^3 \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\,(\qquad\qquad) =$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+5x^3+6x^2-4x-8 & x+2 \\ \cline{2-2} x^4+2x^3 & x^3 \\ \cline{1-1} \quad 3x^3+6x^2-4x-8 & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(\qquad\qquad\right) =$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+5x^3+6x^2-4x-8 & x+2 \\ \cline{2-2} x^4+2x^3 & x^3+3x^2 \\ \cline{1-1} \quad 3x^3+6x^2-4x-8 & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\,(\qquad\qquad) =$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+5x^3+6x^2-4x-8 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+2x^3} & x^3+3x^2 \\ \quad 3x^3+6x^2-4x-8 & \\ \quad \underline{3x^3+6x^2} & \\ \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\Big(\qquad\qquad\Big) =$$

$$\begin{array}{r|l} x^4+5x^3+6x^2-4x-8 & x+2 \\ \cline{2-2} x^4+2x^3 & x^3+3x^2 \\ \cline{1-1} \quad 3x^3+6x^2-4x-8 & \\ \quad 3x^3+6x^2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad -4x-8 & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\,(\qquad\qquad) =$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+5x^3+6x^2-4x-8 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+2x^3} & x^3+3x^2-4 \\ \quad 3x^3+6x^2-4x-8 & \\ \quad \underline{3x^3+6x^2} & \\ \qquad\qquad -4x-8 & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\,(\qquad\qquad) =$$

$$\begin{array}{r|l}
x^4+5x^3+6x^2-4x-8 & x+2 \\
\cline{2-2}
x^4+2x^3 & x^3+3x^2-4 \\
\cline{1-1}
\quad 3x^3+6x^2-4x-8 & \\
\quad 3x^3+6x^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad -4x-8 & \\
\qquad\qquad -4x-8 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$\begin{array}{r|l}
x^4+5x^3+6x^2-4x-8 & x+2 \\
\cline{2-2}
x^4+2x^3 & x^3+3x^2-4 \\
\cline{1-1}
\quad 3x^3+6x^2-4x-8 & \\
\quad 3x^3+6x^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad -4x-8 & \\
\qquad\qquad -4x-8 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

легко поверить, что (-2) является корнем многочлена $x^3 + 3x^2 - 4$.

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

легко поверить, что (-2) является корнем многочлена $x^3 + 3x^2 - 4$.

По **теореме Безу**...

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x + 2)^2 \left(\qquad\qquad \right) =$$

легко поверить, что (-2) является корнем многочлена $x^3 + 3x^2 - 4$.

По **теореме Безу**...

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x + 2)^2 \left(\qquad \right) =$$

$$x^3 + 3x^2 \qquad -4 \;\big|\; x + 2$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x + 2)^2 \left(\qquad \right) =$$

$$x^3 + 3x^2 \qquad -4 \;\Big|\; \begin{array}{l} x + 2 \\ \hline x^2 \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x + 2)^2 \left(\qquad \right) =$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3{+}3x^2 & -4 & x + 2 \\ \cline{3-3} \underline{x^3{+}2x^2} & & x^2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x+2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x+2)^2 \left(\qquad \right) =$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3{+}3x^2 & -4 & x+2 \\ \cline{3-3} x^3{+}2x^2 & & x^2 \\ \cline{1-1} x^2 & -4 & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x+2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x+2)^2 \left(\qquad \right) =$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3{+}3x^2 & -4 & x+2 \\ \cline{3-3} \cline{1-1} x^3{+}2x^2 & & x^2+x \\ \cline{1-1} x^2 & -4 & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x+2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x+2)^2 \left(\qquad \right) =$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3{+}3x^2 & -4 & x+2 \\ \cline{3-3} \underline{x^3{+}2x^2} & & x^2+x \\ \cline{1-1} x^2 & -4 & \\ \underline{x^2{+}2x} & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4+5x^3+6x^2-4x-8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x+2$:

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-8=(x+2)\left(x^3+3x^2-4\right)=$$

$$=(x+2)^2\left(\qquad\qquad\right)=$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3+3x^2 & -4 & x+2 \\ \cline{3-3} x^3+2x^2 & & x^2+x \\ \cline{1-1} x^2 & -4 & \\ x^2+2x & & \\ \cline{1-1} -2x & -4 & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x+2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x+2)^2 \left(\quad \right) =$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3+3x^2 & -4 & x+2 \\ \cline{3-3} x^3+2x^2 & & x^2+x-2 \\ \cline{1-1} x^2 & -4 & \\ x^2+2x & & \\ \cline{1-1} -2x & -4 & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4+5x^3+6x^2-4x-8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x+2$:

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-8=(x+2)\left(x^3+3x^2-4\right)=$$

$$=(x+2)^2\left(\qquad\qquad\right)=$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3+3x^2 & -4 & x+2 \\ \cline{3-3} x^3+2x^2 & & x^2+x-2 \\ \cline{1-1} x^2 & -4 & \\ x^2+2x & & \\ \cline{1-1} -2x & -4 & \\ -2x & -4 & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4+5x^3+6x^2-4x-8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x+2$:

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-8=(x+2)\left(x^3+3x^2-4\right)=$$

$$=(x+2)^2\left(x^2+x-2\right)=$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3+3x^2 & -4 & x+2 \\ \cline{3-3} x^3+2x^2 & & x^2+x-2 \\ \cline{1-1} x^2 & -4 & \\ x^2+2x & & \\ \cline{1-1} -2x & -4 & \\ -2x & -4 & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array}$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x + 2)^2\left(x^2 + x - 2\right) = (x + 2)^3\,(\qquad).$$

Пример 3. *Определить кратность корня* (-2) *многочлена* $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$.

Решение. По **теореме Безу** этот многочлен делится нацело на $x + 2$:

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) =$$

$$= (x + 2)^2\left(x^2 + x - 2\right) = (x + 2)^3(x - 1).$$

Вернёмся к лекции?

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение.

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Найдем Н.О.Д.$(p(x), p'(x))$.

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:*
$p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4.$
Найдите остальные корни этого многочлена.

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Найдем Н.О.Д.$(p(x), p'(x))$.
$p'(x) = 14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20.$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$.
Найдите остальные корни этого многочлена.

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Найдем Н.О.Д.$(p(x), p'(x))$.
$p'(x) = 14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20$.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4 & 14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20 \\
\cline{2-2}
2x^7 + \frac{6}{7}x^6 - \frac{60}{7}x^5 - 8x^4 + 6x^3 + \frac{66}{7}x^2 + \frac{20}{7}x & \frac{1}{7}x + \frac{1}{98} \\
\cline{1-1}
\frac{1}{7}x^6 - \frac{24}{7}x^5 - 6x^4 + 8x^3 + \frac{165}{7}x^2 + \frac{120}{7}x + 4 & \\
\frac{1}{7}x^6 + \frac{3}{49}x^5 - \frac{30}{49}x^4 - \frac{4}{7}x^3 + \frac{3}{7}x^2 + \frac{33}{49}x + \frac{10}{49} & \\
\cline{1-1}
-\frac{171}{49}x^5 - \frac{264}{49}x^4 + \frac{60}{7}x^3 \frac{162}{7}x^2 + \frac{807}{49}x + \frac{186}{49} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^7+x^6-12x^5-14x^4+14x^3+33x^2+20x+4 & 14x^6+6x^5-60x^4-56x^3+42x^2+66x+20 \\
\hline
2x^7+\frac{6}{7}x^6-\frac{60}{7}x^5-8x^4+6x^3+\frac{66}{7}x^2+\frac{20}{7}x & \frac{1}{7}x+\frac{1}{98} \\
\hline
\frac{1}{7}x^6-\frac{24}{7}x^5-6x^4+8x^3+\frac{165}{7}x^2+\frac{120}{7}x+4 & \\
\frac{1}{7}x^6+\frac{3}{49}x^5-\frac{30}{49}x^4-\frac{4}{7}x^3+\frac{3}{7}x^2+\frac{33}{49}x+\frac{10}{49} & \\
\hline
-\frac{171}{49}x^5-\frac{264}{49}x^4+\frac{60}{7}x^3\frac{162}{7}x^2+\frac{807}{49}x+\frac{186}{49} &
\end{array}
$$

$$2x^7+x^6-12x^5-14x^4+14x^3+33x^2+20x+4=$$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4 & 14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20 \\
2x^7 + \frac{6}{7}x^6 - \frac{60}{7}x^5 - 8x^4 + 6x^3 + \frac{66}{7}x^2 + \frac{20}{7}x & \frac{1}{7}x + \frac{1}{98} \\
\hline
\frac{1}{7}x^6 - \frac{24}{7}x^5 - 6x^4 + 8x^3 + \frac{165}{7}x^2 + \frac{120}{7}x + 4 & \\
\frac{1}{7}x^6 + \frac{3}{49}x^5 - \frac{30}{49}x^4 - \frac{4}{7}x^3 + \frac{3}{7}x^2 + \frac{33}{49}x + \frac{10}{49} & \\
\hline
-\frac{171}{49}x^5 - \frac{264}{49}x^4 + \frac{60}{7}x^3 \frac{162}{7}x^2 + \frac{807}{49}x + \frac{186}{49} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4 = \\
&= \left(\frac{1}{7}x + \frac{1}{98}\right)\left(14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20\right) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^7+x^6-12x^5-14x^4+14x^3+33x^2+20x+4 & 14x^6+6x^5-60x^4-56x^3+42x^2+66x+20 \\
\cline{2-2}
2x^7+\frac{6}{7}x^6-\frac{60}{7}x^5-8x^4+6x^3+\frac{66}{7}x^2+\frac{20}{7}x & \frac{1}{7}x+\frac{1}{98} \\
\cline{1-1}
\frac{1}{7}x^6-\frac{24}{7}x^5-6x^4+8x^3+\frac{165}{7}x^2+\frac{120}{7}x+4 & \\
\frac{1}{7}x^6+\frac{3}{49}x^5-\frac{30}{49}x^4-\frac{4}{7}x^3+\frac{3}{7}x^2+\frac{33}{49}x+\frac{10}{49} & \\
\cline{1-1}
-\frac{171}{49}x^5-\frac{264}{49}x^4+\frac{60}{7}x^3\frac{162}{7}x^2+\frac{807}{49}x+\frac{186}{49} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&2x^7+x^6-12x^5-14x^4+14x^3+33x^2+20x+4= \\
&=\left(\frac{1}{7}x+\frac{1}{98}\right)\left(14x^6+6x^5-60x^4-56x^3+42x^2+66x+20\right)+ \\
&\quad+\frac{3}{49}\left(-57x^5-88x^4+140x^3+378x^2+269x+62\right)
\end{aligned}
$$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$.
Найдите остальные корни этого многочлена.

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Найдем Н.О.Д.$(p(x), p'(x))$.
$p'(x) = 14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20$.

$$2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4 =$$
$$= \left(\frac{1}{7}x + \frac{1}{98}\right)\left(14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20\right) +$$
$$+\frac{3}{49}\left(-57x^5 - 88x^4 + 140x^3 + 378x^2 + 269x + 62\right)$$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$.
Найдите остальные корни этого многочлена.

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Найдем Н.О.Д.$(p(x), p'(x))$.
$p'(x) = 14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20$.

$$
\begin{array}{l|l}
14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20 & -57x^5 - 88x^4 + 140x^3 + 378x^2 + 269x + 62 \\
\hline
14x^6 + \frac{1232}{57}x^5 - \frac{1960}{57}x^4 - \frac{1764}{19}x^3 + \frac{3766}{57}x^2 + \frac{868}{57}x & -\frac{14}{57}x + \frac{890}{57^2} \\
\hline
-\frac{890}{57}x^5 - \frac{1460}{57}x^4 + \frac{700}{19}x^3 + \frac{6160}{57}x^2 + \frac{4630}{57}x + 20 & \\
-\frac{890}{57}x^5 - \frac{78320}{57^2}x^4 + \frac{124600}{57^2}x^3 + \frac{37380}{57^2}x^2 + \frac{239410}{57^2}x + \frac{55180}{57^2} & \\
\hline
-\frac{4900}{57^2}x^4 - \frac{4900}{57^2}x^3 + \frac{4900}{57^2}x^2 + \frac{24500}{57^2}x + \frac{9800}{57^2} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
14x^6+6x^5-60x^4-56x^3+42x^2+66x+20 & -57x^5-88x^4+140x^3+378x^2+269x+62 \\
\hline
14x^6+\frac{1232}{57}x^5-\frac{1960}{57}x^4-\frac{1764}{19}x^3+\frac{3766}{57}x^2+\frac{868}{57}x & -\frac{14}{57}x+\frac{890}{57^2} \\
\cline{1-1}
-\frac{890}{57}x^5-\frac{1460}{57}x^4+\frac{700}{19}x^3+\frac{6160}{57}x^2+\frac{4630}{57}x+20 & \\
-\frac{890}{57}x^5-\frac{78320}{57^2}x^4+\frac{124600}{57^2}x^3+\frac{37380}{57^2}x^2+\frac{239410}{57^2}x+\frac{55180}{57^2} & \\
\cline{1-1}
-\frac{4900}{57^2}x^4-\frac{4900}{57^2}x^3+\frac{4900}{57^2}x^2+\frac{24500}{57^2}x+\frac{9800}{57^2} &
\end{array}
$$

$$14x^6+6x^5-60x^4-56x^3+42x^2+66x+20=$$

$$
\begin{array}{l|l}
14x^6+6x^5-60x^4-56x^3+42x^2+66x+20 & -57x^5-88x^4+140x^3+378x^2+269x+62 \\
\hline
14x^6+\frac{1232}{57}x^5-\frac{1960}{57}x^4-\frac{1764}{19}x^3+\frac{3766}{57}x^2+\frac{868}{57}x & -\frac{14}{57}x+\frac{890}{57^2} \\
\hline
-\frac{890}{57}x^5-\frac{1460}{57}x^4+\frac{700}{19}x^3+\frac{6160}{57}x^2+\frac{4630}{57}x+20 & \\
-\frac{890}{57}x^5-\frac{78320}{57^2}x^4+\frac{124600}{57^2}x^3+\frac{37380}{57^2}x^2+\frac{239410}{57^2}x+\frac{55180}{57^2} & \\
\hline
-\frac{4900}{57^2}x^4-\frac{4900}{57^2}x^3+\frac{4900}{57^2}x^2+\frac{24500}{57^2}x+\frac{9800}{57^2} &
\end{array}
$$

$$
14x^6+6x^5-60x^4-56x^3+42x^2+66x+20=
$$

$$
=\left(-\frac{14}{57}x+\frac{890}{57^2}\right)\left(-57x^5-88x^4+140x^3+378x^2+269x+62\right)+
$$

$$
\begin{array}{l|l}
14x^6+6x^5-60x^4-56x^3+42x^2+66x+20 & -57x^5-88x^4+140x^3+378x^2+269x+62 \\
\hline
14x^6+\frac{1232}{57}x^5-\frac{1960}{57}x^4-\frac{1764}{19}x^3+\frac{3766}{57}x^2+\frac{868}{57}x & -\frac{14}{57}x+\frac{890}{57^2} \\
-\frac{890}{57}x^5-\frac{1460}{57}x^4+\frac{700}{19}x^3+\frac{6160}{57}x^2+\frac{4630}{57}x+20 & \\
-\frac{890}{57}x^5-\frac{78320}{57^2}x^4+\frac{124600}{57^2}x^3+\frac{37380}{57^2}x^2+\frac{239410}{57^2}x+\frac{55180}{57^2} & \\
\hline
-\frac{4900}{57^2}x^4-\frac{4900}{57^2}x^3+\frac{4900}{57^2}x^2+\frac{24500}{57^2}x+\frac{9800}{57^2} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&14x^6+6x^5-60x^4-56x^3+42x^2+66x+20= \\
&=\left(-\frac{14}{57}x+\frac{890}{57^2}\right)\left(-57x^5-88x^4+140x^3+378x^2+269x+62\right)+ \\
&\qquad+\frac{4900}{57^2}\left(-x^4-x^3+3x^2+5x+2\right).
\end{aligned}
$$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$.
Найдите остальные корни этого многочлена.

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Найдем Н.О.Д.$(p(x), p'(x))$.
$p'(x) = 14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20$.

$$14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20 =$$
$$= \left(-\frac{14}{57}x + \frac{890}{57^2}\right)\left(-57x^5 - 88x^4 + 140x^3 + 378x^2 + 269x + 62\right) +$$
$$+\frac{4900}{57^2}\left(-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2\right).$$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Найдем Н.О.Д.$(p(x), p'(x))$.

$p'(x) = 14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20.$

$$14x^6 + 6x^5 - 60x^4 - 56x^3 + 42x^2 + 66x + 20 =$$
$$= \left(-\frac{14}{57}x + \frac{890}{57^2}\right)\left(-57x^5 - 88x^4 + 140x^3 + 378x^2 + 269x + 62\right) +$$
$$+\frac{4900}{57^2}\left(-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2\right).$$
$$-57x^5 - 88x^4 + 140x^3 + 378x^2 + 269x + 62 =$$
$$= (57x + 31)\left(-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2\right).$$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Мы нашли

Н.О.Д.$(p(x), p'(x)) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2$.

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Мы нашли

$$\text{Н.О.Д.}(p(x), p'(x)) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2.$$

$$\frac{2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4}{-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2} =$$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Мы нашли

$$\text{Н.О.Д.}(p(x), p'(x)) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2.$$

$$\frac{2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4}{-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2} =$$

$$= -2x^3 + x^2 + 5x + 2.$$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Мы нашли

$$\text{Н.О.Д.}(p(x), p'(x)) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2.$$

$$\frac{2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4}{-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2} =$$

$$= -2x^3 + x^2 + 5x + 2.$$

Число 2 является корнем последнего многочлена. По **теореме Безу** многочлены $p(x)$ и $-2x^3 + x^2 + 5x + 2$ делятся нацело на $x - 2$:

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней. Мы нашли

$$\text{Н.О.Д.}(p(x), p'(x)) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2.$$

$$\frac{2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4}{-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2} =$$

$$= -2x^3 + x^2 + 5x + 2.$$

Число 2 является корнем последнего многочлена. По **теореме Безу** многочлены $p(x)$ и $-2x^3 + x^2 + 5x + 2$ делятся нацело на $x - 2$:

$$-2x^3 + x^2 + 5x + 2 = (x - 2)\left(-2x^2 - 3x - 1\right).$$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней.

$-2x^3 + x^2 + 5x + 2 = (x - 2)\left(-2x^2 - 3x - 1\right)$.

Корни многочлена $\left(-2x^2 - 3x - 1\right)$ найти легко:

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней.

$-2x^3 + x^2 + 5x + 2 = (x - 2)\left(-2x^2 - 3x - 1\right)$.

Корни многочлена $\left(-2x^2 - 3x - 1\right)$ найти легко:

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{3 \pm 1}{-4},$$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней.

$-2x^3 + x^2 + 5x + 2 = (x - 2)\left(-2x^2 - 3x - 1\right)$.

Корни многочлена $\left(-2x^2 - 3x - 1\right)$ найти легко:

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{3 \pm 1}{-4},$$

откуда получаем еще два корня: $\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Следовательно, согласно теореме об избавлении от кратных корней, список корней исходного многочлена имеет вид: $2;\ (-1);\ \left(-\frac{1}{2}\right)$.

Пример 4. *Проверьте, что 2 является корнем многочлена:* $p(x) = 2x^7 + x^6 - 12x^5 - 14x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 20x + 4$. *Найдите остальные корни этого многочлена.*

Решение. Следовательно, согласно теореме об избавлении от кратных корней, список корней исходного многочлена имеет вид: $2;\ (-1);\ \left(-\frac{1}{2}\right)$.

Задача решена.

Вернемся к лекции?

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Имеем
$(1+i)^2 =$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Имеем
$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 =$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Имеем
$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i+(-1) = 2i,$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Имеем

$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i+(-1) = 2i,$

$(1+i)^4 =$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Имеем

$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i+(-1) = 2i,$

$(1+i)^4 = (2i)^2 =$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Имеем

$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i+(-1) = 2i,$

$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4.$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Имеем

$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i+(-1) = 2i,$

$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4.$

Поэтому $(1+i)^4+4 = -4+4 = 0$, т.е.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Имеем

$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i+(-1) = 2i,$

$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4.$

Поэтому $(1+i)^4+4 = -4+4 = 0$, т.е. $1+i$ является корнем полинома x^4+4.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Можно было воспользоваться **умножением комплексных чисел в тригонометрической форме**:

$1+i=$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Можно было воспользоваться **умножением комплексных чисел в тригонометрической форме**:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right),$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Можно было воспользоваться **умножением комплексных чисел в тригонометрической форме**:
$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$, откуда

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Можно было воспользоваться **умножением комплексных чисел в тригонометрической форме**:
$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$, откуда
$(1+i)^4=4\left(\cos\left(\pi+8k\pi\right)+i\sin\left(\pi+8k\pi\right)\right)=$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Можно было воспользоваться **умножением комплексных чисел в тригонометрической форме**:
$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$, откуда
$(1+i)^4=4\left(\cos\left(\pi+8k\pi\right)+i\sin\left(\pi+8k\pi\right)\right)=4\left(-1+0i\right)=$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Можно было воспользоваться **умножением комплексных чисел в тригонометрической форме**:
$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$, откуда
$(1+i)^4=4\left(\cos\left(\pi+8k\pi\right)+i\sin\left(\pi+8k\pi\right)\right)=4\left(-1+0i\right)=-4.$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Мы доказали, что $(1+i)$ является корнем полинома x^4+4.

В силу теоремы о корнях многочлена с вещественными коэффициентами число $1-i$ также является корнем исходного многочлена.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Мы доказали, что $(1+i)$ является корнем полинома x^4+4.

В силу теоремы о корнях многочлена с вещественными коэффициентами число $1-i$ также является корнем исходного многочлена.

Следовательно, в силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i))=$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Мы доказали, что $(1+i)$ является корнем полинома x^4+4.

В силу теоремы о корнях многочлена с вещественными коэффициентами число $1-i$ также является корнем исходного многочлена.

Следовательно, в силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Мы доказали, что $(1+i)$ является корнем полинома x^4+4.

В силу теоремы о корнях многочлена с вещественными коэффициентами число $1-i$ также является корнем исходного многочлена.

Следовательно, в силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

x^4+4	x^2-2x+2

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} x^4+4 & x^2-2x+2 \\ \hline x^2 & \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} x^4+4 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4-2x^3+2x^2} & x^2 \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} x^4+4 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} x^4-2x^3+2x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} 2x^3-2x^2+4 & \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} x^4+4 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} x^4-2x^3+2x^2 & x^2+2x \\ \cline{1-1} 2x^3-2x^2+4 & \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+4 & x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
x^4-2x^3+2x^2 & x^2+2x \\
\cline{1-1}
\quad 2x^3-2x^2+4 & \\
\quad 2x^3-4x^2+4x & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+4 & x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
x^4-2x^3+2x^2 & x^2+2x \\
\cline{1-1}
\quad 2x^3-2x^2+4 & \\
\quad 2x^3-4x^2+4x & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 2x^2-4x+4 &
\end{array}
$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+4 & x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
x^4-2x^3+2x^2 & x^2+2x+2 \\
\cline{1-1}
\quad 2x^3-2x^2+4 & \\
\quad 2x^3-4x^2+4x & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 2x^2-4x+4 &
\end{array}
$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+4 & x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
x^4-2x^3+2x^2 & x^2+2x+2 \\
\cline{1-1}
\quad 2x^3-2x^2+4 & \\
\quad 2x^3-4x^2+4x & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 2x^2-4x+4 & \\
\qquad\quad 2x^2-4x+4 & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+4 & x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
x^4-2x^3+2x^2 & x^2+2x+2 \\
\cline{1-1}
\quad 2x^3-2x^2+4 & \\
\quad 2x^3-4x^2+4x & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 2x^2-4x+4 & \\
\qquad\quad 2x^2-4x+4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+4 & x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
x^4-2x^3+2x^2 & x^2+2x+2 \\
\cline{1-1}
\quad 2x^3-2x^2+4 & \\
\quad 2x^3-4x^2+4x & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 2x^2-4x+4 & \\
\qquad\quad 2x^2-4x+4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Следовательно, $x^4+4 =$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+4 & x^2-2x+2 \\
\cline{2-2}
x^4-2x^3+2x^2 & x^2+2x+2 \\
\cline{1-1}
\quad 2x^3-2x^2+4 & \\
\quad 2x^3-4x^2+4x & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 2x^2-4x+4 & \\
\qquad\quad 2x^2-4x+4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Следовательно, $x^4+4 = \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

В разложении $x^4+4 = \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$ множители являются неразложимыми над $\mathbb{R}$.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

В разложении $x^4+4 = \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$ множители являются неразложимыми над $\mathbb{R}$.

Нетрудно найти корни полученных квадратных трехчленов. В силу теоремы Безу получаем, что разложение на множители, неприводимые над $\mathbb{C}$ имеет вид

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. В силу замечания о получении многочлена с вещественными коэффициентами x^4+4 делится нацело на многочлен $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-2x+2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

В разложении $x^4+4 = \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$ множители являются неразложимыми над $\mathbb{R}$.

Нетрудно найти корни полученных квадратных трехчленов. В силу теоремы Безу получаем, что разложение на множители, неприводимые над $\mathbb{C}$ имеет вид
$x^4+4 = (x-1-i)\,(x-1+i)\,(x+1-i)\,(x+1+i)$.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант. В силу теоремы Безу исходный многочлен делится на $(x-(1+i))$.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^4+0x^3 \quad +0x^2 \ +0x \quad +4 \ \big| \ x-(1+i) \\
- & \underline{x^4-(1+i)x^3} \qquad\qquad\qquad\quad \big| \ x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) \\
 & \quad (1+i)x^3 \\
 & - \ \underline{(1+i)x^3 \ -2ix^2} \\
 & \qquad\qquad 2ix^2 \\
 & \qquad\quad - \ \underline{2ix^2 \ +(2-2i)x} \\
 & \qquad\qquad\quad (2i-2)x \ +4 \\
 & \qquad\quad\ - \ \underline{(2i-2)x \ +4} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

Исходный многочлен разделили на $(x-(1+i))$.

Теперь следует разделить полученное частное $x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2)$ на $(x-(1-i))$.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) \;\Big|\; \underline{x-(1-i)}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) \;\Big|\; \begin{array}{l} x-(1-i) \\ \hline x^2 \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$\begin{array}{l|l} x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) & x-(1-i) \\ \underline{x^3-(1-i)x^2} & \overline{x^2} \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$\begin{array}{l|l} x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) & x-(1-i) \\ \underline{x^3-(1-i)x^2} & \underline{} \\ 2x^2+2ix+(2i-2) & x^2 \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$\begin{array}{l|l} x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) & x-(1-i) \\ \underline{x^3-(1-i)x^2} & \overline{x^2+2x} \\ 2x^2+2ix+(2i-2) & \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$\begin{array}{l|l} x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) & x-(1-i) \\ \underline{x^3-(1-i)x^2} & \overline{x^2+2x} \\ \quad 2x^2+2ix+(2i-2) & \\ \quad \underline{2x^2-(2-2i)x} & \\ & \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$\begin{array}{l|l} x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) & x-(1-i) \\ \underline{x^3-(1-i)x^2} & \overline{x^2+2x} \\ \quad 2x^2+2ix+(2i-2) & \\ \quad \underline{2x^2-(2-2i)x} & \\ \qquad 2x+(2i-2) & \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$\begin{array}{l|l} x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) & x-(1-i) \\ \underline{x^3-(1-i)x^2} & \overline{x^2+2x+2} \\ \quad 2x^2+2ix+(2i-2) & \\ \quad \underline{2x^2-(2-2i)x} & \\ \quad\quad 2x+(2i-2) & \end{array}$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) & x-(1-i) \\
\cline{2-2}
x^3-(1-i)x^2 & x^2+2x+2 \\
\cline{1-1}
\quad 2x^2+2ix+(2i-2) & \\
\quad 2x^2-(2-2i)x & \\
\cline{1-1}
\qquad 2x+(2i-2) & \\
\qquad 2x-(2-2i) & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+(1+i)x^2+2ix+(2i-2) & x-(1-i) \\
\cline{2-2}
x^3-(1-i)x^2 & x^2+2x+2 \\
\cline{1-1}
\quad 2x^2+2ix+(2i-2) & \\
\quad 2x^2-(2-2i)x & \\
\cline{1-1}
\qquad 2x+(2i-2) & \\
\qquad 2x-(2-2i) & \\
\cline{1-1}
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

Получили $x^4+4=(x-(1+i))(x-(1-i))\left(x^2+2x+2\right)$.

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

Получили $x^4+4=(x-(1+i))(x-(1-i))\left(x^2+2x+2\right)$.

Осталось найти корни квадратного трехчлена $\left(x^2+2x+2\right)$. В итоге получим:

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

Получили $x^4+4=(x-(1+i))(x-(1-i))\left(x^2+2x+2\right)$.

Осталось найти корни квадратного трехчлена $\left(x^2+2x+2\right)$. В итоге получим:

$$x^4+4=(x-(1+i))(x-(1-i))(x-(-1+i))(x-(-1-i)).$$

Пример 5. *Проверьте, что* $1+i$ *является корнем полинома* x^4+4. *Найдите разложение этого полинома в произведение многочленов, неразложимых над* $\mathbb{R}$ *и над* $\mathbb{C}$.

Решение. Другой вариант.

Получили $x^4+4=(x-(1+i))(x-(1-i))\left(x^2+2x+2\right)$.

Осталось найти корни квадратного трехчлена $\left(x^2+2x+2\right)$. В итоге получим:

$$x^4+4=\underbrace{(x-(1+i))(x-(1-i))}_{x^2-2x+2}\underbrace{(x-(-1+i))(x-(-1-i))}_{x^2+2x+2}.$$

Тот же ответ, что и в первом случае!

Вернемся к лекции?

Пример 6. *Проверьте, что* (-3) *является корнем многочлена* $x^3 - 13x - 12$. *С помощью* ***схемы Горнера*** *найти частное от деления этого многочлена на* $(x + 3)$.

Решение.

Пример 6. *Проверьте, что* (-3) *является корнем многочлена* $x^3 - 13x - 12$. *С помощью* ***схемы Горнера*** *найти частное от деления этого многочлена на* $(x + 3)$.

Решение. $x^3 - 13x - 12 = (x + 3)\left(x^2 + bx + c\right)$, где

$$\begin{cases} c = \\ b = \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 6. *Проверьте, что* (-3) *является корнем многочлена* $x^3 - 13x - 12$. *С помощью* ***схемы Горнера*** *найти частное от деления этого многочлена на* $(x+3)$.

Решение. $x^3 - 13x - 12 = (x+3)\left(x^2 + bx + c\right)$, где

$$\begin{cases} c = -\dfrac{-12}{-3}, \\ b = \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 6. *Проверьте, что* (-3) *является корнем многочлена* $x^3 - 13x - 12$. *С помощью* ***схемы Горнера*** *найти частное от деления этого многочлена на* $(x+3)$.

Решение. $x^3 - 13x - 12 = (x+3)\left(x^2 + bx + c\right)$, где

$$\begin{cases} c = -\dfrac{-12}{-3}, \\ b = \dfrac{c - (-13)}{-3} \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 6. *Проверьте, что* (-3) *является корнем многочлена* $x^3 - 13x - 12$. *С помощью* ***схемы Горнера*** *найти частное от деления этого многочлена на* $(x+3)$.

Решение. $x^3 - 13x - 12 = (x+3)\left(x^2 + bx + c\right)$, где

$$\begin{cases} c = -\dfrac{-12}{-3}, \\ b = \dfrac{c - (-13)}{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -4, \\ b = \end{cases}$$

Пример 6. *Проверьте, что* (-3) *является корнем многочлена* $x^3 - 13x - 12$. *С помощью* ***схемы Горнера*** *найти частное от деления этого многочлена на* $(x+3)$.

Решение. $x^3 - 13x - 12 = (x+3)\left(x^2 + bx + c\right)$, где

$$\begin{cases} c = -\dfrac{-12}{-3}, \\ b = \dfrac{c - (-13)}{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -4, \\ b = -3. \end{cases}$$

Пример 6. *Проверьте, что* (-3) *является корнем многочлена* $x^3 - 13x - 12$. *С помощью* ***схемы Горнера*** *найти частное от деления этого многочлена на* $(x+3)$.

Решение. $x^3 - 13x - 12 = (x+3)\left(x^2 + bx + c\right)$, где

$$\begin{cases} c = -\dfrac{-12}{-3}, \\ b = \dfrac{c - (-13)}{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -4, \\ b = -3. \end{cases}$$

Значит, $x^3 - 13x - 12 = (x+3)\left(x^2 - 3x - 4\right)$

Вернуться к лекции?

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение.

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. Для первой пары многочленов имеем

$$(x-2)^2 =$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. Для первой пары многочленов имеем

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4,$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. Для первой пары многочленов имеем

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4, \quad (x-2)(x+1)(x+3) =$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. Для первой пары многочленов имеем

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4, \quad (x-2)(x+1)(x+3) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. Для первой пары многочленов имеем

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4, \quad (x-2)(x+1)(x+3) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

Поэтому по формуле для вычисления результанта через коэффициенты многочленов получаем

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. Для первой пары многочленов имеем

$$(x-2)^2 = x^2-4x+4, \quad (x-2)(x+1)(x+3) = x^3+2x^2-5x-6.$$

Поэтому по формуле для вычисления результанта через коэффициенты многочленов получаем

$$R((x-2)^2,(x-2)(x+1)(x+3)) = R(x^2-4x+4, x^3+2x^2-5x-6) =$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение.

$$R((x-2)^2,(x-2)(x+1)(x+3)) = R(x^2-4x+4, x^3+2x^2-5x-6) =$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение.

$$R((x-2)^2,(x-2)(x+1)(x+3)) = R(x^2-4x+4, x^3+2x^2-5x-6) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. По определению результанта получаем

$$R((x-2)^2,(x-2)(x+1)(x+3))=$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. По определению результанта получаем

$$R((x-2)^2,(x-2)(x+1)(x+3)) =$$

$$= 1^3\cdot 1^2\cdot(2-2)(2-(-1))(2-(-3))\cdot(2-2)(2-(-1))(2-(-3)) = 0.$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. Для второй пары многочленов имеем

$$(1-2x)(x+3)=3-5x-2x^2, \quad (2x+1)\left(x^2-1\right)=-1-2x+x^2+2x^3.$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. Для второй пары многочленов имеем

$$(1-2x)(x+3)=3-5x-2x^2, \quad (2x+1)\left(x^2-1\right)=-1-2x+x^2+2x^3.$$

Поэтому по формуле для вычисления результанта через коэффициенты многочленов получаем

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. Для второй пары многочленов имеем

$$(1-2x)(x+3)=3-5x-2x^2, \quad (2x+1)\left(x^2-1\right)=-1-2x+x^2+2x^3.$$

Поэтому по формуле для вычисления результанта через коэффициенты многочленов получаем

$$R((x-2)^2,(x-2)(x+1)(x+3))=R(3-5x-2x^2,-1-2x+x^2+2x^3)=$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение.

$$R((x-2)^2,(x-2)(x+1)(x+3)) = R(3-5x-2x^2,-1-2x+x^2+2x^3) =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -480.$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. По определению результанта получаем

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. По определению результанта получаем

$$R\left((1-2x)(x+3),(2x+1)\left(x^2-1\right)\right)=$$

Пример 7. *Найти по определению результанта и формулам для вычисления результанта через коэффициенты многочленов результанты многочленов* $(x-2)^2$ *и* $(x-2)(x+1)(x+3)$, *а также многочленов* $(1-2x)(x+3)$ *и* $(2x+1)\left(x^2-1\right)$.

Решение. По определению результанта получаем

$$R\left((1-2x)(x+3),(2x+1)\left(x^2-1\right)\right)=$$

$$=(-2)^3\cdot 2^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-(-1)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)(-3-1)\,(-3-(-1))=-480.$$

Вернемся к лекции?

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

2) $n = 1$, *график должен проходить через точки* $K_0(p_0; q_0)$, $K_1(p_1; q_1)$;

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(e; f)$.

Решение.

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

Решение.

$$y_0 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_0 - \quad)(x_0 - \quad)} + \\ + y_1 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_1 - \quad)(x_1 - \quad)} + \\ + y_2 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_2 - \quad)(x_2 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

Решение. Рассмотрим выражение $(x - x_0)\boxed{(x - x_1)}\boxed{(x - x_2)}$

$$y_0 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_0 - \quad)(x_0 - \quad)} +$$
$$+ y_1 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_1 - \quad)(x_1 - \quad)} +$$
$$+ y_2 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_2 - \quad)(x_2 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

Решение. Рассмотрим выражение $(x - x_0)\boxed{(x - x_1)}\boxed{(x - x_2)}$

$$y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - \quad)(x_0 - \quad)} +$$
$$+ y_1 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_1 - \quad)(x_1 - \quad)} +$$
$$+ y_2 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_2 - \quad)(x_2 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

Решение. Рассмотрим выражение $(x - x_0)\boxed{(x - x_1)}\boxed{(x - x_2)}$

$$y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$
$$+ y_1 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_1 - \quad)(x_1 - \quad)} +$$
$$+ y_2 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_2 - \quad)(x_2 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x - x_0)}\,(x - x_1)\,\boxed{(x - x_2)}$

$$y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$
$$+ y_1 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_1 - \quad)(x_1 - \quad)} +$$
$$+ y_2 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_2 - \quad)(x_2 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x - x_0)}\,(x - x_1)\,\boxed{(x - x_2)}$

$$y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$
$$+ y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - \quad)(x_1 - \quad)} +$$
$$+ y_2 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_2 - \quad)(x_2 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x - x_0)}\,(x - x_1)\,\boxed{(x - x_2)}$

$$y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$
$$+ y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$
$$+ y_2 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_2 - \quad)(x_2 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x - x_0)}\,\boxed{(x - x_1)}\,(x - x_2)$

$$y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$

$$+ y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$

$$+ y_2 \cdot \frac{(x - \quad)(x - \quad)}{(x_2 - \quad)(x_2 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

1) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$;

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x - x_0)}\,\boxed{(x - x_1)}\,(x - x_2)$

$$y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$
$$+ y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$
$$+ y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

2) $n = 1$, *график должен проходить через точки* $K_0(p_0; q_0)$, $K_1(p_1; q_1)$;

Решение.

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

2) $n = 1$, *график должен проходить через точки* $K_0(p_0; q_0)$, $K_1(p_1; q_1)$;

Решение. Рассмотрим выражение $(x - \quad)\boxed{(x - \quad)}$

$$q_0 \cdot \frac{(x - \quad)}{(p_0 - \quad)} + q_1 \cdot \frac{(x - \quad)}{(p_1 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

2) $n = 1$, *график должен проходить через точки* $K_0(p_0; q_0)$, $K_1(p_1; q_1)$;

Решение. Рассмотрим выражение $(x - p_0)\boxed{(x - p_1)}$

$$q_0 \cdot \frac{(x - \quad)}{(p_0 - \quad)} + q_1 \cdot \frac{(x - \quad)}{(p_1 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

2) $n = 1$, *график должен проходить через точки* $K_0(p_0; q_0)$, $K_1(p_1; q_1)$;

Решение. Рассмотрим выражение $(x - p_0)\boxed{(x - p_1)}$

$$q_0 \cdot \frac{(x - p_1)}{(p_0 - p_1)} + q_1 \cdot \frac{(x - \quad)}{(p_1 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

2) $n = 1$, *график должен проходить через точки* $K_0(p_0; q_0)$, $K_1(p_1; q_1)$;

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x - p_0)}\,(x - p_1)$

$$q_0 \cdot \frac{(x - p_1)}{(p_0 - p_1)} + q_1 \cdot \frac{(x - \quad)}{(p_1 - \quad)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

2) $n = 1$, *график должен проходить через точки* $K_0(p_0; q_0)$, $K_1(p_1; q_1)$;

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x - p_0)}\,(x - p_1)$

$$q_0 \cdot \frac{(x - p_1)}{(p_0 - p_1)} + q_1 \cdot \frac{(x - p_0)}{(p_1 - p_0)}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(e; f)$.

Решение.

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(e; f)$.

Решение.

$$b \cdot \frac{(x - \ )(x - \ )}{(a - \ )(a - \ )} + \ \cdot \frac{(x - \ )(x - \ )}{(c - \ )(c - \ )} + \ \cdot \frac{(x - \ )(x - \ )}{(e - \ )(e - \ )}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(e; f)$.

Решение.

$$b \cdot \frac{(x - \ )(x - \ )}{(a - \ )(a - \ )} + d \cdot \frac{(x - \ )(x - \ )}{(c - \ )(c - \ )} + \ \cdot \frac{(x - \ )(x - \ )}{(e - \ )(e - \ )}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(e; f)$.

Решение.

$$b \cdot \frac{(x - \ )(x - \ )}{(a - \ )(a - \ )} + d \cdot \frac{(x - \ )(x - \ )}{(c - \ )(c - \ )} + f \cdot \frac{(x - \ )(x - \ )}{(e - \ )(e - \ )}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a;b)$, $B(c;d)$, $C(e;f)$.

Решение. Рассмотрим выражение $(x-\ \ )\boxed{(x-\ \ )}\boxed{(x-\ \ )}$

$$b \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(a-\ \ )(a-\ \ )} + d \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(c-\ \ )(c-\ \ )} + f \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(e-\ \ )(e-\ \ )}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a;b)$, $B(c;d)$, $C(e;f)$.

Решение. Рассмотрим выражение $(x-a)\boxed{(x-c)}\boxed{(x-e)}$

$$b \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(a-\ \ )(a-\ \ )} + d \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(c-\ \ )(c-\ \ )} + f \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(e-\ \ )(e-\ \ )}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a;b)$, $B(c;d)$, $C(e;f)$.

Решение. Рассмотрим выражение $(x-a)\boxed{(x-c)}\boxed{(x-e)}$

$$b \cdot \frac{(x-c)(x-e)}{(a-c)(a-e)} + d \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(c-\ \ )(c-\ \ )} + f \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(e-\ \ )(e-\ \ )}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a;b)$, $B(c;d)$, $C(e;f)$.

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x-a)}(x-c)\boxed{(x-e)}$

$$b \cdot \frac{(x-c)(x-e)}{(a-c)(a-e)} + d \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(c-\ \ )(c-\ \ )} + f \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(e-\ \ )(e-\ \ )}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(e; f)$.

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x-a)}(x-c)\boxed{(x-e)}$

$$b \cdot \frac{(x-c)(x-e)}{(a-c)(a-e)} + d \cdot \frac{(x-a)(x-e)}{(c-a)(c-e)} + f \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(e-\ \ )(e-\ \ )}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a;b)$, $B(c;d)$, $C(e;f)$.

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x-a)}\boxed{(x-c)}(x-e)$

$$b \cdot \frac{(x-c)(x-e)}{(a-c)(a-e)} + d \cdot \frac{(x-a)(x-e)}{(c-a)(c-e)} + f \cdot \frac{(x-\ \ )(x-\ \ )}{(e-\ \ )(e-\ \ )}.$$

Пример 8. *Запишите* ***формулу для многочлена Лагранжа*** *для случая, когда*

3) $n = 2$, *график должен проходить через точки* $A(a;b)$, $B(c;d)$, $C(e;f)$.

Решение. Рассмотрим выражение $\boxed{(x-a)}\boxed{(x-c)}(x-e)$

$$b \cdot \frac{(x-c)(x-e)}{(a-c)(a-e)} + d \cdot \frac{(x-a)(x-e)}{(c-a)(c-e)} + f \cdot \frac{(x-a)(x-c)}{(e-a)(e-c)}.$$

Вернуться к теореме?

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1 = 0, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 65$*; 2)* $x_1 = 0, \quad x_2 = 39, \quad x_3 = 65$*; 3)* $x_1 = 25, \quad x_2 = 52, \quad x_3 = 65$*; 4)* $x_1 = 0, \quad x_2 = 39, \quad x_3 = 52, \quad x_4 = 65$*; 5)* $x_1 = 0, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 39, \quad x_4 = 52, \quad x_5 = 60, \quad x_6 = 65.$

Решение.

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}$ *с абсциссами:* *1)* $x_1 = 0,\ x_2 = 25,\ x_3 = 65$; *2)* $x_1 = 0,\ x_2 = 39,\ x_3 = 65$; *3)* $x_1 = 25,\ x_2 = 52,\ x_3 = 65$; *4)* $x_1 = 0,\ x_2 = 39,\ x_3 = 52,\ x_4 = 65$; *5)* $x_1 = 0,\ x_2 = 25,\ x_3 = 39,\ x_4 = 52,\ x_5 = 60,\ x_6 = 65$.

Решение. Для 1-3) $p_2(x) = \sqrt{65^2 - x_1^2} \cdot \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$*; 2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$*; 3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$*; 4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$*; 5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 1-3) $p_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$*; 2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$*; 3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$*; 4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$*; 5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 1-3) $p_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 1-3) $p_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\sqrt{65^2-0^2}\cdot\frac{(x-25)(x-65)}{(0-25)(0-65)}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 1-3) $p_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{x^2}{25}-\frac{18x}{5}+65+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 1-3) $p_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{x^2}{25}-\frac{18x}{5}+65+60\cdot\frac{(x-0)(x-65)}{(25-0)(25-65)}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 1-3) $p_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{x^2}{25}-\frac{18x}{5}+65-\frac{3}{50}x^2+\frac{39}{10}x+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 1-3) $p_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

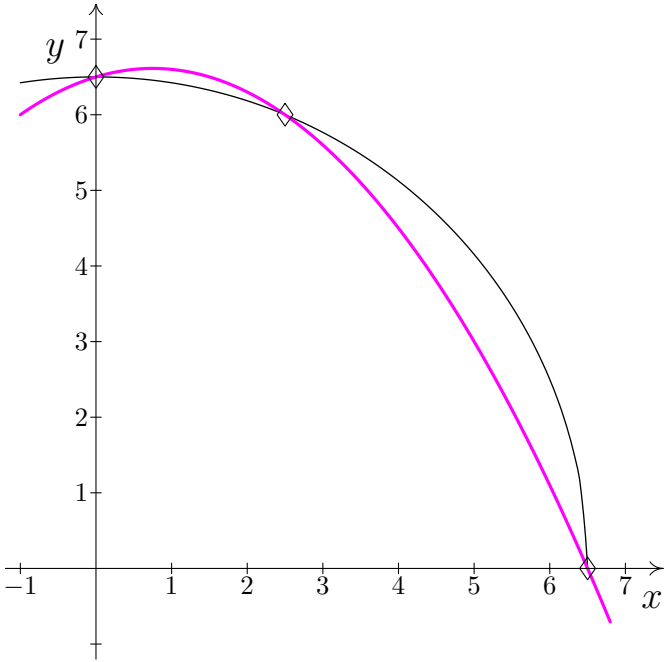
$$=\frac{x^2}{25}-\frac{18x}{5}+65-\frac{3}{50}x^2+\frac{39}{10}x+0=$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 1-3) $p_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{x^2}{25}-\frac{18x}{5}+65-\frac{3}{50}x^2+\frac{39}{10}x+0=-\frac{1}{50}x^2+\frac{3}{10}x+65.$$



$$f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}, \qquad p_2(x) = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{3}{10}x + 65.$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 2) $q_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\sqrt{65^2-0^2}\cdot\frac{(x-39)(x-65)}{(0-39)(0-65)}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$*; 2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$*; 3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$*; 4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$*; 5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 2) $q_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=65\cdot\frac{x^2-104x+39\cdot65}{39\cdot65}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1 = 0, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 65$; *2)* $x_1 = 0, \quad x_2 = 39, \quad x_3 = 65$; *3)* $x_1 = 25, \quad x_2 = 52, \quad x_3 = 65$; *4)* $x_1 = 0, \quad x_2 = 39, \quad x_3 = 52, \quad x_4 = 65$; *5)* $x_1 = 0, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 39, \quad x_4 = 52, \quad x_5 = 60, \quad x_6 = 65$.

Решение. Для 2) $q_2(x) = \sqrt{65^2 - x_1^2} \cdot \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$

$$+\sqrt{65^2 - x_2^2} \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \sqrt{65^2 - x_3^2} \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} =$$

$$= \frac{x^2}{39} - \frac{8}{3}x + 65 +$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 2) $q_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{x^2}{39}-\frac{8}{3}x+65+\sqrt{65^2-39^2}\cdot\frac{(x-0)(x-65)}{(39-0)(39-65)}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 2) $q_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{x^2}{39}-\frac{8}{3}x+65-\frac{2}{39}x^2+\frac{10}{3}x+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 2) $q_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

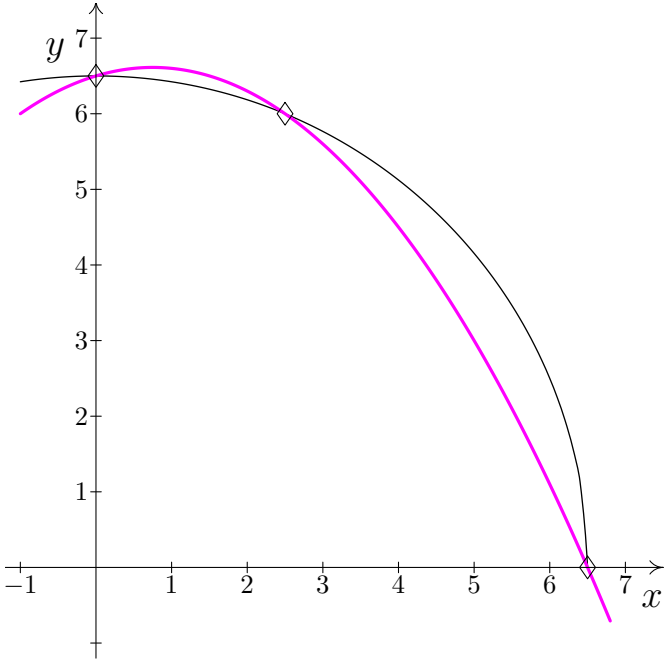
$$=\frac{x^2}{39}-\frac{8}{3}x+65-\frac{2}{39}x^2+\frac{10}{3}x+0=$$

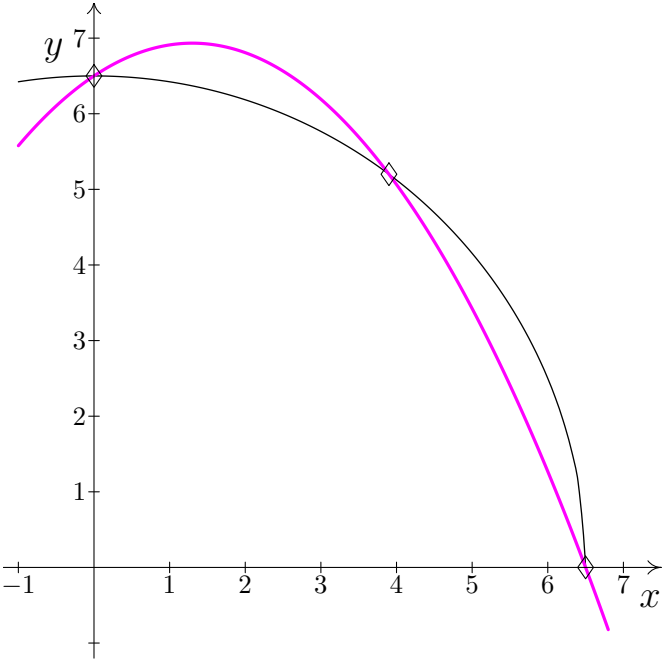
Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 2) $q_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=-\frac{1}{39}x^2+\frac{2}{3}x+65.$$





1) $p_2(x) = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{3}{10}x + 65,$

2) $q_2(x) = -\frac{1}{39}x^2 + \frac{2}{3}x + 65.$

$$f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}.$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 3) $r_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\sqrt{65^2-25^2}\cdot\frac{(x-52)(x-65)}{(25-52)(25-65)}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$*; 2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$*; 3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$*; 4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$*; 5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 3) $r_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=60\cdot\frac{x^2-13\cdot 9x+52\cdot 65}{27\cdot 40}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 3) $r_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{1}{18}x^2-\frac{13}{2}x+\frac{26\cdot 65}{9}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 3) $r_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{1}{18}x^2-\frac{13}{2}x+\frac{26\cdot 65}{9}+\sqrt{65^2-52^2}\cdot\frac{(x-25)(x-65)}{(52-25)(52-65)}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 3) $r_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{1}{18}x^2-\frac{13}{2}x+\frac{26\cdot65}{9}-\frac{x^2-90x+25\cdot65}{9}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 3) $r_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=-\frac{1}{18}x^2+\frac{7}{2}x-\frac{65}{9}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 3) $r_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

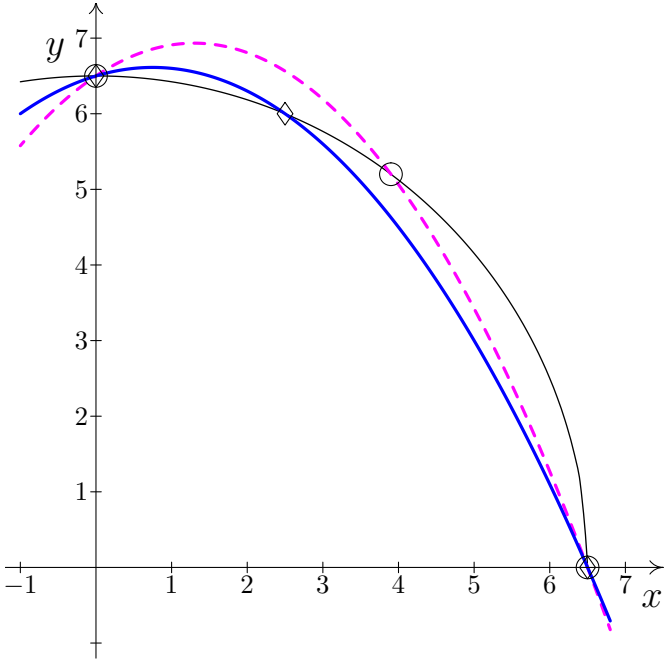
$$=-\frac{1}{18}x^2+\frac{7}{2}x-\frac{65}{9}+0$$

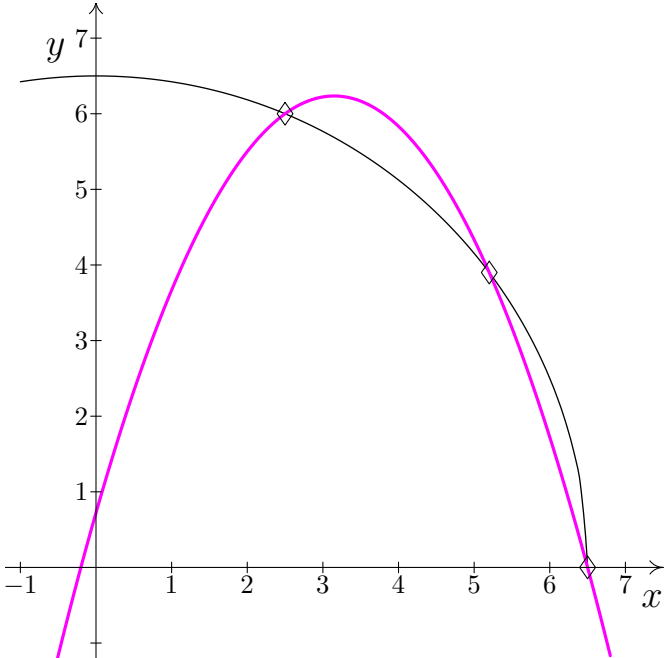
Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 3) $r_2(x)=\sqrt{65^2-x_1^2}\cdot\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$

$$+\sqrt{65^2-x_2^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\sqrt{65^2-x_3^2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=-\frac{1}{18}x^2+\frac{7}{2}x-\frac{65}{9}.$$





1) $p_2(x) = -\dfrac{1}{50}x^2 + \dfrac{3}{10}x + 65,$

2) $q_2(x) = -\dfrac{1}{39}x^2 + \dfrac{2}{3}x + 65,$

3) $r_2(x) = -\dfrac{1}{18}x^2 + \dfrac{7}{2}x - \dfrac{65}{9},$

$f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}.$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1 = 0,\ x_2 = 25,\ x_3 = 65$*; 2)* $x_1 = 0,\ x_2 = 39,\ x_3 = 65$*; 3)* $x_1 = 25,\ x_2 = 52,\ x_3 = 65$*; 4)* $x_1 = 0,\ x_2 = 39,\ x_3 = 52,\ x_4 = 65$*; 5)* $x_1 = 0,\ x_2 = 25,\ x_3 = 39,\ x_4 = 52,\ x_5 = 60,\ x_6 = 65$.

Решение. Для 4) $p_3(x) = \sqrt{65^2 - x_1} \cdot \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} +$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1 = 0,\ x_2 = 25,\ x_3 = 65$*; 2)* $x_1 = 0,\ x_2 = 39,\ x_3 = 65$*; 3)* $x_1 = 25,\ x_2 = 52,\ x_3 = 65$*; 4)* $x_1 = 0,\ x_2 = 39,\ x_3 = 52,\ x_4 = 65$*; 5)* $x_1 = 0,\ x_2 = 25,\ x_3 = 39,\ x_4 = 52,\ x_5 = 60,\ x_6 = 65$.

Решение. Для 4) $p_3(x) = \sqrt{65^2 - x_1} \cdot \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} +$

$$+\sqrt{65^2 - x_2} \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} +$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$; *2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$; *3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$; *4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$; *5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 4)
$$p_3(x)=\sqrt{65^2-x_1}\cdot\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}+$$
$$+\sqrt{65^2-x_2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+$$
$$+\sqrt{65^2-x_3}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}+$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$*; 2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$*; 3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$*; 4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$*; 5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

Решение. Для 4)

$$p_3(x)=\sqrt{65^2-x_1}\cdot\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}+$$

$$+\sqrt{65^2-x_2}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+$$

$$+\sqrt{65^2-x_3}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}+$$

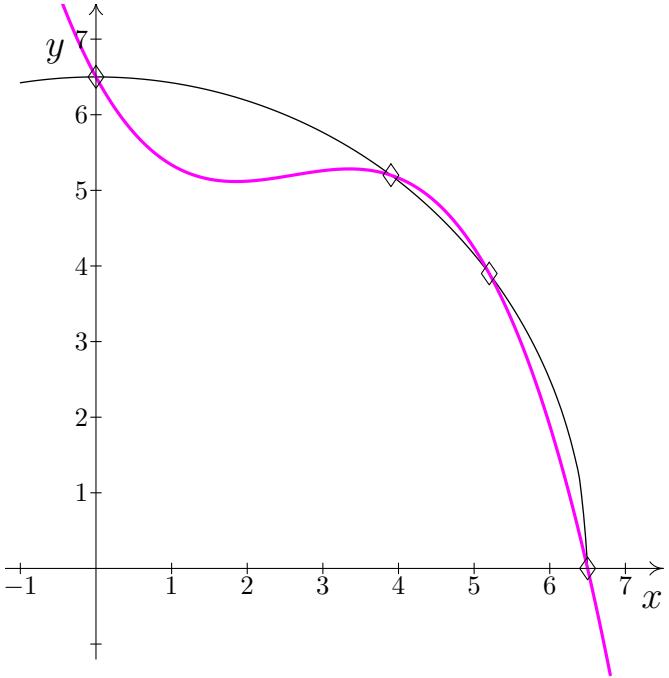
$$+\sqrt{65^2-x_4}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}=$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x)=\sqrt{65^2-x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=65$*; 2)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=65$*; 3)* $x_1=25,\ x_2=52,\ x_3=65$*; 4)* $x_1=0,\ x_2=39,\ x_3=52,\ x_4=65$*; 5)* $x_1=0,\ x_2=25,\ x_3=39,\ x_4=52,\ x_5=60,\ x_6=65$.

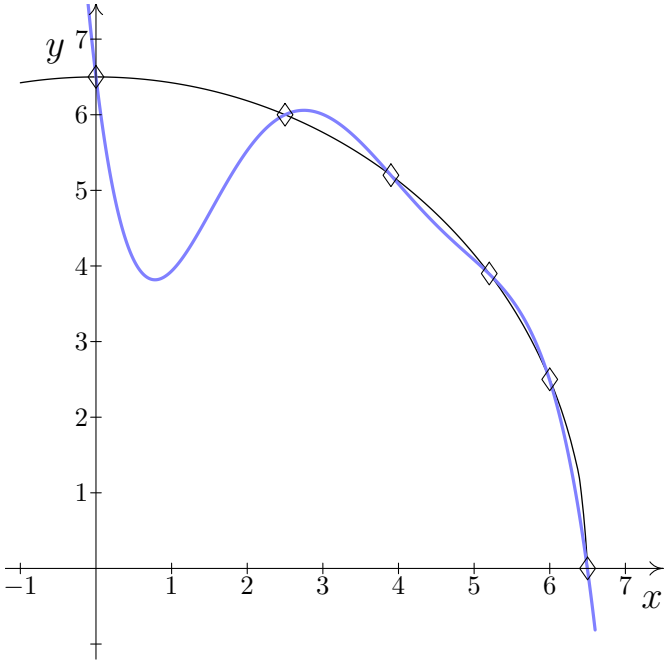
Решение. Для 4)
$$p_3(x)=\sqrt{65^2-0}\cdot\frac{(x-39)(x-52)(x-65)}{(0-39)(0-52)(0-65)}+$$
$$+\sqrt{65^2-39}\cdot\frac{(x-0)(x-52)(x-65)}{(39-0)(39-52)(39-65)}+$$
$$+\sqrt{65^2-52}\cdot\frac{(x-0)(x-39)(x-65)}{(52-0)(52-39)(52-65)}+$$
$$+\sqrt{65^2-65}\cdot\frac{(x-0)(x-39)(x-52)}{(65-0)(65-39)(65-52)}=$$

Пример 9. *Постройте* ***интерполяционный многочлен Лагранжа****, график которого проходит через точки графика функции* $f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}$ *с абсциссами: 1)* $x_1 = 0,\ x_2 = 25,\ x_3 = 65$*; 2)* $x_1 = 0,\ x_2 = 39,\ x_3 = 65$*; 3)* $x_1 = 25,\ x_2 = 52,\ x_3 = 65$*; 4)* $x_1 = 0,\ x_2 = 39,\ x_3 = 52,\ x_4 = 65$*; 5)* $x_1 = 0,\ x_2 = 25,\ x_3 = 39,\ x_4 = 52,\ x_5 = 60,\ x_6 = 65.$

Решение. Для 4) $p_3(x) = -\dfrac{1}{1014}x^3 + \dfrac{1}{13}x^2 - \dfrac{11}{6}x + 65.$

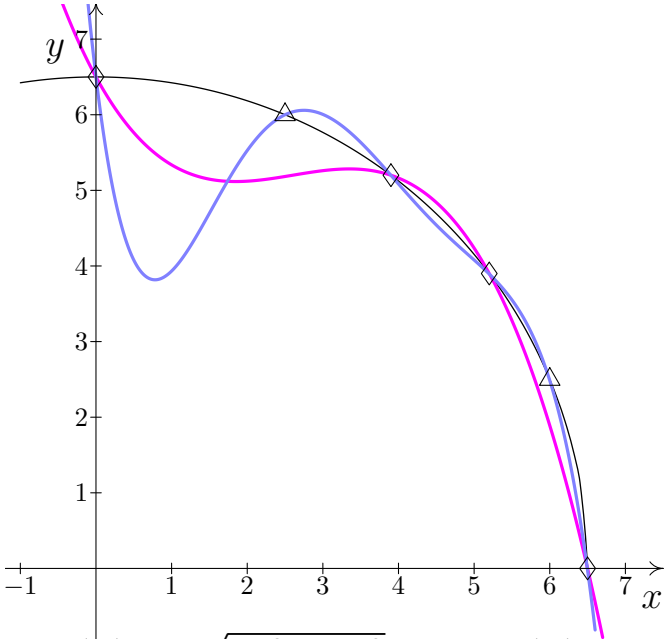


Для 4) $f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}$, $\qquad p_3(x) = -\frac{1}{1014}x^3 + \frac{1}{13}x^2 - \frac{11}{6}x + 65.$



Для 5) $p_5(x) =$

$$= -\frac{47}{16562000}x^5 + \frac{73343}{149058000}x^4 + \frac{517141}{16562000}x^3 + \frac{77321}{91728}x^2 - \frac{8171}{980}x + 65.$$



Вернёмся к лекции или **рассмотрим другой пример?**

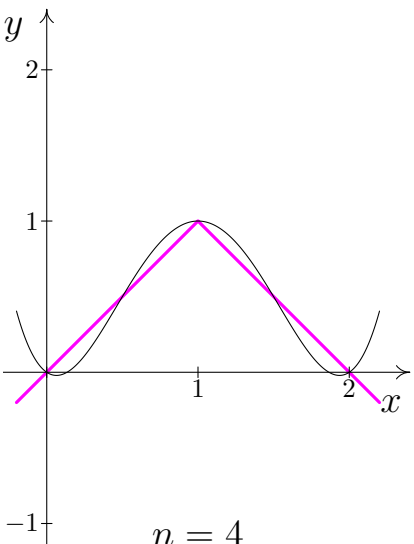
$$f(x) = \sqrt{65^2 - x^2}, \qquad p_3(x) = -\frac{1}{1014}x^3 + \frac{1}{13}x^2 - \frac{11}{6}x + 65,$$

$$p_5(x) = $$

$$= -\frac{47}{16562000}x^5 + \frac{73343}{149058000}x^4 + \frac{517141}{16562000}x^3 + \frac{77321}{91728}x^2 - \frac{8171}{980}x + 65.$$

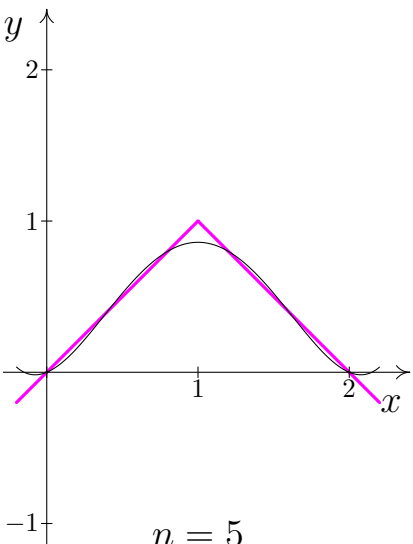
Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$

Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$

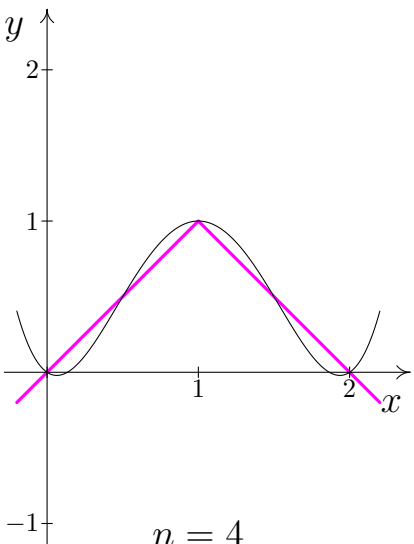


$n = 4$

Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$

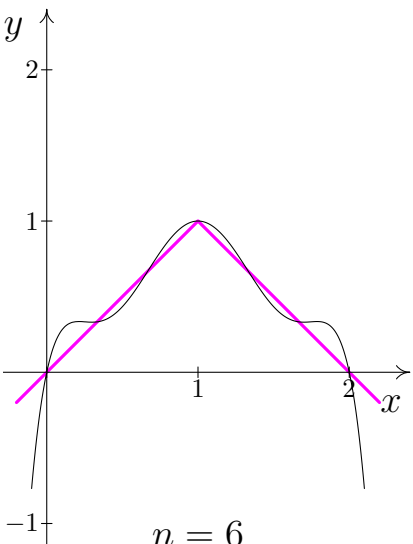


$n = 5$

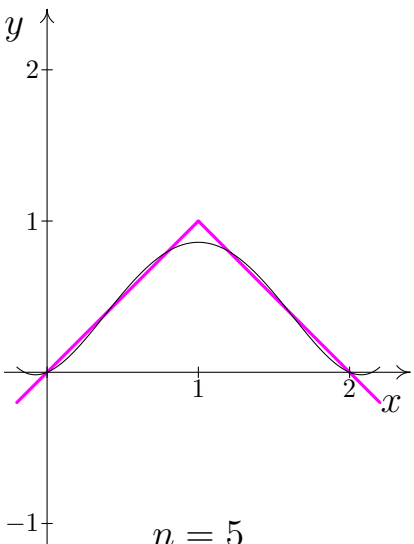


$n = 4$

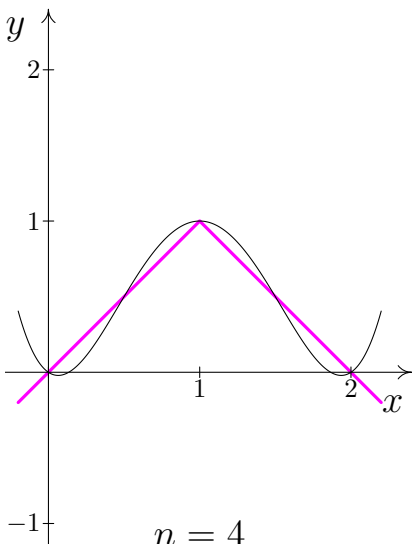
Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$



$n = 6$

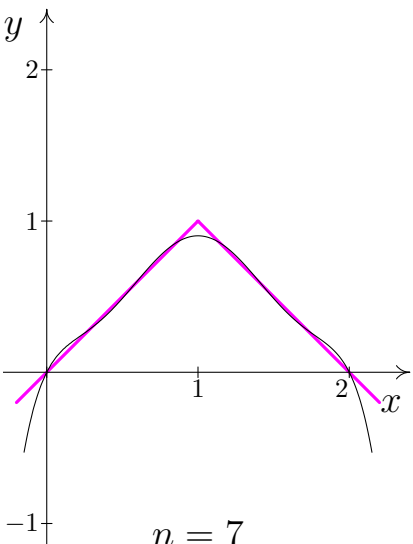


$n = 5$

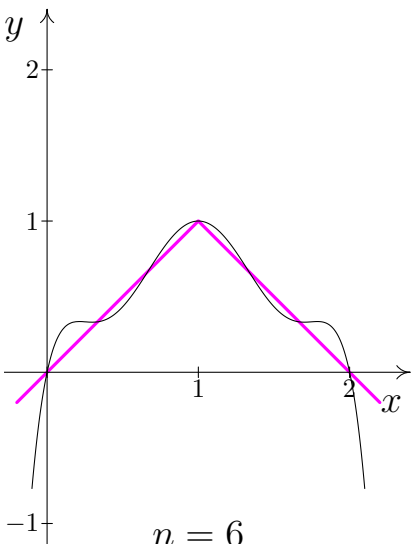


$n = 4$

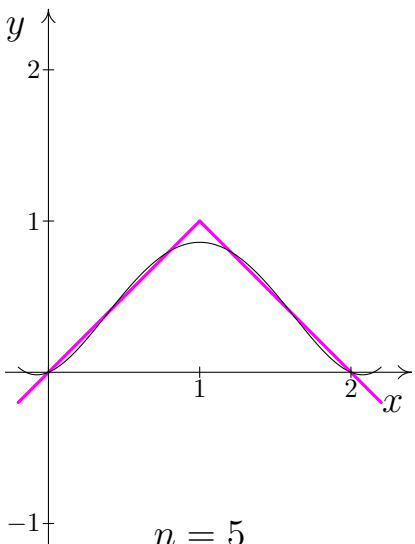
Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$



$n = 7$

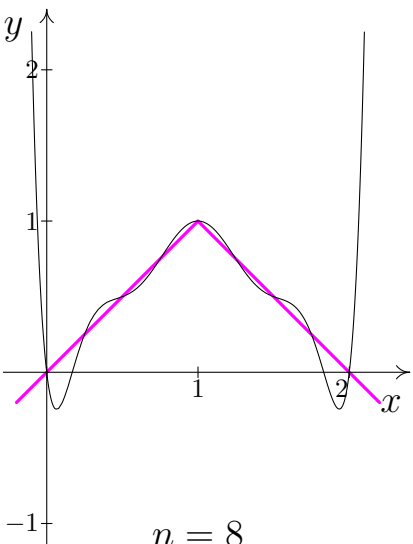


$n = 6$

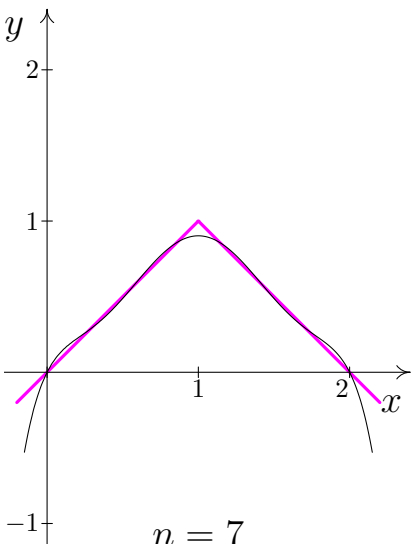


$n = 5$

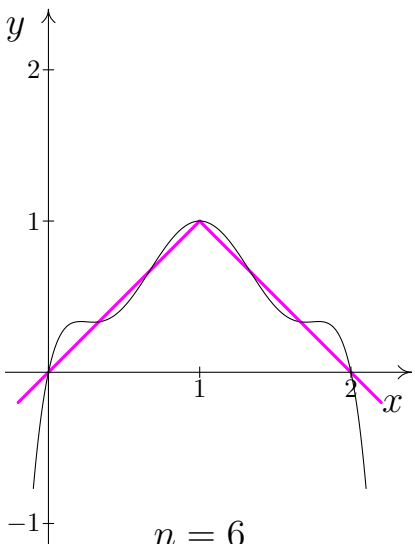
Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$



$n = 8$

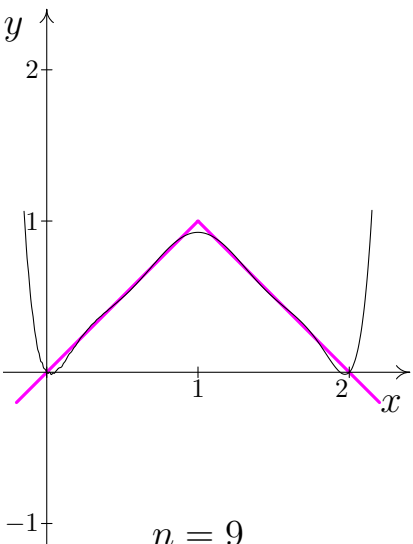


$n = 7$

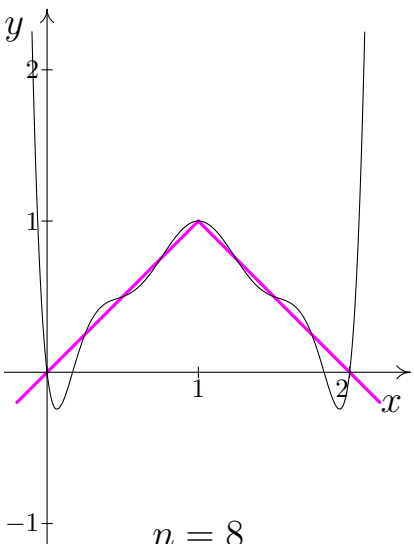


$n = 6$

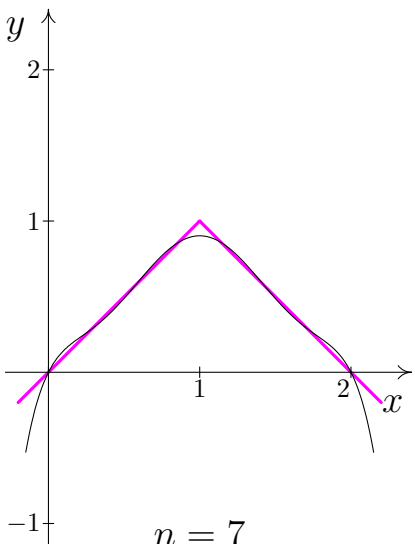
Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$



$n = 9$

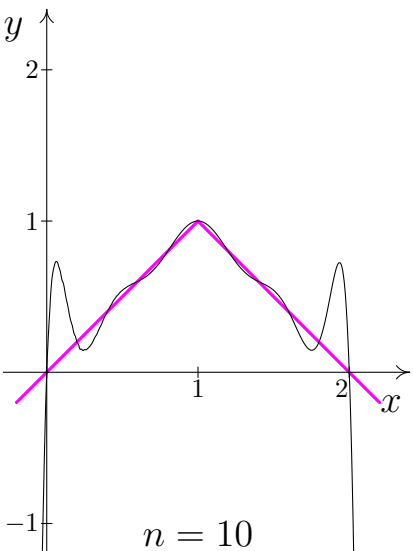


$n = 8$

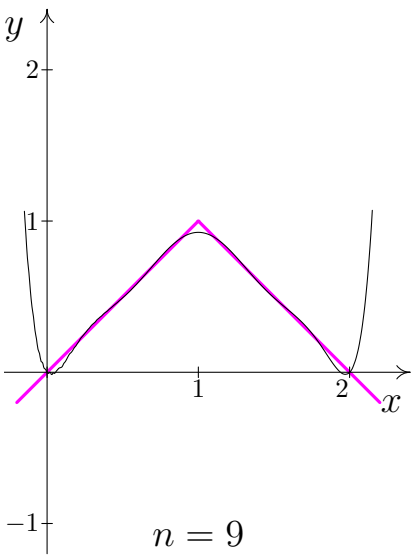


$n = 7$

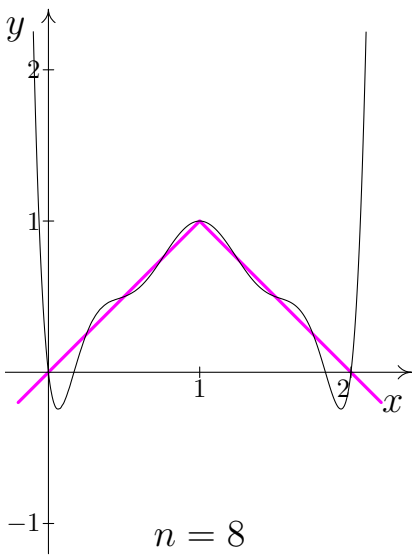
Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$



$n = 10$

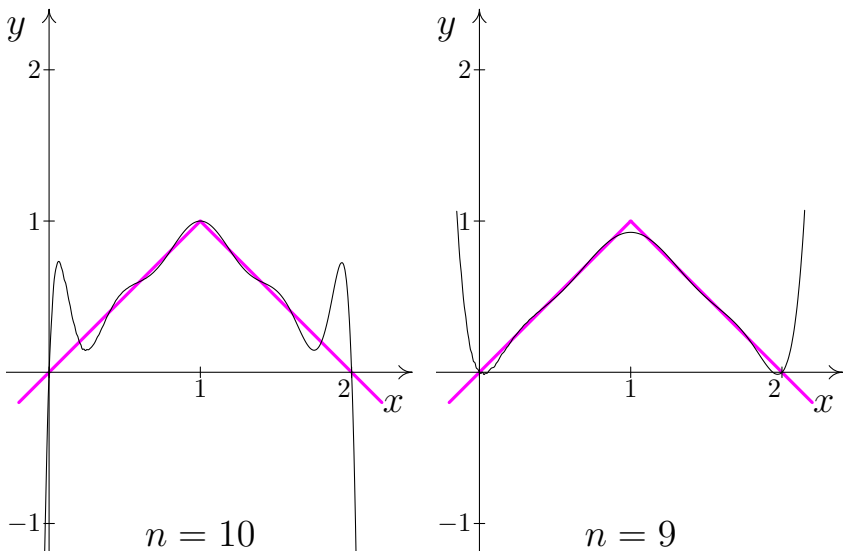


$n = 9$

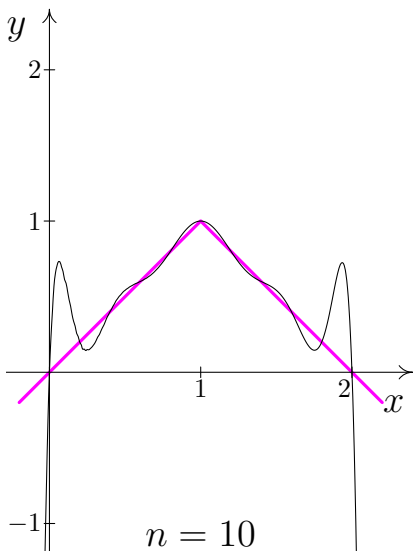


$n = 8$

Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$



Пример 10. *Построить графики интепроляционных многочленов для функции* $f(x) = 1 - |x - 1|$ *для точек* $x_p = \dfrac{2p}{N}$, *где* $0 \le p \le N$, *при* $N = 4, \quad N = 5, \quad \ldots, \quad N = 10.$



Вернемся к лекции?

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Решение.

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Все слагаемые исходного многочлена упорядочим лексикографически, с учетом степени переменной.

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Все слагаемые исходного многочлена упорядочим лексикографически, с учетом степени переменной.

Например, x^3y предшествует x^3z, т.к. первые буквы этих выражений (это x) совпадают, а вторая буква выражения x^3y (т.е. буква y) в алфавите предшествует второй букве выражения x^3z (т.е. букве z).

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Все слагаемые исходного многочлена упорядочим лексикографически, с учетом степени переменной.

Кроме того, слагаемое x^3y предшествует слагаемому xy^3, поскольку, хотя как первые, так и вторые буквы в этих выражениях одинаковы, но первая буква в выражении x^3y (т.е. буква x) имеет большую степень, чем в слагаемом xy^3.

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Высший член исходного полинома равен $x^3y =$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Высший член исходного полинома равен $x^3y = x^2 \cdot xy$.

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p\,(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Высший член исходного полинома равен $x^3y = x^2 \cdot xy$.

Выражение x^2 является слагаемым выражения $(x + y + z)^2$, причем

$$\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)^2 \Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big) = s_1^2 s_2 =$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p\,(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Высший член исходного полинома равен $x^3y = x^2 \cdot xy$.

Выражение x^2 является слагаемым выражения $(x + y + z)^2$, причем

$$\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)^2 \Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big) = s_1^2 s_2 =$$

$$= \big(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz\big)\,(xy + xz + yz) =$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p\,(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Высший член исходного полинома равен $x^3y = x^2 \cdot xy$.

Выражение x^2 является слагаемым выражения $(x + y + z)^2$, причем

$$\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)^2 \Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big) = s_1^2 s_2 =$$

$$= \big(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz\big)\,(xy + xz + yz) =$$

$$= x^3y + x^3z + 2x^2y^2 + 5x^2yz + 2x^2z^2 + 5xy^2z + 5xyz^2 + 2x^2z^2 +$$

$$+ y^3z + 2y^2z^2 + yz^3.$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Высший член исходного полинома равен $x^3y = x^2 \cdot xy$.

Выражение x^2 является слагаемым выражения $(x + y + z)^2$, причем

$$\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)^2 \Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big) = s_1^2 s_2 =$$

$$= x^3y + x^3z + 2x^2y^2 + 5x^2yz + 2x^2z^2 + 5xy^2z + 5xyz^2 + 2x^2z^2 +$$
$$+ y^3z + 2y^2z^2 + yz^3.$$

Поэтому $x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 =$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p\,(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Высший член исходного полинома равен $x^3y = x^2 \cdot xy$.

Выражение x^2 является слагаемым выражения $(x + y + z)^2$, причем

$$\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)^2 \Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big) = s_1^2 s_2 =$$

$$= x^3y + x^3z + 2x^2y^2 + 5x^2yz + 2x^2z^2 + 5xy^2z + 5xyz^2 + 2x^2z^2 + \\ + y^3z + 2y^2z^2 + yz^3.$$

Поэтому $x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 =$

$$= -2x^2y^2 - 5x^2yz - 2x^2z^2 - 5xy^2z - 5xyz^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2.$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. У полинома $x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 =$
$= -2x^2y^2 - 5x^2yz - 2x^2z^2 - 5xy^2z - 5xyz^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$
высший член равен $-2x^2y^2 =$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p\,(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. У полинома $x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 =$
$= -2x^2y^2 - 5x^2yz - 2x^2z^2 - 5xy^2z - 5xyz^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$
высший член равен $-2x^2y^2 = -2(xy)^2$.

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p\,(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. У полинома $x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 =$
$= -2x^2y^2 - 5x^2yz - 2x^2z^2 - 5xy^2z - 5xyz^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$
высший член равен $-2x^2y^2 = -2(xy)^2$.

Он является слагаемым выражения

$$-2\Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big)^2 = -2s_2^2 =$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p\,(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. У полинома $x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 =$
$= -2x^2y^2 - 5x^2yz - 2x^2z^2 - 5xy^2z - 5xyz^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$
высший член равен $-2x^2y^2 = -2(xy)^2$.

Он является слагаемым выражения

$$-2\Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big)^2 = -2s_2^2 =$$

$$= -2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 - 4x^2yz - 4xy^2z - 4xyz^2.$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Имеем

$x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 - (-2)s_2^2 =$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Имеем

$$x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 - (-2)s_2^2 =$$
$$= -x^2yz - xy^2z - xyz^2 =$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Имеем

$$x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 - (-2)s_2^2 =$$
$$= -x^2yz - xy^2z - xyz^2 = -\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)\underbrace{xyz}_{s_3}.$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Имеем

$$x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 - (-2)s_2^2 =$$
$$= -x^2yz - xy^2z - xyz^2 = -\Big(\underbrace{x+y+z}_{s_1}\Big)\underbrace{xyz}_{s_3}.$$

Следовательно,

$$x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 =$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Имеем

$$x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 - (-2)s_2^2 =$$
$$= -x^2yz - xy^2z - xyz^2 = -\Big(\underbrace{x+y+z}_{s_1}\Big)\underbrace{xyz}_{s_3}.$$

Следовательно,

$$x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 = s_1^2 s_2 - 2s_2^2 - s_1 s_3.$$

Пример 11. *Представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов многочлен*

$$p(x;y;z) = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Решение. Имеем

$$x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 - s_1^2 s_2 - (-2)s_2^2 =$$
$$= -x^2yz - xy^2z - xyz^2 = -\Big(\underbrace{x+y+z}_{s_1}\Big)\underbrace{xyz}_{s_3}.$$

Следовательно,

$$x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3 = s_1^2 s_2 - 2s_2^2 - s_1 s_3.$$

Задача решена.

Вернемся к лекции?

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 10x^2 + 17x - 15}{(x^2 - 1)(x - 1)(x^2 + 2)}$.

Решение.

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 10x^2 + 17x - 15}{(x^2 - 1)(x - 1)(x^2 + 2)}$.

Решение. Во-первых, разложим эту функцию в сумму многочлена и правильной дробно-рациональной функции. Для этого сначала раскроем скобки в знаменателе, то есть представим знаменатель в виде $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2$.

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. $(x^2-1)(x-1)(x^2+2)=x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2$.

Потом выделим целую часть и правильную дробь:

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. $(x^2-1)(x-1)(x^2+2)=x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2$.

Потом выделим целую часть и правильную дробь:

$$\begin{array}{l|l} x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15 & x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 \\ \hline & \end{array}$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. $(x^2-1)(x-1)(x^2+2)=x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2$.

Потом выделим целую часть и правильную дробь:

$$\begin{array}{l|l} x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15 & x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 \\ \hline & \\ \hline & \end{array}$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. $(x^2-1)(x-1)(x^2+2)=x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2$.

Потом выделим целую часть и правильную дробь:

$$\begin{array}{l|l} x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15 & x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 \\ \hline & x \end{array}$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. $(x^2-1)(x-1)(x^2+2)=x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2$.

Потом выделим целую часть и правильную дробь:

$$\begin{array}{l|l} x^6-2x^5+3x^4\quad -10x^2+17x-15 & x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 \\ \underline{x^6\ -x^5\ +x^4-x^3\ -2x^2\ +2x\quad\quad} & \hline x \end{array}$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. $(x^2-1)(x-1)(x^2+2)=x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2$.

Потом выделим целую часть и правильную дробь:

$$\begin{array}{l|l} x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15 & x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 \\ \hline x^6-x^5+x^4-x^3-2x^2+2x & x \\ \hline -x^5+2x^4+x^3-8x^2+15x-15 & \end{array}$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. $(x^2-1)(x-1)(x^2+2)=x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2$.

Потом выделим целую часть и правильную дробь:

$$\begin{array}{l|l} x^6-2x^5+3x^4 \quad -10x^2+17x-15 & x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} x^6-x^5+x^4-x^3-2x^2+2x & x-1 \\ \cline{1-1} \quad -x^5+2x^4+x^3-8x^2+15x-15 & \end{array}$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. $(x^2-1)(x-1)(x^2+2)=x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2$.

Потом выделим целую часть и правильную дробь:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & -2x^5 & +3x^4 & & -10x^2 & +17x & -15 & x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 \\
\cline{8-8}
x^6 & -x^5 & +x^4 & -x^3 & -2x^2 & +2x & & x-1 \\
\cline{1-6}
 & -x^5 & +2x^4 & +x^3 & -8x^2 & +15x & -15 & \\
 & -x^5 & +x^4 & -x^3 & +x^2 & +2x & -2 & \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. $(x^2-1)(x-1)(x^2+2)=x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2$.

Потом выделим целую часть и правильную дробь:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & -2x^5 & +3x^4 & & -10x^2 & +17x & -15 & x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 \\
\cline{8-8}
x^6 & -x^5 & +x^4 & -x^3 & -2x^2 & +2x & & x-1 \\
\cline{1-6}
 & -x^5 & +2x^4 & +x^3 & -8x^2 & +15x & -15 & \\
 & -x^5 & +x^4 & -x^3 & +x^2 & +2x & -2 & \\
\cline{2-7}
 & & & & x^4 & +2x^3 & -9x^2+13x-13 &
\end{array}
$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l}
x^6-2x^5+3x^4 \qquad -10x^2+17x-15 & x^5-x^4+x^3-x^2-2x+2 \\
\underline{x^6\ -x^5\ +x^4\ -x^3\ -2x^2\ +2x} & \overline{x-1} \\
\quad -x^5+2x^4\ +x^3\ -8x^2+15x-15 & \\
\quad \underline{-x^5\ +x^4\ -x^3\ +x^2\ +2x\ -2} & \\
\qquad\qquad x^4+2x^3\ -9x^2+13x-13 &
\end{array}$$

таким образом $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)} =$

$= x-1+\dfrac{x^4+2x^3-9x^2+13x-13}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}$.

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. Осталось разложить в сумму простейших правильную дробно-рациональную функцию

$$\frac{x^4+2x^3-9x^2+13x-13}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. Осталось разложить в сумму простейших правильную дробно-рациональную функцию

$$\frac{x^4+2x^3-9x^2+13x-13}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=\frac{?}{x-1}+\frac{?}{(x-1)^2}+\frac{?}{x+1}+\frac{?}{x^2+2}.$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. Осталось разложить в сумму простейших правильную дробно-рациональную функцию

$$\frac{x^4+2x^3-9x^2+13x-13}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2}.$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. Осталось разложить в сумму простейших правильную дробно-рациональную функцию

$$\frac{x^4+2x^3-9x^2+13x-13}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2}.$$

Сравнивая числители левой и правой части, получим

$$x^4+2x^3-9x^2+13x-13=A\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)+B(x+1)\left(x^2+2\right)+$$
$$+C\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+2\right)+(Mx+N)\left(x^3-x^2-x+1\right).$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение.

$$x^4+2x^3-9x^2+13x-13=A\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)+B(x+1)\left(x^2+2\right)+$$
$$+C\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+2\right)+(Mx+N)\left(x^3-x^2-x+1\right).$$

Многочлены равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях. Сравним эти коэффициенты.

$$\begin{array}{r|l} x^0 & -2A+2B+2C+N=-13 \\ x & 2B-4C+M-N=13 \\ x^2 & A+B+3C-M-N=-9 \\ x^3 & B-2C-M+N=2 \\ x^4 & A+C+M=1. \end{array}$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение.

Решим полученную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 13 \\ -9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса:

Как обычно, сначала применим прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Как обычно, сначала применим прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Как обычно, сначала применим прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Как обычно, сначала применим прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -1 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -1 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -1 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. Следовательно, $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Пример 12. *Представить в виде суммы простейших дробно-рациональных функций функцию* $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)}$.

Решение. Следовательно, $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Теперь мы можем записать ответ:

$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x^2-1)(x-1)(x^2+2)} =$$

$$= x-1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2+2}.$$

Вернемся к лекции или **рассмотрим метод сокращения?**

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

Решение. Существует способ сократить, иногда весьма значительно, выкладки при разложении дробно рациональной функции в сумму простейших. Продемонстрируем этот способ на примере, рассмотренном в конце предыдущего раздела.

Описываемый ниже способ позволяет быстро вычислить коэффициент K перед слагаемым вида $\dfrac{K}{(x-a)^n}$, где n — кратность корня a для многочлена, стоящего в знаменателе исходной дробно-рациональной функции.

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

Решение.

$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=$$

$$=x-1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2}$$ мы быстро вычислим коэффициенты B и C.

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

Решение.

$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=$$

$$=x-1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2}$$ мы быстро вычислим коэффициенты B и C.

Для вычисления коэффициента B умножим левую и правую часть этого равенства на выражение $(x-1)^2$.

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

В частности, в примере
$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=$$
$$=x-1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2}$$ мы быстро вычислим коэффициенты B и C.

Для вычисления коэффициента B умножим левую и правую часть этого равенства на выражение $(x-1)^2$.

После того, как мы проведем все сокращения, получим равенство
$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x+1)(x^2+2)}=$$
$$=(x-1)^3+A\cdot(x-1)+B+\frac{C}{x+1}(x-1)^2+\frac{Mx+N}{x^2+2}\cdot(x-1)^2.$$

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x+1)(x^2+2)}=$$

$$=(x-1)^3+A\cdot(x-1)+B+\frac{C}{x+1}(x-1)^2+\frac{Mx+N}{x^2+2}\cdot(x-1)^2.$$

Теперь положим в этом равенстве $x=1$, то есть придадим переменной x то значение, при котором выражение в знаменателе слагаемого $\dfrac{B}{(x-1)^2}$ обращалось бы в 0 (после умножения обеих частей равенства на $(x-1)^2$ ни один из знаменателей при $x=1$ в ноль уже не обращается).

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x+1)(x^2+2)}=$$

$$=(x-1)^3+A\cdot(x-1)+B+\frac{C}{x+1}(x-1)^2+\frac{Mx+N}{x^2+2}\cdot(x-1)^2.$$

Теперь положим в этом равенстве $x=1$, то есть придадим переменной x то значение, при котором выражение в знаменателе слагаемого $\dfrac{B}{(x-1)^2}$ обращалось бы в 0 (после умножения обеих частей равенства на $(x-1)^2$ ни один из знаменателей при $x=1$ в ноль уже не обращается). Получим

$$B=\frac{1-2+3-10+17-15}{2\cdot 3}=-\frac{6}{6}=-1,$$

что совпадает с результатом проделанных ранее вычислений «по-честному».

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=$$

$$=x-1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2}.$$

Для вычисления C надо, разумеется, умножить исходное равенство на $x+1$ и положить $x=-1$ (теперь «неприятностей» в знаменателе не происходит!).

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=$$

$$=x-1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2}.$$

Для вычисления C надо, разумеется, умножить исходное равенство на $x+1$ и положить $x=-1$ (теперь «неприятностей» в знаменателе не происходит!). Получаем

$$C=\frac{1+2+3-10-17-15}{4\cdot 3}=-\frac{36}{12}=-3.$$

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=$$

$$=x-1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2}.$$

Для вычисления C надо, разумеется, умножить исходное равенство на $x+1$ и положить $x=-1$ (теперь «неприятностей» в знаменателе не происходит!). Получаем

$$C=\frac{1+2+3-10-17-15}{4\cdot 3}=-\frac{36}{12}=-3.$$

Вновь полученное значение C совпало с найденным ранее по другому способу.

Пример 13. *Решение* ***примера 12*** *методом сокращения.*

$$\frac{x^6-2x^5+3x^4-10x^2+17x-15}{(x-1)^2\cdot(x+1)(x^2+2)}=$$

$$=x-1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2}.$$

Разумеется, «метод сокращения» не решает всех наших проблем, и коэффициенты A, M, N придется искать «по-честному», с помощью СЛУ. Но все-таки задача значительно облегчается, так как в полученной СЛУ надо найти только 3 коэффициента, а не 5, как в первоначальном варианте.

Вернемся к лекции?

Задача XVII.1. (Ответ приведен на стр.855.) Разделить многочлен $6x^5 + 2x^4 - 5x^3 - x - 3$ на многочлен $2x^3 - 3x + 1$.

Задача XVIII.2. (Ответ приведен на стр.859.) Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Задача XVIII.3. (Ответ приведен на стр.885.) Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** многочленов $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$ и $x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54$.

Задача XVIII.4. (Ответ приведен на стр.888.) Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** многочленов $x^5 - x^4 - 4x^3 + 16$ и $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 4$.

Задача XIX.5. (Ответ приведен на стр.891.) Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Задача XX.6. (Ответ приведен на стр.927.) Найдите разложение многочлена $x^2 + x + 1$ в произведение многочленов, неразложимых над полем комплексных чисел.

Задача XX.7. (Ответ приведен на стр.931.) Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Задача XX.8. (Ответ приведен на стр.942.) Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Задача XXI.9. (Ответ приведен на стр.959.) Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Задача XXII.10. (Ответ приведен на стр.970.) Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Задача XXIII.11. (Ответ приведен на стр.983.) Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Задача XXIII.12. (Ответ приведен на стр.1005.) Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2.$$

Задача XXIII.13. (Ответ приведен на стр.1010.) Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3.$$

Задача XXIV.14. (Ответ приведен на стр.1016.) Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением $\dfrac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\,(x^2+x+1)^2}$.

Задача XXIV.15. (Ответ приведен на стр.1022.) Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением $\dfrac{3x^6-19x^5+48x^4-49x^3-2x^2+16x+7}{(x-2)^3\,(x^2-1)^2}$.

Задача XXIV.16. (Ответ приведен на стр.1026.) Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением $\dfrac{-2x^7+4x^6-2x^5+5x^4+2x^3+5x^2}{(x+1)^2\,(x^2+1)^3}$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Разделить многочлен $6x^5 + 2x^4 - 5x^3 - x - 3$ на многочлен $2x^3 - 3x + 1$.

Задача 1. Разделить многочлен $6x^5 + 2x^4 - 5x^3 - x - 3$ на многочлен $2x^3 - 3x + 1$.

Ответ.

$$
\begin{array}{rl|l}
6x^5 + 2x^4 - 5x^3 - x - 3 & & 2x^3 - 3x + 1 \\
\cline{3-3}
-6x^5 - 9x^3 + 3x^2 & & 3x^2 + x + 2 \\
\cline{1-1}
2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x - 3 & & \\
-2x^4 - 3x^2 + x & & \\
\cline{1-1}
4x^3 - 2x - 3 & & \\
-4x^3 - 6x + 2 & & \\
\cline{1-1}
4x - 5 & &
\end{array}
$$

Задача 1. Разделить многочлен $6x^5+2x^4-5x^3-x-3$ на многочлен $2x^3-3x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^5+2x^4-5x^3-x-3 & 2x^3-3x+1 \\
\cline{2-2}
{}^{-}6x^5-9x^3+3x^2 & 3x^2+x+2 \\
\cline{1-1}
2x^4+4x^3-3x^2-x-3 & \\
{}^{-}2x^4-3x^2+x & \\
\cline{1-1}
4x^3-2x-3 & \\
{}^{-}4x^3-6x+2 & \\
\cline{1-1}
4x-5 &
\end{array}
$$

Ответ.

$$6x^5+2x^4-5x^3-x-3=(3x^2+x+2)(2x^3-3x+1)+(4x-5).$$

Задача 1. Разделить многочлен $6x^5+2x^4-5x^3-x-3$ на многочлен $2x^3-3x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^5+2x^4-5x^3-x-3 & 2x^3-3x+1 \\
\cline{2-2}
{}^{-}6x^5-9x^3+3x^2 & 3x^2+x+2 \\
\cline{1-1}
2x^4+4x^3-3x^2-x-3 & \\
{}^{-}2x^4-3x^2+x & \\
\cline{1-1}
4x^3-2x-3 & \\
{}^{-}4x^3-6x+2 & \\
\cline{1-1}
4x-5 &
\end{array}
$$

Ответ.

$$6x^5+2x^4-5x^3-x-3=(3x^2+x+2)(2x^3-3x+1)+(4x-5).$$

Решение задачи 2.

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Воспользуемся теоремой об Н.О.Д. делителя и остатка от деления.

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. теоремой об Н.О.Д. делителя и остатка от деления. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 \;\big|\; 4x^3 - 12x^2 - x + 3$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\ \hline & \frac{3}{2}x^2 \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\ \hline -\,6x^5 - 18x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2 \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\ \hline -\,6x^5 - 18x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2 - \frac{35}{4}x \\ \hline -\,35x^4 + \frac{305}{2}x^3 - \frac{243}{2}x^2 - 81x + 54 & \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\ \hline -\,6x^5 - 18x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2 - \frac{35}{4}x \\ \hline -35x^4 + \frac{305}{2}x^3 - \frac{243}{2}x^2 - 81x + 54 & \\ -\,-35x^4 + 105x^3 + \frac{35}{4}x^2 - \frac{105}{4}x & \\ \hline \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\ \hline -\,6x^5 - 18x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2 - \frac{35}{4}x \\ \hline -35x^4 + \frac{305}{2}x^3 - \frac{243}{2}x^2 - 81x + 54 & \\ -\,-35x^4 + 105x^3 + \frac{35}{4}x^2 - \frac{105}{4}x & \\ \hline \frac{95}{2}x^3 - \frac{521}{4}x^2 - \frac{219}{4}x + 54 & \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\ \hline -\,6x^5 - 18x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{95}{8} \\ \hline -35x^4 + \frac{305}{2}x^3 - \frac{243}{2}x^2 - 81x + 54 & \\ -\,-35x^4 + 105x^3 + \frac{35}{4}x^2 - \frac{105}{4}x & \\ \hline \frac{95}{2}x^3 - \frac{521}{4}x^2 - \frac{219}{4}x + 54 & \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$
\begin{array}{l|l}
6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\
\hline
-\,6x^5 - 18x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{95}{8} \\
\hline
-\,35x^4 + \frac{305}{2}x^3 - \frac{243}{2}x^2 - 81x + 54 & \\
-\,-35x^4 + 105x^3 + \frac{35}{4}x^2 - \frac{105}{4}x & \\
\hline
\frac{95}{2}x^3 - \frac{521}{4}x^2 - \frac{219}{4}x + 54 & \\
-\,\frac{95}{2}x^3 - \frac{285}{2}x^2 - \frac{95}{8}x + \frac{285}{8} & \\
\hline
\end{array}
$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$
\begin{array}{l|l}
6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\
\hline
-\,6x^5 - 18x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{95}{8} \\
\hline
-35x^4 + \frac{305}{2}x^3 - \frac{243}{2}x^2 - 81x + 54 & \\
-\,-35x^4 + 105x^3 + \frac{35}{4}x^2 - \frac{105}{4}x & \\
\hline
\frac{95}{2}x^3 - \frac{521}{4}x^2 - \frac{219}{4}x + 54 & \\
-\,\frac{95}{2}x^3 - \frac{285}{2}x^2 - \frac{95}{8}x + \frac{285}{8} & \\
\hline
\frac{49}{4}x^2 - \frac{343}{8}x + \frac{147}{8} &
\end{array}
$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\ \hline -6x^5 - 18x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{95}{8} \\ \hline -35x^4 + \frac{305}{2}x^3 - \frac{243}{2}x^2 - 81x + 54 & \\ -\,-35x^4 + 105x^3 + \frac{35}{4}x^2 - \frac{105}{4}x & \\ \hline \frac{95}{2}x^3 - \frac{521}{4}x^2 - \frac{219}{4}x + 54 & \\ -\,\frac{95}{2}x^3 - \frac{285}{2}x^2 - \frac{95}{8}x + \frac{285}{8} & \\ \hline \frac{49}{4}x^2 - \frac{343}{8}x + \frac{147}{8} & \end{array}$$

Разделим делитель

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$
\begin{array}{l|l}
6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\
\hline
-\,6x^5 - 18x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{95}{8} \\
\hline
-35x^4 + \frac{305}{2}x^3 - \frac{243}{2}x^2 - 81x + 54 & \\
-\,-35x^4 + 105x^3 + \frac{35}{4}x^2 - \frac{105}{4}x & \\
\hline
\frac{95}{2}x^3 - \frac{521}{4}x^2 - \frac{219}{4}x + 54 & \\
-\,\frac{95}{2}x^3 - \frac{285}{2}x^2 - \frac{95}{8}x + \frac{285}{8} & \\
\hline
\frac{49}{4}x^2 - \frac{343}{8}x + \frac{147}{8} &
\end{array}
$$

Разделим делитель на остаток.

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5-53x^4+151x^3-117x^2-81x+54$ и $4x^3-12x^2-x+3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l}
6x^5-53x^4+151x^3-117x^2-81x+54 & 4x^3-12x^2-x+3 \\
\hline
-\,6x^5-18x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2-\frac{35}{4}x+\frac{95}{8} \\
\hline
-35x^4+\frac{305}{2}x^3-\frac{243}{2}x^2-81x+54 & \\
-\,-35x^4+105x^3+\frac{35}{4}x^2-\frac{105}{4}x & \\
\hline
\frac{95}{2}x^3-\frac{521}{4}x^2-\frac{219}{4}x+54 & \\
-\,\frac{95}{2}x^3-\frac{285}{2}x^2-\frac{95}{8}x+\frac{285}{8} & \\
\hline
\frac{49}{4}x^2-\frac{343}{8}x+\frac{147}{8} &
\end{array}$$

Точнее, на $\frac{8}{49}\left(\frac{49}{4}x^2-\frac{343}{8}x+\frac{147}{8}\right)=$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5-53x^4+151x^3-117x^2-81x+54$ и $4x^3-12x^2-x+3$.

Ответ. Разделим многочлен большей степени на многочлен меньшей степени:

$$\begin{array}{l|l}
6x^5-53x^4+151x^3-117x^2-81x+54 & 4x^3-12x^2-x+3 \\
\hline
-\,6x^5-18x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2 & \frac{3}{2}x^2-\frac{35}{4}x+\frac{95}{8} \\
\hline
-35x^4+\frac{305}{2}x^3-\frac{243}{2}x^2-81x+54 & \\
-\,-35x^4+105x^3+\frac{35}{4}x^2-\frac{105}{4}x & \\
\hline
\frac{95}{2}x^3-\frac{521}{4}x^2-\frac{219}{4}x+54 & \\
-\,\frac{95}{2}x^3-\frac{285}{2}x^2-\frac{95}{8}x+\frac{285}{8} & \\
\hline
\frac{49}{4}x^2-\frac{343}{8}x+\frac{147}{8} &
\end{array}$$

Точнее, на $\frac{8}{49}\left(\frac{49}{4}x^2-\frac{343}{8}x+\frac{147}{8}\right)=2x^2-7x+3$.

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\ \hline & \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\ \hline & 2x \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\ \hline 4x^3 - 14x^2 + 6x & 2x \\ \hline \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\ \hline 4x^3 - 14x^2 + 6x & 2x \\ \hline 2x^2 - 7x + 3 & \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\ \hline 4x^3 - 14x^2 + 6x & 2x + 1 \\ \hline 2x^2 - 7x + 3 & \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов

$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ответ.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\ \hline -\,4x^3 - 14x^2 + 6x & 2x + 1 \\ \hline 2x^2 - 7x + 3 & \\ -\,2x^2 - 7x + 3 & \\ \hline & \end{array}$$

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\
\cline{3-3}
- & 4x^3 - 14x^2 + 6x & 2x + 1 \\
\cline{2-2}
 & 2x^2 - 7x + 3 & \\
- & 2x^2 - 7x + 3 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Ответ.

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\
\cline{3-3}
- & 4x^3 - 14x^2 + 6x & 2x + 1 \\
\cline{2-2}
 & 2x^2 - 7x + 3 & \\
- & 2x^2 - 7x + 3 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Ответ.

Согласно теореме об Н.О.Д. делителя и остатка от деления искомый наибольший общий делитель равен $2x^2 - 7x + 3$.

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\
\cline{3-3}
- & 4x^3 - 14x^2 + 6x & 2x + 1 \\
\cline{2-2}
 & 2x^2 - 7x + 3 & \\
 - & 2x^2 - 7x + 3 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Ответ.

Согласно теореме об Н.О.Д. делителя и остатка от деления искомый наибольший общий делитель равен $2x^2 - 7x + 3$.

Следовательно, искомое наименьшее общее кратное равно

Задача 2. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** двух многочленов
$6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$ и $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

$$\begin{array}{rl|l} & 4x^3 - 12x^2 - x + 3 & 2x^2 - 7x + 3 \\ \hline - & 4x^3 - 14x^2 + 6x & 2x + 1 \\ \hline & 2x^2 - 7x + 3 & \\ \hline - & 2x^2 - 7x + 3 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Ответ.

Согласно теореме об Н.О.Д. делителя и остатка от деления искомый наибольший общий делитель равен $2x^2 - 7x + 3$.

Следовательно, искомое наименьшее общее кратное равно

$$\frac{(6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54)\,(4x^3 - 12x^2 - x + 3)}{2x^2 - 7x + 3} =$$
$$= 12x^6 - 100x^5 + 249x^4 - 83x^3 - 279x^2 + 27x + 54.$$

Решение задачи 3.

Задача 3. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** многочленов $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$ и $x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54$.

Задача 3. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** многочленов $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$ и $x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54$.

Ответ. Н.О.Д. равен $x^2 - 2x - 3$.

Задача 3. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** многочленов $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$ и $x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54$.

Ответ. Н.О.Д. равен $x^2 - 2x - 3$.
Н.О.К. равен $x^8 - 5x^7 - 2x^6 + 28x^5 + x^4 - 5x^3 - 36x^2 - 162x - 108$.

Решение задачи 4.

Задача 4. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** многочленов $x^5 - x^4 - 4x^3 + 16$ и $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 4$.

Задача 4. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** многочленов $x^5 - x^4 - 4x^3 + 16$ и $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 4$.

Ответ. Н.О.Д. равен $x^3 - x^2 - 4$.

Задача 4. Найдите **Н.О.Д.** и **Н.О.К.** многочленов $x^5 - x^4 - 4x^3 + 16$ и $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 4$.

Ответ. Н.О.Д. равен $x^3 - x^2 - 4$.
Н.О.К. равен $2x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 4x^3 + 32x - 16$.

Решение задачи 5.

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней.

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней.

$p'(x) = 6x^5 - 25x^4 - 16x^3 + 114x^2 + 18x - 81.$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Воспользуемся теоремой об избавлении от кратных корней.

$p'(x) = 6x^5 - 25x^4 - 16x^3 + 114x^2 + 18x - 81.$

$x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54$	$6x^5 - 25x^4 - 16x^3 + 114x^2 + 18x - 81$
$\ldots$	

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. $x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54 =$

$$= \left(\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}\right)(6x^5 - 25x^4 - 16x^3 + 114x^2 + 18x - 81) +$$

$$+ \frac{1}{36}\left(-173x^4 + 604x^3 + 786x^2 - 2340x - 2349\right).$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. $x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54 =$

$$= \left(\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}\right)(6x^5 - 25x^4 - 16x^3 + 114x^2 + 18x - 81) +$$

$$+\frac{1}{36}\left(-173x^4 + 604x^3 + 786x^2 - 2340x - 2349\right).$$

$6x^5 - 25x^4 - 16x^3 + 114x^2 + 18x - 81 =$

$$= \left(\frac{-6}{173}x + \frac{701}{173^2}\right)(-173x^4 + 604x^3 + 786x^2 - 2340x - 2349) +$$

$$+\frac{3200 \cdot 27}{173^2}\left(-x^3 + 5x^2 - 3x - 9\right).$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. $x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54 =$

$$= \left(\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}\right)(6x^5 - 25x^4 - 16x^3 + 114x^2 + 18x - 81) +$$

$$+\frac{1}{36}\left(-173x^4 + 604x^3 + 786x^2 - 2340x - 2349\right).$$

$$6x^5 - 25x^4 - 16x^3 + 114x^2 + 18x - 81 =$$

$$= \left(\frac{-6}{173}x + \frac{701}{173^2}\right)(-173x^4 + 604x^3 + 786x^2 - 2340x - 2349) +$$

$$+\frac{3200 \cdot 27}{173^2}\left(-x^3 + 5x^2 - 3x - 9\right).$$

$$-173x^4 + 604x^3 + 786x^2 - 2340x - 2349 =$$

$$= (173x + 261)\left(-x^3 + 5x^2 - 3x - 9\right).$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Итак, Н.О.Д. $(p(x);\ p'(x)) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 9$.

Поэтому

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Итак, Н.О.Д. $(p(x);\ p'(x)) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 9$.

Поэтому в силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д. } (p(x);\ p'(x))} =$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Итак, $\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x)) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 9$.

Поэтому в силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x))} = \\ = \frac{x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54}{-x^3 + 5x^2 - 3x - 9} =$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Итак, $\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x)) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 9$.

Поэтому в силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$\frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x))} = \\ = \frac{x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54}{-x^3 + 5x^2 - 3x - 9} = -x^3 + 7x + 6.$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. В силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$q(x) = \frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x))} = -x^3 + 7x + 6.$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. В силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$q(x) = \frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x))} = -x^3 + 7x + 6.$$

Нетрудно проверить, что (-1) действительно является корнем многочлена $p(x)$: $p(-1) =$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. В силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$q(x) = \frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x))} = -x^3 + 7x + 6.$$

Нетрудно проверить, что (-1) действительно является корнем многочлена $p(x)$: $p(-1) =$

$$= (-1)^6 - 5(-1)^5 - 4(-1)^4 + 38(-1)^3 + 9(-1)^2 - 81(-1) - 54 =$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. В силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$q(x) = \frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x))} = -x^3 + 7x + 6.$$

Нетрудно проверить, что (-1) действительно является корнем многочлена $p(x)$: $p(-1) = (-1)^6 - 5(-1)^5 - 4(-1)^4 + 38(-1)^3 + 9(-1)^2 - 81(-1) - 54 = 0.$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. В силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$q(x) = \frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x))} = -x^3 + 7x + 6.$$

Нетрудно проверить, что (-1) действительно является корнем многочлена $p(x)$ и многочлена $q(x)$:

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. В силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$q(x) = \frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x))} = -x^3 + 7x + 6.$$

Нетрудно проверить, что (-1) действительно является корнем многочлена $p(x)$ и многочлена $q(x)$: $q(-1) =$

$$= -(-1)^3 + 7(-1) + 6 =$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. В силу теоремы об избавлении от кратных корней совпадают множества корней у многочленов $p(x)$ и

$$q(x) = \frac{p(x)}{\text{Н.О.Д.}\,(p(x);\ p'(x))} = -x^3 + 7x + 6.$$

Нетрудно проверить, что (-1) действительно является корнем многочлена $p(x)$ и многочлена $q(x)$: $q(-1) =$

$$= -(-1)^3 + 7(-1) + 6 = 0.$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{l|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \hline & \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{l|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \hline & -x^2 \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{l|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{l|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{l|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{l|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x \\ \cline{1-1} \quad x^2 + 7x + 6 & \\ \quad x^2 + x & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x+1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x \\ \cline{1-1} \quad x^2 + 7x + 6 & \\ \quad x^2 + x & \\ \cline{1-1} \quad 6x + 6 & \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x + 6 \\ \cline{1-1} \quad x^2 + 7x + 6 & \\ \quad x^2 + x & \\ \cline{1-1} \quad\quad 6x + 6 & \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x + 6 \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \\ x^2 + x & \\ \cline{1-1} 6x + 6 & \\ 6x + 6 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x + 6 \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \\ x^2 + x & \\ \cline{1-1} 6x + 6 & \\ 6x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x + 6 \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \\ x^2 + x & \\ \cline{1-1} 6x + 6 & \\ 6x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Следовательно, $-x^3 + 7x + 6 = (x + 1)(-x^2 + x + 6)$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x+1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x + 6 \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \\ x^2 + x & \\ \cline{1-1} 6x + 6 & \\ 6x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Следовательно, $-x^3 + 7x + 6 = (x+1)\overbrace{(-x^2 + x + 6)}$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x+1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x + 6 \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \\ \text{newline}\ x^2 + x & \\ \cline{1-1} 6x + 6 & \\ 6x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2(-1)} =$$

Следовательно, $-x^3 + 7x + 6 = (x+1)\overbrace{(-x^2 + x + 6)}$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x+1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x + 6 \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \\ x^2 + x & \\ \cline{1-1} 6x + 6 & \\ 6x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

Следовательно, $-x^3 + 7x + 6 = (x+1)\overbrace{(-x^2 + x + 6)}$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x+1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x + 6 \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \\ x^2 + x & \\ \cline{1-1} 6x + 6 & \\ 6x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2(-1)} =$$

$$= \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Следовательно, $-x^3 + 7x + 6 = (x+1)\overbrace{\left(-x^2 + x + 6\right)}$

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x+1)$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x + 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & -x^2 + x + 6 \\ \cline{1-1} x^2 + 7x + 6 & \\ x^2 + x & \\ \cline{1-1} 6x + 6 & \\ 6x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2(-1)} =$$

$$= \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array} \right.$$

Следовательно, $-x^3 + 7x + 6 = -(x+1)(x-3)(x+2)$.

Задача 5. Проверьте, что (-1) является корнем многочлена:

$$p(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$$

Найдите остальные корни этого многочлена.

Ответ. Поскольку (-1) является корнем многочлена $q(x) = -x^3 + 7x + 6$, то $q(x)$ делится нацело на $(x + 1)$

$-x^3 + 7x + 6 = -(x + 1)(x - 3)(x + 2)$.

Значит, исходный многочлен имел следующие корни: (-1), 3, (-2).

Решение задачи 6.

Задача 6. Найдите разложение многочлена $x^2 + x + 1$ в произведение многочленов, неразложимых над полем комплексных чисел.

Задача 6. Найдите разложение многочлена $x^2 + x + 1$ в произведение многочленов, неразложимых над полем комплексных чисел.

Ответ. Найдем корни этого многочлена:

Задача 6. Найдите разложение многочлена $x^2 + x + 1$ в произведение многочленов, неразложимых над полем комплексных чисел.

Ответ. Найдем корни этого многочлена: $\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Поэтому

Задача 6. Найдите разложение многочлена $x^2 + x + 1$ в произведение многочленов, неразложимых над полем комплексных чисел.

Ответ. Найдем корни этого многочлена: $\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Поэтому

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решение задачи 7.

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что при $x = 1$ многочлен обращается в ноль: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 5 = 0$.

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что при $x = 1$ многочлен обращается в ноль: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 5 = 0$.

По **теореме Безу** исходный многочлен делится нацело на $x - 1$:

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что при $x = 1$ многочлен обращается в ноль: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 5 = 0$.

По **теореме Безу** исходный многочлен делится нацело на $x - 1$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +9x & -5 & x-1 \\ \cline{5-5}
x^3 & -x^2 & & & x^2-4x+5 \\ \cline{1-2}
 & -4x^2 & +9x & -5 & \\
 & -4x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x & -5 & \\
 & & 5x & -5 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что при $x = 1$ многочлен обращается в ноль: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 5 = 0$.

По **теореме Безу** исходный многочлен делится нацело на $x - 1$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +9x & -5 & x-1 \\ \cline{5-5}
x^3 & -x^2 & & & x^2-4x+5 \\ \cline{1-2}
 & -4x^2 & +9x & -5 & \\
 & -4x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x & -5 & \\
 & & 5x & -5 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Поэтому $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x - 1)\,(x^2 - 4x + 5)$.

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что при $x = 1$ многочлен обращается в ноль: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 5 = 0$.

По **теореме Безу** исходный многочлен делится нацело на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 9x - 5 & x - 1 \\ \cline{2-2} x^3 - x^2 & x^2 - 4x + 5 \\ \cline{1-1} \quad -4x^2 + 9x - 5 & \\ \quad -4x^2 + 4x & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 5x - 5 & \\ \qquad\quad 5x - 5 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Поэтому $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x - 1)(x^2 - 4x + 5)$. Многочлен $x^2 - 4x + 5$ имеет отрицательный дискриминант, поэтому вещественных корней у него нет.

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что при $x = 1$ многочлен обращается в ноль: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 5 = 0$.

По **теореме Безу** исходный многочлен делится нацело на $x - 1$:

$$\begin{array}{rl|l}
x^3 & -5x^2 & +9x-5 & x-1 \\
\cline{4-4}
x^3 & -x^2 & & x^2-4x+5 \\
\cline{1-2}
 & -4x^2 & +9x-5 & \\
 & -4x^2 & +4x & \\
\cline{2-3}
 & & 5x & -5 \\
 & & 5x & -5 \\
\cline{3-4}
 & & & 0
\end{array}$$

Поэтому $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x - 1)(x^2 - 4x + 5)$. Многочлен $x^2 - 4x + 5$ имеет отрицательный дискриминант, поэтому вещественных корней у него нет. Следовательно, полученное разложение состоит из многочленов, неприводимых над $\mathbb{R}$.

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что при $x = 1$ многочлен обращается в ноль: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 5 = 0$.

По **теореме Безу** исходный многочлен делится нацело на $x - 1$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +9x & -5 & x-1 \\ \cline{5-5}
x^3 & -x^2 & & & x^2-4x+5 \\ \cline{1-2}
 & -4x^2 & +9x & -5 & \\
 & -4x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x & -5 & \\
 & & 5x & -5 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Поэтому $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x-1)\,(x^2 - 4x + 5)$. Над $\mathbf{C}$ многочлен $x^2 - 4x + 5$ разложим. В самом деле, его корни таковы:

Задача 7. Найдите все корни многочлена x^3-5x^2+9x-5. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что при $x=1$ многочлен обращается в ноль: $1^3-5\cdot 1^2+9\cdot 1-5=0$.
По **теореме Безу** исходный многочлен делится нацело на $x-1$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +9x & -5 & x-1 \\
\cline{5-5}
x^3 & -x^2 & & & x^2-4x+5 \\
\cline{1-3}
 & -4x^2 & +9x & -5 & \\
 & -4x^2 & +4x & & \\
\cline{2-4}
 & & 5x & -5 & \\
 & & 5x & -5 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Поэтому $x^3-5x^2+9x-5=(x-1)\left(x^2-4x+5\right)$. Над **C** многочлен x^2-4x+5 разложим. В самом деле, его корни таковы: $2\pm\sqrt{4-5}=2\pm i$. Таким образом,

Задача 7. Найдите все корни многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Представьте этот многочлен в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{C}$ и в виде произведения многочленов, неразложимых над $\mathbb{R}$.

Ответ. Один из корней нетрудно подобрать: очевидно, что при $x = 1$ многочлен обращается в ноль: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 5 = 0$.

По **теореме Безу** исходный многочлен делится нацело на $x - 1$:

$$\begin{array}{rl|l} x^3 & -5x^2 & +9x-5 & x-1 \\ \cline{4-4} x^3 & -x^2 & & x^2-4x+5 \\ \cline{1-3} & -4x^2 & +9x-5 & \\ & -4x^2 & +4x & \\ \cline{2-3} & & 5x-5 & \\ & & 5x-5 & \\ \cline{3-3} & & 0 & \end{array}$$

Поэтому $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x - 1)(x^2 - 4x + 5)$. Над $\mathbf{C}$ многочлен $x^2 - 4x + 5$ разложим. В самом деле, его корни таковы: $2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm i$. Таким образом,

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x - 1)(x - 2 - i)(x - 2 + i)$$

— разложение в произведение многочленов, неразложимых над полем комплексных чисел.

Решение задачи 8.

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. Можно степени числа $\frac{1-i}{2}$ вычислить с помощью перехода к тригонометрической форме записи, но в данном случае проще использовать исходную алгебраическую форму записи.

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. Имеем $\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$,

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. Имеем $\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1-i}{2}\right)^3 = -\frac{1+i}{4}$,

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. Имеем $\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1-i}{2}\right)^3 = -\frac{1+i}{4}$, $\left(\frac{1-i}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Поэтому

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. Имеем $\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1-i}{2}\right)^3 = -\frac{1+i}{4}$, $\left(\frac{1-i}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Поэтому

$$4\left(\frac{1-i}{2}\right)^4 - 12\left(\frac{1-i}{2}\right)^3 + 50\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 - 44\left(\frac{1-i}{2}\right) + 20 =$$

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. Имеем $\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1-i}{2}\right)^3 = -\frac{1+i}{4}$, $\left(\frac{1-i}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Поэтому

$$4\left(\frac{1-i}{2}\right)^4 - 12\left(\frac{1-i}{2}\right)^3 + 50\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 - 44\left(\frac{1-i}{2}\right) + 20 =$$
$$= 1 + 3(1+i) - 25 - 22(1-i) + 20 = 0,$$

то есть

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. Имеем $\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1-i}{2}\right)^3 = -\frac{1+i}{4}$, $\left(\frac{1-i}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Поэтому

$$4\left(\frac{1-i}{2}\right)^4 - 12\left(\frac{1-i}{2}\right)^3 + 50\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 - 44\left(\frac{1-i}{2}\right) + 20 =$$
$$= 1 + 3(1+i) - 25 - 22(1-i) + 20 = 0,$$

то есть $\frac{1-i}{2}$ действительно является корнем многочлена $f(x)$.

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. По теореме о корнях многочлена с вещественными коэффициентами, число $\frac{1+i}{2}$ также является корнем этого многочлена.

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. По теореме о корнях многочлена с вещественными коэффициентами, число $\frac{1+i}{2}$ также является корнем этого многочлена. По **теореме Безу** $f(x)$ делится нацело на многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$.

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. По теореме о корнях многочлена с вещественными коэффициентами, число $\frac{1+i}{2}$ также является корнем этого многочлена. По **теореме Безу** $f(x)$ делится нацело на многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$. Многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$ взаимно просты (степень наибольшего общего делителя равна 0), поэтому $f(x)$ делится на

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. По теореме о корнях многочлена с вещественными коэффициентами, число $\frac{1+i}{2}$ также является корнем этого многочлена. По **теореме Безу** $f(x)$ делится нацело на многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$. Многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$ взаимно просты (степень наибольшего общего делителя равна 0), поэтому $f(x)$ делится на $\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right)$.

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. По теореме о корнях многочлена с вещественными коэффициентами, число $\frac{1+i}{2}$ также является корнем этого многочлена. По **теореме Безу** $f(x)$ делится нацело на многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$. Многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$ взаимно просты (степень наибольшего общего делителя равна 0), поэтому $f(x)$ делится на $\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right)$. Согласно замечанию о получении многочлена с вещественными коэффициентами для любого комплексного числа z_0 многочлен $(x - z_0)(x - \overline{z_0})$ имеет вещественные коэффициенты,

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. По теореме о корнях многочлена с вещественными коэффициентами, число $\frac{1+i}{2}$ также является корнем этого многочлена. По **теореме Безу** $f(x)$ делится нацело на многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$. Многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$ взаимно просты (степень наибольшего общего делителя равна 0), поэтому $f(x)$ делится на $\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right)$. Согласно замечанию о получении многочлена с вещественными коэффициентами для любого комплексного числа z_0 многочлен $(x - z_0)(x - \overline{z_0})$ имеет вещественные коэффициенты, так как

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - (z_0 + \overline{z_0})x + z_0\overline{z_0},$$

причем $z_0 + \overline{z_0} = 2\mathrm{Re}z_0 \in \mathbb{R}$ и $z_0\overline{z_0} = |z_0|^2 \in \mathbb{R}$.

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. По теореме о корнях многочлена с вещественными коэффициентами, число $\frac{1+i}{2}$ также является корнем этого многочлена. По **теореме Безу** $f(x)$ делится нацело на многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$. Многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$ взаимно просты (степень наибольшего общего делителя равна 0), поэтому $f(x)$ делится на $\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right)$. Согласно замечанию о получении многочлена с вещественными коэффициентами для любого комплексного числа z_0 многочлен $(x - z_0)(x - \overline{z_0})$ имеет вещественные коэффициенты. Поэтому многочлен

$$\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right) =$$

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. По теореме о корнях многочлена с вещественными коэффициентами, число $\frac{1+i}{2}$ также является корнем этого многочлена. По **теореме Безу** $f(x)$ делится нацело на многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$. Многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$ взаимно просты (степень наибольшего общего делителя равна 0), поэтому $f(x)$ делится на $\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right)$. Согласно замечанию о получении многочлена с вещественными коэффициентами для любого комплексного числа z_0 многочлен $(x - z_0)(x - \overline{z_0})$ имеет вещественные коэффициенты. Поэтому многочлен

$$\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{2}$$

имеет вещественные коэффициенты.

Задача 8. Проверьте, является ли $\frac{1-i}{2}$ корнем многочлена $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Найдите разложение многочлена $f(x)$ в произведение многочленов, неразложимых над полем действительных чисел.

Ответ. По теореме о корнях многочлена с вещественными коэффициентами, число $\frac{1+i}{2}$ также является корнем этого многочлена. По **теореме Безу** $f(x)$ делится нацело на многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$. Многочлены $x - \frac{1-i}{2}$ и $x - \frac{1+i}{2}$ взаимно просты (степень наибольшего общего делителя равна 0), поэтому $f(x)$ делится на $\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right)$. Согласно замечанию о получении многочлена с вещественными коэффициентами для любого комплексного числа z_0 многочлен $(x - z_0)(x - \overline{z_0})$ имеет вещественные коэффициенты. Поэтому многочлен

$$\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{2}$$

имеет вещественные коэффициенты. Имеем

$$\begin{array}{r|l}
4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20 & x^2 - x + \frac{1}{2} \\
\cline{2-2}
4x^4 - 4x^3 + 2x^2 & 4x^2 - 8x + 40 \\
\cline{1-1}
-8x^3 + 48x^2 - 44x + 20 & \\
-8x^3 + 8x^2 - 4x & \\
\cline{1-1}
40x^2 - 40x + 20 & \\
40x^2 - 40x + 20 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Решение задачи 9.

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} =$$

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} = -21\,560\,000.$$

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} = -21\,560\,000.$$

Можно проверить, что

$$6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = (2x - 1)(3x + 1)(x - 2)(x + 1),$$

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} = -21\,560\,000.$$

Можно проверить, что

$$6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = (2x - 1)(3x + 1)(x - 2)(x + 1),$$

$$8x^3 + 34x^2 + 45x + 18 = (4x + 3)(x + 2)(2x + 3).$$

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} = -21\,560\,000.$$

Можно проверить, что

$$6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = (2x - 1)(3x + 1)(x - 2)(x + 1),$$

$$8x^3 + 34x^2 + 45x + 18 = (4x + 3)(x + 2)(2x + 3).$$

Поэтому искомый результант **согласно определению** равен

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} = -21\,560\,000.$$

Можно проверить, что

$$6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = (2x - 1)(3x + 1)(x - 2)(x + 1),$$

$$8x^3 + 34x^2 + 45x + 18 = (4x + 3)(x + 2)(2x + 3).$$

Поэтому искомый результант **согласно определению** равен

$$6^3 8^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + 2\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3} + 2\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(2 + \frac{3}{4}\right)(2 + 2)\left(2 + \frac{3}{2}\right)\left(-1 + \frac{3}{4}\right)(-1 + 2)\left(-1 + \frac{3}{2}\right) =$$

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} = -21\,560\,000.$$

Можно проверить, что

$$6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = (2x - 1)(3x + 1)(x - 2)(x + 1),$$

$$8x^3 + 34x^2 + 45x + 18 = (4x + 3)(x + 2)(2x + 3).$$

Поэтому искомый результант **согласно определению** равен

$$6^3 8^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + 2\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3} + 2\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(2 + \frac{3}{4}\right)(2 + 2)\left(2 + \frac{3}{2}\right)\left(-1 + \frac{3}{4}\right)(-1 + 2)\left(-1 + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 6^3 8^4 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4} \cdot 4 \cdot \frac{7 \cdot (-1)}{2 \cdot 4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} =$$

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} = -21\,560\,000.$$

Можно проверить, что

$$6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = (2x - 1)(3x + 1)(x - 2)(x + 1),$$

$$8x^3 + 34x^2 + 45x + 18 = (4x + 3)(x + 2)(2x + 3).$$

Поэтому искомый результант **согласно определению** равен

$$6^3 8^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + 2\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3} + 2\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(2 + \frac{3}{4}\right)(2 + 2)\left(2 + \frac{3}{2}\right)\left(-1 + \frac{3}{4}\right)(-1 + 2)\left(-1 + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 6^3 8^4 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4} \cdot 4 \cdot \frac{7 \cdot (-1)}{2 \cdot 4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -10^4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 11 =$$

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} = -21\,560\,000.$$

Можно проверить, что

$$6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = (2x - 1)(3x + 1)(x - 2)(x + 1),$$

$$8x^3 + 34x^2 + 45x + 18 = (4x + 3)(x + 2)(2x + 3).$$

Поэтому искомый результант **согласно определению** равен

$$6^3 8^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + 2\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3} + 2\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(2 + \frac{3}{4}\right)(2 + 2)\left(2 + \frac{3}{2}\right)\left(-1 + \frac{3}{4}\right)(-1 + 2)\left(-1 + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 6^3 8^4 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4} \cdot 4 \cdot \frac{7 \cdot (-1)}{2 \cdot 4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -10^4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 11 = -21\,560\,000,$$

Задача 9. Найти **результант** многочленов $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ и $8x^3 + 34x^2 + 45x + 18$

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -12 & 3 & 2 \\ 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 34 & 45 & 18 \end{vmatrix} = \mathbf{-21\,560\,000}.$$

Можно проверить, что

$$6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = (2x - 1)(3x + 1)(x - 2)(x + 1),$$

$$8x^3 + 34x^2 + 45x + 18 = (4x + 3)(x + 2)(2x + 3).$$

Поэтому искомый результант **согласно определению** равен

$$6^3 8^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + 2\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3} + 2\right)\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(2 + \frac{3}{4}\right)(2 + 2)\left(2 + \frac{3}{2}\right)\left(-1 + \frac{3}{4}\right)(-1 + 2)\left(-1 + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 6^3 8^4 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4} \cdot 4 \cdot \frac{7 \cdot (-1)}{2 \cdot 4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -10^4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 11 = \mathbf{-21\,560\,000},$$

что совпадает с результатом применения **формулы для вычисления результанта**.

Решение задачи 10.

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Ответ.

$$p_1(x) =$$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Ответ.

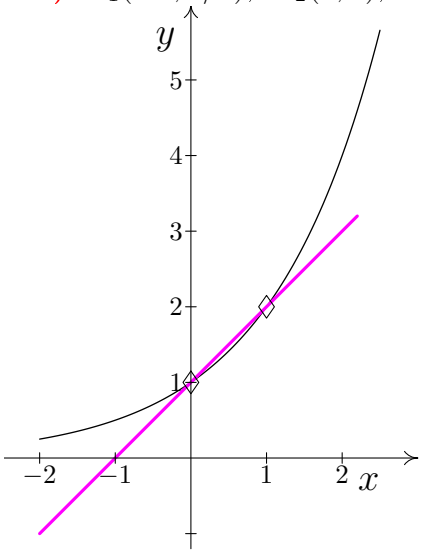
$$p_1(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)}{(0-1)} + 2 \cdot \frac{(x-0)}{(1-0)} =$$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Ответ.

$$p_1(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)}{(0-1)} + 2 \cdot \frac{(x-0)}{(1-0)} = x + 1.$$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.



Ответ.

$$p_1(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)}{(0-1)} + 2 \cdot \frac{(x-0)}{(1-0)} = x + 1.$$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Ответ.

$p_2(x) =$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Ответ.

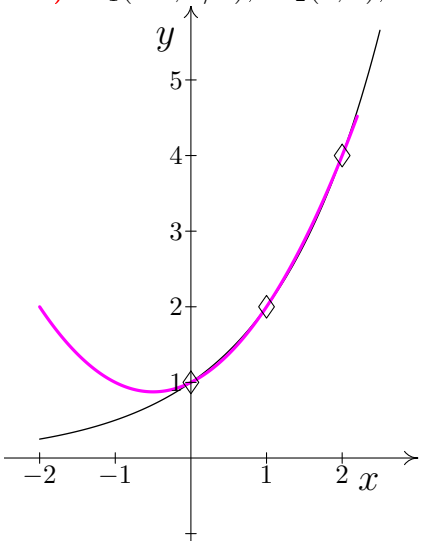
$$p_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2 \cdot \frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 4 \cdot \frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)} =$$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Ответ.

$$p_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2 \cdot \frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 4 \cdot \frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.



Ответ.

$$p_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2 \cdot \frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 4 \cdot \frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Ответ.

$p_3(x) =$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Ответ.

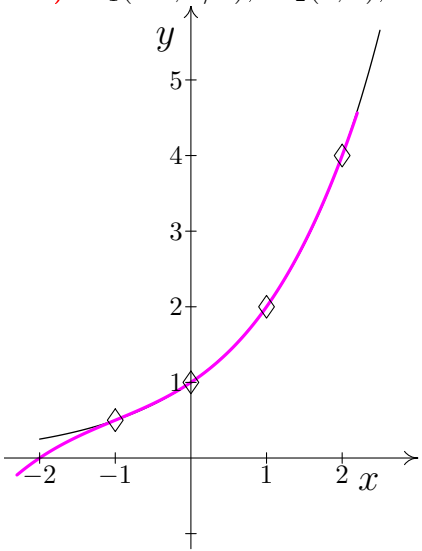
$$p_3(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 1 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} + 2 \cdot \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} +$$
$$+4 \cdot \frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} =$$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.

Ответ.

$$p_3(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 1\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} + 2\cdot\frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} +$$
$$+4\cdot\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + 1.$$

Задача 10. Найдите интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки графика функции $f(x) = 2^x$ с координатами: **1)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$; **2)** $M_1(0;1)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;4)$; **3)** $M_1(-1;1/2)$, $M_2(0;1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(2;4)$.



Ответ.

$$p_3(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 1\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} + 2\cdot\frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} +$$

$$+4\cdot\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + 1.$$

Решение задачи 11.

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены:

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z,$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz,$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\left(x;y;z\right)=x^4y+x^4z+xy^4+y^4z+xz^4+yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1=x+y+z,\quad s_2=xy+xz+yz,\quad s_3=xyz.$
Высший член этого полинома имеет вид $x^4y=$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.
Высший член этого полинома имеет вид $x^4y = x^3 \cdot xy$.

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

Высший член этого полинома имеет вид $x^4y = x^3 \cdot xy.$

Выражение x^3 является слагаемым выражения $(x + y + z)^3$, причем

$$\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)^3\Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big) =$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

Высший член этого полинома имеет вид $x^4y = x^3 \cdot xy$.

Выражение x^3 является слагаемым выражения $(x + y + z)^3$, причем

$$\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)^3\Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big) = s_1^3 s_2 =$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

Высший член этого полинома имеет вид $x^4y = x^3 \cdot xy.$

Выражение x^3 является слагаемым выражения $(x + y + z)^3$, причем

$$\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)^3 \Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big) = s_1^3 s_2 =$$

$$(xy + xz + yz) \cdot (x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz) =$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

Высший член этого полинома имеет вид $x^4y = x^3 \cdot xy$.

Выражение x^3 является слагаемым выражения $(x + y + z)^3$, причем

$$\Big(\underbrace{x + y + z}_{s_1}\Big)^3\Big(\underbrace{xy + xz + yz}_{s_2}\Big) = s_1^3 s_2 =$$

$$(xy + xz + yz) \cdot (x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz) =$$
$$= 7x^3yz + 3x^3y^2 + 3x^3z^2 + 3y^3z^2 + 12x^2yz^2 + yz^4 + 7xyz^3 + xy^4 +$$
$$+xz^4 + 12x^2y^2z + 7xy^3z + 12xy^2z^2 + 3y^3z^2 + 3y^2z^3 + 3x^2z^3 + 3x^2y^3 + y^4z + x^4z + x^4y.$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

$s_1^3 s_2 = 7x^3yz + 3x^3y^2 + 3x^3z^2 + 3x^3y^2 + 12x^2yz^2 + yz^4 + 7xyz^3 + xy^4 +$
$+xz^4 + 12x^2y^2z + 7xy^3z + 12xy^2z^2 + 3y^3z^2 + 3y^2z^3 + 3x^2z^3 + 3x^2y^3 + y^4z + x^4z + x^4y$

Поэтому рассмотрим многочлен

$$q(x;y;z) = p(x;y;z) - s_1^3 s_2 =$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

$s_1^3 s_2 = 7x^3yz + 3x^3y^2 + 3x^3z^2 + 3y^3z^2 + 12x^2yz^2 + yz^4 + 7xyz^3 + xy^4 +$
$+xz^4 + 12x^2y^2z + 7xy^3z + 12xy^2z^2 + 3y^3z^2 + 3y^2z^3 + 3x^2z^3 + 3x^2y^3 + y^4z + x^4z + x^4y$

Поэтому рассмотрим многочлен

$$q(x;y;z) = p(x;y;z) - s_1^3 s_2 =$$

$$= -3x^3y^2 - 3x^3z^2 - 3x^2y^3 - 3x^2z^3 - 3y^3z^2 - 3y^2z^3 -$$

$$-7x^3yz - 7xy^3z - 7xyz^3 - 12x^2y^2z - 12x^2yz^2 - 12xy^2z^2.$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

$s_1^3 s_2 = 7x^3yz + 3x^3y^2 + 3x^3z^2 + 3x^3y^2 + 12x^2yz^2 + yz^4 + 7xyz^3 + xy^4 +$
$+xz^4 + 12x^2y^2z + 7xy^3z + 12xy^2z^2 + 3y^3z^2 + 3y^2z^3 + 3x^2z^3 + 3x^2y^3 + y^4z + x^4z + x^4y$

Поэтому рассмотрим многочлен

$$q(x;y;z) = p(x;y;z) - s_1^3 s_2 =$$

$$= -3x^3y^2 - 3x^3z^2 - 3x^2y^3 - 3x^2z^3 - 3y^3z^2 - 3y^2z^3 -$$

$$-7x^3yz - 7xy^3z - 7xyz^3 - 12x^2y^2z - 12x^2yz^2 - 12xy^2z^2.$$

Далее,

$$r(x;y;z) = q(x;y;z) + 3s_2^2 s_1 = p(x;y;z) - s_1^3 s_2 + 3s_2^2 s_1 =$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

$s_1^3 s_2 = 7x^3yz + 3x^3y^2 + 3x^3z^2 + 3x^3y^2 + 12x^2yz^2 + yz^4 + 7xyz^3 + xy^4 +$
$+xz^4 + 12x^2y^2z + 7xy^3z + 12xy^2z^2 + 3y^3z^2 + 3y^2z^3 + 3x^2z^3 + 3x^2y^3 + y^4z + x^4z + x^4y$

Поэтому рассмотрим многочлен

$$q(x;y;z) = p(x;y;z) - s_1^3 s_2 =$$

$$= -3x^3y^2 - 3x^3z^2 - 3x^2y^3 - 3x^2z^3 - 3y^3z^2 - 3y^2z^3 -$$

$$-7x^3yz - 7xy^3z - 7xyz^3 - 12x^2y^2z - 12x^2yz^2 - 12xy^2z^2.$$

Далее,

$$r(x;y;z) = q(x;y;z) + 3s_2^2 s_1 = p(x;y;z) - s_1^3 s_2 + 3s_2^2 s_1 =$$

$$= -x^3yz - xy^3z - xyz^3 + 3x^2y^2z + 3x^2yz^2 + 3xy^2z^2.$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.
Итак,

$$r(x;y;z) = q(x;y;z) + 3s_2^2s_1 = p(x;y;z) - s_1^3s_2 + 3s_2^2s_1 =$$
$$= -x^3yz - xy^3z - xyz^3 + 3x^2y^2z + 3x^2yz^2 + 3xy^2z^2.$$

Поэтому рассмотрим многочлен

$$t(x;y;z) = r(x;y;z) - ?$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Итак,

$$r(x;y;z) = q(x;y;z) + 3s_2^2s_1 = p(x;y;z) - s_1^3s_2 + 3s_2^2s_1 =$$
$$= -x^3yz - xy^3z - xyz^3 + 3x^2y^2z + 3x^2yz^2 + 3xy^2z^2.$$

Поэтому рассмотрим многочлен

$$t(x;y;z) = r(x;y;z) + s_1^2s_3 =$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Итак,

$$r(x;y;z) = q(x;y;z) + 3s_2^2s_1 = p(x;y;z) - s_1^3s_2 + 3s_2^2s_1 =$$
$$= -x^3yz - xy^3z - xyz^3 + 3x^2y^2z + 3x^2yz^2 + 3xy^2z^2.$$

Поэтому рассмотрим многочлен

$$t(x;y;z) = r(x;y;z) + s_1^2s_3 = 5x^2y^2z + 5x^2yz^2 + 5xy^2z^2.$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$

Итак,

$$t(x;y;z) = r(x;y;z) - s_1^2 s_3 = p(x;y;z) - s_1^3 s_2 + 3s_2^2 s_1 + s_1^2 s_3 =$$
$$= 5x^2y^2z + 5x^2yz^2 + 5xy^2z^2.$$

Поэтому рассмотрим многочлен

$$u(x;y;z) = t(x;y;z) - 5s_2 s_3 =$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$.

Итак,

$$t(x;y;z) = r(x;y;z) - s_1^2 s_3 = p(x;y;z) - s_1^3 s_2 + 3s_2^2 s_1 + s_1^2 s_3 =$$
$$= 5x^2y^2z + 5x^2yz^2 + 5xy^2z^2.$$

Поэтому рассмотрим многочлен

$$u(x;y;z) = t(x;y;z) - 5s_2s_3 = 0.$$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^4y + x^4z + xy^4 + y^4z + xz^4 + yz^4.$$

Ответ. Основные многочлены: $s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + xz + yz, \quad s_3 = xyz.$ Следовательно

$$0 = u(x;y;z) = t(x;y;z) - 5s_2s_3 = p(x;y;z) - s_1^3s_2 + 3s_2^2s_1 + s_1^2s_3 - 5s_2s_3.$$

Ответ: $p(x;y;z) = s_1^3s_2 - 3s_2^2s_1 - s_1^2s_3 + 5s_2s_3.$

Задача 11. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\left(x;y;z\right)=x^4y+x^4z+xy^4+y^4z+xz^4+yz^4.$$

Ответ. $p\left(x;y;z\right)=s_1^3s_2-3s_2^2s_1-s_1^2s_3+5s_2s_3$.

Решение задачи 12.

Задача 12. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p(x;y;z) = x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2.$$

Задача 12. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\left(x;y;z\right)=x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2.$$

Ответ. $x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2-$

Задача 12. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2.$$

Ответ. $x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 - (x+y+z)(xy+xz+yz) =$

Задача 12. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2.$$

Ответ. $x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 - (x+y+z)(xy+xz+yz) = -3xyz.$

Задача 12. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$p\,(x;y;z) = x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2.$$

Ответ. $x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 - (x+y+z)(xy+xz+yz) = -3xyz.$
$p\,(x;y;z) = x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 = (x+y+z)(xy+xz+yz) - 3xyz.$

Решение задачи 13.

Задача 13. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3.$$

Задача 13. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3.$$

Ответ. $x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3 -$

Задача 13. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3.$$

Ответ. $x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3 -$
$-(x + y + z)(xy + xz + yz)^2 =$

Задача 13. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3.$$

Ответ. $x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3 -$
$-(x+y+z)(xy+xz+yz)^2 = -5x^2y^2z - 5x^2yz^2 - 5xy^2z^2 =$

Задача 13. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3.$$

Ответ. $x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3 -$
$-(x+y+z)(xy+xz+yz)^2 = -5x^2y^2z - 5x^2yz^2 - 5xy^2z^2 = -5xyz(xy+xz+yz).$

Задача 13. Представить в виде многочлена от **основных симметрических многочленов** многочлен

$$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3.$$

Ответ. $x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3 -$
$-(x+y+z)(xy+xz+yz)^2 = -5x^2y^2z - 5x^2yz^2 - 5xy^2z^2 = -5xyz(xy+xz+yz).$
$x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 + 2x^3yz + 2xy^3z + 2xyz^3 =$
$= (x+y+z)(xy+xz+yz)^2 - 5xyz(xy+xz+yz).$

Решение задачи 14.

Задача 14. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Задача 14. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\,(x^2+x+1)^2}.$$

Ответ.

Задача 14. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Ответ. $$\frac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

Задача 14. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Ответ. $$\frac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{A(x+3)^2\left(x^2+x+1\right)^2+B(x+3)\left(x^2+x+1\right)^2+C\left(x^2+x+1\right)^2}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}+$$

$$+\frac{(Ex+F)(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)+(Gx+H)(x+3)^3}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

Задача 14. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Ответ. $\dfrac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2} =$

$$= \frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+x+1\right)^2} =$$

$$= \frac{A(x+3)^2\left(x^2+x+1\right)^2+B(x+3)\left(x^2+x+1\right)^2+C\left(x^2+x+1\right)^2}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}+$$

$$+\frac{(Ex+F)(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)+(Gx+H)(x+3)^3}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2} =$$

$$\left\{\begin{array}{l|l}
A+E=4 & x^6\\
8A+B+10E-F=32 & x^5\\
24A+5B+C+37E-10F+G=93 & x^4\\
38A+9B+2C+63E-37F+9G+H=111 & x^3\\
40A+11B+3C+54E-63F+27G+9H=26 & x^2\\
24A+7B+2C+27E-54F+27G+27H=-2 & x\\
9A+3B+C-27F+27H=35 & x^0
\end{array}\right.$$

Задача 14. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Ответ. $\dfrac{4x^6+32x^5+93x^4+111x^3+26x^2-2x+35}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2} =$

$$= \frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+x+1\right)^2} =$$

$$= \frac{A(x+3)^2\left(x^2+x+1\right)^2+B(x+3)\left(x^2+x+1\right)^2+C\left(x^2+x+1\right)^2}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2}+$$

$$+\frac{(Ex+F)(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)+(Gx+H)(x+3)^3}{(x+3)^3\left(x^2+x+1\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{x+3}-\frac{3}{(x+3)^2}-\frac{1}{(x+3)^3}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}+\frac{-3x+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l}
A+E=4 & x^6\\
8A+B+10E-F=32 & x^5\\
24A+5B+C+37E-10F+G=93 & x^4\\
38A+9B+2C+63E-37F+9G+H=111 & x^3\\
40A+11B+3C+54E-63F+27G+9H=26 & x^2\\
24A+7B+2C+27E-54F+27G+27H=-2 & x\\
9A+3B+C-27F+27H=35 & x^0
\end{array}\right.$$

Решение задачи 15.

Задача 15. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{3x^6 - 19x^5 + 48x^4 - 49x^3 - 2x^2 + 16x + 7}{(x-2)^3 \left(x^2 - 1\right)^2}.$$

Задача 15. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{3x^6 - 19x^5 + 48x^4 - 49x^3 - 2x^2 + 16x + 7}{(x-2)^3 (x^2-1)^2}.$$

Ответ.

Задача 15. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{3x^6-19x^5+48x^4-49x^3-2x^2+16x+7}{(x-2)^3\left(x^2-1\right)^2}.$$

Ответ. $$\frac{3x^6-19x^5+48x^4-49x^3-2x^2+16x+7}{(x-2)^3\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}+\frac{F}{(x-1)}+\frac{G}{(x-1)^2}=$$

Задача 15. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{3x^6-19x^5+48x^4-49x^3-2x^2+16x+7}{(x-2)^3\left(x^2-1\right)^2}.$$

Ответ. $$\frac{3x^6-19x^5+48x^4-49x^3-2x^2+16x+7}{(x-2)^3\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}+\frac{F}{(x-1)}+\frac{G}{(x-1)^2}=$$

$$=-\frac{2}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)^3}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Решение задачи 16.

Задача 16. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{-2x^7+4x^6-2x^5+5x^4+2x^3+5x^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^3}.$$

Задача 16. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{-2x^7+4x^6-2x^5+5x^4+2x^3+5x^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^3}.$$

Ответ.

$$\frac{-2x^7+4x^6-2x^5+5x^4+2x^3+5x^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

Задача 16. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{-2x^7+4x^6-2x^5+5x^4+2x^3+5x^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^3}.$$

Ответ.

$$\frac{-2x^7+4x^6-2x^5+5x^4+2x^3+5x^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{x+3}{x^2+1}-\frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{2x-1}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Задача 16. Разложите в сумму простейших дробно-рациональную функцию, заданную выражением

$$\frac{-2x^7+4x^6-2x^5+5x^4+2x^3+5x^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^3}.$$

Ответ.

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?