Министерство науки и высшего образования РФ
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Ю. Б. Мельников

Элементы канторовской «наивной» теории множеств

Раздел электронного учебника
для сопровождения лекции

e-mail:
UriiMelnikov58@gmail.com

Екатеринбург
2020

I. Инструкция к пособию **6**

II. Сравнение множеств по мощности **15**

II.1. Счетные множества 26

II.2. Теорема о несчетности континуума 27

II.3. Континуум 44

II.4. Теорема Кантора 46

III. Ординалы и кардиналы **60**

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность 64

III.2. Построение ординалов и кардиналов 81

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала 157

III.4. Критерий ординала 174

III.5. Теорема об элементах ординала 191
III.6. Теорема о трансфинитной индукции 193
III.7. Теорема о наименьшем ординале 211
III.8. Соглашение об ординалах и кардиналах 214
III.9. Теорема Кантора-Бернштейна 215
III.9.1. Гипотеза индукции 217
III.9.2. База индукции 219
III.9.3. Непредельный шаг индукции 235
III.9.4. Предельный шаг индукции 253
III.9.5. Ограниченность параметра индукции 259

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств 263

Пример 1 сравнения конечных множеств по мощности 283

Пример 2 сравнения бесконечных множеств по мощности 302

Пример 3 мощности множества подмножеств конечного множества 325

Пример 4 оценки мощности декартова произведения 360

Пример 5 оценки мощности множеств некоторых подмножеств 390

Пример 6 оценки мощности объединения множеств 450

Пример 7 к теореме Кантора-Бернштейна 491

Задачи для самостоятельного решения 551

Задача IV.1 552

Задача IV.2 553

Задача IV.3 554

Задача IV.4 555

Задача IV.5 556

Задача IV.6 557

Задача IV.7 558

Ответы и решения 559

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для корректной работы тестов следует применять компьютеры с процессором архитектуры с `Intel x-86`.

Электронный учебник представляет собой систему из основного файла `0000Spisok.pdf` со ссылками на файлы `00Set.pdf`, `00Matrix.pdf`, `00AnalGeom.pdf`, `00LinAlgebra.pdf`, и файлы с тестами для обучения и самоконтроля, которые следует просматривать с помощью программы `Adobe Reader`.

Кроме того, имеются гиперссылки на пособия **«Математический анализ»** и **«Элементарная математика».**

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения. Имеются гиперссылки на тесты для самообучения и самоконтроля.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

В программе `Adobe Reader` и `Acrobat Reader` переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для того, чтобы ***вызвать панель навигации*** в `Acrobat Reader` надо, во-первых, выйти из полноэкранного режима (например, нажатием `Esc`), и, во-вторых, нажать клавишу `F4` и выбрать на левой вертикальной панели вертикальный флажок «Закладки» 🔖.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу `Adobe Reader 11`, `Acrobat Reader DC` или более поздней версии. В крайнем случае можно использовать `Adobe Reader` версии 8 или 9 (но не 10).

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и $\leftarrow$ (в `Adobe Reader X` может не работать).

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. Сравнение множеств по мощности

Важнейшей характеристикой конечного множества является количество элементов в этом множестве.

II. Сравнение множеств по мощности

Важнейшей характеристикой конечного множества является количество элементов в этом множестве.

Мы собираемся обобщить на бесконечные множества понятие «количество элементов» и сравнение множеств по числу элементов.

II. Сравнение множеств по мощности

Как понять, что во множестве B больше элементов, чем в A, если мы не умеем считать?

Рассмотрим пример?

II. Сравнение множеств по мощности

Определение 1. *Говорят, что множество* A **не превосходит по мощности** *множество* B, *если существует такое* ***взаимно однозначное отображение*** f, *что* $\boldsymbol{D(f) = A}$ *и* $\boldsymbol{E(f) \subseteq B}$.

Тот факт, что мощность множество A не превосходит по мощности множество B записывается следующим образом: $|A| \leq |B|$.

II. Сравнение множеств по мощности

Определение 1. *Говорят, что множество* A **не превосходит по мощности** *множество* B, *если существует такое* ***взаимно однозначное отображение*** f, *что* $\boldsymbol{D(f) = A}$ *и* $\boldsymbol{E(f) \subseteq B}$.

Тот факт, что мощность множество A не превосходит по мощности множество B записывается следующим образом: $|A| \leq |B|$.

Очевидно, что отношение $|A| \leq |B|$ на множестве всех подмножеств некоторого множества является отношением частичного порядка.

II. Сравнение множеств по мощности

Определение 1. *Говорят, что множество* A **не превосходит по мощности** *множество* B, *если существует такое* ***взаимно однозначное отображение*** f, *что* $D(f) = A$ *и* $E(f) \subseteq B$.

Определение 2. *Говорят, что множества* A *и* B **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств** A *и* B **равны** *тогда и только тогда, когда* $|A| \leq |B|$ *и* $|B| \leq |A|$. *Утверждение, что мощности множеств* A *и* B *равны записывается так:* $|A| = |B|$.

Рассмотреть пример?

II. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств A и B равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

Таким образом, если $|A| = |B|$, то существуют **взаимно однозначные функции** $f : A \mapsto B$ и $g : B \mapsto A$, причем, вообще говоря, может быть $E(f) \subset B$ (в частности, $E(f) \neq B$) или $E(g) \subset A$ (в частности, $E(g) \neq A$).

II. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств A и B равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

Возникает естественный вопрос: если $|A| = |B|$, то нельзя ли подобрать такую **взаимно однозначную функцию** $h : A \mapsto B$, что $E(h) = B$? Тогда вместо f можно было бы взять h, а вместо g — функцию h^{-1}.

II. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств A и B равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \le |B|$ и $|B| \le |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

В **примере** в качестве такой функции h можно взять $h(z) = 2|z| + \frac{1}{2}(\mathrm{sign}(z + 0.5) + 1)$, то есть функцию, имеющую таблицу значений

x	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(x)$	$\ldots$	4	2	1	3	5	$\ldots$

которую можно записать и так:

x	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$g(x)$	1	2	3	4	5	$\ldots$

II. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств A и B равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

Возникает естественный вопрос: если $|A| = |B|$, то нельзя ли подобрать такую **взаимно однозначную функцию** $h : A \mapsto B$, что $E(h) = B$? Тогда вместо f можно было бы взять h, а вместо g — функцию h^{-1}. Для того чтобы **доказать существование такой функции**, нам необходимо овладеть некоторой специальной техникой доказательства: методом трансфинитной индукции, и обосновать корректность этого метода (и найти границы применимости).

II. Сравнение множеств по мощности

Определение 2. *Говорят, что множества A и B* **равномощны** *или, иными словами, что* **мощности множеств A и B равны** *тогда и только тогда, когда $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Утверждение, что мощности множеств A и B равны записывается так: $|A| = |B|$.*

Возникает естественный вопрос: если $|A| = |B|$, то нельзя ли подобрать такую **взаимно однозначную функцию** $h : A \mapsto B$, что $E(h) = B$? Тогда вместо f можно было бы взять h, а вместо g — функцию h^{-1}. Для того чтобы **доказать существование такой функции**, нам необходимо овладеть некоторой специальной техникой доказательства: методом трансфинитной индукции, и обосновать корректность этого метода (и найти границы применимости).

II.1. Счетные множества

Определение 3. *Множество,* ***равномощное*** *множеству* $\mathbb{N}$*, называется* **счетным**.

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство.

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$*, является несчетным.*

Доказательство. Всякое действительное число из $[0;1]$ можно однозначно представить в виде десятичной дроби $0.\alpha_1\alpha_2\ldots$, где для сколь угодно большого номера N найдется такой номер $n > N$, что $\alpha_n \neq 9$.

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$*, является несчетным.*

Доказательство. Всякое действительное число из $[0;1]$ можно однозначно представить в виде десятичной дроби $0.\alpha_1\alpha_2\ldots$, где для сколь угодно большого номера N найдется такой номер $n > N$, что $\alpha_n \neq 9$.

Последнее уточнение вызвано тем, что, например, $1 = 0.99999\ldots$.

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$*, является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$f(0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots) = 1,$

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$f(0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots) = 1,$

$f(0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots) = 2,$

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$f(0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots) = 1,$

$f(0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots) = 2,$

$f(0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots) = 3,$

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$f(0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots) = 1,$

$f(0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots) = 2,$

$f(0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots) = 3,$

$\ldots$

$f(0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots) =$

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$f(0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots) = 1,$

$f(0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots) = 2,$

$f(0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots) = 3,$

$\ldots$

$f(0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots) = n,$

$\ldots$

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{l|l}
0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots \;\mapsto\; 0, \beta_1 & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & \\
0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \\
\ldots & \ldots \\
0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots &
\end{array}
$$

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{l}
0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots \\
0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots \\
0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots \\
0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots
\end{array}
\quad\mapsto\quad 0, \beta_1\beta_2
$$

$$
\begin{array}{l}
\beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
\beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
\\
\ldots
\end{array}
$$

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{l|l}
0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & \\
0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & \\
0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots \mapsto\ 0, \beta_1\beta_2\beta_3 & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
\ldots & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \beta_3 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
 & \ldots
\end{array}
$$

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{rcl|l}
0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & & & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \mapsto & & \beta_3 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\ldots & & & \ldots \\
0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \mapsto & 0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n & \beta_n \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_n \neq \alpha_{nn}
\end{array}
$$

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{rcl|l}
0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & & & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \mapsto & & \beta_3 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\ldots & & & \ldots \\
0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \mapsto & 0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n & \beta_n \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_n \neq \alpha_{nn}
\end{array}
$$

Пусть $f(0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots) = k$. Тогда

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{rcl|l}
0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & & & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \mapsto & & \beta_3 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\ldots & & & \ldots \\
0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \mapsto & 0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n & \beta_n \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_n \neq \alpha_{nn}
\end{array}
$$

Пусть $f(0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots) = k$. Тогда

$f(0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots) = k = f(0, \alpha_{k1}\alpha_{k2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{kk}\ldots)$, но, по выбору элементов β_i, имеем $\beta_k \neq \alpha_{kk}$.

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{rcl|l}
0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & & & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \mapsto & & \beta_3 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\ldots & & & \ldots \\
0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \mapsto & 0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n & \beta_n \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_n \neq \alpha_{nn}
\end{array}
$$

Пусть $f(0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots) = k$. Тогда

$f(0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots) = k = f(0, \alpha_{k1}\alpha_{k2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{kk}\ldots)$, но, по выбору элементов β_i, имеем $\beta_k \neq \alpha_{kk}$.

Это противоречит **взаимной однозначности** f.

II.2. Теорема о несчетности континуума

Теорема 1 (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку* $[0;1]$, *является несчетным.*

Доказательство. Пусть удалось построить **взаимно однозначную функцию** $f : [0;1] \mapsto \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{rcl|l}
0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots & & & \beta_1 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_1 \neq \alpha_{11} \\
0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots & & & \beta_2 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_2 \neq \alpha_{22} \\
0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots & \mapsto & & \beta_3 \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_3 \neq \alpha_{33} \\
\ldots & & & \ldots \\
0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots & \mapsto & 0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n & \beta_n \in \{0;1;\ldots;8\},\ \beta_n \neq \alpha_{nn}
\end{array}
$$

Значит, предположение о существовании такой функции f было неверным, то есть множество $[0,1]$ несчетно.

II.3. Континуум

Определение 4. *Множество, равномощное множеству всех действительных чисел из* $[0;1]$, *называется* **континуальным**, *или* **множеством мощности континуум**.

II.3. Континуум

Определение 4. *Множество, равномощное множеству всех действительных чисел из* $[0;1]$, *называется* **континуальным**, *или* **множеством мощности континуум**.

У людей «со слабыми нервами» (или плохим образованием) иногда складывается впечатление, что континуум — это невообразимо большое множество, больше которого (по мощности) множеств не бывает. На самом деле это не так. Более того, «самого большого» (по мощности) множества не существует, как показывает следующая теорема.

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство.

Рассмотреть пример-обоснование обозначения 2^X?

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Очевидно, что $|X| \leq \left|2^X\right|$.

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y$

$f(Y) \notin Y$

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow$
$f(Y) \notin Y$

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y$,

$f(Y) \notin Y$

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y,$

$f(Y) \notin Y \;\Rightarrow\; f(Y) \notin f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow$

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y,$$
$$f(Y) \notin Y \;\Rightarrow\; f(Y) \notin f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \in Y,$$

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y,$

$f(Y) \notin Y \;\Rightarrow\; f(Y) \notin f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \in Y,$

противоречие.

II.4. Теорема Кантора

Теорема 2. *Если X — множество и 2^X — множество всех его подмножеств, то $|X| < \left|2^X\right|$.*

Доказательство. Пусть $|X| = \left|2^X\right|$.

Тогда существует **взаимно однозначная функция** $f : 2^X \mapsto X$.

Рассмотрим $Y = \left\{ y \,\middle|\, y \notin f^{-1}(y) \right\}$. По определению **обратной функции** для любого $Y \subseteq X$ имеем $Y = f^{-1}(f(Y))$.

Возможны 2 случая:

$$f(Y) \in Y \;\Rightarrow\; f(Y) \in f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \notin Y,$$
$$f(Y) \notin Y \;\Rightarrow\; f(Y) \notin f^{-1}(f(Y)) \;\Rightarrow\; f(Y) \in Y,$$

противоречие. Теорема доказана.

II.4. Теорема Кантора

Долгое время математиков волновала проблема: существует ли множество «промежуточной мощности», то есть мощности, большей счетной, но меньше континуальной. Как оказалось, ответить на этот вопрос в рамках традиционных теорий множеств (о них мы будем говорить ниже, в разделе, посвященном аксиоматическим теориям множеств) однозначно нельзя: добавление к списку аксиом любой из «традиционных» теорий множеств аксиомы о существовании такого множества или аксиомы о несуществовании такого множества не нарушает непротиворечивости исходной теории множеств.

III. Ординалы и кардиналы

Заметим, что натуральные числа в «обыденной жизни» выполняют, как правило, две основных функции:

III. Ординалы и кардиналы

Заметим, что натуральные числа в «обыденной жизни» выполняют, как правило, две основных функции:

— с одной стороны, служат для измерения количества («в автомобиле едет *три* человека», «у человека должно быть *пять* пальцев на руках» и т.п.);

III. Ординалы и кардиналы

Заметим, что натуральные числа в «обыденной жизни» выполняют, как правило, две основных функции:

— с одной стороны, служат для измерения количества («в автомобиле едет *три* человека», «у человека должно быть *пять* пальцев на руках» и т.п.);

с другой стороны, позволяют упорядочивать конечные множества («я стоял *пятым* в очереди», «Вы являетесь *сотым* посетителем выставки» и т.п.).

III. Ординалы и кардиналы

Заметим, что натуральные числа в «обыденной жизни» выполняют, как правило, две основных функции:

— с одной стороны, служат для измерения количества («в автомобиле едет *три* человека», «у человека должно быть *пять* пальцев на руках» и т.п.);

с другой стороны, позволяют упорядочивать конечные множества («я стоял *пятым* в очереди», «Вы являетесь *сотым* посетителем выставки» и т.п.).

Хотелось бы получить аналогичные «инструменты» и для бесконечных множеств, чтобы говорить, например, *мощность множества такая-то*, или упорядочивать бесконечные множества.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* Π*, если постоянное применение* Π *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Приведем аналогию из замечательной «сказки для научных сотрудников младшего возраста» Аркадия и Бориса Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Там Кощей Бессмертный «содержался в бесконечном предварительном заключении, пока велось бесконечное следствие о его бесконечных преступлениях».

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Там Кощей Бессмертный «содержался в бесконечном предварительном заключении, пока велось бесконечное следствие о его бесконечных преступлениях».

Здесь явно имеется в виду тот факт, что сколько бы ни прошло времени, следствие по делу Кощея Бессмертного не закончится.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Там Кощей Бессмертный «содержался в бесконечном предварительном заключении, пока велось бесконечное следствие о его бесконечных преступлениях».

Здесь явно имеется в виду тот факт, что сколько бы ни прошло времени, следствие по делу Кощея Бессмертного не закончится.

Но при такой постановке вопроса предполагается, что в каждый момент с начала следствия прошло *конечное* время.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Там Кощей Бессмертный «содержался в бесконечном предварительном заключении, пока велось бесконечное следствие о его бесконечных преступлениях».

С другой стороны, Саша Привалов, герой этого романа, (который в Новогоднюю ночь дежурит в НИИЧАВО — «научно-исследовательском институте чародейства и волшебства») размышляет над следующим вопросом:

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Там Кощей Бессмертный «содержался в бесконечном предварительном заключении, пока велось бесконечное следствие о его бесконечных преступлениях».

«...Если где-нибудь в бесконечно удаленной от нас точке времени Кощея и приговорят, то судьи, кто бы они ни были, окажутся в очень странном положении: смертную казнь к бессмертному преступнику применить невозможно, а вечное заключение, если учесть предварительное, он уже отбыл...»

С другой стороны, Саша Привалов, герой этого романа, (который в Новогоднюю ночь дежурит в НИИЧАВО — «научно-исследовательском институте чародейства и волшебства») размышляет над следующим вопросом:

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Там Кощей Бессмертный «содержался в бесконечном предварительном заключении, пока велось бесконечное следствие о его бесконечных преступлениях».

«...Если где-нибудь в бесконечно удаленной от нас точке времени Кощея и приговорят, то судьи, кто бы они ни были, окажутся в очень странном положении: смертную казнь к бессмертному преступнику применить невозможно, а вечное заключение, если учесть предварительное, он уже отбыл...»

В данном случае подход к ситуации существенно изменился: предлагается рассмотреть «объект» (в данном случае время следствия) *в целом*, весь, а не сколь угодно большую, но все-таки *конечную часть* этого объекта.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Там Кощей Бессмертный «содержался в бесконечном предварительном заключении, пока велось бесконечное следствие о его бесконечных преступлениях».

«...Если где-нибудь в бесконечно удаленной от нас точке времени Кощея и приговорят, то судьи, кто бы они ни были, окажутся в очень странном положении: смертную казнь к бессмертному преступнику применить невозможно, а вечное заключение, если учесть предварительное, он уже отбыл...»

В данном случае подход к ситуации существенно изменился: предлагается рассмотреть «объект» (в данном случае время следствия) *в целом*, весь, а не сколь угодно большую, но все-таки *конечную часть* этого объекта.

Это переход к **актуальной бесконечности**.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Другой пример: представим себе строящееся бесконечное в одну сторону шоссе.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Другой пример: представим себе строящееся бесконечное в одну сторону шоссе.

В каждый момент времени построен только конечный участок этого шоссе.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Другой пример: представим себе строящееся бесконечное в одну сторону шоссе.

В каждый момент времени построен только конечный участок этого шоссе.

Можно ли поставить вопрос, например, об использовании этого шоссе *после* того, как оно *все* будет покрыто асфальтом?

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Аналогия из книги Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Другой пример: представим себе строящееся бесконечное в одну сторону шоссе.

В каждый момент времени построен только конечный участок этого шоссе.

Можно ли поставить вопрос, например, об использовании этого шоссе *после* того, как оно *все* будет покрыто асфальтом?

Это вопрос о шоссе как актуально бесконечном множестве.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Следует ли признавать существование актуально бесконечных множеств?

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Следует ли признавать существование актуально бесконечных множеств?

С одной стороны, это вопрос веры (подобно тому, как он ставится в религиях), а с другой стороны, еще и вопрос удобства и непротиворечивости теорий, в которых принимается или не принимается соответствующая гипотеза.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Следует ли признавать существование актуально бесконечных множеств?

С одной стороны, это вопрос веры (подобно тому, как он ставится в религиях), а с другой стороны, еще и вопрос удобства и непротиворечивости теорий, в которых принимается или не принимается соответствующая гипотеза.

Отметим, что отрицание существования актуально бесконечных множеств существенно обедняет математику, принуждает к отказу от использования многих важных математических теорем и методов.

III.1. Актуальная и потенциальная бесконечность

«Объект» считается ***потенциально бесконечным*** *относительно процедуры* П*, если постоянное применение* П *не приводит к исчерпанию соответствующего «ресурса» этого объекта.*

Следует ли признавать существование актуально бесконечных множеств?

С одной стороны, это вопрос веры (подобно тому, как он ставится в религиях), а с другой стороны, еще и вопрос удобства и непротиворечивости теорий, в которых принимается или не принимается соответствующая гипотеза.

Отметим, что отрицание существования актуально бесконечных множеств существенно обедняет математику, принуждает к отказу от использования многих важных математических теорем и методов.

Поэтому сегодня, как правило, в математических теориях признается существование актуально бесконечных множеств.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Оглянитесь вокруг, попрощайтесь с этим «материальным миром»...

Сейчас все станет зыбким и абстрактным...

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас мы «докажем», что «математики ближе всех к богу».

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас мы «докажем», что «математики ближе всех к богу».

Надеюсь, вы поняли, что это шутка.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас мы «докажем», что «математики ближе всех к богу».

Бог создал мир из ничего.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас мы «докажем», что «математики ближе всех к богу».

Бог создал мир из ничего. Мы займемся тем же самым.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас мы «докажем», что «математики ближе всех к богу».

Бог создал мир из ничего. Мы займемся тем же самым.

Пустое множество — подходящий кандидат на роль «ничего»?

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас мы «докажем», что «математики ближе всех к богу».

Бог создал мир из ничего. Мы займемся тем же самым.

Пустое множество — подходящий кандидат на роль «ничего»?

Будем строить мир из пустого множества!

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас мы «докажем», что «математики ближе всех к богу».

Бог создал мир из ничего. Мы займемся тем же самым.

Пустое множество — подходящий кандидат на роль «ничего»?

Будем строить мир из пустого множества!

Весь мир — это очень много. Надо бы сократить выкладки...

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас мы «докажем», что «математики ближе всех к богу».

Бог создал мир из ничего. Мы займемся тем же самым.

Пустое множество — подходящий кандидат на роль «ничего»?

Будем строить мир из пустого множества!

Весь мир — это очень много. Надо бы сократить выкладки...

Известному математику Леопольд Кронекеру приписывают фразу «Господь сотворил целые числа, остальное — дело рук человека».

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас мы «докажем», что «математики ближе всех к богу».

Бог создал мир из ничего. Мы займемся тем же самым.

Пустое множество — подходящий кандидат на роль «ничего»?

Будем строить мир из пустого множества!

Весь мир — это очень много. Надо бы сократить выкладки...

Известному математику Леопольд Кронекеру приписывают фразу «Господь сотворил целые числа, остальное — дело рук человека».

Достаточно из ничего (из пустого множества) построить натуральные числа! Ура спасительному Кронекеру!

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас из пустого множества мы сотворим *ординалы*, называемые также *ординальными числами*, которые играют роль «номеров» (первый, второй, третий,...), в том числе и для упорядочения бесконечных множеств!

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас из пустого множества мы сотворим *ординалы*, называемые также *ординальными числами*, которые играют роль «номеров» (первый, второй, третий,...), в том числе и для упорядочения бесконечных множеств!

Применим стратегию поиска и использования аналогии.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас из пустого множества мы сотворим *ординалы*, называемые также *ординальными числами*, которые играют роль «номеров» (первый, второй, третий,...), в том числе и для упорядочения бесконечных множеств!

$1 < 2 < 3 < \dots$

Применим стратегию поиска и использования аналогии.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас из пустого множества мы сотворим *ординалы*, называемые также *ординальными числами*, которые играют роль «номеров» (первый, второй, третий,...), в том числе и для упорядочения бесконечных множеств!

$1 < 2 < 3 < \dots$

В качестве отношения меньше возьмем

Применим стратегию поиска и использования аналогии.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас из пустого множества мы сотворим *ординалы*, называемые также *ординальными числами*, которые играют роль «номеров» (первый, второй, третий,...), в том числе и для упорядочения бесконечных множеств!

$1 < 2 < 3 < \dots$

В качестве отношения меньше возьмем

А какое отношение можно взять в качестве $<$?

Применим стратегию поиска и использования аналогии.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас из пустого множества мы сотворим *ординалы*, называемые также *ординальными числами*, которые играют роль «номеров» (первый, второй, третий,...), в том числе и для упорядочения бесконечных множеств!

$1 < 2 < 3 < \ldots$

В качестве отношения меньше возьмем

А какое отношение можно взять в качестве $<$?

Базовым отношением в теории множеств является

Применим стратегию поиска и использования аналогии.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас из пустого множества мы сотворим *ординалы*, называемые также *ординальными числами*, которые играют роль «номеров» (первый, второй, третий,...), в том числе и для упорядочения бесконечных множеств!

$1 < 2 < 3 < \ldots$

В качестве отношения меньше возьмем

А какое отношение можно взять в качестве $<$?

Базовым отношением в теории множеств является $\in$.

Применим стратегию поиска и использования аналогии.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сейчас из пустого множества мы сотворим *ординалы*, называемые также *ординальными числами*, которые играют роль «номеров» (первый, второй, третий,...), в том числе и для упорядочения бесконечных множеств!

$1 < 2 < 3 < \dots$

В качестве отношения меньше возьмем $\in$.

А какое отношение можно взять в качестве $<$?

Базовым отношением в теории множеств является $\in$.

Применим стратегию поиска и использования аналогии.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Построим цепочку множеств $\emptyset \in ... \in ...$, причем $\in$ должно быть транзитивным.

Сейчас из пустого множества мы сотворим *ординалы*, называемые также *ординальными числами*, которые играют роль «номеров» (первый, второй, третий,...), в том числе и для упорядочения бесконечных множеств!

$1 < 2 < 3 < \ldots$

В качестве отношения меньше возьмем $\in$.

А какое отношение можно взять в качестве $<$?

Базовым отношением в теории множеств является $\in$.

Применим стратегию поиска и использования аналогии.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Построим цепочку множеств $\emptyset \in ... \in ...$, причем $\in$ должно быть транзитивным.

Транзитивность: если $A \in B \in C$, то должно быть

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Построим цепочку множеств $\emptyset \in ... \in ...$, причем $\in$ должно быть транзитивным.

Транзитивность: если $A \in B \in C$, то должно быть $A \in C$.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Построим цепочку множеств $\emptyset \in ... \in ...$, причем $\in$ должно быть транзитивным.

Транзитивность: если $A \in B \in C$, то должно быть $A \in C$.

$A \in B \Rightarrow A \in C$ по определению означает

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Построим цепочку множеств $\emptyset \in ... \in ...$, причем $\in$ должно быть транзитивным.

Транзитивность: если $A \in B \in C$, то должно быть $A \in C$.

$A \in B \Rightarrow A \in C$ по определению означает A C

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Построим цепочку множеств $\emptyset \in ... \in ...$, причем $\in$ должно быть транзитивным.

Транзитивность: если $A \in B \in C$, то должно быть $A \in C$.

$A \in B \Rightarrow A \in C$ по определению означает $A \subseteq C$.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Построим цепочку множеств $\emptyset \in ... \in ...$, причем $\in$ должно быть транзитивным, т.е. всякий элемент является подмножеством.

Транзитивность: если $A \in B \in C$, то должно быть $A \in C$.

$A \in B \Rightarrow A \in C$ по определению означает $A \subseteq C$.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$1 <$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 <$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 < 2$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 <\ 2$

$= 2$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 < \ 2$

$1 + 1 = 2$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 < 2$

$1 + 1 = 2$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 < 2$

$1 + 1 = 2 \to \emptyset$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 < 2$

$1 + 1 = 2 \to \emptyset$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 < \ 2$

$1 + 1 = 2 \rightarrow \ \emptyset \cup \{\ \}$.

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 < \ 2$

$1 + 1 = 2 \rightarrow \ \emptyset \cup \{\ \}$.

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in$

$1 < \ 2$

$1 + 1 = 2 \rightarrow \ \emptyset \cup \{\emptyset\}$.

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\}$

$1 < 2$

$1 + 1 = 2 \rightarrow \emptyset \cup \{\emptyset\}$.

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < \ 2 \ <$

$1 + 1 = 2 \rightarrow \ \emptyset \cup \{\emptyset\}$.

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < \ 2 \ < \quad 3$

$1 + 1 = 2 \rightarrow \ \emptyset \cup \{\emptyset\}$.

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < \ 2 \ < \quad 3$

$= 3$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < \ 2 \ < \quad 3$

$2 + 1 = 3$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < 2 < 3$

$2 + 1 = 3$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < 2 < 3$

$2 + 1 = 3 \to \{\emptyset\}$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < \ 2 \ < \quad 3$

$2 + 1 = 3 \rightarrow \ \{\emptyset\}$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < \ 2 \ < \quad 3$

$2 + 1 = 3 \rightarrow \ \{\emptyset\} \cup \{\qquad\}.$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < 2 < 3$

$2 + 1 = 3 \to \{\emptyset\} \cup \{\quad\}.$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in$

$1 < 2 < 3$

$2 + 1 = 3 \to \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$1 < \ 2 \ < \quad 3$

$2 + 1 = 3 \rightarrow \ \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < \ 2 \ < \quad 3 \quad <$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < \ 2 \ < \quad 3 \quad < \qquad 4$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < 2 < 3 < 4$

$= 4$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < 2 < 3 < 4$

$3 + 1 = 4$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < 2 < 3 < 4$

$3 + 1 = 4$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < 2 < 3 < 4$

$3 + 1 = 4 \to \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < 2 < 3 < 4$

$3 + 1 = 4 \rightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < 2 < 3 < 4$

$3 + 1 = 4 \to \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\quad\}.$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < 2 < 3 < 4$

$3 + 1 = 4 \to \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\quad\}.$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in$

$1 < 2 < 3 < 4$

$3 + 1 = 4 \to \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$1 < 2 < 3 < 4$

$3 + 1 = 4 \rightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \dots$

$1 < \ 2 \ < \quad 3 \quad < \qquad 4 \qquad < \dots$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in$

$1 < \ 2 \ < \quad 3 \quad < \qquad 4 \qquad < \ldots < n <$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in$

$1 < \ 2 \ < \quad 3 \quad < \qquad 4 \qquad < \ldots < n < \ n+1$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\}$$

$$1 < \ 2 \ < \quad 3 \quad < \qquad 4 \qquad < \ldots < n < \ n+1$$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$$

$$1 < \ 2 \ < \quad 3 \quad < \qquad 4 \qquad < \ldots < n < \ n+1 \ < \ldots$$

Сначала построим конечные кардиналы.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$$

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$$

Определение 5. *Ординал* α, *представимый в виде* $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, *называется* **непредельным ординалом.**

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$$

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$$

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Если α — конечный ординал, то $|\alpha + 1| > |\alpha|$.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$

$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Если α — конечный ординал, то $|\alpha + 1| > |\alpha|$.

Если α — предельный ординал (в частности, α бесконечен), то $|\alpha + 1| = |\alpha|$.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$

$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Если α — конечный ординал, то $|\alpha + 1| > |\alpha|$.

Если α — предельный ординал (в частности, α бесконечен), то $|\alpha + 1| = |\alpha|$.

Очевидно, что если α — предельный ординал (в частности, он бесконечен) и $|\beta| > |\alpha|$, то β — предельный ординал.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$

$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Если α — конечный ординал, то $|\alpha + 1| > |\alpha|$.

Если α — предельный ординал (в частности, α бесконечен), то $|\alpha + 1| = |\alpha|$.

Очевидно, что если α — предельный ординал (в частности, он бесконечен) и $|\beta| > |\alpha|$, то β — предельный ординал.

Если бы $\alpha = \beta + 1 =$

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$

$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Если α — конечный ординал, то $|\alpha + 1| > |\alpha|$.

Если α — предельный ординал (в частности, α бесконечен), то $|\alpha + 1| = |\alpha|$.

Очевидно, что если α — предельный ординал (в частности, он бесконечен) и $|\beta| > |\alpha|$, то β — предельный ординал.

Если бы $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$,

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$

$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Если α — конечный ординал, то $|\alpha + 1| > |\alpha|$.

Если α — предельный ординал (в частности, α бесконечен), то $|\alpha + 1| = |\alpha|$.

Очевидно, что если α — предельный ординал (в частности, он бесконечен) и $|\beta| > |\alpha|$, то β — предельный ординал.

Если бы $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, то $|\alpha| = |\beta|$, что противоречит условию.

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$$

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Определение 7. *Ординал α называется* **кардиналом** *или* **кардинальным числом**, *если $\beta < \alpha \Rightarrow |\beta| < |\alpha|$.*

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$$

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Определение 7. *Ординал α называется* **кардиналом** *или* **кардинальным числом**, *если $\beta < \alpha \Rightarrow |\beta| < |\alpha|$.*

Определение 8. *Для любого множества M наименьший относительно $\in$ ординал, равномощный множеству M, называется* **кардинальным числом** *или* **кардиналом** *множества M.*

III.2. Построение ординалов и кардиналов

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \ldots \in n \in n \cup \{n\} \in \ldots$

$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n+1 < \ldots$

Определение 5. *Ординал α, представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, называется* **непредельным ординалом.**

Определение 6. Предельным ординалом *называется ординал α, не представимый в виде $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, он принимается равным $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Определение 7. *Ординал α называется* **кардиналом** *или* **кардинальным числом**, *если $\beta < \alpha \Rightarrow |\beta| < |\alpha|$.*

Определение 8. *Для любого множества M наименьший относительно $\in$ ординал, равномощный множеству M, называется* **кардинальным числом** *или* **кардиналом** *множества M.*

Рассмотрим пример?

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\big\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Рассмотренный выше **четвёртый ординал**

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \subseteq \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

является таковым и согласно этому определению.

III.3. Транзитивное множество и формальное определение ординала

Определение 9. *Множество X называется* **транзитивным** *тогда и только тогда, когда всякий его элемент является его подмножеством, то есть*

$$x \in X \Rightarrow x \subseteq X.$$

Определение 10. *Множество X называется* **ординалом** *тогда и только тогда, когда X — **транзитивное множество** и всякий его элемент также является **транзитивным множеством**.*

Примеры другого рода: множества $\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$ и

$$\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

являются **транзитивными**, но не являются **ординалами**.

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство.

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению ординала** $Y \in Z \Rightarrow$

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению ординала** $Y \in Z \Rightarrow Y \subseteq Z$.

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \in Y, \\ Y \subseteq Z \end{cases} \qquad \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению ординала** $Y \in Z \Rightarrow Y \subseteq Z$.

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X \in Y, \\ Y \subseteq Z \end{cases} \qquad \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению подмножества...**

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \in Y, \\ Y \subseteq Z \end{cases} \Rightarrow \underbrace{X \in Z}_{\text{мечта}}.$$

По **определению подмножества...**

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M — **ординал**. Надо доказать **транзитивность** отношения $\in$: если $\{X, Y, Z\} \subseteq M$, то

$$\left\{\begin{array}{l} X \in Y, \\ Y \in Z \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} X \in Y, \\ Y \subseteq Z \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X \in Z}_{\text{Ура!}}.$$

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \quad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{мечта}}.$$

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \quad (X \in Y \ \Rightarrow \qquad) \qquad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{мечта}}.$$

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \quad (X \in Y \ \Rightarrow \qquad) \qquad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{мечта}}.$$

Отношение $\in$ — **транзитивное**, поэтому

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X \in Z.$$

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \quad (X \in Y \ \Rightarrow \ Y \in Z) \qquad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{мечта}}.$$

Отношение $\in$ — **транзитивное**, поэтому

$$\begin{cases} X \in Y, \\ Y \in Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X \in Z.$$

III.4. Критерий ординала

Теорема 3. *Множество M является* ***ординалом*** *тогда и только тогда, когда отношение $\in$ является на этом множестве* ***транзитивным****.*

Доказательство. Достаточность.

Пусть отношение $\in$ — **транзитивное**.

Если $\{X, Y\} \subseteq M$ и либо $Z = M$, либо $Z \in M$, то

$$Y \in Z \quad \Rightarrow \quad (X \in Y \ \Rightarrow \ Y \in Z) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{Y \subseteq Z}_{\text{Ура!}}.$$

III.5. Теорема об элементах ординала

Теорема 4. *Всякий элемент* ***ординала*** *является* ***ординалом***.

Доказательство.

III.5. Теорема об элементах ординала

Теорема 4. *Всякий элемент* ***ординала*** *является* ***ординалом***.

Доказательство. Это очевидное следствие **критерия ординала**.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Комментарий. Иными словами, пусть φ — некоторое высказывание об **ординалах**, причем

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если φ — утверждение об ординале, причем $\varphi(\emptyset)$ и $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, то $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.*

Комментарий. Иными словами, пусть φ — некоторое высказывание об **ординалах**, причем
$\varphi(\emptyset)$ — истинно (база индукции), и

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если φ — утверждение об ординале, причем $\varphi(\emptyset)$ и $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, то $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.*

Комментарий. Иными словами, пусть φ — некоторое высказывание об **ординалах**, причем
$\varphi(\emptyset)$ — истинно (база индукции), и
для любого **ординала** α, из того, что для любого **ординала** $\beta\in\alpha$ утверждение $\varphi(\beta)$ истинно, следует, что

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Комментарий. Иными словами, пусть φ — некоторое высказывание об **ординалах**, причем
$\varphi(\emptyset)$ — истинно (база индукции), и
для любого **ординала** α, из того, что для любого **ординала** $\beta\in\alpha$ утверждение $\varphi(\beta)$ истинно, следует, что
$\varphi(\alpha)$ также истинно (шаг индукции).

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если φ — утверждение об ординале, причем $\varphi(\emptyset)$ и $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, то $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.*

Комментарий. Иными словами, пусть φ — некоторое высказывание об **ординалах**, причем
$\varphi(\emptyset)$ — истинно (база индукции), и
для любого **ординала** α, из того, что для любого **ординала** $\beta\in\alpha$ утверждение $\varphi(\beta)$ истинно, следует, что
$\varphi(\alpha)$ также истинно (шаг индукции).
Тогда для любого **ординала** α высказывание $\varphi(\alpha)$ истинно.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Доказательство.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Доказательство. От противного.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если φ — утверждение об ординале, причем $\varphi(\emptyset)$ и $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, то $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.*

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0>\emptyset$.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0>\emptyset$. Положим $X=\{\beta\mid(\beta<\alpha_0)\wedge\neg\varphi(\beta)\}$.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0>\emptyset$. Положим $X=\{\beta\mid(\beta<\alpha_0)\wedge\neg\varphi(\beta)\}$.

Если $X=\emptyset$, то из посылки теоремы следует, что $\varphi(\alpha_0)$ — истинно, вопреки предположению.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0>\emptyset$. Положим $X=\{\beta\mid(\beta<\alpha_0)\wedge\neg\varphi(\beta)\}$.

Если $X=\emptyset$, то из посылки теоремы следует, что $\varphi(\alpha_0)$ — истинно, вопреки предположению.

Значит, $X\neq\emptyset$.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0>\emptyset$. Положим $X=\{\beta\mid(\beta<\alpha_0)\wedge\neg\varphi(\beta)\}$.

Если $X=\emptyset$, то из посылки теоремы следует, что $\varphi(\alpha_0)$ — истинно, вопреки предположению.

Значит, $X\neq\emptyset$. Множество X имеет минимальный элемент α_1.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha \left(\forall\beta\ (\beta < \alpha) \to \varphi(\beta)\right) \to \varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0 > \emptyset$. Положим $X = \{\beta \mid (\beta < \alpha_0) \wedge \neg\varphi(\beta)\}$.

Если $X = \emptyset$, то из посылки теоремы следует, что $\varphi(\alpha_0)$ — истинно, вопреки предположению.

Значит, $X \neq \emptyset$. Множество X имеет минимальный элемент α_1.

Но, в силу **транзитивности множества** α_1, получаем, что $\forall\beta\ (\beta < \alpha_1) \to \varphi(\beta)$.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если φ — утверждение об ординале, причем $\varphi(\emptyset)$ и $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, то $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.*

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0>\emptyset$. Положим $X=\{\beta\mid(\beta<\alpha_0)\wedge\neg\varphi(\beta)\}$.

Если $X=\emptyset$, то из посылки теоремы следует, что $\varphi(\alpha_0)$ — истинно, вопреки предположению.

Значит, $X\neq\emptyset$. Множество X имеет минимальный элемент α_1.

Но, в силу **транзитивности множества** α_1, получаем, что $\forall\beta\ (\beta<\alpha_1)\to\varphi(\beta)$.

По предположению индукции тогда $\varphi(\alpha_1)$, что противоречит условию

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если φ — утверждение об ординале, причем $\varphi(\emptyset)$ и $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, то $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.*

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0>\emptyset$. Положим $X=\{\beta\mid(\beta<\alpha_0)\wedge\neg\varphi(\beta)\}$.

Если $X=\emptyset$, то из посылки теоремы следует, что $\varphi(\alpha_0)$ — истинно, вопреки предположению.

Значит, $X\neq\emptyset$. Множество X имеет минимальный элемент α_1.

Но, в силу **транзитивности множества** α_1, получаем, что $\forall\beta\ (\beta<\alpha_1)\to\varphi(\beta)$.

По предположению индукции тогда $\varphi(\alpha_1)$, что противоречит условию

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если φ — утверждение об ординале, причем $\varphi(\emptyset)$ и $\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ (\beta<\alpha)\to\varphi(\beta)\Big)\to\varphi(\alpha)$, то $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.*

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0>\emptyset$. Положим $X=\{\beta\mid(\beta<\alpha_0)\wedge\neg\varphi(\beta)\}$.

Если $X=\emptyset$, то из посылки теоремы следует, что $\varphi(\alpha_0)$ — истинно, вопреки предположению.

Значит, $X\neq\emptyset$. Множество X имеет минимальный элемент α_1.

Но, в силу **транзитивности множества** α_1, получаем, что $\forall\beta\ (\beta<\alpha_1)\to\varphi(\beta)$.

По предположению индукции тогда $\varphi(\alpha_1)$, что противоречит условию $\neg\varphi(\alpha_1)$.

III.6. Теорема о трансфинитной индукции

Теорема 5. *Если* φ *— утверждение об ординале, причем* $\varphi(\emptyset)$ *и* $\forall\alpha \left(\forall\beta\ (\beta < \alpha) \to \varphi(\beta)\right) \to \varphi(\alpha)$, *то* $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\alpha_0\ \neg\varphi(\alpha_0)$. По условию $\varphi(\emptyset)$, поэтому $\alpha_0 > \emptyset$. Положим $X = \{\beta \mid (\beta < \alpha_0) \wedge \neg\varphi(\beta)\}$.

Если $X = \emptyset$, то из посылки теоремы следует, что $\varphi(\alpha_0)$ — истинно, вопреки предположению.

Значит, $X \neq \emptyset$. Множество X имеет минимальный элемент α_1.

Но, в силу **транзитивности множества** α_1, получаем, что $\forall\beta\ (\beta < \alpha_1) \to \varphi(\beta)$.

По предположению индукции тогда $\varphi(\alpha_1)$, что противоречит условию $\neg\varphi(\alpha_1)$.

Теорема доказана.

III.7. Теорема о наименьшем ординале

Теорема 6. *Если* $\exists\alpha\ \varphi(\alpha)$, *то существует наименьший такой* ***ординал*** α, *что* $\varphi(\alpha)$.

Доказательство.

III.7. Теорема о наименьшем ординале

Теорема 6. *Если* $\exists\alpha\ \varphi(\alpha)$, *то существует наименьший такой* ***ординал*** α, *что* $\varphi(\alpha)$.

Доказательство. Пусть это неверно. Докажем тогда, что

$$\forall\alpha\ \Big(\forall\beta\ \beta<\alpha\to\neg\varphi(\beta)\Big)\to\neg\varphi(\alpha). \tag{1}$$

Действительно, отрицание к этой формуле имеет вид

$$\exists\alpha\ \Big(\forall\beta\ \beta<\alpha\to\neg\varphi(\beta)\Big)\wedge\varphi(\alpha),$$

что представляет собой утверждение о том, что α — наименьший такой **ординал**, для которого $\varphi(\alpha)$. Но мы предположили, что это высказывание неверно, значит формулу (1) надо считать истинной. По теореме о трансфинитной индукции получаем, что $\forall\alpha\ \neg\varphi(\alpha)$, что противоречит посылке доказываемой теоремы.

Как мы уже отмечали, натуральным числам соответствуют конечные **ординалы**:

1	2	3	4	...
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	...

Очевидно, что все конечные **ординалы** являются **кардиналами**. В теории множеств натуральные числа просто отождествляются с соответствующими им **ординалами**. Но тут имеется одна «неувязочка»: мы привыкли писать, например, $|\{a, b, c\}| = 3$, а сейчас придется писать $|\{a, b, c\}| = |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|$. Но множество $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, как и число 3, в этом случае фактически является «отметкой» шкалы мощностей множеств. Поэтому в теории множеств приняты следующие соглашения.

III.8. Соглашение об ординалах и кардиналах

Соглашение 1 (**об ординалах и кардиналах**). *Будем использовать следующие обозначения:*

- *если* α *—* ***ординал*** *и* $\beta \in \alpha$*, то будем писать* $\beta < \alpha$*;*
- *пусть* M *— произвольное множество, и* β *— наименьший* ***ординал*** *такой, что* $|M| = |\beta|$*. Тогда,* β *будем называть* **кардинальным числом** *множества* M*, или* **мощностью** *множества* M*. Таким образом, кардиналы в теории множеств играют роль естественной «шкалы мощностей» множеств. Поэтому, во-первых, будем писать* $|M| = \beta$ *(так как кардинал — это и есть мощность множества* M*). Во-вторых, для любого такого* ***ординала*** α*, что* $|M| < |\alpha|$ *будем писать, что* $|M| < \alpha$*. Последнее вызвано тем, что если* β *— мощность множества* M*, то, согласно утверждению «во-первых»,* $|M| = \beta < \alpha$*.*

III.9. Теорема Кантора-Бернштейна

Теорема 7. *Если существуют* ***взаимно однозначные отображения*** f *и* g *множества* A *на подмножество множества* B *и множества* B *на подмножество множества* A*, то существует* ***взаимно однозначное отображение*** h *множества* A *на множество* B*. Иными словами, если* $|A| = |B|$*, то существует* ***взаимно однозначное отображение*** h *множества* A *на множество* B*.*

Доказательство.

III.9. Теорема Кантора-Бернштейна

Теорема 7. *Если существуют* ***взаимно однозначные отображения*** f *и* g *множества* A *на подмножество множества* B *и множества* B *на подмножество множества* A*, то существует* ***взаимно однозначное отображение*** h *множества* A *на множество* B*. Иными словами, если* $|A| = |B|$*, то существует* ***взаимно однозначное отображение*** h *множества* A *на множество* B*.*

Доказательство. Будем строить искомое отображение h индуктивно. Будем заглавными буквами обозначать графики функций, обозначенных соответствующими строчными буквами, то есть, например, для функций s_5 имеем $S_5 = \{(x, s_5(x)) \mid x \in \text{ООФ}(s_5)\}$.

III.9.1. Гипотеза индукции

Гипотеза индукции. *Для любого* ***ординала*** α, *не превосходящего некоторого* ***ординала*** θ, *существуют множества* $A'_\alpha \subseteq A$, $B'_\alpha \subseteq B$ *и отображение* h_α, *причем выполняются следующие утверждения:*

1) для любого $\alpha \leq \theta$ *отображение* h_α *является* ***взаимно однозначным*** *с областью определения* A'_α *и областью значений* B'_α;

2) для любых ***ординалов*** $\beta < \alpha < \theta$ *имеем* $A'_\beta \subset A'_\alpha$ *и* $B'_\beta \subset B'_\alpha$;

3) $A'_\theta = A$, $B'_\theta = B$.

III.9.1. Гипотеза индукции

Гипотеза индукции. *Для любого* ***ординала*** α, *не превосходящего некоторого* ***ординала*** θ, *существуют множества* $A'_\alpha \subseteq A$, $B'_\alpha \subseteq B$ *и отображение* h_α, *причем выполняются следующие утверждения:*

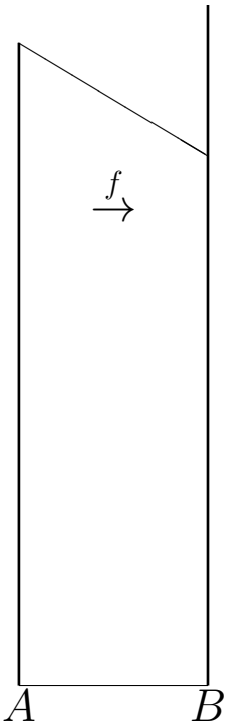
1) для любого $\alpha \leq \theta$ *отображение* h_α *является* ***взаимно однозначным*** *с областью определения* A'_α *и областью значений* B'_α;

2) для любых ***ординалов*** $\beta < \alpha < \theta$ *имеем* $A'_\beta \subset A'_\alpha$ *и* $B'_\beta \subset B'_\alpha$;

3) $A'_\theta = A$, $B'_\theta = B$.

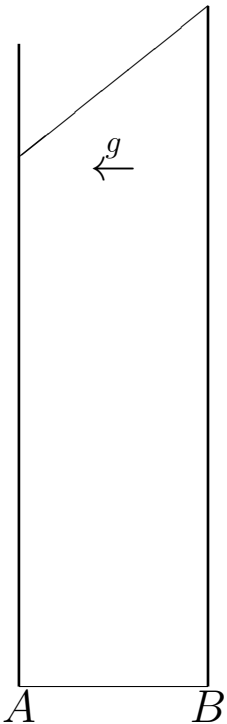
Если докажем гипотезу индукции, то h_θ, очевидно, будет искомым отображением.

III.9.2. База индукции



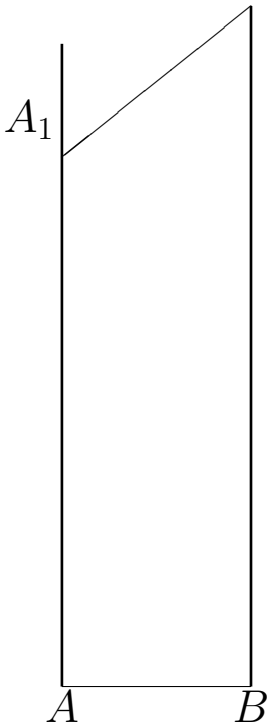
По условию $|A| \leq |B|$, поэтому существует **взаимно однозначная функция** $f : A \to B$.

III.9.2. База индукции

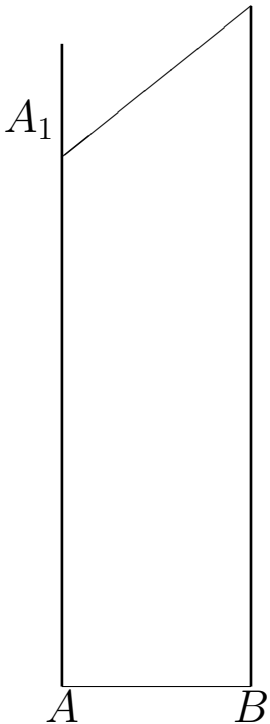


По условию $|A| \leq |B|$, поэтому существует **взаимно однозначная функция** $f : A \to B$.

III.9.2. База индукции

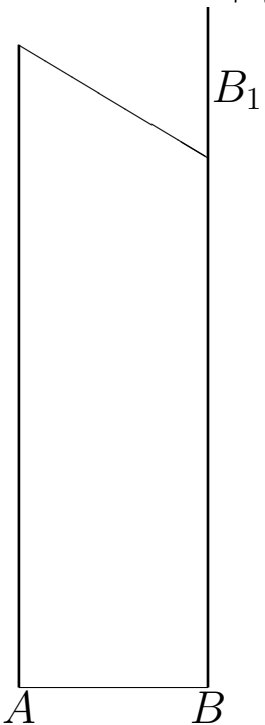


III.9.2. База индукции



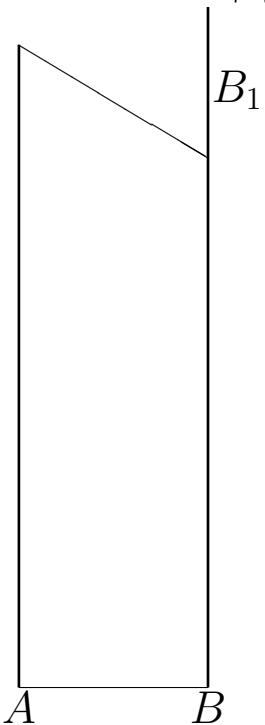
$$A_1 = A \backslash g(B),$$

III.9.2. База индукции



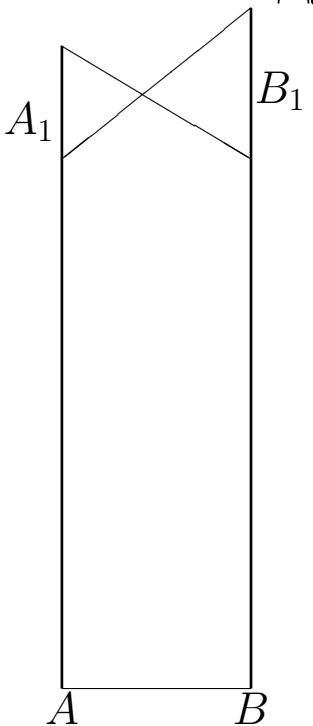
$$A_1 = A \backslash g(B),$$

III.9.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

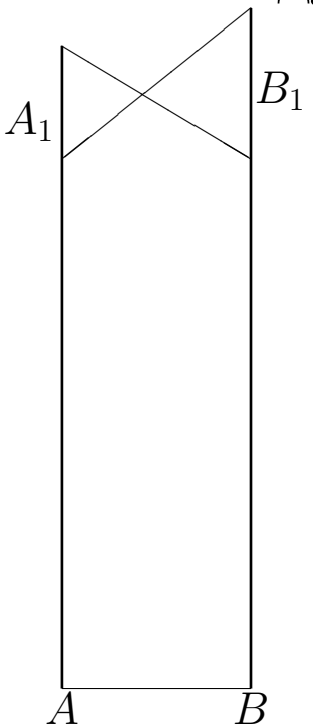
III.9.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

Если $A_1 = \emptyset$, то положим $h = g^{-1}$.

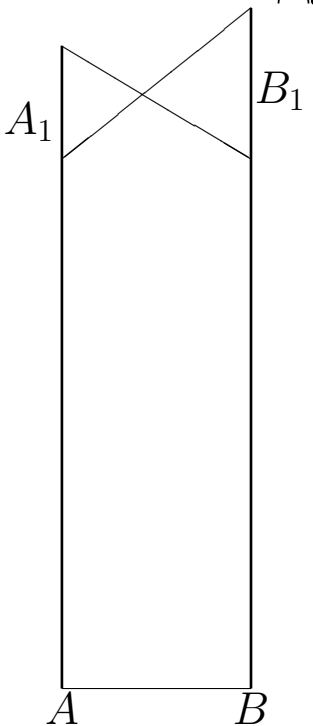
III.9.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

Если $B_1 = \emptyset$, то положим $h = f$.

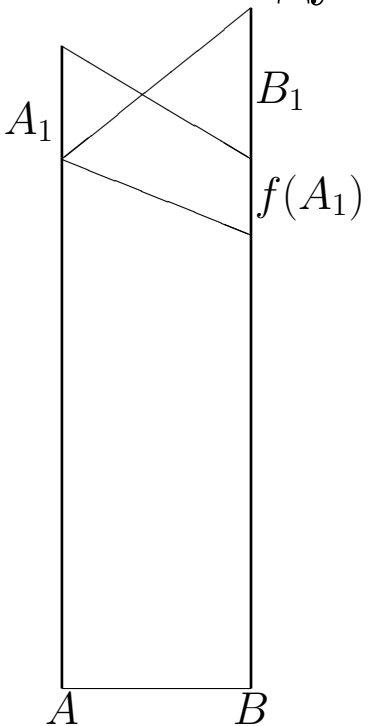
III.9.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

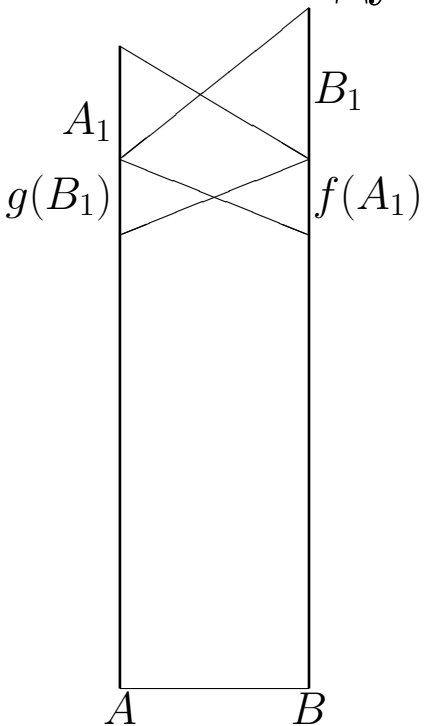
Значит, можно считать, что $A_1 \neq \emptyset$ и $B_1 \neq \emptyset$.

III.9.2. База индукции



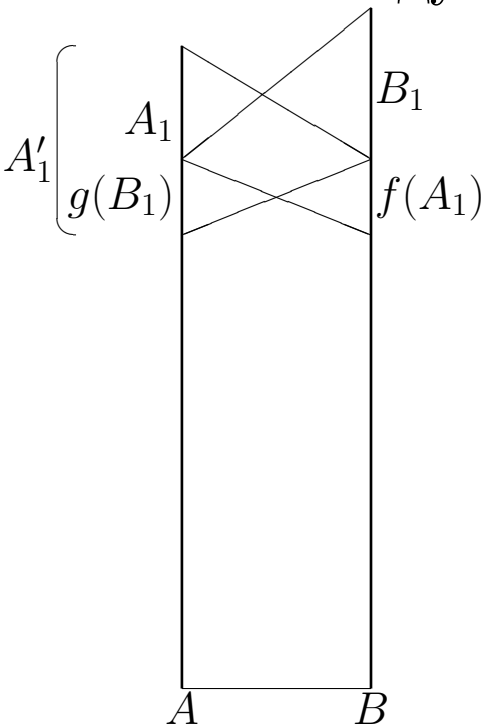
$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

III.9.2. База индукции



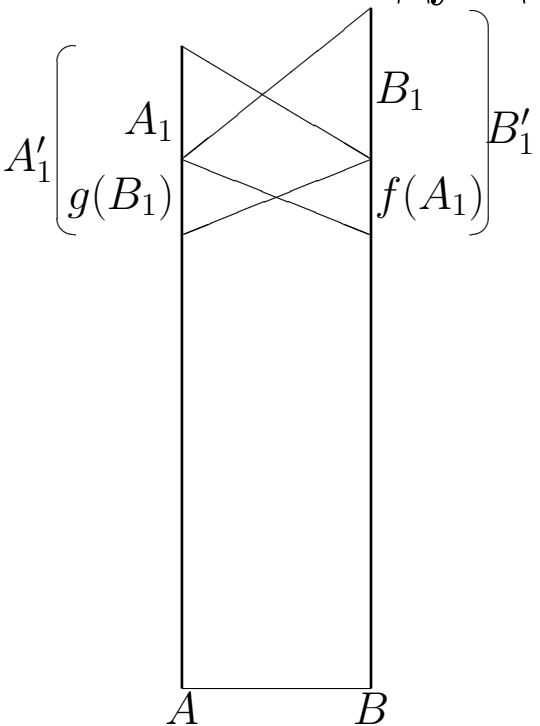
$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$

III.9.2. База индукции



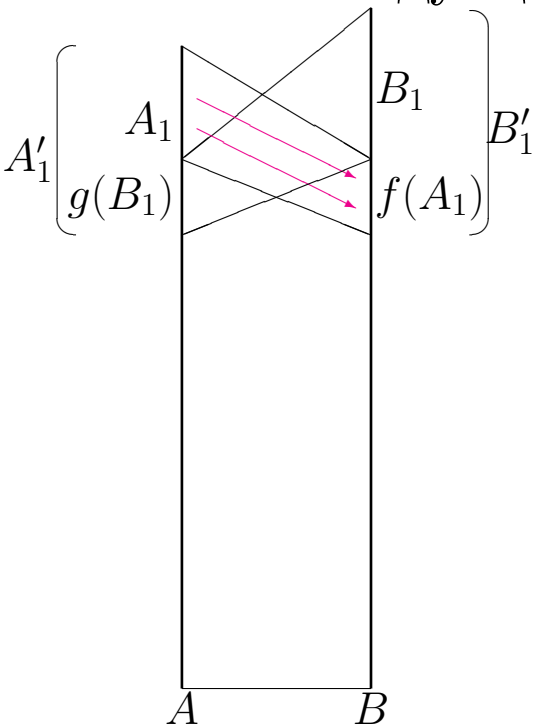
$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$
$$A_1' = A_1 \cup g(B_1),$$

III.9.2. База индукции



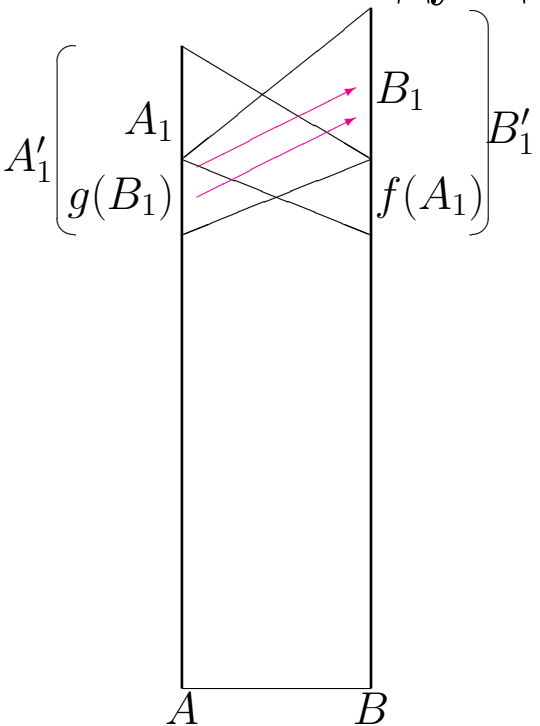
$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$
$$A_1' = A_1 \cup g(B_1), \quad B_1' = B_1 \cup f(A_1),$$

III.9.2. База индукции



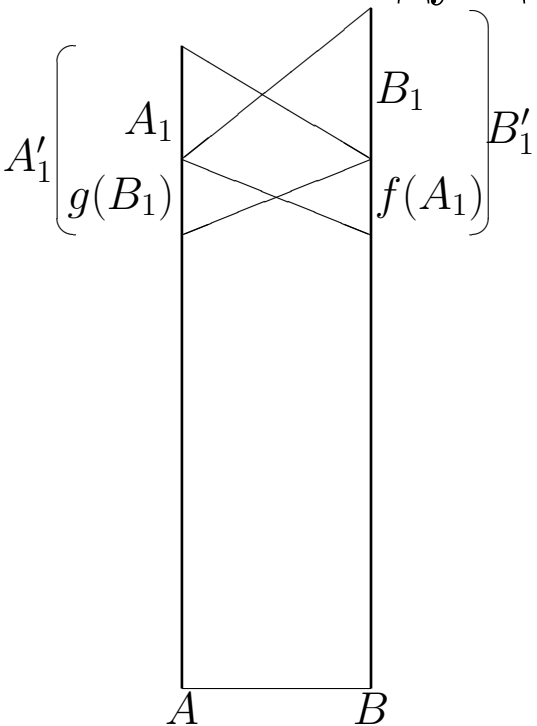
$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$
$$A_1' = A_1 \cup g(B_1), \quad B_1' = B_1 \cup f(A_1),$$
$$h_1(a) = \begin{cases} f(a) & \text{если} \quad a \in A_1, \\ \end{cases}$$

III.9.2. База индукции



$$A_1 = A \setminus g(B), \quad B_1 = B \setminus f(A),$$
$$A_1' = A_1 \cup g(B_1), \quad B_1' = B_1 \cup f(A_1),$$
$$h_1(a) = \begin{cases} f(a) & \text{если} \quad a \in A_1, \\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a \in g(B_1). \end{cases}$$

III.9.2. База индукции



$$A_1 = A \backslash g(B), \quad B_1 = B \backslash f(A),$$
$$A_1' = A_1 \cup g(B_1), \quad B_1' = B_1 \cup f(A_1),$$
$$h_1(a) = \begin{cases} f(a) & \text{если} \quad a \in A_1, \\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a \in g(B_1). \end{cases}$$

Функция h_1 является **взаимно однозначным отображением** с областью определения A_1' и областью допустимых значений B_1'.

III.9.3. Непредельный шаг индукции

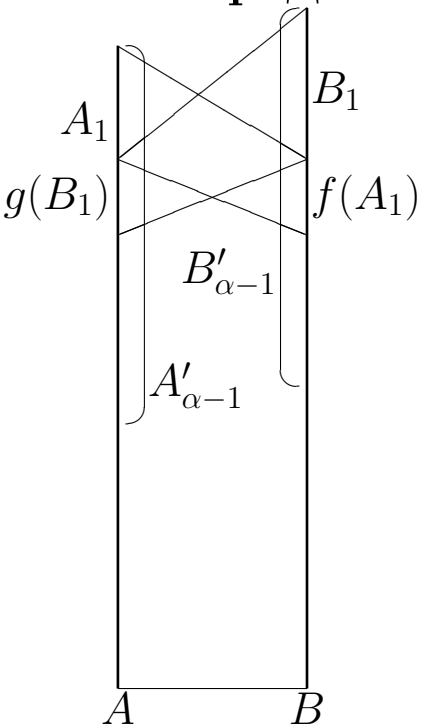
Пусть α — **непредельный ординал**, то есть **ординал** $\alpha - 1$ определен, где $\alpha - 1$ — такой **ординал**, что $\alpha = (\alpha - 1) \cup \{\alpha - 1\}$.

III.9.3. Непредельный шаг индукции

Пусть α — **непредельный ординал**, то есть **ординал** $\alpha - 1$ определен, где $\alpha - 1$ — такой **ординал**, что $\alpha = (\alpha - 1) \cup \{\alpha - 1\}$.

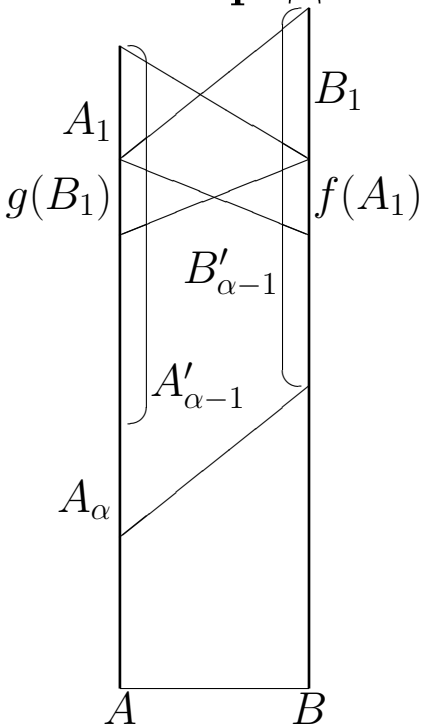
Иными словами, для **ординала** α существует наибольший **ординал** $\alpha - 1$ из всех **ординалов**, меньших α.

III.9.3. Непредельный шаг индукции

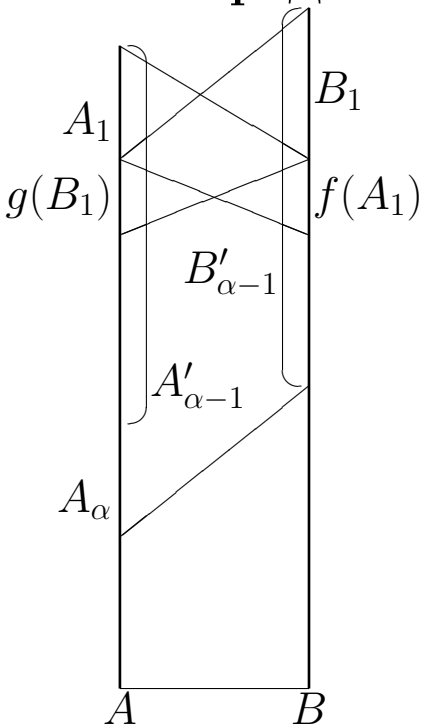


Пусть для любого **ординала** $\beta \leq (\alpha - 1)$ уже построены множества A'_β, B'_β и **взаимно однозначные отображения** h_β с областью определения A'_β и областью значений B'_β, причем для любых **ординалов** $\gamma < \beta < \alpha$ имеем $A'_\gamma \subset A'_\beta$ и $B'_\gamma \subset B'_\beta$, причем $A'_{\alpha-1} \neq \emptyset$ и $B'_{\alpha-1} \neq \emptyset$.

III.9.3. Непредельный шаг индукции

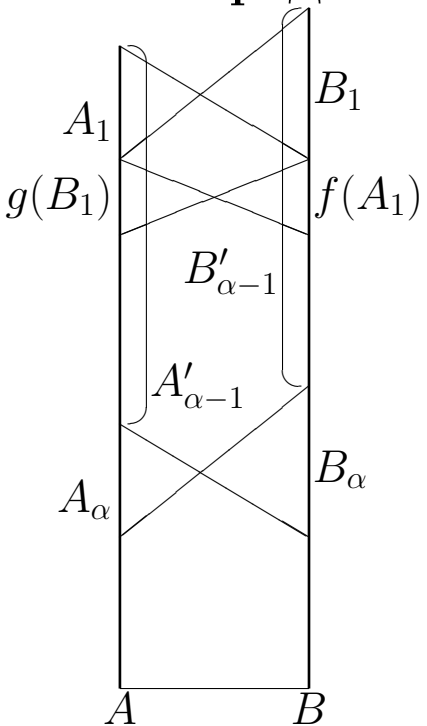


III.9.3. Непредельный шаг индукции



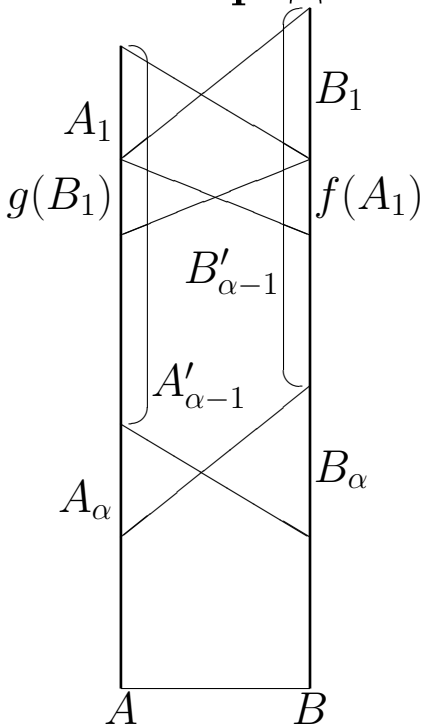
$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1} \right) \right),$$

III.9.3. Непредельный шаг индукции



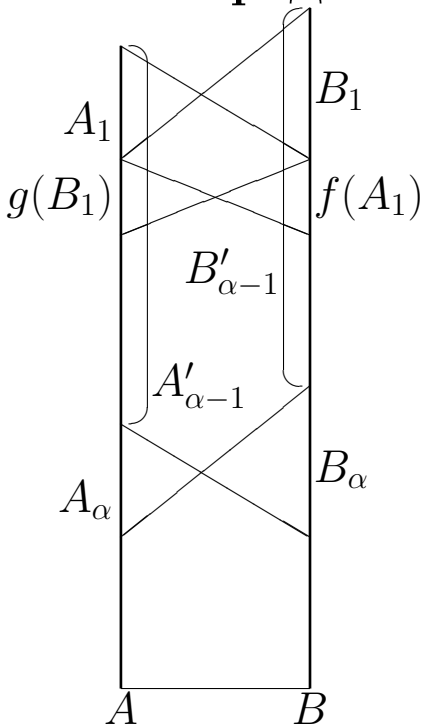
$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1} \right) \right),$$

III.9.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1} \right) \right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1} \right) \right),$$

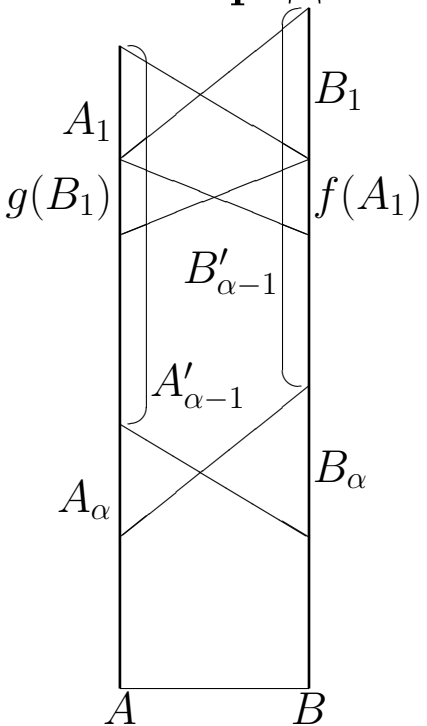
III.9.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A\setminus\left(A'_{\alpha-1}\cup g\left(B\setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B\setminus\left(B'_{\alpha-1}\cup f\left(A\setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),$$

Если $A_\alpha=\emptyset$, то $h(x)=\begin{cases} h_{\alpha-1}(a) & \text{если} \quad a\in A'_{\alpha-1},\\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a\in g(B\setminus B_{\alpha-1}).\end{cases}$

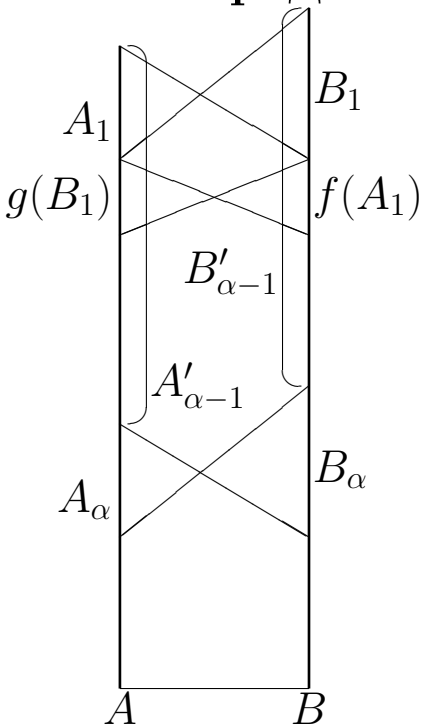
III.9.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A\setminus\left(A'_{\alpha-1}\cup g\left(B\setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B\setminus\left(B'_{\alpha-1}\cup f\left(A\setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),$$

Если $B_\alpha=\emptyset$, то $h(x)=\begin{cases} h_{\alpha-1}(a) & \text{если} \quad a\in A'_{\alpha-1},\\ f(a) & \text{если} \quad a\in A\setminus A'_{\alpha-1}.\end{cases}$

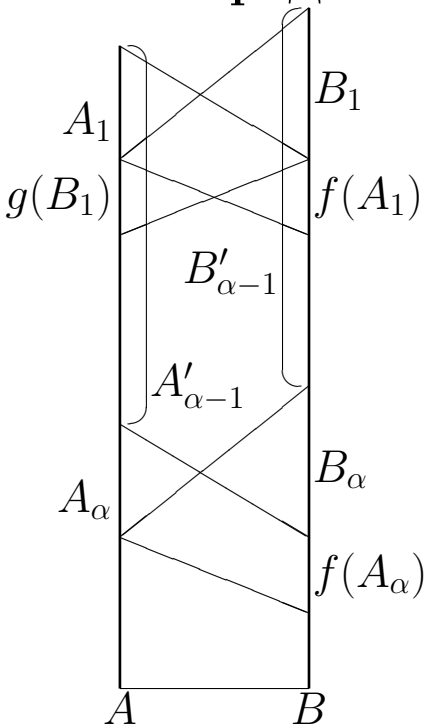
III.9.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1} \right) \right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1} \right) \right),$$

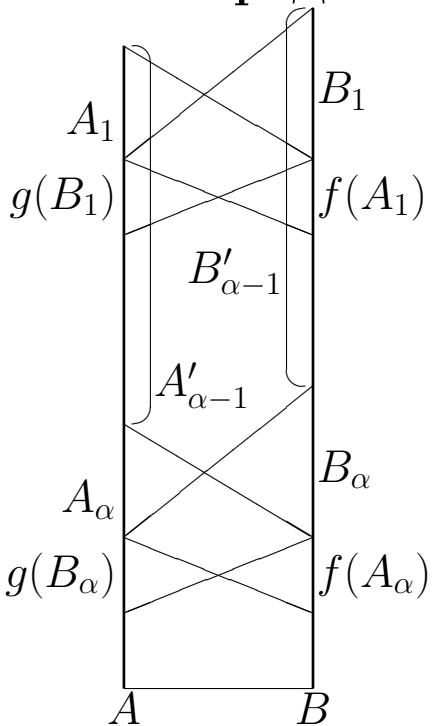
Значит, можно считать, что $A_\alpha \neq \emptyset$ и $B_\alpha \neq \emptyset$.

III.9.3. Непредельный шаг индукции



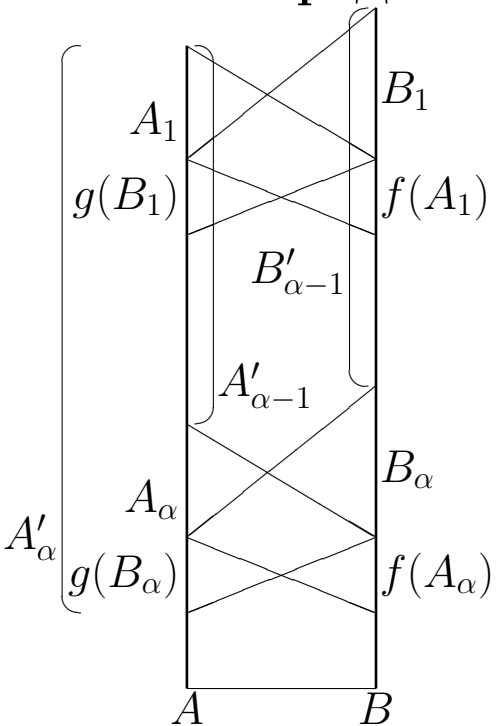
$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1} \right) \right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1} \right) \right),$$

III.9.3. Непредельный шаг индукции



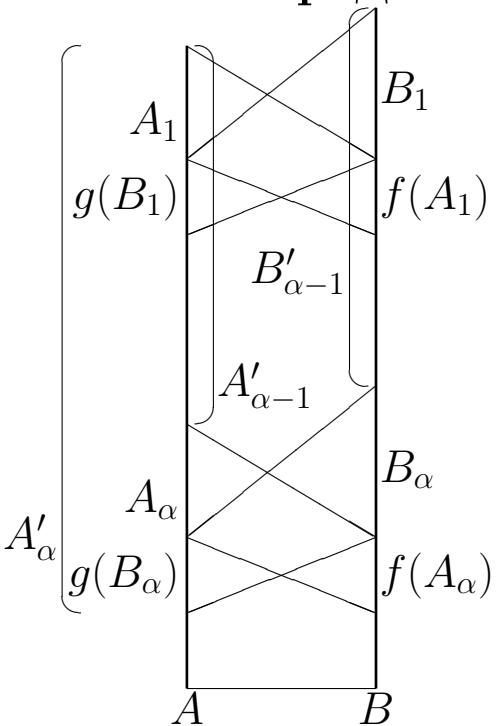
$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1} \right) \right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1} \right) \right),$$

III.9.3. Непредельный шаг индукции



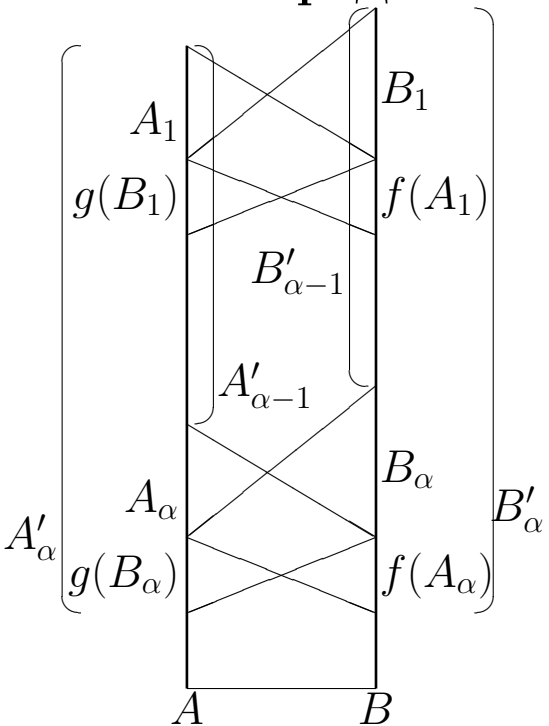
$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),$$

III.9.3. Непредельный шаг индукции



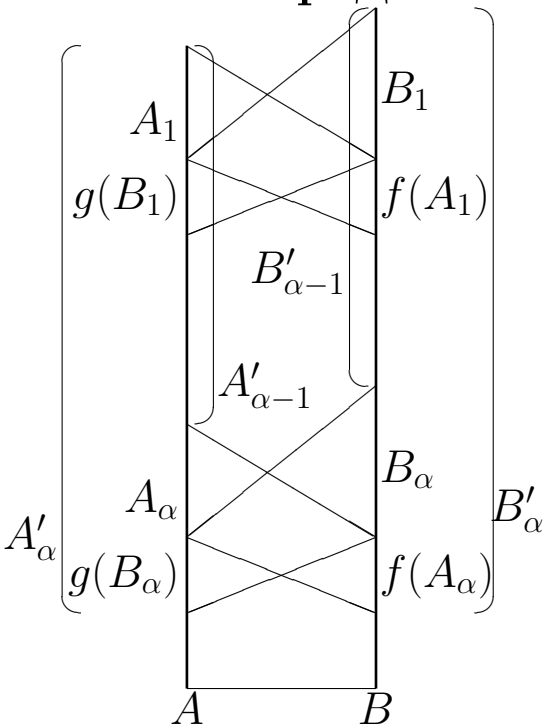
$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$A'_\alpha = A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha),$$

III.9.3. Непредельный шаг индукции



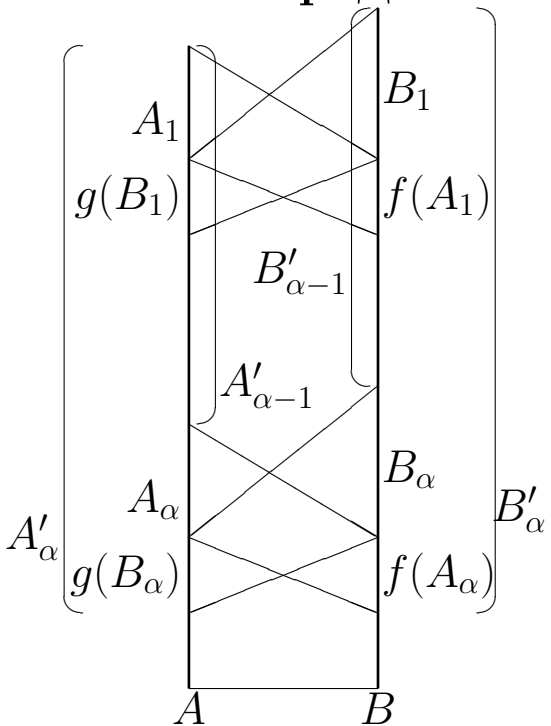
$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$A'_\alpha = A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha),$$

III.9.3. Непредельный шаг индукции



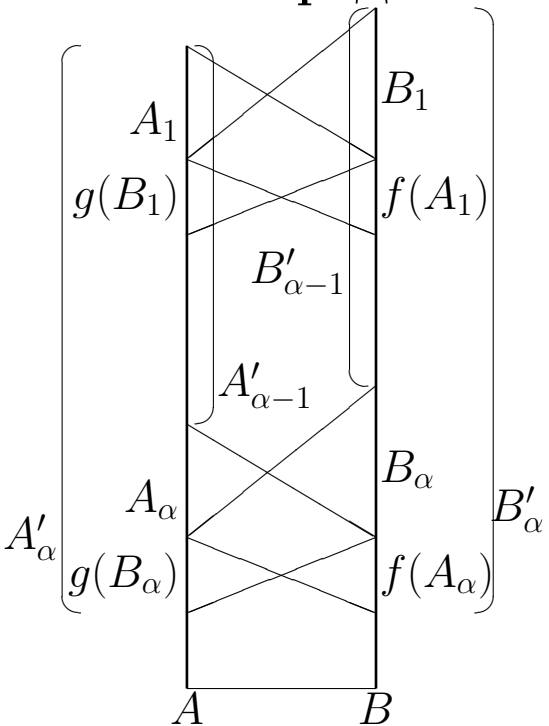
$$
\begin{aligned}
A_\alpha &= A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right), \\
B_\alpha &= B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right), \\
A'_\alpha &= A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha), \\
B'_\alpha &= B'_{\alpha-1} \cup B_\alpha \cup f(A_\alpha),
\end{aligned}
$$

III.9.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$A'_\alpha = A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha),$$
$$B'_\alpha = B'_{\alpha-1} \cup B_\alpha \cup f(A_\alpha),$$
$$h_\alpha(a) = \begin{cases} h_{\alpha-1}(a) & \text{если} \quad a \in A'_{\alpha-1}, \\ f(a) & \text{если} \quad a \in A_\alpha, \\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a \in g(B_\alpha). \end{cases}$$

III.9.3. Непредельный шаг индукции



$$A_\alpha = A \setminus \left(A'_{\alpha-1} \cup g\left(B \setminus B'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$B_\alpha = B \setminus \left(B'_{\alpha-1} \cup f\left(A \setminus A'_{\alpha-1}\right)\right),$$
$$A'_\alpha = A'_{\alpha-1} \cup A_\alpha \cup g(B_\alpha),$$
$$B'_\alpha = B'_{\alpha-1} \cup B_\alpha \cup f(A_\alpha),$$
$$h_\alpha(a) = \begin{cases} h_{\alpha-1}(a) & \text{если} \quad a \in A'_{\alpha-1}, \\ f(a) & \text{если} \quad a \in A_\alpha, \\ g^{-1}(a) & \text{если} \quad a \in g(B_\alpha). \end{cases}$$

Функция h_α является **взаимно однозначным отображением** с областью определения A'_α и областью допустимых значений B'_α.

III.9.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

III.9.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

III.9.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

Положим $A'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A'_\beta$,

III.9.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

Положим $A'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A'_\beta$, $\quad B'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B'_\beta$,

III.9.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

Положим $A'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A'_\beta$, $\quad B'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B'_\beta$,

$h_\alpha(x) = h_\beta(x)$, где β — наименьший такой ординал, что $x \in A'_\beta$.

III.9.4. Предельный шаг индукции

Пусть α — **предельный ординал**, то есть $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

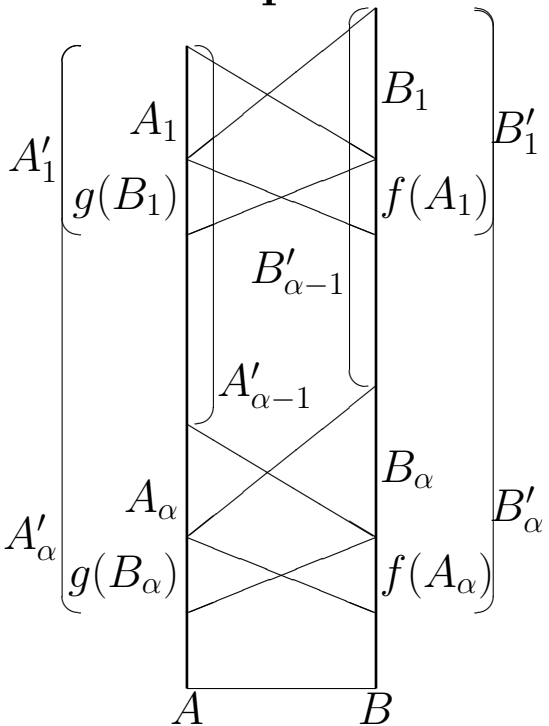
Иными словами, если **ординал** α — предельный, то для любого такого **ординала** β, что $\beta < \alpha$ (то есть $\beta \in \alpha$) существует такой **ординал** γ, что $\beta < \gamma < \alpha$ (то есть $\beta \in \gamma \in \alpha$).

Положим $A'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A'_\beta$, $\quad B'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B'_\beta$,

$h_\alpha(x) = h_\beta(x)$, где β — наименьший такой ординал, что $x \in A'_\beta$.

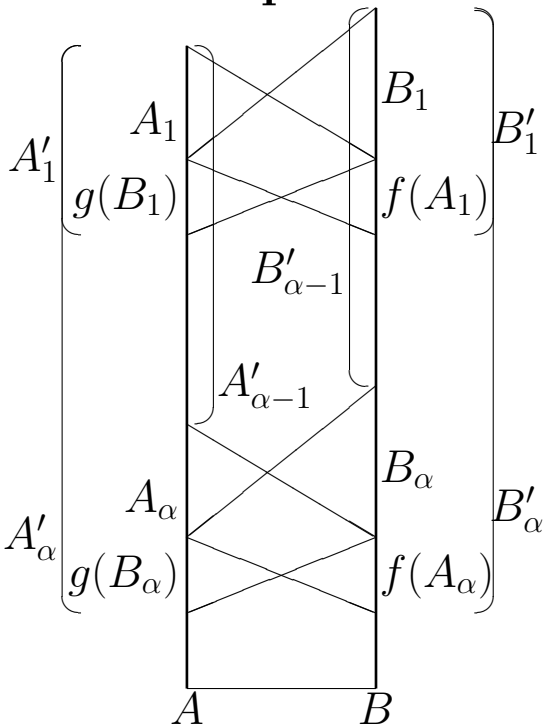
Очевидно, что набор A'_α и B'_α, h_α удовлетворяет гипотезе индукции.

III.9.5. Ограниченность параметра индукции



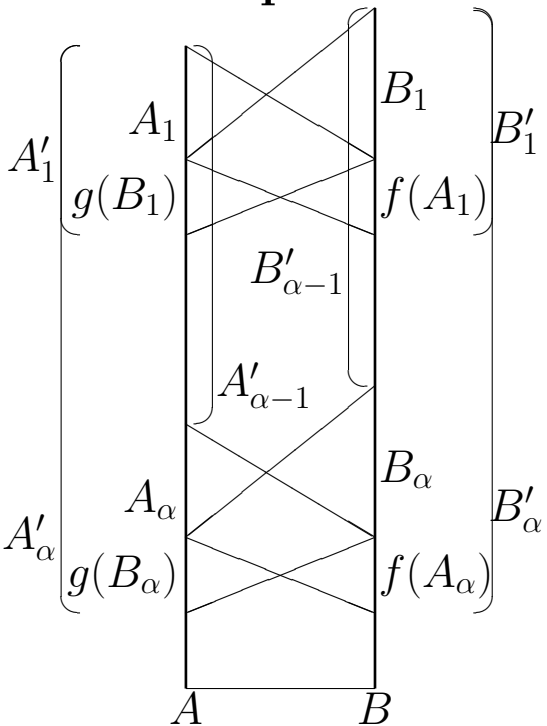
Осталось показать, что для некоторого такого θ, что $|\theta| \leq |A|$, процесс оборвется.

III.9.5. Ограниченность параметра индукции



В самом деле, если для некоторого такого **ординала** α, что $\alpha > |A|$ имеем $A'_\alpha \neq A$, то можно выбрать для каждого $\beta < \alpha$ по элементу a_β из $A_{\beta+1} \backslash A_\beta$. Тогда подмножество $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ из A имеет большую мощность, чем $|A|$. Это, очевидно, невозможно, так как используя определение, легко показать, что *мощность* подмножества не превосходит мощности исходного множества.

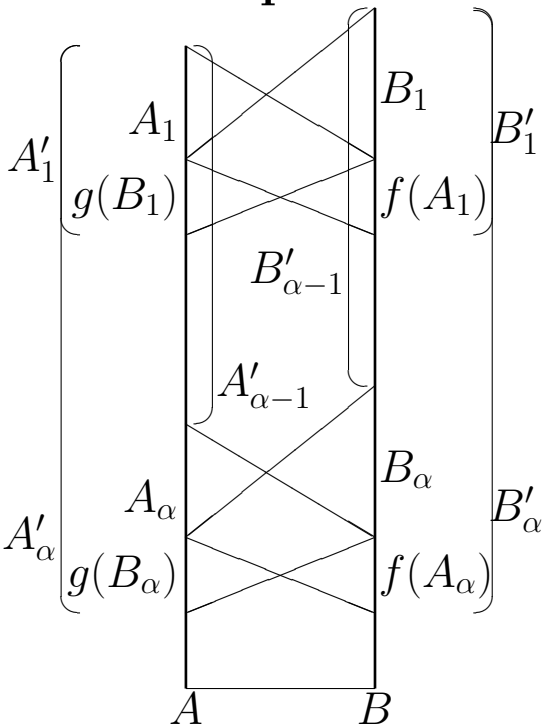
III.9.5. Ограниченность параметра индукции



В самом деле, если для некоторого такого **ординала** α, что $\alpha > |A|$ имеем $A'_\alpha \neq A$, то можно выбрать для каждого $\beta < \alpha$ по элементу a_β из $A_{\beta+1} \backslash A_\beta$. Тогда подмножество $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ из A имеет большую мощность, чем $|A|$. Это, очевидно, невозможно, так как используя определение, легко показать, что *мощность* подмножества не превосходит мощности исходного множества.

Рассмотрим пример?

III.9.5. Ограниченность параметра индукции



В самом деле, если для некоторого такого **ординала** α, что $\alpha > |A|$ имеем $A'_\alpha \neq A$, то можно выбрать для каждого $\beta < \alpha$ по элементу a_β из $A_{\beta+1} \backslash A_\beta$. Тогда подмножество $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ из A имеет большую мощность, чем $|A|$. Это, очевидно, невозможно, так как используя определение, легко показать, что *мощность* подмножества не превосходит мощности исходного множества.

Решим задачи?

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. Пусть **У** — множество всех множеств. Тогда **У** $\in$ **У**.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. Пусть **У** — множество всех множеств. Тогда **У** $\in$ **У**.

Назовем множество со свойством $M \in M$ «необычным», а множество со свойством $M \notin M$ — «обычным».

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

Обозначим через K множество всех «обычных» множеств (не являющихся «необычными»):

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

Каково K — «обычное» или «необычное»?

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) Пусть K — «обычное» множество:

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $K \notin K =$

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $K \notin K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}$

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K \notin K} = \left\{ X \,\middle|\, \mathbf{X \notin X} \right\}$

Для $X = K$ выполняется характеристическое свойство из определения множества K.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K \notin K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{K \notin K} \right\} \Rightarrow$

Для $X = K$ выполняется характеристическое свойство из определения множества K.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K \notin K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{K \notin K} \right\} \Rightarrow K \in K,$ противоречие.

Для $X = K$ выполняется характеристическое свойство из определения множества K.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K \notin K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{K \notin K} \right\} \Rightarrow K \in K,$ противоречие.

2) Остается рассмотреть случай, когда K — «необычное» множество.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K \notin K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{K \notin K} \right\} \Rightarrow K \in K,$ противоречие.

2) $K \in K =$

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K \notin K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{K \notin K} \right\} \Rightarrow K \in K,$ противоречие.

2) $K \in K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}$

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K \notin K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{K \notin K} \right\} \Rightarrow K \in K,$ противоречие.

2) $\mathbf{K \in K} = \left\{ X \,\middle|\, \mathbf{X \notin X} \right\} \Rightarrow$

В характеристическом свойстве из определения множества K положим $X = K$.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K \notin K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{K \notin K} \right\} \Rightarrow K \in K,$ противоречие.

2) $\mathbf{K \in K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{\exists X\ X=K} \right\} \Rightarrow$

В характеристическом свойстве из определения множества K положим $X = K$.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, X \notin X \right\}.$$

1) $\mathbf{K \notin K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{K \notin K} \right\} \Rightarrow K \in K,$ противоречие.

2) $\mathbf{K \in K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X \notin X}}_{\exists X\ X = K} \right\} \Rightarrow K \notin K,$ противоречие.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

$$K = \left\{ X \,\middle|\, \mathbf{X} \notin \mathbf{X} \right\}.$$

1) $\mathbf{K} \notin \mathbf{K} \;\Rightarrow\;$ Выполняется характ. свойство для K $\;\Rightarrow\; K \in K,$ противоречие.

2) $\mathbf{K} \in \mathbf{K} = \left\{ X \,\middle|\, \underbrace{\mathbf{X} \notin \mathbf{X}}_{\exists X\ X=K} \right\} \;\Rightarrow\; K \notin K,$ противоречие.

IV. Теорема о противоречивости канторовской «наивной» теории множеств

Теорема 8. *Канторовская «наивная» теория множеств противоречива.*

Доказательство. $M \in M$ — «необычное», $M \notin M$ — «обычное».

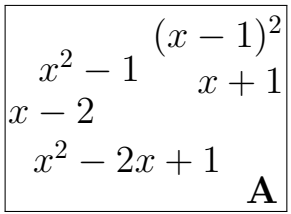
$$K = \left\{ X \,\middle|\, \mathbf{X} \notin \mathbf{X} \right\}.$$

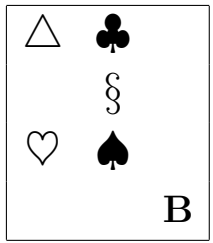
1) $K \notin K \;\Rightarrow\;$ Выполняется характ. свойство для K $\;\Rightarrow\; K \in K,$ противоречие.

2) $\mathbf{K} \in K \;\Rightarrow\;$ Т.к. для всех эл-тов из K выполняется характ.св-во $\;\Rightarrow\; K \notin K,$ противоречие.

Теорема доказана.

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*

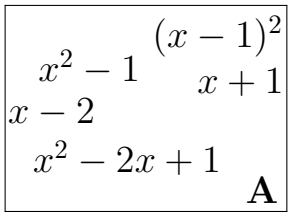


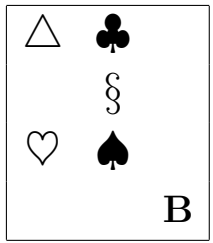


Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение.

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*

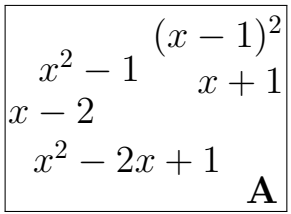


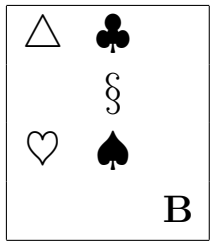


Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*

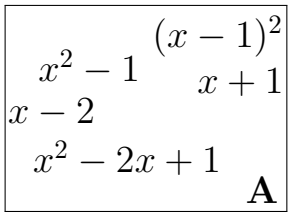


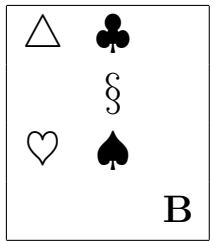


Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



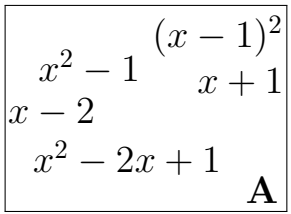


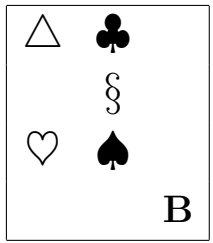
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s					

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



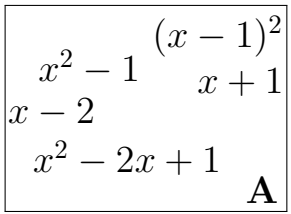


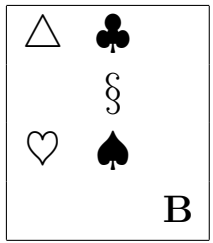
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s					
$\varphi(s)$					

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



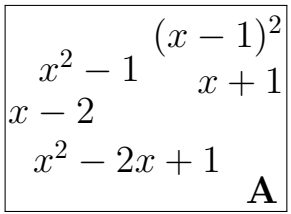


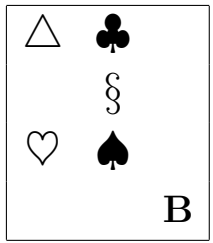
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$				
$\varphi(s)$					

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



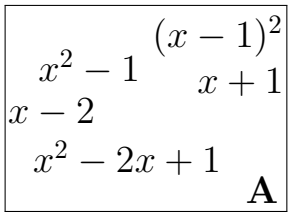


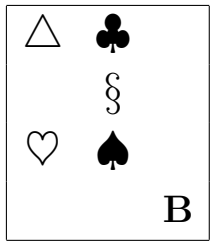
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$				
$\varphi(s)$	△				

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



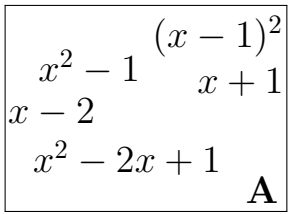


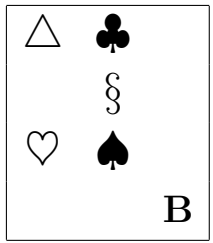
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$	x^2-1			
$\varphi(s)$	△				

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



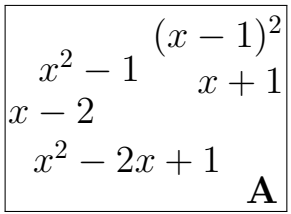


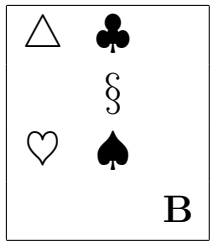
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$	x^2-1			
$\varphi(s)$	△	♣			

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



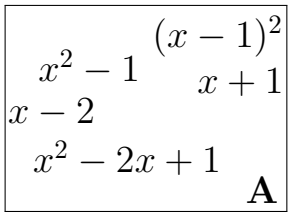


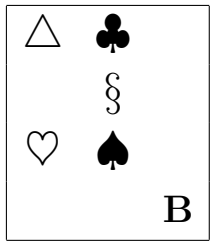
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$	x^2-1	$x+1$		
$\varphi(s)$	△	♣			

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



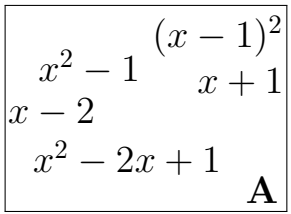


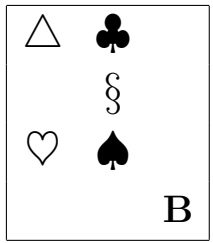
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$	x^2-1	$x+1$		
$\varphi(s)$	△	♣	§		

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



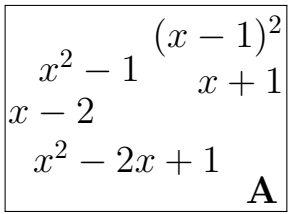


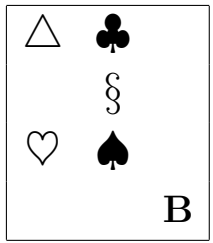
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$	x^2-1	$x+1$	$x-2$	
$\varphi(s)$	△	♣	§		

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



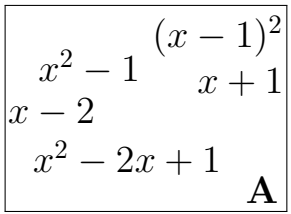


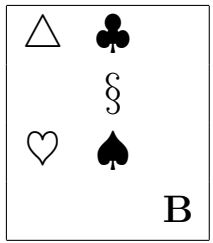
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$	x^2-1	$x+1$	$x-2$	
$\varphi(s)$	△	♣	§	♡	

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



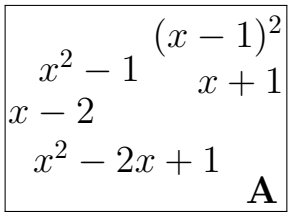


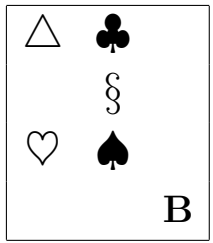
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$	x^2-1	$x+1$	$x-2$	x^2-2x+1
$\varphi(s)$	△	♣	§	♡	

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*





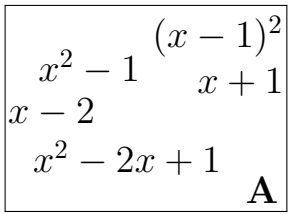
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

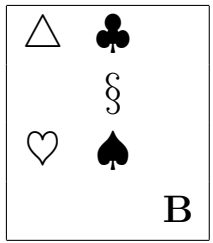
Решение. Определим взаимно-однозначную функцию с областью определения **A** и областью значений **B**, например, так:

s	$(x-1)^2$	x^2-1	$x+1$	$x-2$	x^2-2x+1
$\varphi(s)$	△	♣	§	♡	♠

Значит, во множествах **A** и **B** равное число элементов.

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*

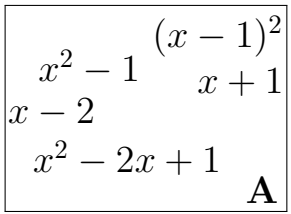


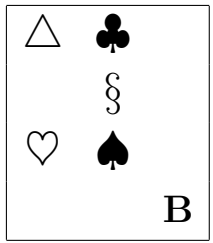


Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Если отождествлять равносильные выражения, т.е. отождествить $(x-1)^2$ и x^2-2x+1, то для любой взаимно однозначной функции $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ имеем $E(\psi) \subset \mathbf{B}$, в частности, $E(\psi) \neq \mathbf{B}$.

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*



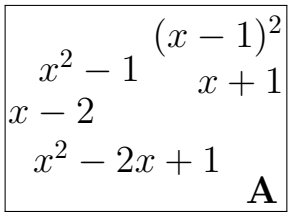


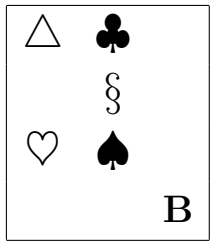
Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Если отождествлять равносильные выражения, т.е. отождествить $(x-1)^2$ и x^2-2x+1, то для любой взаимно однозначной функции $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ имеем $E(\psi) \subset \mathbf{B}$, в частности, $E(\psi) \neq \mathbf{B}$.

Значит, в этом случае во множестве **A** не больше элементов, чем в **B**.

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*

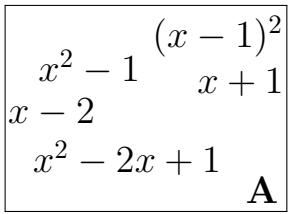


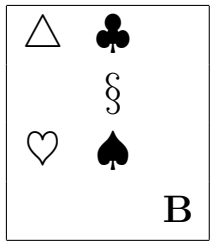


Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Если отождествлять равносильные выражения, т.е. отождествить $(x-1)^2$ и x^2-2x+1, то не существует взаимно однозначной функции $\theta : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Пример 1. *Пусть множество* **A** *— множество выражений,* **B** *— множество символов, расположенных внутри прямоугольников справа.*





Не подсчитывая количества элементов, выясните, в каком множестве больше элементов или покажите, что эти множества состоят из одинакового числа элементов.

Решение. Если отождествлять равносильные выражения, т.е. отождествить $(x-1)^2$ и x^2-2x+1, то не существует взаимно однозначной функции $\theta : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Значит, в этом случае во множестве **A** меньше элементов, чем в **B**.

Вернемся к лекции?

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение.

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}|$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}|$

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}|$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow$

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}|$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}|$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, — взаимно однозначная функция.
$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;
$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}|$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, — взаимно однозначная функция.
$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;
$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.
$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;
$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

Как доказать, что функция существует?

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

Как доказать, что функция существует?

1) Построить ее.

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

Как доказать, что функция существует?

1) Построить ее. 2) От противного.

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

Как доказать, что функция существует?

1) Построить ее. 2) От противного.

Конструктивный способ лучше.

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) =$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

$m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ g(m) =$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

$m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ g(m) = 4|m| + \mathrm{sign}(m + 0.5)$, т.е.

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

$m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ g(m) = 4|m| + \operatorname{sign}(m + 0.5)$, т.е.

m	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(m)$	$\ldots$						$\ldots$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

$m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ g(m) = 4|m| + \operatorname{sign}(m + 0.5)$, т.е.

m	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(m)$	$\ldots$			1			$\ldots$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

$m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ g(m) = 4|m| + \operatorname{sign}(m + 0.5)$, т.е.

m	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(m)$	$\ldots$		3	1			$\ldots$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

$m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ g(m) = 4|m| + \operatorname{sign}(m + 0.5)$, т.е.

m	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(m)$	$\ldots$		3	1	5		$\ldots$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

$m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ g(m) = 4|m| + \operatorname{sign}(m + 0.5)$, т.е.

m	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(m)$	$\ldots$	7	3	1	5		$\ldots$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

$m \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ g(m) = 4|m| + \operatorname{sign}(m + 0.5)$, т.е.

m	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(m)$	$\ldots$	7	3	1	5	9	$\ldots$

Пример 2. *Докажем, что* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Решение. f, g — взаимно однозначная функция.

$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f \quad (f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z})$;

$|\mathbb{N}| \geqslant |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists g \quad (g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N})$;

$n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; f(n) = n \in \mathbb{Z}$;

$m \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; g(m) = 4|m| + \operatorname{sign}(m + 0.5)$, т.е.

m	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
$g(m)$	$\ldots$	7	3	1	5	9	$\ldots$

Утверждение доказано.

Вернемся к лекции?

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = |\{\emptyset\}| =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = |\{\emptyset\}| = 1 =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0.$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *База индукции:* для пустого множества $X = \emptyset$ имеем $n = 0$ и

$$\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0.$$

База индукции доказана.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

Например, если $X = \{a;\ b;\ c\}$, то

$$P_1 = \left\{\emptyset;\ \{b\};\ \{c\};\ \{b; c\}\right\},$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

Например, если $X = \{a;\ b;\ c\}$, то

$$P_1 = \left\{\emptyset;\ \{b\};\ \{c\};\ \{b; c\}\right\}, \quad P_2 = \left\{\{a\};\ \{a; b\};\ \{a; c\};\ \{a; b; c\}\right\} =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

Например, если $X = \{a;\ b;\ c\}$, то

$$P_1 = \left\{\emptyset;\ \{b\};\ \{c\};\ \{b;c\}\right\}, \quad P_2 = \left\{\{a\};\ \{a;b\};\ \{a;c\};\ \{a;b;c\}\right\} =$$
$$= \left\{\emptyset \cup \{a\};\ \{b\} \cup \{a\};\ \{c\} \cup \{a\};\ \{b;c\} \cup \{a\}\right\}.$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Для этого построим **взаимно однозначную функцию**, отображающую P_1 на P_2.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Искомой является функция, заданная формулой: $f(Y) = Y \cup \{a\}$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$x \in Y' \Rightarrow$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$$x \in Y' \Rightarrow \begin{cases} x \in Y' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$$x \in Y' \Rightarrow \begin{cases} x \in Y' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in Y'' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$$x \in Y' \Rightarrow \begin{cases} x \in Y' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in Y'' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow x \in Y'' \Rightarrow$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$$x \in Y' \Rightarrow \begin{cases} x \in Y' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in Y'' \cup \{a\}, \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow x \in Y'' \Rightarrow Y' \subseteq Y''$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$Y' \subseteq Y''$. Аналогично получаем

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$Y' \subseteq Y''$. Аналогично получаем $Y'' \subseteq Y'$, откуда

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. $f(Y) = Y \cup \{a\}$. Проверим **взаимную однозначность**:

$$f(Y') = f(Y'') \;\Rightarrow\; Y' \cup \{a\} = Y'' \cup \{a\}.$$

$Y' \subseteq Y''$. Аналогично получаем $Y'' \subseteq Y'$, откуда $Y' = Y''$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Очевидно, что f отображает P_1 на P_2. Действительно,

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Если $Z \in P_2$, то

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Если $Z \in P_2$, то $Z = (Z \backslash \{a\}) \cup \{a\}$, т.е.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Если $Z \in P_2$, то $Z = (Z \backslash \{a\}) \cup \{a\}$, т.е. $Z = f(Z \backslash \{a\})$.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

По предположению индукции $|P_1| = 2^{n-1}$. Докажем, что $|P_2| = 2^{n-1}$. Итак, $f(Y) = Y \cup \{a\}$ является **взаимно однозначной функцией**.

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) =$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n.$$

Пример 3. *Докажите, что если X — множество, состоящее из n элементов, т.е. $|X| = n$, то множество всех его подмножеств состоит из 2^n элементов:* $\left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq X\right\}\right| = 2^n$.

Решение. *Шаг индукции:* пусть $|X| = n > 0$ и для любого множества мощности, меньшей $|X|$, утверждение доказано. Зафиксируем элемент $a \in X$. Рассмотрим множества

$$P_1 = \left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}, \quad P_2 = \left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\},$$

$$\left|\left\{T \,\middle|\, T \subseteq X\right\}\right| = \left|\left\{Y \,\middle|\, Y \subseteq (X \backslash \{a\})\right\}\right| + \left|\left\{Z \,\middle|\, a \in Z \subseteq X\right\}\right| =$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n.$$

Шаг индукции доказан. Согласно принципу математической индукции утверждение доказано.

Вернемся к лекции?

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. а) Очевидно.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. a) Очевидно.

Пусть $|A| = m \in \mathbb{N}, \quad |B| = n \in \mathbb{N}$.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. a) Очевидно.

Пусть $|A| = m \in \mathbb{N}, \quad |B| = n \in \mathbb{N}$.

Пу условию $|A| = m > 1$, поэтому

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. a) Очевидно.

Пусть $|A| = m \in \mathbb{N}, \quad |B| = n \in \mathbb{N}$.

По условию $|A| = m > 1$, поэтому

$$|A \times B| =$$

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. a) Очевидно.

Пусть $|A| = m \in \mathbb{N}, \quad |B| = n \in \mathbb{N}$.

Пу условию $|A| = m > 1$, поэтому

$$|A \times B| = m \cdot n$$

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. a) Очевидно.

Пусть $|A| = m \in \mathbb{N}, \quad |B| = n \in \mathbb{N}$.

Пу условию $|A| = m > 1$, поэтому

$$|A \times B| = m \cdot n \qquad = |B|$$

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. a) Очевидно.

Пусть $|A| = m \in \mathbb{N}, \quad |B| = n \in \mathbb{N}$.

Пу условию $|A| = m > 1$, поэтому

$$|A \times B| = m \cdot n \quad n = |B|$$

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. a) Очевидно.

Пусть $|A| = m \in \mathbb{N}, \quad |B| = n \in \mathbb{N}$.

Пу условию $|A| = m > 1$, поэтому

$$|A \times B| = m \cdot n > n = |B|$$

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b)

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

Надо сконструировать требуемое отображение f.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) =$

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пусть $f(a_p;\ b_q) = f(a_m; b_n)$. Тогда

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пусть $f(a_p;\ b_q) = f(a_m; b_n)$. Тогда

$2^p 3^q = 2^m 3^n$,

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пусть $f(a_p;\ b_q) = f(a_m; b_n)$. Тогда

$2^p 3^q = 2^m 3^n, \quad 2^{p-m} = 3^{n-q},$

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пусть $f(a_p;\ b_q) = f(a_m; b_n)$. Тогда

$2^p 3^q = 2^m 3^n, \quad 2^{p-m} = 3^{n-q},$

Выражение в левой части равенства $2^{p-m} = 3^{n-q}$ равно 1 или четное число, а в правой части — нечетное.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пусть $f(a_p;\ b_q) = f(a_m; b_n)$. Тогда

$2^p 3^q = 2^m 3^n, \quad 2^{p-m} = 3^{n-q},$

Выражение в левой части равенства $2^{p-m} = 3^{n-q}$ равно 1 или четное число, а в правой части — нечетное.

Значит, левая и правая части равенства равны 1.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пусть $f(a_p;\ b_q) = f(a_m; b_n)$. Тогда

$2^p 3^q = 2^m 3^n, \quad 2^{p-m} = 3^{n-q}, \quad p - m = 0 =$

Выражение в левой части равенства $2^{p-m} = 3^{n-q}$ равно 1 или четное число, а в правой части — нечетное.

Значит, левая и правая части равенства равны 1.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пусть $f(a_p;\ b_q) = f(a_m; b_n)$. Тогда

$2^p 3^q = 2^m 3^n, \quad 2^{p-m} = 3^{n-q}, \quad p - m = 0 = n - q.$

Выражение в левой части равенства $2^{p-m} = 3^{n-q}$ равно 1 или четное число, а в правой части — нечетное.

Значит, левая и правая части равенства равны 1.

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пусть $f(a_p;\ b_q) = f(a_m; b_n)$. Тогда

$2^p 3^q = 2^m 3^n, \quad 2^{p-m} = 3^{n-q}, \quad p - m = 0 = n - q.$

Значит, $(a_p;\ b_q) = (a_m;\ b_n)$,

Пример 4. *Пусть* $\{\emptyset\} < |A| \leqslant |B|$. *Тогда*

a) *если* B *— конечное множество, то* $|A \times B| > |B|$;

b) *если* B *счетно, то* $|A \times B| = |B|$.

Решение. b) Ясно, что $|A \times B| \geqslant |B|$ в силу $A \neq \emptyset$.

Поэтому осталось построить взаимно однозначное отображение $f : A \times B \to B$.

По условию $A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots\}$, $B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n;\ \ldots\}$.

$f(a_m; b_n) = b_{2^m \cdot 3^n}$.

Докажем взаимную однозначность.

Пусть $f(a_p;\ b_q) = f(a_m; b_n)$. Тогда

$2^p 3^q = 2^m 3^n, \quad 2^{p-m} = 3^{n-q}, \quad p - m = 0 = n - q.$

Значит, $(a_p;\ b_q) = (a_m;\ b_n)$, взаимная однозначность доказана.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а)

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} =$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$|B| = C^n_{|A|} =$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} =$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant$$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant |A|.$$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant |A|.$$

При $|A| < 2n$ имеем

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant |A|.$$

При $|A| < 2n$ имеем

$|B| = C^n_{|A|} =$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant |A|.$$

При $|A| < 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots}{} =$$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant |A|.$$

При $|A| < 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (n + 1)}{} =$$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant |A|.$$

При $|A| < 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (n + 1)}{(|A| - n)!} =$$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \Big\{ X \,\Big|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \Big\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant |A|.$$

При $|A| < 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (n + 1)}{(|A| - n)!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \frac{n + 1}{|A| - n} \geqslant$$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots \cdot (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant |A|.$$

При $|A| < 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots \cdot (n + 1)}{(|A| - n)!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \frac{n + 1}{|A| - n} \geqslant |A|.$$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. а) это задача на комбинаторику.

Количество подмножеств, состоящих из n элементов множества A равно $|B| = C^n_{|A|} = \dfrac{|A|!}{n!(|A| - n)!}$.

При $|A| \geqslant 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (|A| - n + 1)}{n!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|A| - n + 1}{n} \geqslant |A|.$$

При $|A| < 2n$ имеем

$$|B| = C^n_{|A|} = \frac{|A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots (n + 1)}{(|A| - n)!} = \frac{|A|}{1} \cdot \frac{|A| - 1}{2} \cdot \ldots \frac{n + 1}{|A| - n} \geqslant |A|.$$

Этот пункт доказан.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно (исследовать условия и требование, «построить теорию»);

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно;

2) индуктивно (рассмотреть частные случаи, попытаться обобщить найденные для этих ситуаций решение);

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно;

3) моделирование (найти аналоги или построить модель, исследовать ее на адекватность и сделать вывод на основании анализа модели).

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Попробуем действовать

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Попробуем действовать индуктивно.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$.

Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$.

Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Возьмем наименьшее допустимое n.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 =$

Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Возьмем наименьшее допустимое n.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \Big\{ X \,\Big|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \Big\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \Big\{ \quad \Big| \quad \Big\}$

Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Возьмем наименьшее допустимое n.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \Big\{ X \,\Big|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \Big\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \Big\{ \{a\} \,\Big|\, \qquad \Big\}$

Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Возьмем наименьшее допустимое n.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\}$

Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Возьмем наименьшее допустимое n.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow$

Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Возьмем наименьшее допустимое n.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B|$

Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Возьмем наименьшее допустимое n.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. Возьмем наименьшее допустимое n.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 =$

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \quad \middle| \quad \right\}$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \right\}$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \{a; b\} \subseteq A \right\}$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \{a; b\} \subseteq A \wedge (a \neq b) \right\}$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \{a; b\} \subseteq A \wedge (a \neq b) \right\}$.

$f(\{a; b\}) =$ Здесь мы считаем, например, $a < b$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b)

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \{a; b\} \subseteq A \wedge (a \neq b) \right\}$.

$f(\{a; b\}) = 2^a 3^b$. Здесь мы считаем, например, $a < b$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \Big\{ X \,\Big|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \Big\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \Big\{ \qquad\qquad \Big| \qquad\qquad \Big\}$.

$g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \Big\{ \{a\} \,\Big|\, a \in A \Big\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \Big\{ \{a; b\} \,\Big|\, \{a; b\} \subseteq A \wedge (a \neq b) \Big\}$.

$f(\{a; b\}) = 2^a 3^b$. Здесь мы считаем, например, $a < b$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, \qquad \right\}$.

$$g : A \mapsto \mathbb{N}.$$

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \{a; b\} \subseteq A \wedge (a \neq b) \right\}$.

$f(\{a; b\}) = 2^a 3^b$. Здесь мы считаем, например, $a < b$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \{a; b\} \subseteq A \wedge (a \neq b) \right\}$.

$f(\{a; b\}) = 2^a 3^b$. Здесь мы считаем, например, $a < b$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) =$ $g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \{a; b\} \subseteq A \wedge (a \neq b) \right\}$.

$f(\{a; b\}) = 2^a 3^b$. Здесь мы считаем, например, $a < b$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) =$ $g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и

$2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \{a; b\} \subseteq A \wedge (a \neq b) \right\}$.

$f(\{a; b\}) = 2^a 3^b$. Здесь мы считаем, например, $a < b$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и

$2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Как придумать решение?

1) Дедуктивно; 2) индуктивно; 3) моделирование.

Пусть $A = \mathbb{N}$. При $n = 1$ $\quad B_1 = \left\{ \{a\} \,\middle|\, a \in A \right\} \Rightarrow |B| = |A|$.

При $n = 2$ $\quad B_2 = \left\{ \{a; b\} \,\middle|\, \{a; b\} \subseteq A \wedge (a \neq b) \right\}$.

$f(\{a; b\}) = 2^a 3^b$. Здесь мы считаем, например, $a < b$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и

$2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и

$2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и

$2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть $2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(a_n)} = 2^{g(b_1)} \cdot 3^{g(b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(b_n)}$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и $2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть $2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(a_n)} = 2^{g(b_1)} \cdot 3^{g(b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(b_n)}$.

$2^{g(a_1)-g(b_1)} = 3^{g(b_2)-g(a_2)} \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и $2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть $2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(a_n)} = 2^{g(b_1)} \cdot 3^{g(b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(b_n)}$.

$2^{g(a_1)-g(b_1)} = 3^{g(b_2)-g(a_2)} \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Правая часть нечетная, значит

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и $2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть $2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(a_n)} = 2^{g(b_1)} \cdot 3^{g(b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(b_n)}$.

$2^{g(a_1)-g(b_1)} = 3^{g(b_2)-g(a_2)} \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Правая часть нечетная, значит $a_1 = b_1$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и $2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть $2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(a_n)} = 2^{g(b_1)} \cdot 3^{g(b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(b_n)}$.

$2^{g(a_1)-g(b_1)} = 3^{g(b_2)-g(a_2)} \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Правая часть нечетная, значит $a_1 = b_1$.

$3^{g(a_2)-g(b_2)} = 5^{g(b_3)-g(a_3)} \cdot \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и $2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть $2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(a_n)} = 2^{g(b_1)} \cdot 3^{g(b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(b_n)}$.

$2^{g(a_1)-g(b_1)} = 3^{g(b_2)-g(a_2)} \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Правая часть нечетная, значит $a_1 = b_1$.

$3^{g(a_2)-g(b_2)} = 5^{g(b_3)-g(a_3)} \cdot \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Справа число не делится на 3, значит

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N} \quad u \quad B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и $2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть $2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(a_n)} = 2^{g(b_1)} \cdot 3^{g(b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(b_n)}$.

$2^{g(a_1)-g(b_1)} = 3^{g(b_2)-g(a_2)} \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Правая часть нечетная, значит $a_1 = b_1$.

$3^{g(a_2)-g(b_2)} = 5^{g(b_3)-g(a_3)} \cdot \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Справа число не делится на 3, значит $a_2 = b_2$.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и $2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть $2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(a_n)} = 2^{g(b_1)} \cdot 3^{g(b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(b_n)}$.

$2^{g(a_1)-g(b_1)} = 3^{g(b_2)-g(a_2)} \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Правая часть нечетная, значит $a_1 = b_1$.

$3^{g(a_2)-g(b_2)} = 5^{g(b_3)-g(a_3)} \cdot \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Справа число не делится на 3, значит $a_2 = b_2$.

Ясно, что через n шагов получим $a_i = b_i$ для любого номера i.

Пример 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $B = \left\{ X \,\middle|\, (X \subseteq A) \wedge (|X| = n) \right\}$.

a) *Если* A *конечно и* $n < |A|$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

b) *Если* A *счетно, то* $|A| = |B|$.

Решение. b) $B = \left\{ \{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\} \,\middle|\, 1 \leqslant g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n) \right\}$.

$f(\{a_1;\ a_2; \ldots; a_n\}) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots p_n^{g(a_n)}$. $\quad g : A \mapsto \mathbb{N}$.

Здесь мы считаем, что $g(a_1) < g(a_2) < \ldots < g(a_n)$ и $2 < 3 < 5 < 7 < 11 \ldots < p_n$ — последовательность простых чисел.

Проверим взаимную однозначность.

Пусть $2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(a_n)} = 2^{g(b_1)} \cdot 3^{g(b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{g(b_n)}$.

$2^{g(a_1)-g(b_1)} = 3^{g(b_2)-g(a_2)} \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Правая часть нечетная, значит $a_1 = b_1$.

$3^{g(a_2)-g(b_2)} = 5^{g(b_3)-g(a_3)} \cdot \ldots p_n^{g(b_n)-g(a_n)}$. Справа число не делится на 3, значит $a_2 = b_2$.

Ясно, что через n шагов получим $a_i = b_i$ для любого номера i.

Вернемся к лекции?

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.

а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*

б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение.

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.
а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*
б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. а)

Непонятно, что делать?

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.
а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*
б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. а)

Один из вариантов поиска решения состоит в рассмотрении одного или нескольких примеров.

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.

а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*

б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. а)

$|B| = |C|$, значит, $\Big\{$

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.

а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*

б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. а)

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C \\ \exists f' : C \to B \end{cases}$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а)

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.

а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*

б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. а)

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C \\ \exists f' : C \to B \end{cases}$ $\quad \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta),$ $\quad \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta).$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а)

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

$|A \cup B| = |C|$, значит, по сравнению с B, в $A \cup B$ не появилось новых элементов.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а)

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

$|A \cup B| = |C|$, значит, по сравнению с B, в $A \cup B$ не появилось новых элементов.

Поэтому

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а)

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

$|A \cup B| = |C|$, значит, по сравнению с B, в $A \cup B$ не появилось новых элементов.

Поэтому $A \subseteq B$.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а)

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

$|A \cup B| = |C|$, значит, по сравнению с B, в $A \cup B$ не появилось новых элементов.

Поэтому $A \subseteq B$.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а) При объединении A с B

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

$|A \cup B| = |C|$, значит, по сравнению с B, в $A \cup B$ не появилось новых элементов.

Поэтому $A \subseteq B$.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а) При объединении A с B количество элементов в $A \cup B$

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

$|A \cup B| = |C|$, значит, по сравнению с B, в $A \cup B$ не появилось новых элементов.

Поэтому $A \subseteq B$.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а) При объединении A с B количество элементов в $A \cup B$ осталось тем же, что было в B.

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

$|A \cup B| = |C|$, значит, по сравнению с B, в $A \cup B$ не появилось новых элементов.

Поэтому $A \subseteq B$.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а) При объединении A с B количество элементов в $A \cup B$ осталось тем же, что было в B. Новых элементов в $A \cup B$ не появилось.

Значит,

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

$|A \cup B| = |C|$, значит, по сравнению с B, в $A \cup B$ не появилось новых элементов.

Поэтому $A \subseteq B$.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. а) При объединении A с B количество элементов в $A \cup B$ осталось тем же, что было в B. Новых элементов в $A \cup B$ не появилось.

Значит, $A \subseteq B$.

$|B| = |C|$, значит, $\begin{cases} \exists f : B \to C & \alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta), \\ \exists f' : C \to B & \alpha = \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) = f'(\beta). \end{cases}$

Например,

$x \in B$	a	b	c
$f(x) \in C$	1	2	3

.

$|A \cup B| = |C|$, значит, по сравнению с B, в $A \cup B$ не появилось новых элементов.

Поэтому $A \subseteq B$.

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.
а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*
б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. а) При объединении A с B количество элементов в $A \cup B$ осталось тем же, что было в B. Новых элементов в $A \cup B$ не появилось.

Значит, $A \subseteq B$.

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.

а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*

б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. б)

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.
а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*
б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. б)

Опять применим конкретизацию.

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.

а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*

б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. б)

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б)

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\ldots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\ldots$

Здесь α — предельный ординал.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*

а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*

б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\ldots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\ldots$

Здесь α — предельный ординал.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*

а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*

б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$			
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$			

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$h(y) \in C$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$			
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$			

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$\dots$	$\dots$
$h(y) \in C$				$\dots$				$\dots$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	$\dots$
$h(y) \in C$							$\dots$							$\dots$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$							$\dots$							$\dots$			$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1		c_3		c_5		$\dots$	c_α		$c_{\alpha+2}$		$c_{\alpha+4}$		$\dots$			$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$			$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$.

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{ a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A| \right\}$,

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$				
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$				

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$	
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$	

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

Пример 6. *Пусть* A, B, C *— множества,* $|A| \leqslant |B| = |C|$.

а) *Как связаны* A *и* B*, если* C *конечное множество и* $|A \cup B| = |C|$*?*

б) *Докажите, что если* C *бесконечно, то* $|A \cup B| = |C|$.

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A|\right\}$, $B = \left\{b_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Delta = |B|\right\}$,

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{ a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A| \right\}$, $B = \left\{ b_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Delta = |B| \right\}$,

$$h(x) = \begin{cases}$$

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{ a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A| \right\}$, $B = \left\{ b_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Delta = |B| \right\}$,

$$h(x) = \begin{cases} f(b_{2p-1}), \text{ если } x = a_p, \quad p \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*

а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*

б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{ a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A| \right\}$, $B = \left\{ b_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Delta = |B| \right\}$,

$$h(x) = \begin{cases} f(b_{2p-1}), \text{ если } x = a_p, \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{2p}), \text{ если } x = g(a_p), \quad p \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{ a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A| \right\}$, $B = \left\{ b_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Delta = |B| \right\}$,

$$h(x) = \begin{cases} f(b_{2p-1}), \text{ если } x = a_p, \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{2p}), \text{ если } x = g(a_p), \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{\alpha+2p}), \text{ если } x = a_{\alpha+p}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

(здесь α — предельный ординал)

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*

а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*

б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{ a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A| \right\}$, $B = \left\{ b_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Delta = |B| \right\}$,

$$h(x) = \begin{cases} f(b_{2p-1}), \text{ если } x = a_p, \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{2p}), \text{ если } x = g(a_p), \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{\alpha+2p}), \text{ если } x = a_{\alpha+p}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ f(b_{\alpha+2p+1}), \text{ если } x = g(a_{\alpha+p}), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

(здесь α — предельный ординал)

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{ a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A| \right\}$, $B = \left\{ b_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Delta = |B| \right\}$,

$$h(x) = \begin{cases} f(b_{2p-1}), \text{ если } x = a_p, \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{2p}), \text{ если } x = g(a_p), \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{\alpha+2p}), \text{ если } x = a_{\alpha+p}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \text{(здесь } \alpha \text{ — предельный} \\ f(b_{\alpha+2p+1}), \text{ если } x = g(a_{\alpha+p}), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \text{ординал)} \\ f(x), \text{ если } x \in B \backslash g(A). \end{cases}$$

$x \in A$	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_α	$a_{\alpha+1}$	$a_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$
$g(x) \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$

Здесь α — предельный ординал.

$y \in B$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_α	$b_{\alpha+1}$	$b_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$f(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{(\alpha+1)+1}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

β может быть непредельным.

$y \in A \cup B$	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\dots$	a_α	b_α	$a_{\alpha+1}$	$b_{\alpha+1}$	$a_{\alpha+2}$	$b_{\alpha+2}$	$\dots$	b'_β	$b'_{\beta+1}$	$\dots$
$h(y) \in C$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$	c_α	$c_{\alpha+1}$	$c_{\alpha+2}$	$c_{\alpha+3}$	$c_{\alpha+4}$	$c_{\alpha+5}$	$\dots$	c'_β	$c'_{\beta+1}$	$\dots$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{ a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A| \right\}$, $B = \left\{ b_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Delta = |B| \right\}$,

$$h(x) = \begin{cases} f(b_{2p-1}), \text{ если } x = a_p, \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{2p}), \text{ если } x = g(a_p), \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{\alpha+2p}), \text{ если } x = a_{\alpha+p}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (\text{здесь } \alpha \text{ — предельный} \\ f(b_{\alpha+2p+1}), \text{ если } x = g(a_{\alpha+p}), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \text{ординал}) \\ f(x), \text{ если } x \in B \backslash g(A). \end{cases}$$

Пример 6. *Пусть A, B, C — множества, $|A| \leqslant |B| = |C|$.*
а) *Как связаны A и B, если C конечное множество и $|A \cup B| = |C|$?*
б) *Докажите, что если C бесконечно, то $|A \cup B| = |C|$.*

Решение. б) $|A \cup B| \geqslant |C|$ очевидно. Можно считать, что $A \cap B = \emptyset$. $A = \left\{ a_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Gamma = |A| \right\}$, $B = \left\{ b_\gamma \,\middle|\, \gamma \in \Delta = |B| \right\}$,

$$h(x) = \begin{cases} f(b_{2p-1}), \text{ если } x = a_p, \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{2p}), \text{ если } x = g(a_p), \quad p \in \mathbb{N}, \\ f(b_{\alpha+2p}), \text{ если } x = a_{\alpha+p}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (\text{здесь } \alpha \text{ — предельный} \\ f(b_{\alpha+2p+1}), \text{ если } x = g(a_{\alpha+p}), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \text{ординал}) \\ f(x), \text{ если } x \in B \backslash g(A). \end{cases}$$

Вернемся к лекции или рассмотрим **другой пример?**

Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h**.**

Решение.

$f(x) = \left\{ \right.$

$g(y) = \left\{ \right.$

Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h**.**

Решение.

$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \end{cases}$

$g(y) = \begin{cases} \end{cases}$

Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ \quad , \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \end{cases}$$

Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ \end{cases}$$

Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

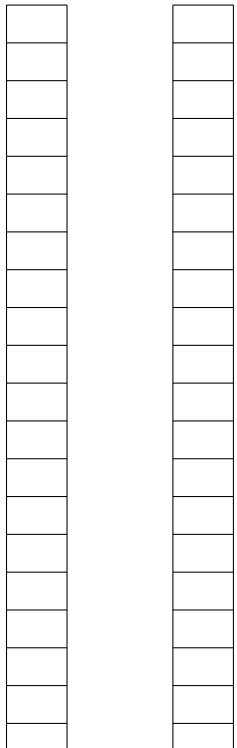
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Сначала построим

$A_1 =$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

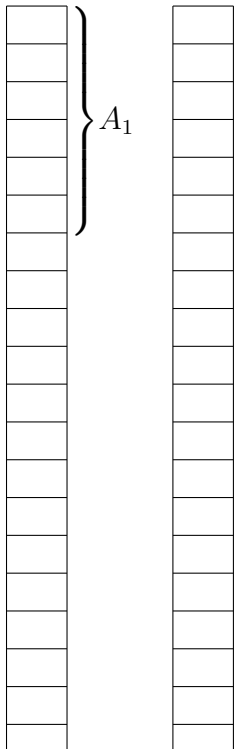
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Сначала построим

$A_1 =$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

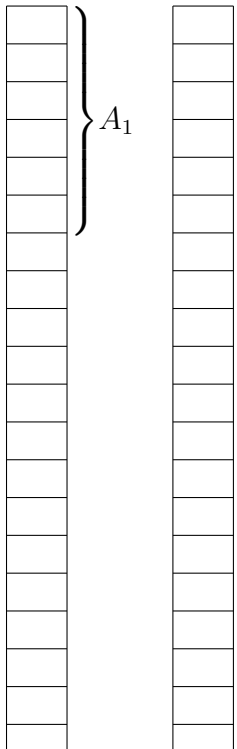
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Сначала построим

$A_1 = A\backslash g(B) =$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

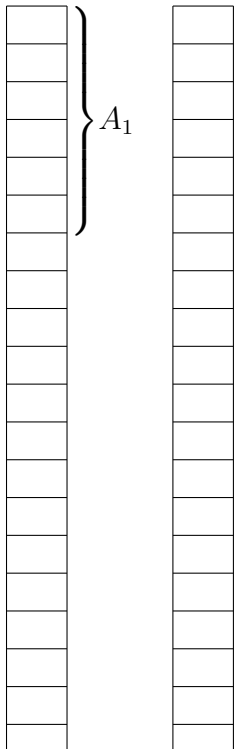
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Сначала построим

$A_1 = A\backslash g(B) = \{a, b, c,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

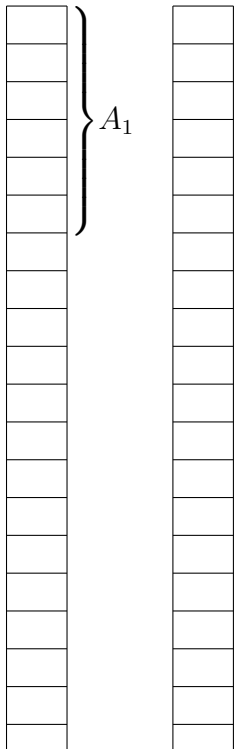
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Сначала построим

$A_1 = A\backslash g(B) = \{a, b, c, 2,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

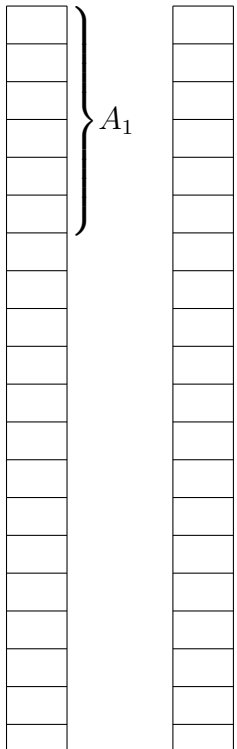
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Сначала построим

$A_1 = A\backslash g(B) = \{a, b, c, 2, 4, 6, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

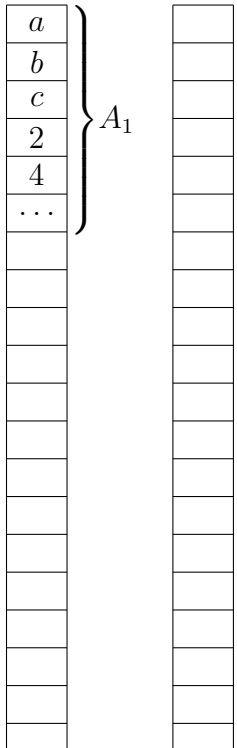
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Сначала построим

$A_1 = A\backslash g(B) = \{a, b, c, 2, 4, 6, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

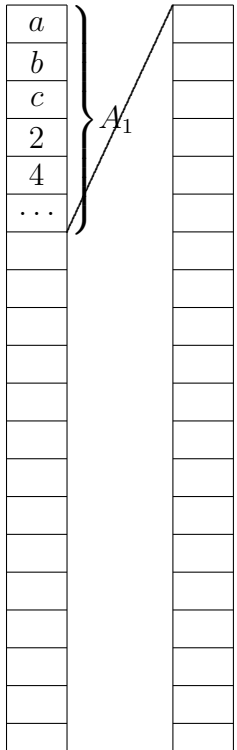
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Сначала построим

$A_1 = A\backslash g(B) = \{a, b, c, 2, 4, 6, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

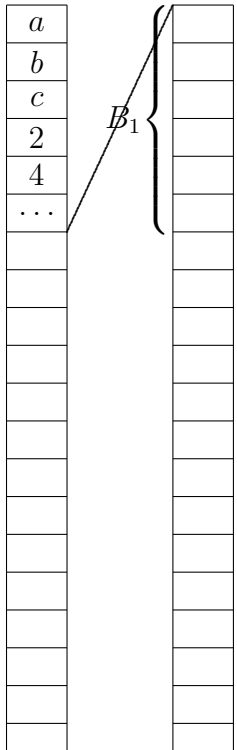
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Теперь построим

$B_1 =$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

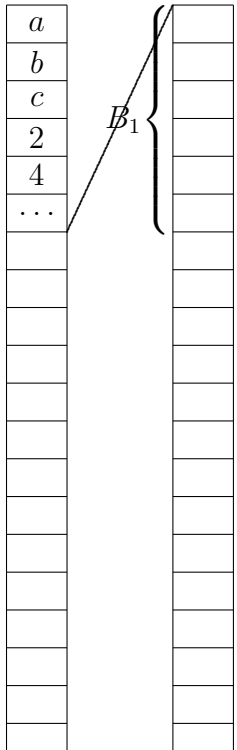
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Теперь построим

$B_1 = B\backslash f(A) =$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

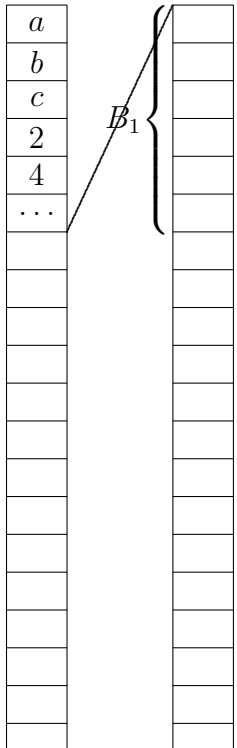
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Теперь построим

$B_1 = B\backslash f(A) = \{p, q, 0,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

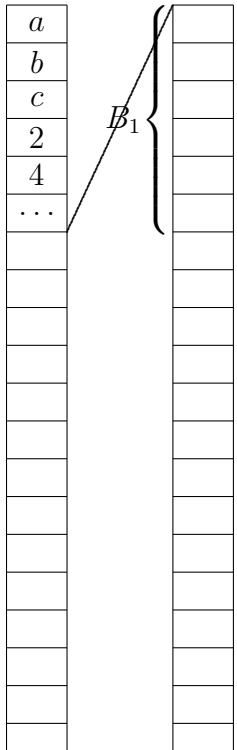
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Теперь построим

$B_1 = B\backslash f(A) = \{p, q, 0, -1,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

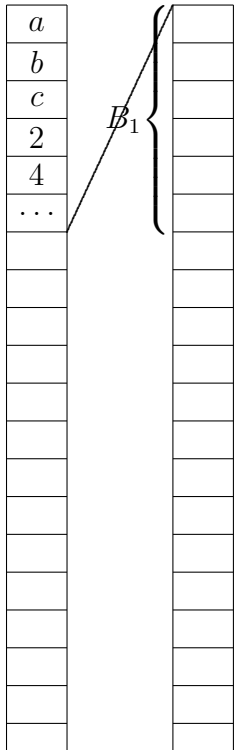
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Теперь построим

$B_1 = B\backslash f(A) = \{p, q, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

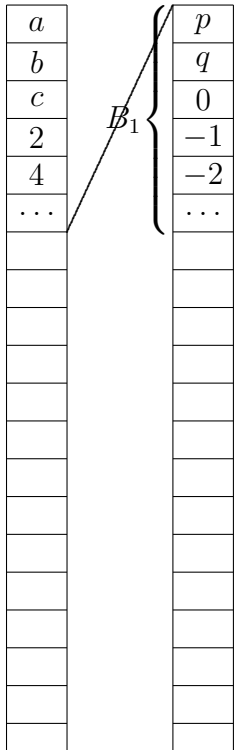
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Теперь построим

$B_1 = B\backslash f(A) = \{p, q, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

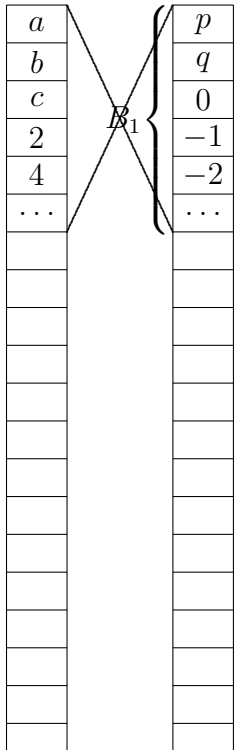
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Теперь построим

$B_1 = B\backslash f(A) = \{p, q, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

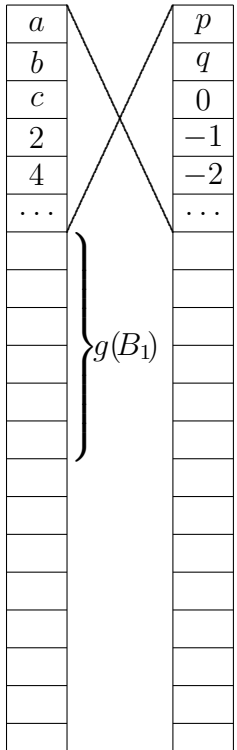
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$g(B_1) =$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

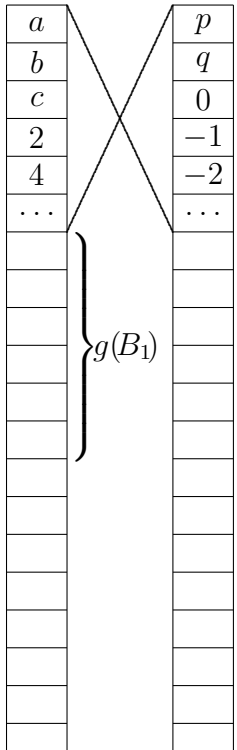
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$g(B_1) = \{1,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

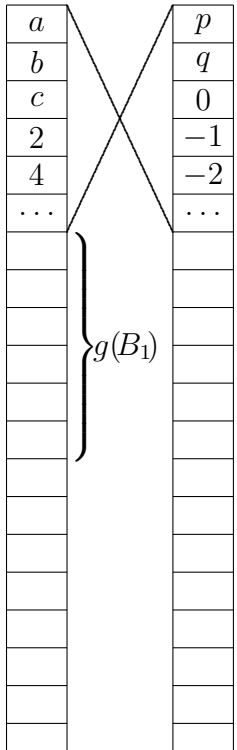
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$g(B_1) = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

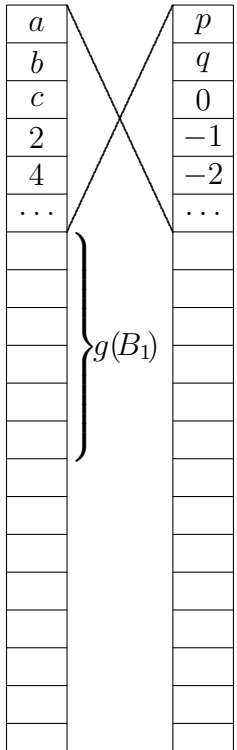
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$g(B_1) = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

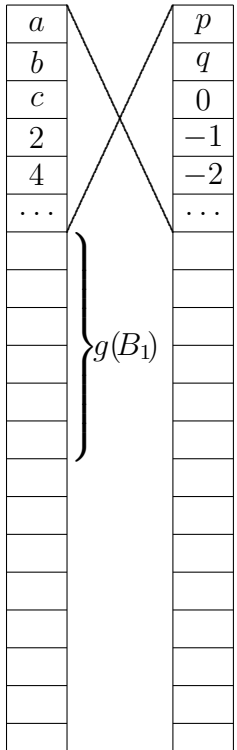
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$g(B_1) = \{1, 3, 5, 7, 11, 15, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

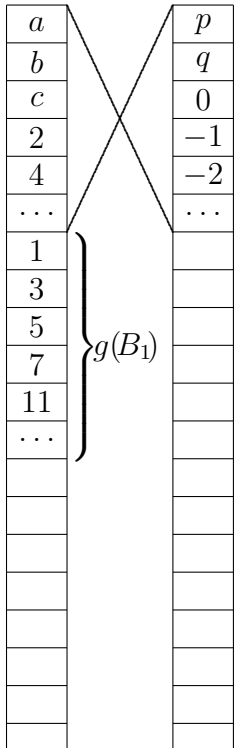
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$g(B_1) = \{1, 3, 5, 7, 11, 15, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

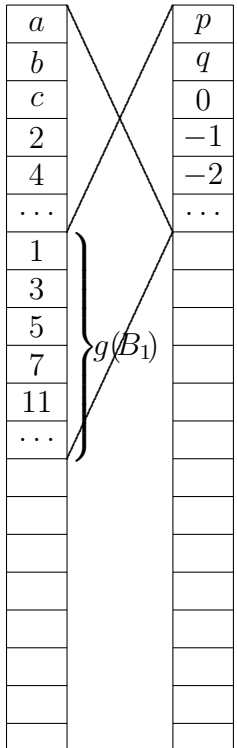
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$g(B_1) = \{1, 3, 5, 7, 11, 15, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

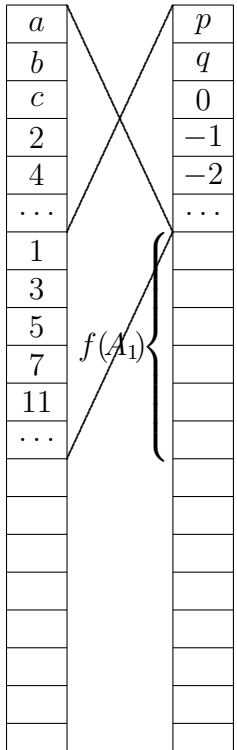
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$f(A_1) =$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

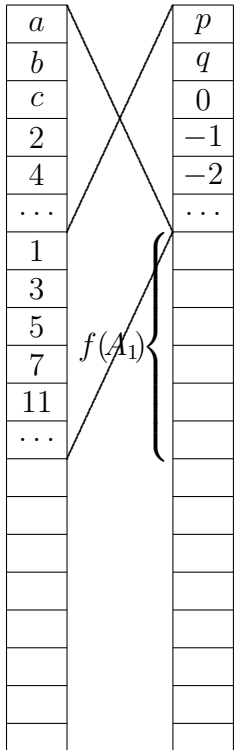
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$f(A_1) = \{1,\ 2,\ 3,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

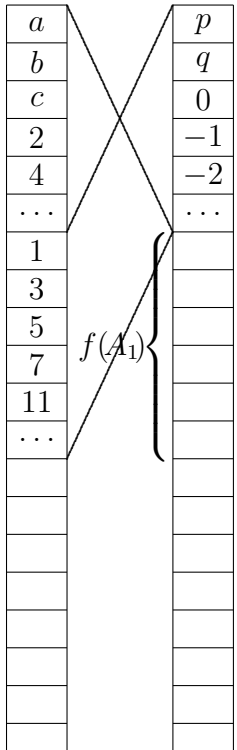
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$f(A_1) = \{1,\ 2,\ 3, 5,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

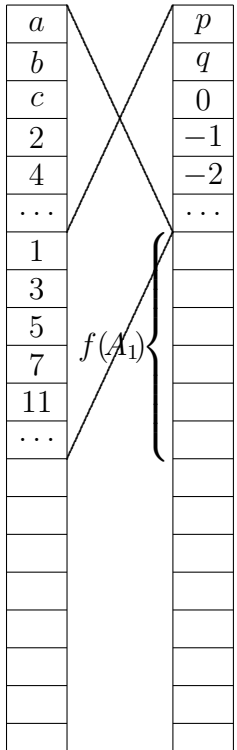
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$f(A_1) = \{1,\ 2,\ 3, 5, 7,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

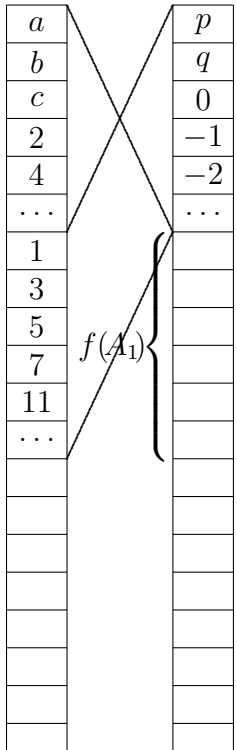
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$f(A_1) = \{1,\ 2,\ 3, 5, 7, 9, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

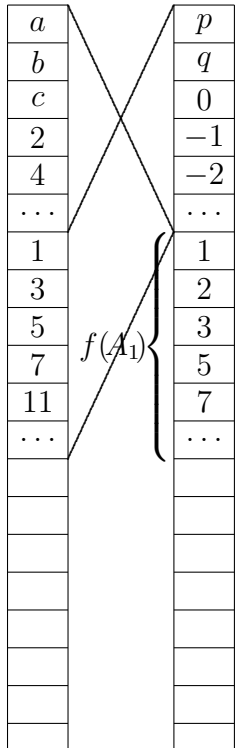
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$f(A_1) = \{1,\ 2,\ 3, 5, 7, 9, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

Построить h.

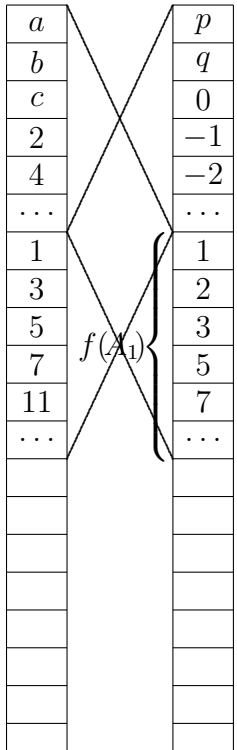
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Построим

$f(A_1) = \{1,\ 2,\ 3, 5, 7, 9, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

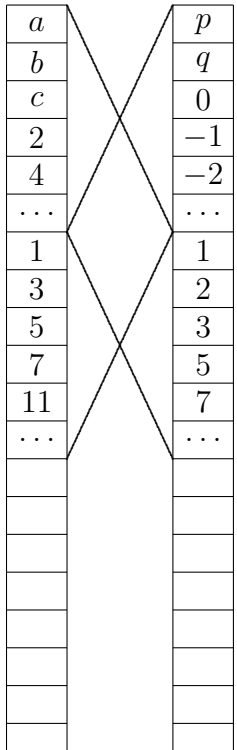
Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	...
$h(x)$	...



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	...	y	p	q	0	-1	1	-2	2	...
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	...	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	...

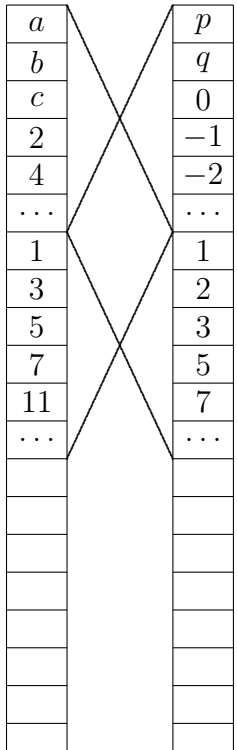
Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	...
$h(x)$				p q 0 $-n$	...



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\dots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\dots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\dots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\dots$

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

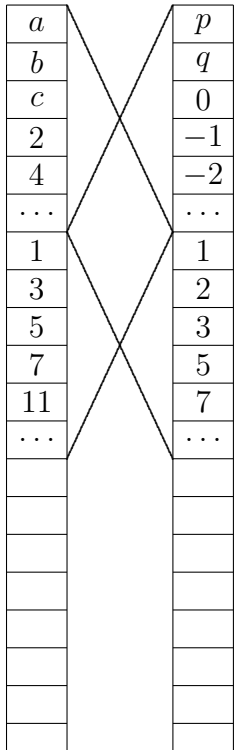
$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\dots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\dots$

Построим

$A_2 =$

$=$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

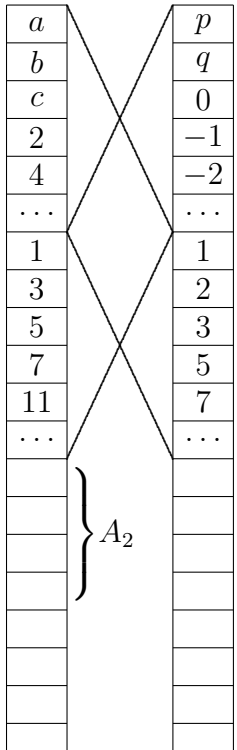
$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$A_2 =$

$=$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

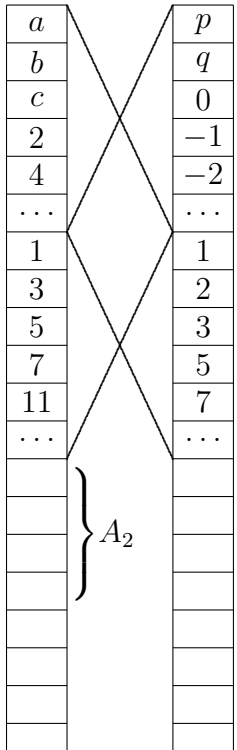
$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$A_2 = A\backslash(A_1 \cup g(B_1) \cup g(B\backslash B_1 \cup f(A_1))) =$

$=$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

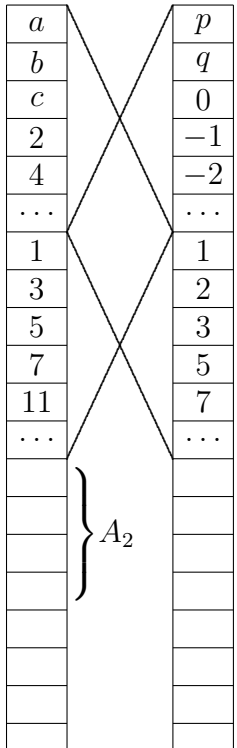
$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$A_2 = A\backslash(A_1 \cup g(B_1) \cup g(B\backslash B_1 \cup f(A_1))) =$

$= \{9,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

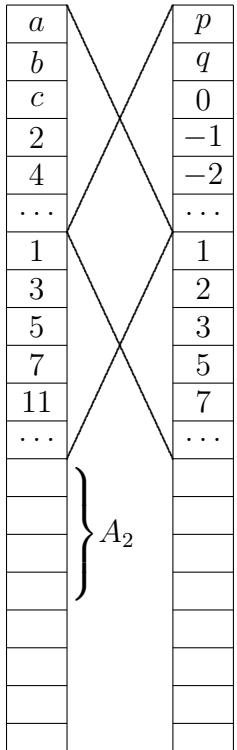
$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$A_2 = A\backslash(A_1 \cup g(B_1) \cup g(B\backslash B_1 \cup f(A_1))) =$

$= \{9, 13,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

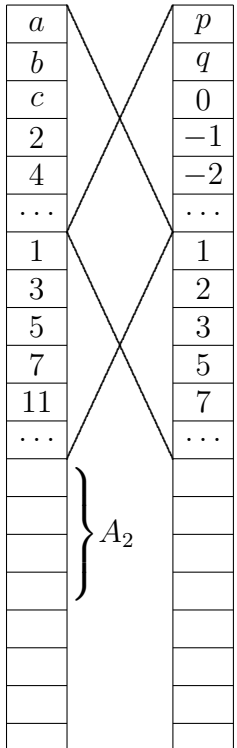
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$$A_2 = A\backslash(A_1 \cup g(B_1) \cup g(B\backslash B_1 \cup f(A_1))) =$$
$$= \{9, 13, 17, 21, \ldots\}$$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

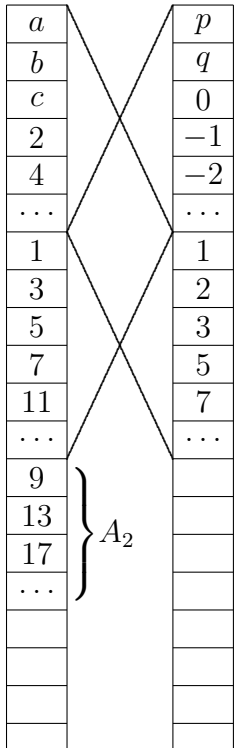
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$$A_2 = A\backslash(A_1 \cup g(B_1) \cup g(B\backslash B_1 \cup f(A_1))) =$$
$$= \{9, 13, 17, 21, \ldots\}$$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

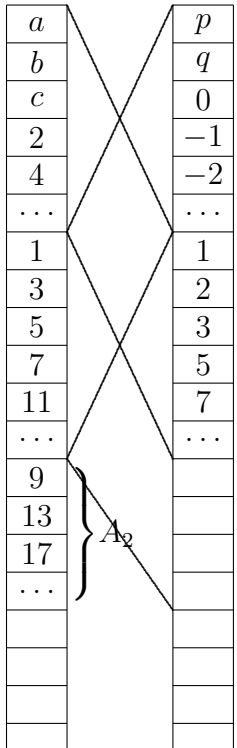
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$$A_2 = A\backslash(A_1 \cup g(B_1) \cup g(B\backslash B_1 \cup f(A_1))) =$$
$$= \{9, 13, 17, 21, \ldots\}$$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

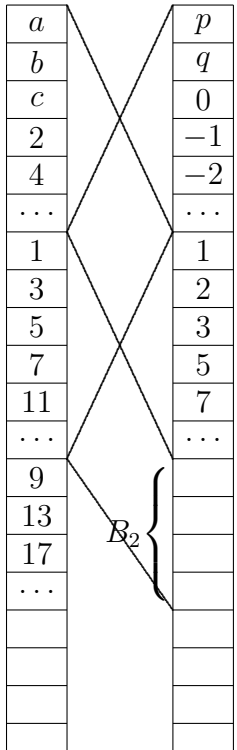
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$B_2 =$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

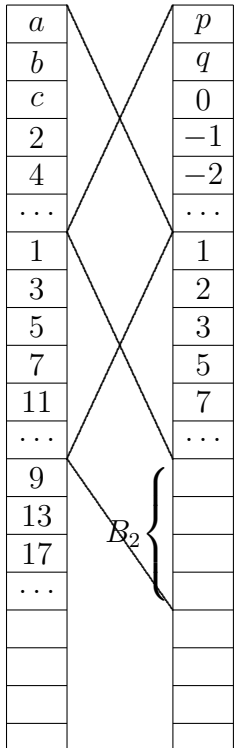
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$$B_2 = B\backslash\left(B_1 \cup f(A_1) \cup f(A_2)\right) =$$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

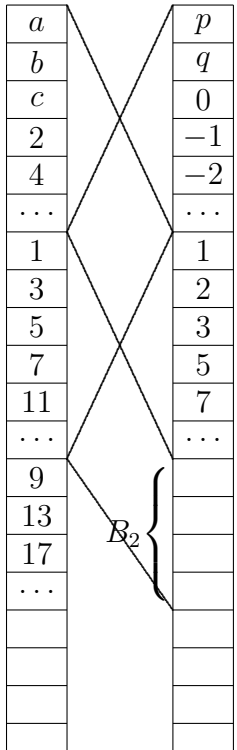
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$B_2 = B\backslash(B_1 \cup f(A_1) \cup f(A_2)) = \{4,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

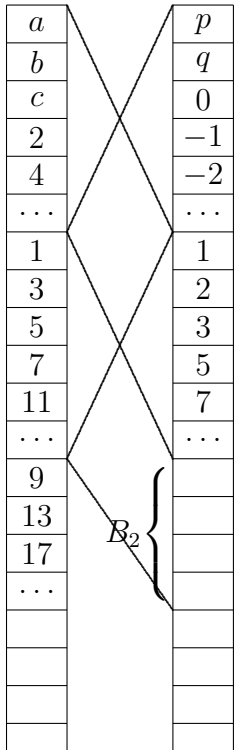
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$B_2 = B\backslash(B_1 \cup f(A_1) \cup f(A_2)) = \{4, 6,$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

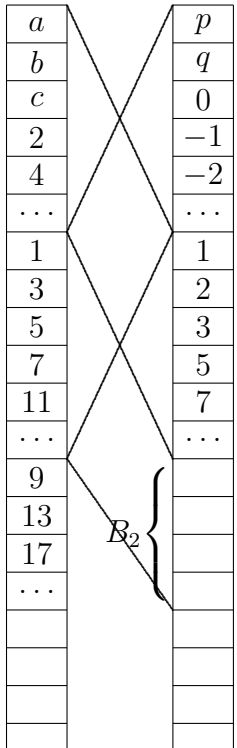
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$$B_2 = B\backslash(B_1 \cup f(A_1) \cup f(A_2)) = \{4, 6, 8, 10, \ldots\}$$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

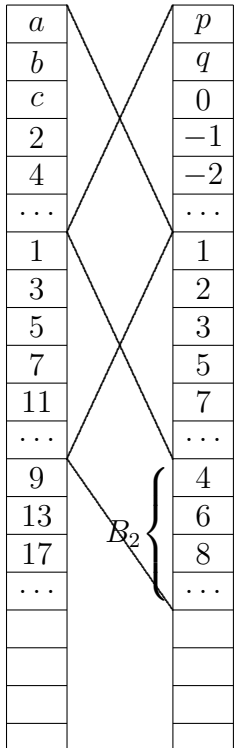
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$$B_2 = B\backslash(B_1 \cup f(A_1) \cup f(A_2)) = \{4, 6, 8, 10, \ldots\}$$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

Построить h.

Решение.

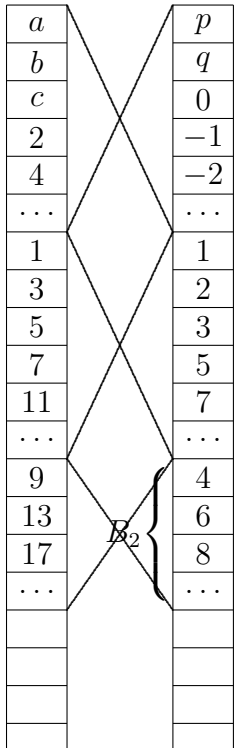
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$

Построим

$B_2 = B\backslash(B_1 \cup f(A_1) \cup f(A_2)) = \{4, 6, 8, 10, \ldots\}$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

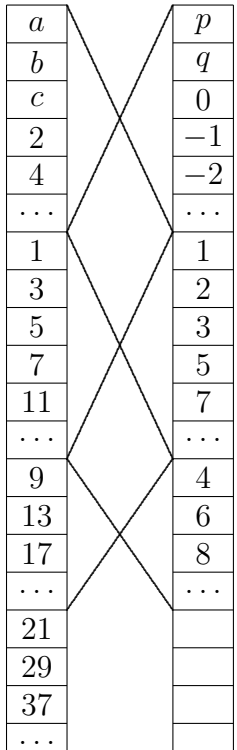
Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\ldots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\ldots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\ldots$

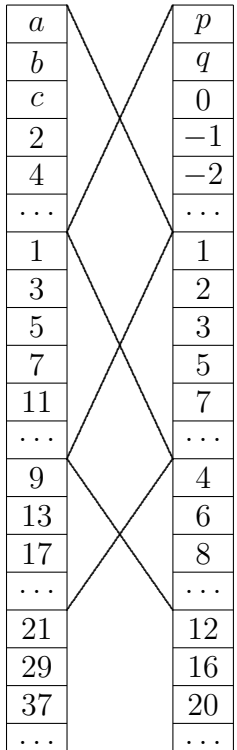
Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$\ldots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$\ldots$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\dots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\dots$

y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\dots$
$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\dots$

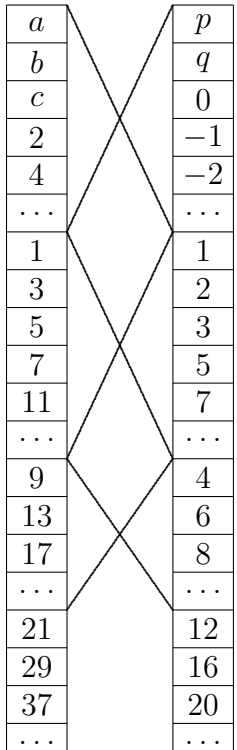
Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4+4n-1$	$4n+5$	$\dots$
$h(x)$	1	2	3	$2n+3$	p	q	0	$-n$	$2n+2$	$\dots$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\dots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\dots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\dots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\dots$

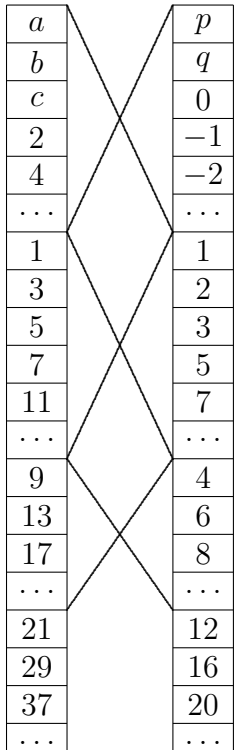
Построить h.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$4n + 5$	$13 + 8n$	$\dots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$8 + 4n$	$2n + 2$	$\dots$



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\dots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\dots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\dots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\dots$

Построить h.

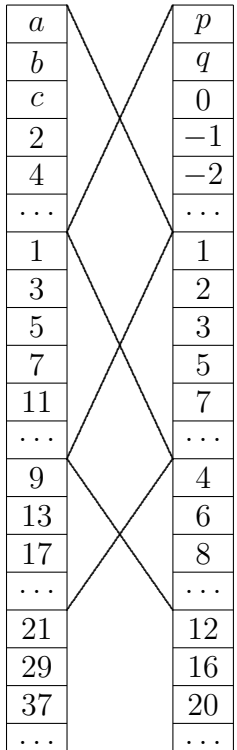
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$4n + 5$	$13 + 8n$	$\dots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$8 + 4n$	$2n + 2$	$\dots$

Возможно, придется «преодолевать» бесконечный ординал...



Пример 7. *Пусть* $A = \{a, b, c\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{p, q\} \cup \mathbb{Z}$,

x	a	b	c	1	2	3	$\dots$	y	p	q	0	-1	1	-2	2	$\dots$
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	$\dots$	$g(y)$	1	3	5	7	9	11	13	$\dots$

Построить h.

Решение.

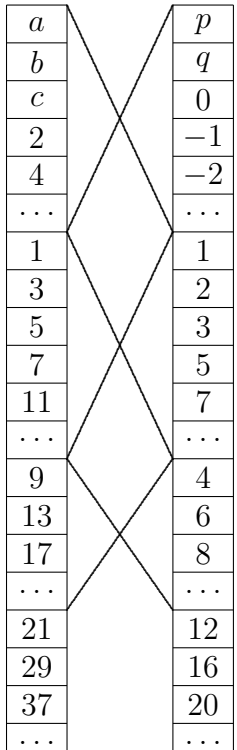
$$f(x) = \begin{cases} 1, 2 \text{ или } 3, \text{ если, соответственно, } x = a, b \text{ или } c, \\ x + 3, \text{ если } x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, 3 \text{ или } 5, \text{ если, соответственно, } y = p, q \text{ или } 0, \\ 4 + 4|y| + \operatorname{sign} y, \text{ если } y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

x	a	b	c	$2n$	1	3	5	$4 + 4n - 1$	$4n + 5$	$13 + 8n$	$\dots$
$h(x)$	1	2	3	$2n + 3$	p	q	0	$-n$	$8 + 4n$	$2n + 2$	$\dots$

Возможно, придется «преодолевать» бесконечный ординал...

Вернемся к лекции?



Задачи для самостоятельного решения

Задача IV.1. (Ответ приведен на стр.561.) Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Задача IV.2. (Ответ приведен на стр.565.) Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Задача IV.3. (Ответ приведен на стр.575.) Докажите, что прямое произведение конечного числа не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Задача IV.4. (Ответ приведен на стр.577.) Докажите, что прямое произведение счетного множества счетных множеств есть несчетное множество.

Задача IV.5. (Ответ приведен на стр.579.) Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Задача IV.6. (Ответ приведен на стр.586.) Является ли множество всех конечных подмножеств счетного множества счетным множеством?

Задача IV.7. (Ответ приведен на стр.588.) Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответы и решения

Решение задачи 1.

Задача 1. Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Задача 1. Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Ответ. $f: A \to \mathbb{N}, \quad g: B \to \mathbb{N},$

Задача 1. Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Ответ. $f: A \to \mathbb{N}, \quad g: B \to \mathbb{N},$

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1, & \text{если} \quad x \in A, \\ \end{cases}$$

Задача 1. Докажите, что объединение двух не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Ответ. $f: A \to \mathbb{N}, \quad g: B \to \mathbb{N},$

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1, & \text{если} \quad x \in A, \\ 2g(x), & \text{если} \quad x \in B \backslash A. \end{cases}$$

Решение задачи 2.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Мощность множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не больше мощности множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Мощность множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не больше мощности множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Последнее множество счетно.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Мощность множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не больше мощности множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Последнее множество счетно.
Значит, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Мощность множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не больше мощности множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Последнее множество счетно.

Значит, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$.

Обратное неравенство следует из бесконечности множества рациональных чисел. Утверждение доказано.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.
Ответ. Конструктивное доказательство.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Конструктивное доказательство. Пусть f — **взаимно однозначное отображение** множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ во множество $\mathbb{N}$.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Конструктивное доказательство. Пусть f — **взаимно однозначное отображение** множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ во множество $\mathbb{N}$.

Для любого рационального числа x положим $F(x) = \left\{ f(m,n) \,\middle|\, x = \frac{m}{n} \right\}$.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Конструктивное доказательство. Пусть f — **взаимно однозначное отображение** множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ во множество $\mathbb{N}$.

Для любого рационального числа x положим $F(x) = \left\{ f(m,n) \,\middle|\, x = \frac{m}{n} \right\}$.

Это множество не одноэлементное, так как, например $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$.

Задача 2. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Ответ. Конструктивное доказательство. Пусть f — **взаимно однозначное отображение** множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ во множество $\mathbb{N}$.

Для любого рационального числа x положим $F(x) = \left\{ f(m,n) \,\middle|\, x = \frac{m}{n} \right\}$.

Это множество не одноэлементное, так как, например $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$.

Нетрудно показать, что в качестве искомого вложения $\mathbb{Q} \mapsto \mathbb{N}$ можно взять функцию, определенную формулой $g(x) = \min F(x)$.

Решение задачи 3.

Задача 3. Докажите, что прямое произведение конечного числа не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Задача 3. Докажите, что прямое произведение конечного числа не более чем счетных множеств есть не более чем счетное множество.

Ответ. Индукция по числу множителей в прямом произведении.

Решение задачи 4.

Задача 4. Докажите, что прямое произведение счетного множества счетных множеств есть несчетное множество.

Задача 4. Докажите, что прямое произведение счетного множества счетных множеств есть несчетное множество.

Ответ. Доказательство полностью аналогично доказательству несчетности континуума.

Решение задачи 5.

Задача 5. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Задача 5. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Ответ. Пусть $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, и f_m — **взаимно однозначное отображение** множества A_m в $\mathbb{N}$.

Задача 5. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Ответ. Пусть $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, и f_m — **взаимно однозначное отображение** множества A_m в $\mathbb{N}$.

Возьмем последовательность различных простых чисел: $2 < 3 < 5 < 7 < 11 < \ldots < p_n < \ldots$.

Задача 5. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Ответ. Пусть $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, и f_m — **взаимно однозначное отображение** множества A_m в $\mathbb{N}$.

Возьмем последовательность различных простых чисел: $2 < 3 < 5 < 7 < 11 < \ldots < p_n < \ldots$. Она, очевидно, бесконечна, так как число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ больше каждого p_k, и не делится ни на одно из p_k, где $k \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$.

Задача 5. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Ответ. Пусть $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, и f_m — **взаимно однозначное отображение** множества A_m в $\mathbb{N}$.

Возьмем последовательность различных простых чисел: $2 < 3 < 5 < 7 < 11 < \ldots < p_n < \ldots$.

Она, очевидно, бесконечна, так как число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ больше каждого p_k, и не делится ни на одно из p_k, где $k \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$.

Искомое отображение $g:\ B \mapsto \mathbb{N}$ введем формулой

Задача 5. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Ответ. Пусть $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, и f_m — **взаимно однозначное отображение** множества A_m в $\mathbb{N}$.

Возьмем последовательность различных простых чисел: $2 < 3 < 5 < 7 < 11 < \ldots < p_n < \ldots$.

Она, очевидно, бесконечна, так как число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ больше каждого p_k, и не делится ни на одно из p_k, где $k \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$.

Искомое отображение $g:\ B \mapsto \mathbb{N}$ введем формулой

$$g(b) = p_k^{f_k(b)},$$

где k — такой наименьший номер, что $b \in A_k$.

Задача 5. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Ответ. Пусть $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, и f_m — **взаимно однозначное отображение** множества A_m в $\mathbb{N}$.

Возьмем последовательность различных простых чисел: $2 < 3 < 5 < 7 < 11 < \ldots < p_n < \ldots$.

Она, очевидно, бесконечна, так как число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ больше каждого p_k, и не делится ни на одно из p_k, где $k \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$.

Искомое отображение $g:\ B \mapsto \mathbb{N}$ введем формулой

$$g(b) = p_k^{f_k(b)},$$

где k — такой наименьший номер, что $b \in A_k$.

Нетрудно проверить, что g является **взаимно однозначным отображением**.

Решение задачи 6.

Задача 6. Является ли множество всех конечных подмножеств счетного множества счетным множеством?

Задача 6. Является ли множество всех конечных подмножеств счетного множества счетным множеством?

Ответ. Пусть A — счетное множество, B — множество всех его конечных подмножеств. Обозначим через A_m множество всех m-элементных подмножеств множества A. Тогда $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ — объединение счетного множества счетных множеств. Значит, согласно предыдущему пункту оно счетно.

Решение задачи 7.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

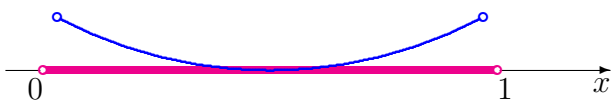
Ответ.

«Загнем» концы отрезка вверх, до получения «колечка».

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

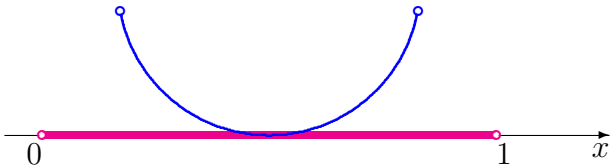
«Загнем» концы отрезка вверх, до получения «колечка».



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

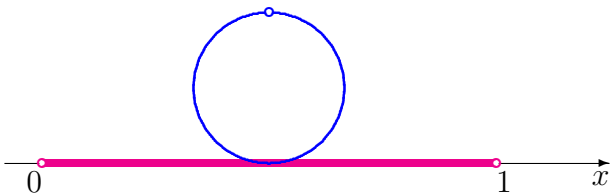
«Загнем» концы отрезка вверх, до получения «колечка».



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

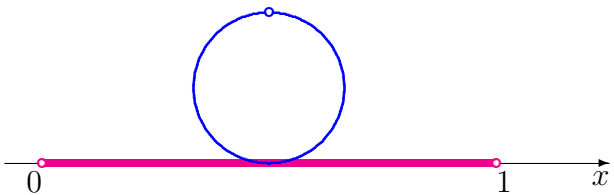
«Загнем» концы отрезка вверх, до получения «колечка».



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

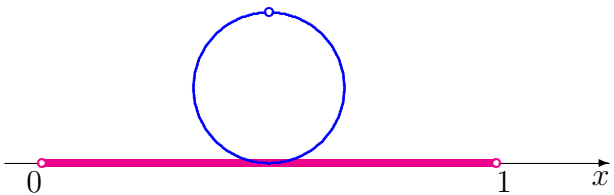


Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке.

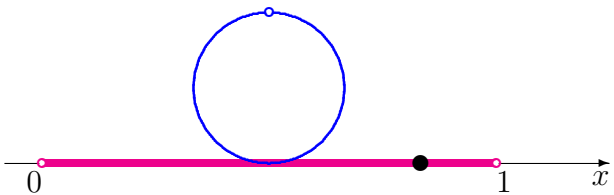


Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке.

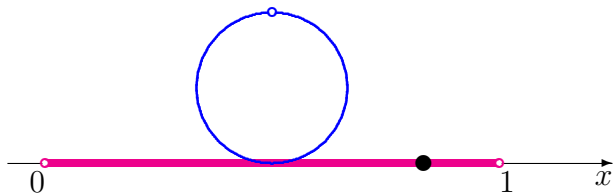


Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке. Изобразим ее образ на «колечке».

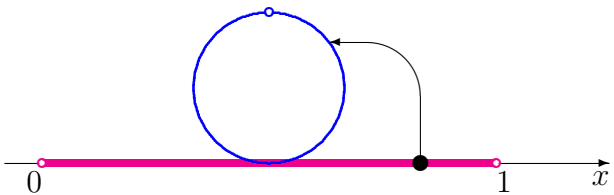


Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке. Изобразим ее образ на «колечке».

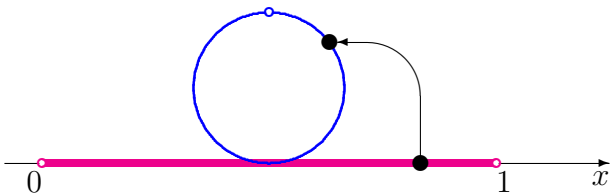


Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке. Изобразим ее образ на «колечке».



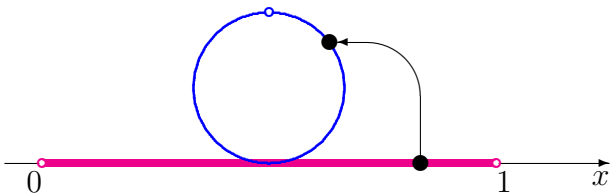
Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке. Изобразим ее образ на «колечке».

Отобразим последнюю точку на оси Ox следующим образом...



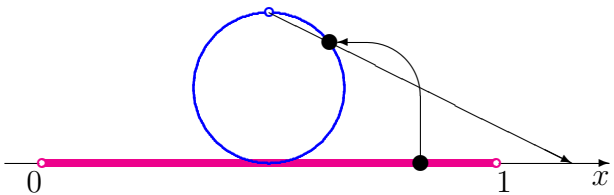
Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке. Изобразим ее образ на «колечке».

Отобразим последнюю точку на оси Ox следующим образом...



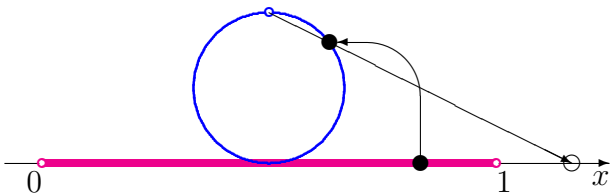
Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке. Изобразим ее образ на «колечке».

Отобразим последнюю точку на оси Ox следующим образом...



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

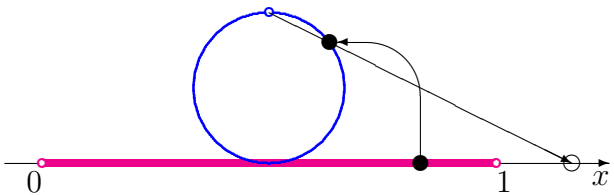
Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке. Изобразим ее образ на «колечке».

Отобразим последнюю точку на оси Ox следующим образом...

В итоге получили такое отображение...



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

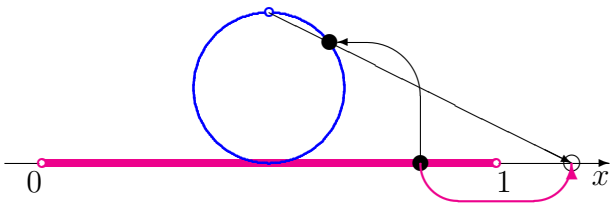
Ответ.

Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке. Изобразим ее образ на «колечке».

Отобразим последнюю точку на оси Ox следующим образом...

В итоге получили такое отображение...



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

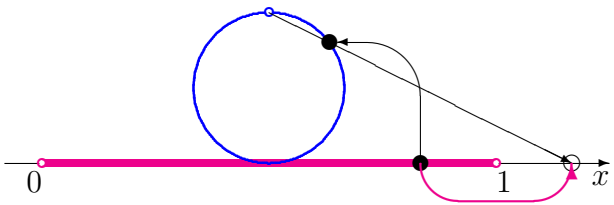
Опишем искомую взаимно однозначную функцию $f : (0;\ 1) \mapsto \mathbb{R}$ алгоритмом.

Возьмем точку на отрезке. Изобразим ее образ на «колечке».

Отобразим последнюю точку на оси Ox следующим образом...

В итоге получили такое отображение...

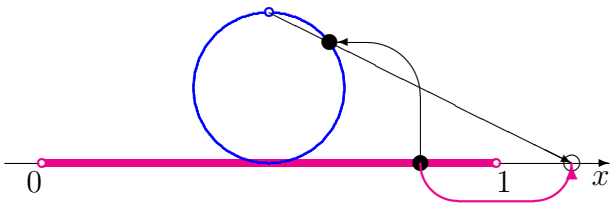
Зададим его формулой.



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

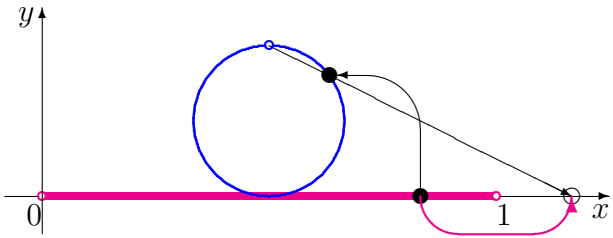
Введем ось Oy.



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Введем ось Oy.

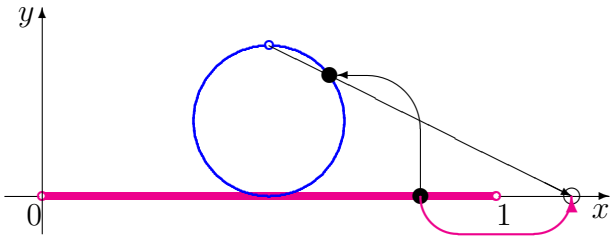


Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

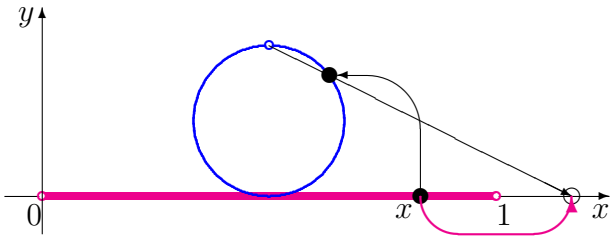


Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

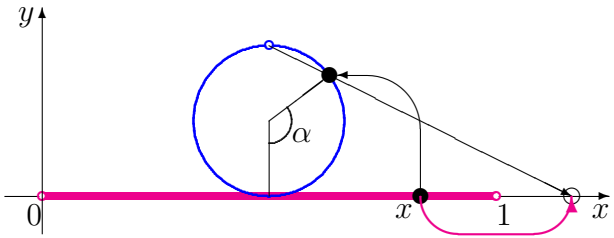


Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.



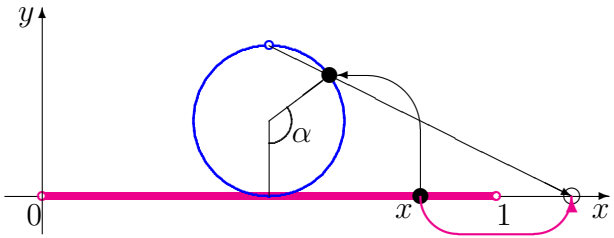
Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна



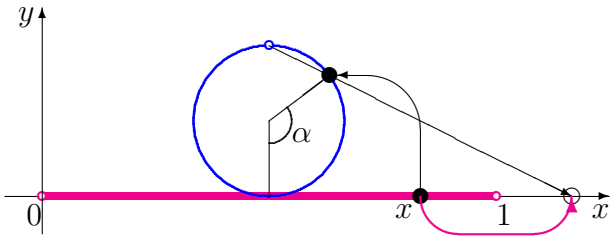
Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

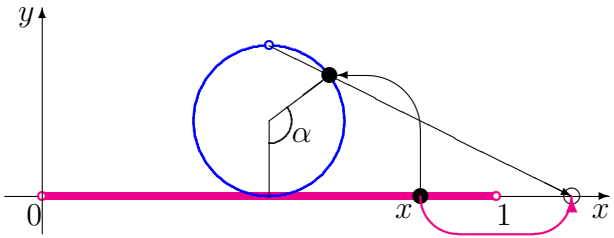
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha =$



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

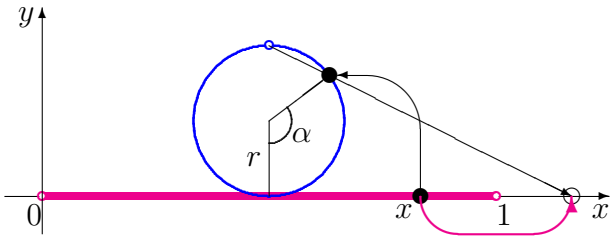
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha =$



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

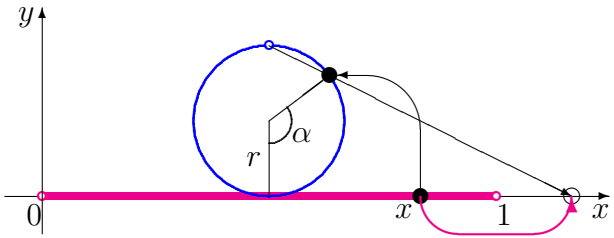
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} =$



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

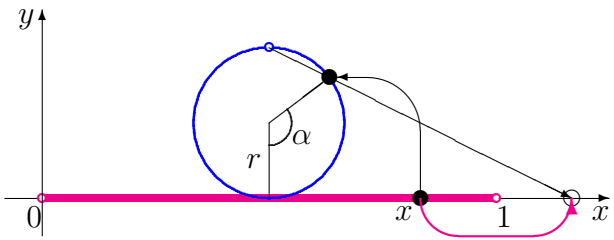
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} =$



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

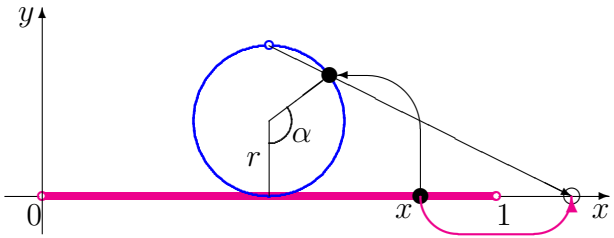
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

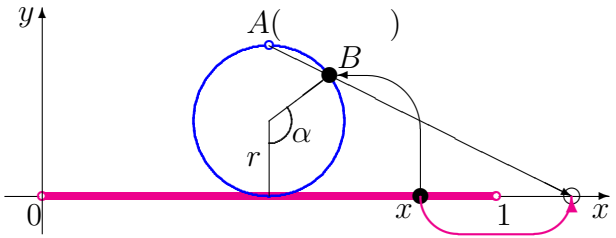
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

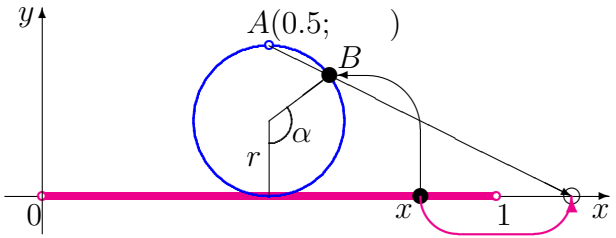
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

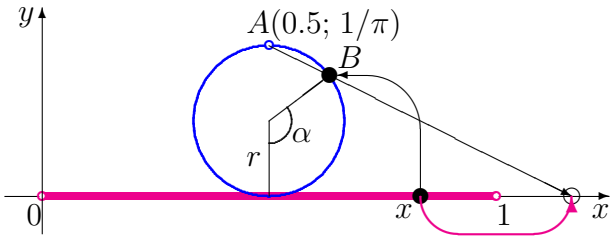
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.

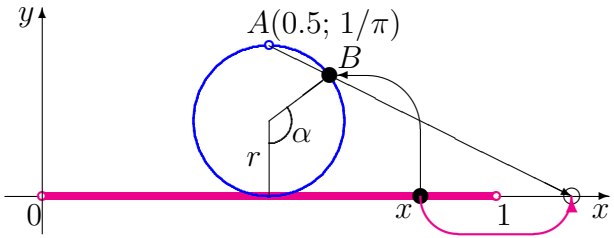
Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.

$B\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$,



Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

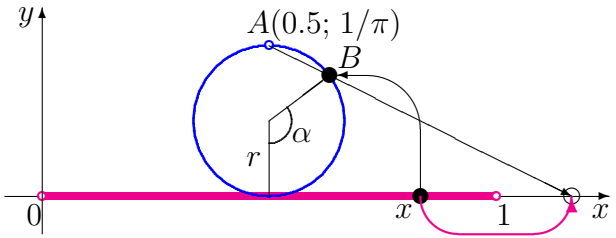
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\qquad\qquad\right)$,

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

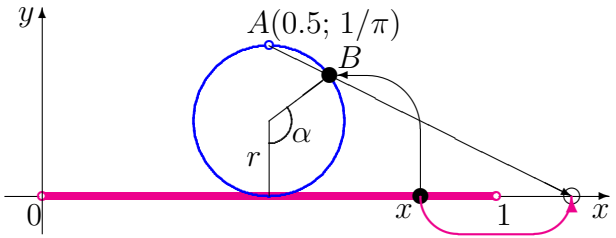
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$,

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

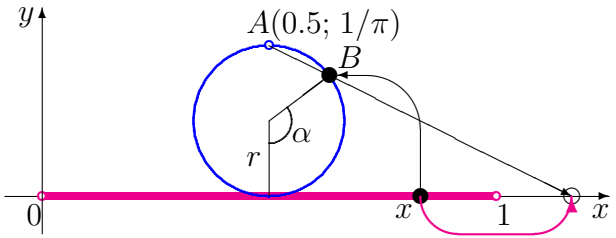
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

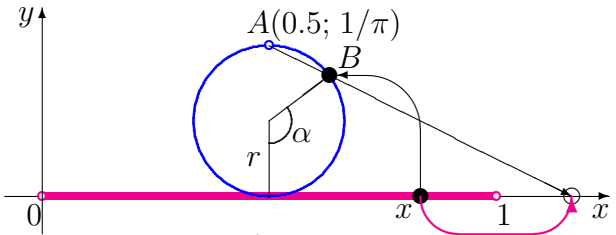
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\Big($ $\Big)$.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

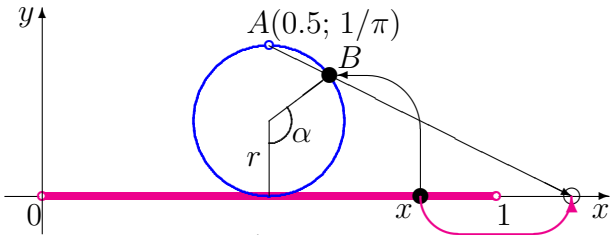
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \right)$.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

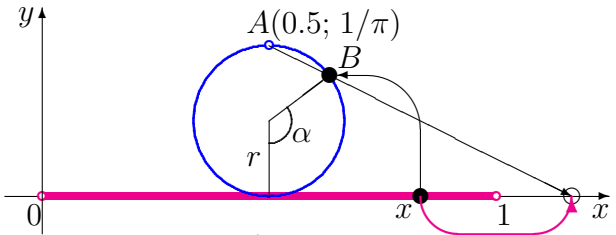
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

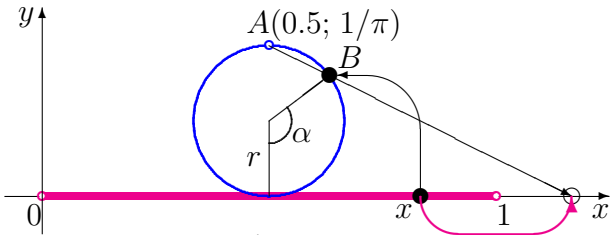
Значит, $\alpha = \dfrac{x-0.5}{r} = \dfrac{x-0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x-0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.



Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x-0.5}{r} = \dfrac{x-0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x-0.5)$.

$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

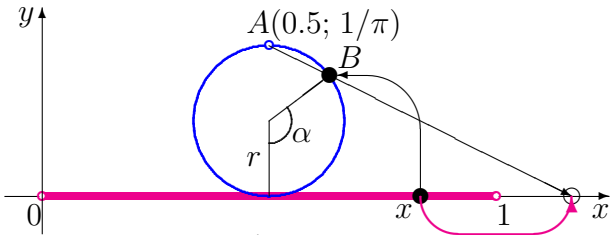
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

$$\frac{p - \quad}{\quad} = \frac{q - \quad}{\quad}.$$

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

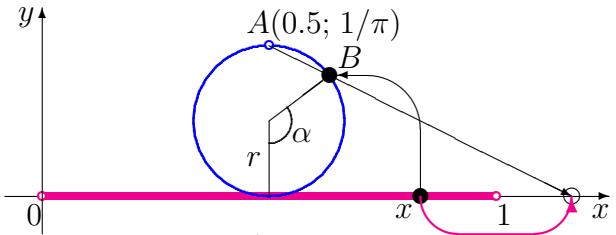
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

$$\frac{p - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{} = \frac{q - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{}.$$

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

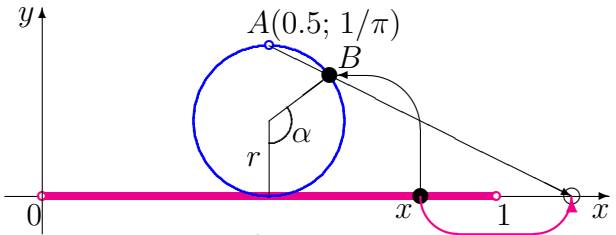
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

$$\frac{p - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{0.5 - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}} = \frac{q - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{}.$$

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

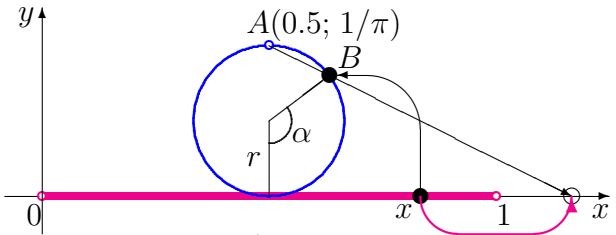
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

$$\frac{p - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{0.5 - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}} = \frac{q - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}.$$

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

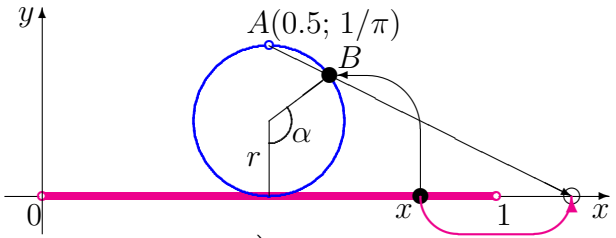
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

$$\frac{p - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{0.5 - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}} = \frac{q - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}.$$

$f(x) = p$ при $q = 0$.

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

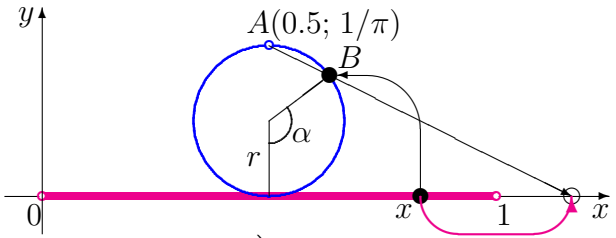
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x-0.5}{r} = \dfrac{x-0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x-0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

$$\frac{p - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{0.5 - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}} = \frac{q - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}.$$ $f(x) = p$ при $q = 0$.

$f(x) =$

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

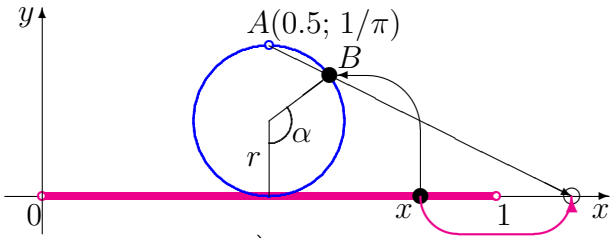
Ответ.

Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x - 0.5}{r} = \dfrac{x - 0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x - 0.5)$.



$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

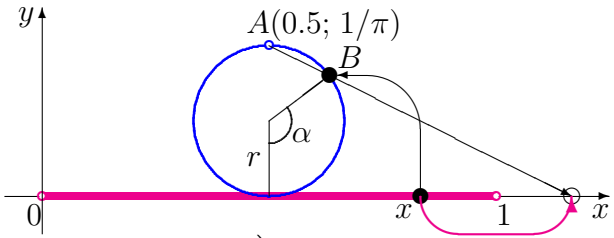
$$\frac{p - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{0.5 - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}} = \frac{q - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}.$$

$f(x) = p$ при $q = 0$.

$$f(x) = + \frac{\pi + \sin\left(2\pi(x - 0.5)\right)}{2\pi}.$$

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.



Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x-0.5}{r} = \dfrac{x-0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x-0.5)$.

$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

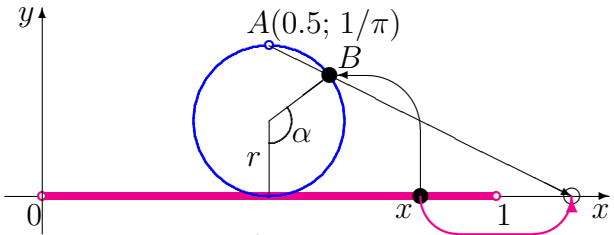
$$\frac{p - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{0.5 - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}} = \frac{q - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}.$$

$f(x) = p$ при $q = 0$.

$$f(x) = \frac{(1-\cos(2\pi(x-0.5)))\sin(2\pi(x-0.5))}{1+\cos(2\pi(x-0.5))} + \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}.$$

Задача 7. Докажите, что $|\mathbb{R}| = |(0;\ 1)|$.

Ответ.



Введем ось Oy.

Сначала найдем координаты образа точки, первоначально имевшей координаты $(x, 0)$.

Длина дуги отвечающей углу α, равна $(x - 0.5)$.

Значит, $\alpha = \dfrac{x-0.5}{r} = \dfrac{x-0.5}{1/(2\pi)} = 2\pi(x-0.5)$.

$B\left(0.5 + \frac{1}{2\pi}\sin\alpha;\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos\alpha\right)$, т.е. $B\left(\frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi};\ \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}\right)$.

Уравнение прямой AB (здесь $(p;\ q)$ — координаты точки на прямой):

$$\frac{p - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{0.5 - \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}} = \frac{q - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1-\cos(2\pi(x-0.5))}{2\pi}}.$$

$f(x) = p$ при $q = 0$.

$$f(x) = \frac{(1-\cos(2\pi(x-0.5)))\sin(2\pi(x-0.5))}{1+\cos(2\pi(x-0.5))} + \frac{\pi+\sin(2\pi(x-0.5))}{2\pi}.$$

Жить стало лучше, жить стало веселее...

Спасибо за внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru
сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?