Аксиомы булевой алгебры

A1. а) $x + y = y + x$; б) $x * y = y * x$;

A2. а) $(x + y) + z = x + (y + z)$; б) $(x * y) * z = x * (y * z)$;

A3. а) $(x + y) * z = x * z + y * z$; б) $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$;

A4. а) $x + x = x$; б) $x * x = x$;

A5 (закон совместимости). $x + y = x$ тогда и только тогда, когда $x * y = y$;

A6. а) $x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$; б) $x * \mathbf{1} = x$;

A7. а) $x + \mathbf{0} = x$; б) $x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

A8. а) $x + \overline{x} = \mathbf{1}$; б) $x * \overline{x} = \mathbf{0}$.

Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$)

Аксиома: $\Phi \vdash \Phi$.

Правила вывода:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$

2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$

3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$

4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$

6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi, \quad \Gamma, \Omega \vdash \Psi, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Omega}{\Gamma \vdash \Psi}$

7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}$

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$

10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$

11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$

12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$

Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний (для $\neg, \rightarrow$)

Аксиомы:

1. $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$;

2. $\big(\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)\big) \rightarrow \big((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta)\big)$;

3. $\Big((\neg\Psi \rightarrow \neg\Phi) \rightarrow \big((\neg\Psi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Psi\big)\Big)$.

Правило вывода: $\dfrac{\vdash \Phi, \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\vdash \Psi}$

Аксиомы и правила вывода ассертонического исчисления предикатов

Аксиомы ИП$^\Sigma$ имеют вид:

1. $\Phi \vdash \Phi$, где Φ — формула ИП$^\Sigma$;
2. $\vdash x \approx x$, где x — переменная;
3. $x \approx y, (\Phi)^z_x \vdash (\Phi)^z_y$, где x, y, z — переменные, Φ — формула ИП$^\Sigma$, удовлетворяющая условию на записи $(\Phi)^z_x$ и $(\Phi)^z_y$.

Правила вывода в ИП$^\Sigma$:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$;
2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$;
3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$;
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Omega, \quad \Gamma, \Psi \vdash \Omega, \quad \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}{\Gamma \vdash \Omega}$;
7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$;
8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$;
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$;
10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \quad \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$;
11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Omega}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Omega}$;
12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$;
13. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \forall x \Phi}$, где x не входит в члены Γ свободно;
14. $\dfrac{\Gamma, (\Phi)^x_t \vdash \Psi}{\Gamma, \forall x \Phi \vdash \Psi}$;
15. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi^x_t}{\Gamma \vdash \exists x \Phi}$;
16. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \exists x \Phi \vdash \Psi}$, где x не входит в Ψ и члены Γ свободно.

Аксиомы Цермело-Френкеля (теория ZF)

Аксиома объемности: $\forall x \forall y\ (\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y)$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$;

Аксиома пар: $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall u\ (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$ (если x и y — множества, то $\{x, y\}$ — тоже множество;

Аксиома объединения: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow \exists w\ z \in w\ \&\ w \in x)$ — объединение всех множеств, являющихся элементами множества x, является множеством;

Аксиома степени: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow \forall w\ (w \in z \Rightarrow w \in x))$ — множество всех подмножеств множества — это множество;

Аксиома бесконечности:

$$\exists x\ ((\exists y\ (y \in x))\ \&\ (\forall y\ (y \in x\ \Rightarrow \exists z\ (y \in z\ \&\ z \in x));$$

Аксиома регулярности: $\forall x\ \ \big((\exists y\ y \in x) \Rightarrow (\exists y\ (y \in x\ \&\ \overline{\exists z\ (z \in x\ \&\ z \in y)})))\big)$ — множество не пересекается хотя бы с одним из своих элементов;

Аксиома подмножеств: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow (z \in x\ \&\ \varphi(z, u_1, u_2 \dots, u_n)))$ здесь φ — некоторая формула, в которую не входит y;

Аксиома семейств:

$$(\forall x\ (x \in u \Rightarrow \exists z\ \varphi(x, z, u, v_1, \dots, v_n))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists y\ \forall x\ (x \in u \Rightarrow \exists z\ (z \in y\ \&\ \varphi(x, z, u, v_1, \dots, v_n)));$$

Аксиомы теории NBG

$X, Y, \ldots$ — классы, $x, y, \ldots$ — множества.

Аксиома объемности: $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$;

Аксиома пары: $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u(u \in z \Leftrightarrow (u \in x \vee u \in y))$;

Аксиома пустого множества: $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$;

Аксиомы существования классов: 1. $\exists X\, \forall u\, \forall v\, (\langle u, v\rangle \in X \Leftrightarrow u \in v)$ ($\in$-отношение);

2. $\forall X\, \forall Y\, \exists Z\, \forall u\, (u \in Z \Leftrightarrow (u \in X \& u \in Y))$ (пересечение);
3. $\forall X\, \exists Z\, \forall u\, (u \in Z \Leftrightarrow u \notin X)$ (дополнение);
4. $\forall X\, \exists Z\, \forall u\, (u \in Z \Leftrightarrow \exists v\, (\langle u, v\rangle \in X)$ (область определения);
5. $\forall X\, \exists Z\, \forall u \forall v\, (\langle u, v\rangle \in Z \Leftrightarrow u \in X)$;
6. $\forall X\, \exists Z\, \forall u \forall v \forall w\, (\langle u, v, w\rangle \in Z \Leftrightarrow \langle v, w, u\rangle \in X)$;
7. $\forall X\, \exists Z\, \forall u \forall v \forall w\, (\langle u, v, w\rangle \in Z \Leftrightarrow \langle u, w, v\rangle \in X)$;

Аксиома объединения:

$$\forall x \exists y \forall u\, (u \in y \Leftrightarrow \exists v\; u \in v \& v \in x)$$

Аксиома множества всех подмножеств:

$$\forall x \exists y \forall u\, (u \in y \Leftrightarrow u \subseteq x);$$

Аксиома выделения:

$$\forall x \forall Y \exists z \forall u\; (u \in z \Leftrightarrow (u \in x \;\&\; u \in Y))\,;$$

Аксиома замещения:

$$\forall x\; (Un(X) \Leftarrow \exists y \forall u\, (u \in y \Leftrightarrow \exists v (\langle v, u\rangle \in X \& v \in x)))\,,$$

где $Un(X)$ означает, что отображение X однозначно (образ множества относительно функции является множеством).