Ю.Б.Мельников

Основы алгебры индексированных графиков

Мельников Б.Н., Мельников Ю.Б. Геотехногенные структуры: теория и практика: Монография. Екатеринбург. Уральское изд-во, 2004. 556 с.

I. Математическое моделирование разочаровывает? 3

II. Требования к математическому языку диалоговой теории 10

III. Индексированный график, допускающий данную разметку 14

IV. Индексированные графики различной глубины 27

V. Операция индексной перекомпоновки для глубины 1 50

VI. Элементирующие отношения 55

VII. Полиалгебра 59

I. Математическое моделирование разочаровывает?

Во многих случаях преувеличенно высокие ожидания от применения математики приводят к разочарованию. У этого явления имеется несколько причин.

I. Математическое моделирование разочаровывает?

Во многих случаях преувеличенно высокие ожидания от применения математики приводят к разочарованию. У этого явления имеется несколько причин.

1) Процесс построения математической модели заканчивается успехом лишь в случае, когда исследователь или группа исследователей прекрасно разбирается не только в соответствующей предметной области, но и знает математику достаточно хорошо, чтобы либо самостоятельно построить математическую модель, либо иметь возможность эффективно общаться с математиками.

I. Математическое моделирование разочаровывает?

Во многих случаях преувеличенно высокие ожидания от применения математики приводят к разочарованию. У этого явления имеется несколько причин.

1) Процесс построения математической модели заканчивается успехом лишь в случае, когда исследователь или группа исследователей прекрасно разбирается не только в соответствующей предметной области, но и знает математику достаточно хорошо, чтобы либо самостоятельно построить математическую модель, либо иметь возможность эффективно общаться с математиками.

2) Построению *математической* (вторичной) модели предшествует построение первичной модели (физической, вербальной и т.п.).

I. Математическое моделирование разочаровывает?

Во многих случаях преувеличенно высокие ожидания от применения математики приводят к разочарованию. У этого явления имеется несколько причин.

3) Процесс построения моделей недостаточно формализован, и фактически задача построения математической модели представляет собой творческую задачу, решение которой требует особой квалификации исполнителей.

I. Математическое моделирование разочаровывает?

Во многих случаях преувеличенно высокие ожидания от применения математики приводят к разочарованию. У этого явления имеется несколько причин.

3) Процесс построения моделей недостаточно формализован, и фактически задача построения математической модели представляет собой творческую задачу, решение которой требует особой квалификации исполнителей.

4) Возникающие математические модели при неудачном выборе математической теории и соответствующего математического языка нередко оказываются громоздкими и трудно поддаются исследованию, в частности, расчету.

I. Математическое моделирование разочаровывает?

Во многих случаях преувеличенно высокие ожидания от применения математики приводят к разочарованию. У этого явления имеется несколько причин.

5) Грамотная интерпретация полученных результатов требует высокой квалификации исследователей как в предметной области, так и в математике.

I. Математическое моделирование разочаровывает?

Во многих случаях преувеличенно высокие ожидания от применения математики приводят к разочарованию. У этого явления имеется несколько причин.

5) Грамотная интерпретация полученных результатов требует высокой квалификации исследователей как в предметной области, так и в математике.

6) Согласование результатов исследования существенно различных[1] математических моделей обычно оказывается возможным лишь в соответствующей предметной области, после интерпретации собственно математических результатов. Непосредственная «передача данных» их одной математической модели в другую на практике представляет собой скорее исключение, чем правило.

---

[1] Например, основанных на различных математических теориях, допустим, теории групп и теории дифференциальных уравнений.

II. Требования к математическому языку диалоговой теории

Для того, чтобы ослабить влияние перечисленных выше трудностей, разрабатываемый математический язык должен удовлетворять следующим требованиям:

II. Требования к математическому языку диалоговой теории

Для того, чтобы ослабить влияние перечисленных выше трудностей, разрабатываемый математический язык должен удовлетворять следующим требованиям:

1) Он должен позволять относительно легко согласовывать существенно различные модели процессов и явлений, то есть модели, предполагающие расчленение исходного объекта на составные части различными способами (см. *элементирующие отношения*). Это требование диктуется принципами многовариантности и полипарадигменности.

II. Требования к математическому языку диалоговой теории

Для того, чтобы ослабить влияние перечисленных выше трудностей, разрабатываемый математический язык должен удовлетворять следующим требованиям:

2) Принципы многовариантности и полипарадигменности также требуют, чтобы выразительные средства этого языка позволяли корректно и свободно работать с многозначными отображениями (см. раздел *σ-полиалгебра*).

II. Требования к математическому языку диалоговой теории

Для того, чтобы ослабить влияние перечисленных выше трудностей, разрабатываемый математический язык должен удовлетворять следующим требованиям:

3) Средства этого языка должны предусматривать удобную и простую работу с элементами x, y, связанными отношениями типа $x \in z \in \ldots \in y$, а также $(\ldots, x, \ldots) \in \ldots \in y$ и т.п. (см. понятие *σ-кванта*). Это необходимо для корректного описания структурных пространств.

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1; 2; 3); (4; 5; 6); (7; 8; 9); (21; 52; 16)$ — график (без разметки) размерности 3.

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[a;b;c]$.

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[a;b;c]$.

Первым индексом в этой разметке, т.е.

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[\mathbf{a};b;c]$.

Первым индексом в этой разметке, т.е. **a**,

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[\mathbf{a};b;c]$.

Первым индексом в этой разметке, т.е. $\mathbf{a}$, в исходном графике отмечены **первые** компоненты кортежей. Иными словами

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[\mathbf{a};b;c]$.

Первым индексом в этой разметке, т.е. $\mathbf{a}$, в исходном графике отмечены **первые** компоненты кортежей. Иными словами

$(\mathbf{1};2;3);(\mathbf{4};5;6);(\mathbf{7};8;9);(\mathbf{21};52;16)_{[\mathbf{a};b;c]}$

это элементы 1,

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[\mathbf{a};b;c]$.

Первым индексом в этой разметке, т.е. $\mathbf{a}$, в исходном графике отмечены **первые** компоненты кортежей. Иными словами

$(\mathbf{1};2;3);(\mathbf{4};5;6);(\mathbf{7};8;9);(\mathbf{21};52;16)_{[\mathbf{a};b;c]}$

это элементы 1, 4,

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[\mathbf{a};b;c]$.

Первым индексом в этой разметке, т.е. $\mathbf{a}$, в исходном графике отмечены **первые** компоненты кортежей. Иными словами

$(\mathbf{1};2;3);(\mathbf{4};5;6);(\mathbf{7};8;9);(\mathbf{21};52;16)_{[\mathbf{a};b;c]}$

это элементы 1, 4, 7,

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[\mathbf{a};b;c]$.

Первым индексом в этой разметке, т.е. $\mathbf{a}$, в исходном графике отмечены **первые** компоненты кортежей. Иными словами

$(\mathbf{1};2;3);(\mathbf{4};5;6);(\mathbf{7};8;9);(\mathbf{21};52;16)_{[\mathbf{a};b;c]}$

это элементы 1, 4, 7, 21.

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[\mathbf{a};b;c]$.

Вторым индексом в этой разметке, т.е. $\mathbf{b}$, в исходном графике отмечены **вторые** компоненты кортежей. Иными словами

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[\mathbf{a};b;c]$.

Вторым индексом в этой разметке, т.е. $\mathbf{b}$, в исходном графике отмечены **вторые** компоненты кортежей. Иными словами
$\{(1;\mathbf{2};3);(4;\mathbf{5};6);(7;\mathbf{8};9);(21;\mathbf{52};16)\}_{[a;\mathbf{b};c]}$
это элементы 2, 5, 8, 52.

III. Индексированный график, допускающий данную разметку

График — это подмножество декартова произведения некоторых множеств.

Например, $(1;2;3);(4;5;6);(7;8;9);(21;52;16)$ — график (без разметки) размерности 3.

Поэтому этот график допускает разметку трехкомпонентной строкой индексов, например, $[\mathbf{a};b;c]$.

Вторым индексом в этой разметке, т.е. $\mathbf{b}$, в исходном графике отмечены **вторые** компоненты кортежей. Иными словами
$\{(1;\mathbf{2};3);(4;\mathbf{5};6);(7;\mathbf{8};9);(21;\mathbf{52};16)\}_{[a;\mathbf{b};c]}$
это элементы 2, 5, 8, 52.

В данном случае рассматривался график квантовой глубины 1.

IV. Индексированные графики различной глубины

Рассмотрим различные разметки графика

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}.$$

IV. Индексированные графики различной глубины

Этот график допускает разметку строкой индексов $[a; b; c]$

$$\left\{ \left(\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\} \right) ;\ \left(11; 8; \{5\} \right) \right\} ; 4; 12 \right) ; \right.$$
$$\left. \left(\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\} \right) \right\} ; 2; 8 \right) \right\}_{[a;b;c]}$$

IV. Индексированные графики различной глубины

Этот график допускает разметку строкой индексов $[a; b; c]$

$$\left\{ \left(\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\}\right) ; \left(11; 8; \{5\}\right) \right\} ; 4; 12 \right) ; \left(\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\}\right) \right\} ; 2; 8 \right) \right\}_{[a;b;c]}$$

При этом индексом a отмечены компоненты

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\} \right) ; \left(11; 8; \{5\} \right) \right\}}_{a} ; 4; 12 \right)$$

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\} \right) \right\}}_{a} ; 2; 8 \right)$$

IV. Индексированные графики различной глубины

Этот график допускает разметку строкой индексов $[a; b; c]$

$$\left\{ \left(\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\}\right) ; \left(11; 8; \{5\}\right) \right\} ; 4; 12 \right) ; \left(\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\}\right) \right\} ; 2; 8 \right) \right\}_{[a;b;c]}$$

При этом индексами a и b отмечены компоненты

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\} \right) ; \left(11; 8; \{5\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{4}_{b}; 12 \right)$$

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{2}_{b}; 8 \right)$$

IV. Индексированные графики различной глубины

Этот график допускает разметку строкой индексов $[a; b; c]$

$$\left\{ \left(\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\}\right) ;\ \left(11; 8; \{5\}\right) \right\} ; 4; 12 \right) ; \right.$$
$$\left. \left(\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\}\right) \right\} ; 2; 8 \right) \right\}_{[a;b;c]}$$

При этом индексами a, b и c отмечены компоненты

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\} \right) ; \left(11; 8; \{5\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{4}_{b}; \underbrace{12}_{c} \right)$$
$$\left(\underbrace{\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{2}_{b}; \underbrace{8}_{c} \right)$$

IV. Индексированные графики различной глубины

Индексами a, b и c отмечены компоненты

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\} \right); \left(11; 8; \{5\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{4}_{b}; \underbrace{12}_{c} \right)$$

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{2}_{b}; \underbrace{8}_{c} \right)$$

Компонента, отмеченная индексом a, представляет собой множество, т.е. график. Этот график, в свою очередь, допускает разметку строкой индексов, например, $[u]$.

IV. Индексированные графики различной глубины

Индексами a, b и c отмечены компоненты

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\} \right); \left(11; 8; \{5\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{4}_{b}; \underbrace{12}_{c} \right)$$

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{2}_{b}; \underbrace{8}_{c} \right)$$

Компонента, отмеченная индексом a, представляет собой множество, т.е. график. Этот график, в свою очередь, допускает разметку строкой индексов, например, $[u]$.

Поэтому исходный график допускает разметку строкой индексов

IV. Индексированные графики различной глубины

Индексами a, b и c отмечены компоненты

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(0; 7; \{3; 8\} \right); \left(11; 8; \{5\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{4}_{b}; \underbrace{12}_{c} \right)$$

$$\left(\underbrace{\left\{ \left(3; 9; \{5; 3; 0\} \right) \right\}}_{a}; \underbrace{2}_{b}; \underbrace{8}_{c} \right)$$

Компонента, отмеченная индексом a, представляет собой множество, т.е. график. Этот график, в свою очередь, допускает разметку строкой индексов, например, $[u]$.

Поэтому исходный график допускает разметку строкой индексов $[[u]; b; c]$.

IV. Индексированные графики различной глубины

В индексированном графике

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[u];b;c]}$$

индексами $[u]$, b, c в разметке $[[u];b;c]$ отмечены компоненты

IV. Индексированные графики различной глубины

В индексированном графике

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[u];b;c]}$$

индексами $[u]$, b, c в разметке $[[u];b;c]$ отмечены компоненты

$$\Big(\underbrace{\Big\{\Big(0;7;\{3;8\}\Big);\Big(11;8;\{5\}\Big)\Big\}}_{[u]};\underbrace{4}_{b};\underbrace{12}_{c}\Big)$$
$$\Big(\underbrace{\Big\{\Big(3;9;\{5;3;0\}\Big)\Big\}}_{[u]};\underbrace{2}_{b};\underbrace{8}_{c}\Big)$$

IV. Индексированные графики различной глубины

В индексированном графике

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[u];b;c]}$$

индексами $[u]$, u, b, c в разметке $[[u];b;c]$ отмечены компоненты

IV. Индексированные графики различной глубины

В индексированном графике

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[u];b;c]}$$

индексами $[u]$, u, b, c в разметке $[[u];b;c]$ отмечены компоненты

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\underbrace{\big(0;7;\{3;8\}\big)}_{u};\underbrace{\big(11;8;\{5\}\big)}_{u}\Big\}}_{[u]};\underbrace{4}_{b};\underbrace{12}_{c}\Bigg)$$

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\underbrace{\big(3;9;\{5;3;0\}\big)}_{u}\Big\}}_{[u]};\underbrace{2}_{b};\underbrace{8}_{c}\Bigg)$$

IV. Индексированные графики различной глубины

Мы рассматриваем индексированный график

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[u];b;c]}$$

Будем говорить, что $[u]$, b, c являются квантами глубины 1 в разметке $[[u];b;c]$, а u в этой разметке является квантом глубины 2.

IV. Индексированные графики различной глубины

Мы рассматриваем индексированный график

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[u];b;c]}$$

В этой разметке мы не раскрывали структуру множества, отмеченного в разметке $[[u]];b;c]$ индексом $[u]$.

IV. Индексированные графики различной глубины

Мы рассматриваем индексированный график

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[u];b;c]}$$

В этой разметке мы не раскрывали структуру множества, отмеченного в разметке $[[u]];b;c]$ индексом $[u]$.

Заметим, что все множества, отмеченные индексом $[u]$ в разметке $[[u]];b;c]$, являются графиками размерности 3.

IV. Индексированные графики различной глубины

Мы рассматриваем индексированный график

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[u];b;c]}$$

В этой разметке мы не раскрывали структуру множества, отмеченного в разметке $[[u]];b;c]$ индексом $[u]$.

Заметим, что все множества, отмеченные индексом $[u]$ в разметке $[[u]];b;c]$, являются графиками размерности 3.

Значит, все они допускают разметку строкой индексов, например, $[p;q;r]$.

IV. Индексированные графики различной глубины

Мы рассматриваем индексированный график

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[u];b;c]}$$

В этой разметке мы не раскрывали структуру множества, отмеченного в разметке $[[u]];b;c]$ индексом $[u]$.

Заметим, что все множества, отмеченные индексом $[u]$ в разметке $[[u]];b;c]$, являются графиками размерности 3.

Значит, все они допускают разметку строкой индексов, например, $[p;q;r]$.

Следовательно, исходный график допускает разметку строкой индексов $[[p;q;r];b;c]$.

IV. Индексированные графики различной глубины

Рассмотрим график

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\ \left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[p;q;r];b;c]}$$

с разметкой строкой индексов $[[p;q;r];b;c]$.

IV. Индексированные графики различной глубины

Рассмотрим график

$$\left\{\left(\left\{\left(0;7;\{3;8\}\right);\ \left(11;8;\{5\}\right)\right\};4;12\right);\right.$$
$$\left.\left(\left\{\left(3;9;\{5;3;0\}\right)\right\};2;8\right)\right\}_{[[p;q;r];b;c]}$$

с разметкой строкой индексов $[[p;q;r];b;c]$.

Тогда квантами строки индексов $[[p;q;r];b;c]$ в исходном графике отмечены следующие кванты.

IV. Индексированные графики различной глубины

Квантами строки индексов $[[p;q;r];b;c]$ в исходном графике отмечены следующие кванты.

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\Big(\underbrace{0}_{p};\underbrace{7}_{q};\underbrace{\{3;8\}}_{r}\Big);\Big(\underbrace{11}_{p};\underbrace{8}_{q};\underbrace{\{5\}}_{r}\Big)\Big\}}_{[p;q;r]};\underbrace{4}_{b};\underbrace{12}_{c}\Bigg)$$

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\Big(\underbrace{3}_{p};\underbrace{9}_{q};\underbrace{\{5;3;0\}}_{r}\Big)\Big\}}_{[p;q;r]};\underbrace{2}_{b};\underbrace{8}_{c}\Bigg)$$

IV. Индексированные графики различной глубины

Квантами строки индексов $[[p;q;r];b;c]$ в исходном графике отмечены следующие кванты.

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\Big(\underbrace{0}_{p};\underbrace{7}_{q};\underbrace{\{3;8\}}_{r}\Big);\Big(\underbrace{11}_{p};\underbrace{8}_{q};\underbrace{\{5\}}_{r}\Big)\Big\}}_{[p;q;r]};\underbrace{4}_{b};\underbrace{12}_{c}\Bigg)$$

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\Big(\underbrace{3}_{p};\underbrace{9}_{q};\underbrace{\{5;3;0\}}_{r}\Big)\Big\}}_{[p;q;r]};\underbrace{2}_{b};\underbrace{8}_{c}\Bigg)$$

Квантом r в исходном графике отмечено множество.

IV. Индексированные графики различной глубины

Квантами строки индексов $[[p;q;r];b;c]$ в исходном графике отмечены следующие кванты.

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\Big(\underbrace{0}_{p};\underbrace{7}_{q};\underbrace{\{3;8\}}_{r}\Big);\Big(\underbrace{11}_{p};\underbrace{8}_{q};\underbrace{\{5\}}_{r}\Big)\Big\}}_{[p;q;r]};\underbrace{4}_{b};\underbrace{12}_{c}\Bigg)$$

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\Big(\underbrace{3}_{p};\underbrace{9}_{q};\underbrace{\{5;3;0\}}_{r}\Big)\Big\}}_{[p;q;r]};\underbrace{2}_{b};\underbrace{8}_{c}\Bigg)$$

Квантом r в исходном графике отмечено множество.

Значит, исходный график допускает также разметку, например, строкой индексов $[[p;q;[t]];b;c]$.

IV. Индексированные графики различной глубины

Квантами строки индексов $[[p;q;[t]];b;c]$ в исходном графике отмечены следующие кванты.

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\Big(\underbrace{0}_{p};\underbrace{7}_{q};\underbrace{\{\underbrace{3}_{t};\underbrace{8}_{t}\}}_{[t]}\Big);\Big(\underbrace{11}_{p};\underbrace{8}_{q};\underbrace{\{\underbrace{5}_{t}\}}_{[t]}\Big)\Big\}}_{[p;q;[t]]};\underbrace{4}_{b};\underbrace{12}_{c}\Bigg)$$

$$\Bigg(\underbrace{\Big\{\Big(\underbrace{3}_{p};\underbrace{9}_{q};\underbrace{\{\underbrace{5}_{t};\underbrace{3}_{t};\underbrace{0}_{t}\}}_{[t]}\Big)\Big\}}_{[p;q;[t]]};\underbrace{2}_{b};\underbrace{8}_{c}\Bigg)$$

V. Операция индексной перекомпоновки для глубины 1

Рассмотрим ее на следующем примере:

$$\left[\left\{(a;b)\,;\,(c;b)\right\}_{[1;2]}\right]^{[1;2;1]}_{[4;1;2]} = ???$$

V. Операция индексной перекомпоновки для глубины 1

Рассмотрим ее на следующем примере:

$$\left[\left\{(a;b)\,;\,(c;b)\right\}_{[1;2]}\right]^{[1;2;1]}_{[4;1;2]} = ???$$

$(a;b) \rightarrow$
$[2;1]$

$(c;b) \rightarrow$
$[2;1]$

V. Операция индексной перекомпоновки для глубины 1

Рассмотрим ее на следующем примере:

$$\left[\left\{(a;b)\,;\,(c;b)\right\}_{[1;2]}\right]^{[1;2;1]}_{[4;1;2]} = ???$$

$(a;b) \rightarrow (b;a;b)$

$[2;1] \quad [1;2;1] \rightarrow$

$(c;b) \rightarrow (b;c;b)$

$[2;1] \quad [1;2;1] \rightarrow$

V. Операция индексной перекомпоновки для глубины 1

Рассмотрим ее на следующем примере:

$$\left[\left\{(a;b)\,;\,(c;b)\right\}_{[1;2]}\right]^{[1;2;1]}_{[4;1;2]} = ???$$

$(a;b) \to (b;a;b) \quad (b;a;b)$
$[2;1] \quad [1;2;1] \to [4;1;2]$

$(c;b) \to (b;c;b) \quad (b;c;b)$
$[2;1] \quad [1;2;1] \to [4;1;2]$

V. Операция индексной перекомпоновки для глубины 1

Рассмотрим ее на следующем примере:

$$\left[\left\{(a;b)\,;\,(c;b)\right\}_{[1;2]}\right]^{[1;2;1]}_{[4;1;2]} = \left\{(b;a;b)\,;\,(b;c;b)\right\}_{[4;1;2]}.$$

$(a;b) \to (b;a;b) \quad (b;a;b)$
$[2;1] \quad [1;2;1] \to [4;1;2]$

$(c;b) \to (b;c;b) \quad (b;c;b)$
$[2;1] \quad [1;2;1] \to [4;1;2]$

VI. Элементирующие отношения

Описание: *Под элементирующим отношением мы понимаем отношение, которое можно было бы взять в качестве аналога отношения «быть элементом множества»*. Мы считаем, что элементирующее отношение — это бинарное отношение σ на множестве Ω, удовлетворяющее двум свойствам:

1) для любого элемента x имеем $(x; x) \notin \sigma$;

2) транзитивное замыкание отношения σ не содержит циклов.

τ есть транзитивное замыкание отношения σ, если

$$(x; y) \in \tau \;\Leftrightarrow\; \exists z_1, z_2, \ldots, z_k \begin{cases} (x; z_1) \in \sigma, \\ (z_1; z_2) \in \sigma, \\ (z_2; z_3) \in \sigma, \\ \ldots \\ (z_k; y) \in \sigma. \end{cases}$$

VI. Элементирующие отношения

Примеры элементирующих отношений:

1) быть элементом множества, т.е. $(x; y) \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $x \in y$.

2) быть компонентой кортежа, например, если

$\Omega = \{(a; (b; c));\ a;\ c;\ (b; c)\}$, то

$\sigma = \left\{ \left(a;\ (a; (b; c))\right);\ \left((b; c);\ (a; (b; c))\right);\ \left(c;\ (b; c)\right) \right\}$.

3) $\Omega = \{a; b; c; d\}$ и $\sigma = \{(a; b);\ (a; c);\ (a; d);\ (c; d)\}$.

VI. Элементирующие отношения

Примеры элементирующих отношений:

1) быть элементом множества, т.е. $(x; y) \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $x \in y$.

2) быть компонентой кортежа, например, если

$\Omega = \{(a; (b; c));\ a;\ c;\ (b; c)\}$, то

$\sigma = \left\{ \left(a;\ (a; (b; c))\right);\ \left((b; c);\ (a; (b; c))\right);\ \left(c;\ (b; c)\right) \right\}$.

3) $\Omega = \{a; b; c; d\}$ и $\sigma = \{(a; b);\ (a; c);\ (a; d);\ (c; d)\}$.

В последнем примере можно интерпретировать σ как отношение, заданное предикатом «быть элементом», если, например, положить

$c = \{a;\ b\}$, $d = \{a;\ c\} = \left\{a;\ \{a;\ b\}\right\}$.

VI. Элементирующие отношения

Если σ — элементирующее отношение, то отношение σ', обратное к σ (т.е. $(x; y) \in \sigma'$ тогда и только тогда, когда $(y; x) \in \sigma$) тоже является элементирующим отношением.

В частности, если σ соответствует предикату $\in$, то обратное отношение тоже является элементирующим!

При этом для нового отношения «множество принадлежит своему элементу».

VII. Полиалгебра

Примером полиалгебры является полугруппа натуральных чисел с полугрупповой операцией «сложение»:

$$S_{[a1;a2;u1]} = \left\{ (x;\ y;\ x+y) \,\middle|\, \{x;y\} \subseteq \mathbb{N} \right\}_{[a1;a2;u1]}.$$

Индексы цвета a (т.е. $a1$, $a2$) интерпретируем как отметки операндов, а индекс цвета u (т.е. $u1$) — как отметка значения функции.

VII. Полиалгебра

Линейному пространству U над полем K соответствует полиалгебра
$\{Sv_{[a1;a2;u1]};\ Mv_{[b1;a1;u1]};\ Sk_{[b1;b2;v1]};\ Mk_{[b1;b2;v1]}\}$, где
$Sv_{[a1;a2;u1]} = \left\{ (x;y;x+y) \,\middle|\, \{x;\ y\} \subseteq U \right\}$ — график сложения векторов,
$Mv_{[b1;a1;u1]} = \left\{ (\lambda;x;\lambda x) \,\middle|\, \lambda \in K, \quad x \in U \right\}$ — график умножения вектора на скаляр,
$Sk_{[b1;b2;u1]} = \left\{ (\alpha;\beta;\alpha+\beta) \,\middle|\, \{\alpha;\beta\} \subseteq K \right\}$ — график сложения в поле K,
$Mk_{[b1;b2;u1]} = \left\{ (\alpha;\beta;\alpha\cdot\beta) \,\middle|\, \{\alpha;\beta\} \subseteq K \right\}$ — график умножения в поле K.

VII. Полиалгебра

За счет отказа от однозначности «операции» в полиалгебре можно, в частности, определить аналог фактор-системы по конгруенции, у которой носитель представляет собой не множество классов элементов, попарно эквивалентных по данной конгруенции, а совпадает с носителем исходной полиалгебры. Вместо перехода к новому носителю «размывается» операция. Например, если T — конгруенция, то значениями «размытой» операции $+$ на данных элементах x и y являются все элементы, эквивалентные по T элементу $(x + y)$.

Это позволяет, например, на одном носителе рассматривать исходные операции и их образы, а также рассматривать в исходной алгебре новые операции, относительно которых T уже не является конгруенцией.

VII. Полиалгебра

На языке алгебры индексированных графиков формулируются различные обобщения понятия производная (включая вариацию функционала и др.).

Спасибо

за

внимание!

e-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: http://melnikov.k66.ru, http://melnikov.web.ur.ru

Вернуться к списку презентаций?