Государственное образовательное учреждение ВПО
Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников

Стратегия подготовки электронного учебника с помощью LaTeX: приложения

e-mail: melnikov@k66.ru,
melnikov@r66.ru
сайты:
http://melnikov.k66.ru,
http://melnikov.web.ur.ru

Екатеринбург
2012

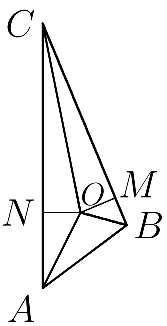
I. Три примера презентаций по элементарной математике

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Рассмотрим три презентации с описанием доказательства этой теоремы.

I.1. Три примера презентаций по элементарной математике (первый вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим перпендикуляры OK, OM, ON к сторонам треугольника.

По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому $ON = AO \sin \angle CAO = AO \sin \angle BAO = OK$ и $OK = BO \sin \angle ABO = BO \sin \angle CBO = OM$.

I.1. Три примера презентаций по элементарной математике (первый вариант)

Первый вариант презентации: компьютер как средство предъявления информации.

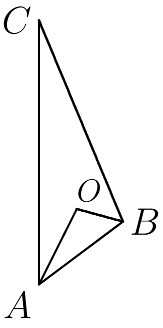
Второй вариант презентации:

Третий вариант презентации:

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

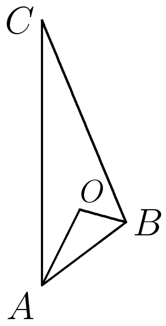
Пусть AO и BO — биссектрисы.



I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

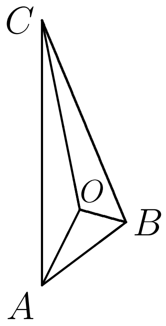
Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO



I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

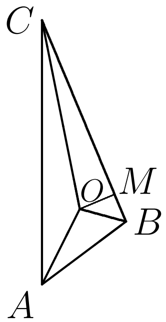
Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO



I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

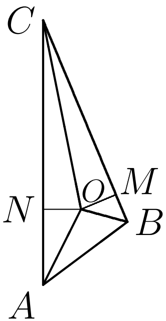
Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM,

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

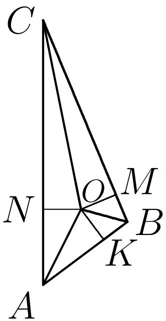
Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON,

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

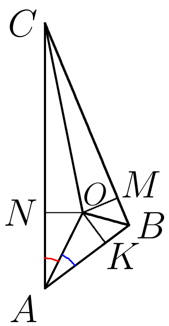
Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



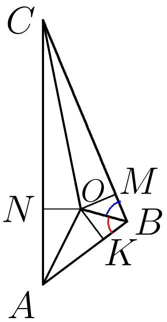
Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

По построению

$\angle CAO = \angle BAO$

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

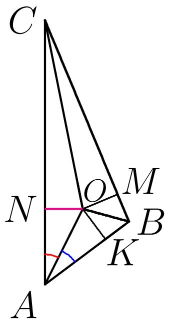


Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

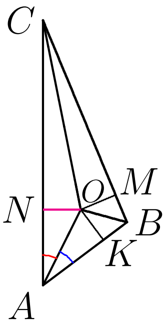


Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому $ON = AO \sin \angle CAO =$

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

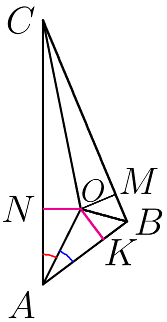


Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому $ON = AO \sin \angle CAO = AO \sin \angle BAO =$

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

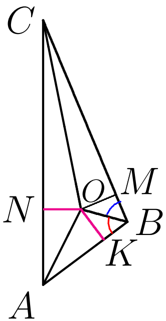


Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому $ON = AO \sin \angle CAO = AO \sin \angle BAO = OK =$

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

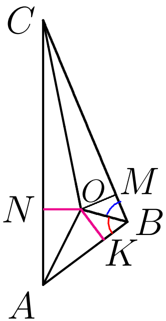


Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому $ON = AO \sin \angle CAO = AO \sin \angle BAO = OK =$
$= BO \sin \angle ABO =$

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



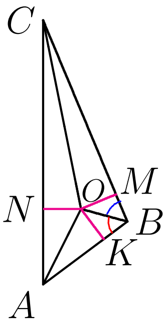
Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому

$$ON = AO \sin \angle CAO = AO \sin \angle BAO = OK =$$
$$= BO \sin \angle ABO = BO \sin \angle CBO =$$

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

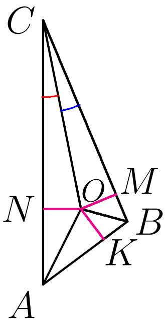


Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому $ON = AO \sin \angle CAO = AO \sin \angle BAO = OK =$
$= BO \sin \angle ABO = BO \sin \angle CBO = OM.$

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

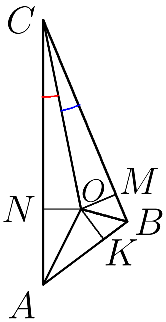
По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому $ON = AO \sin \angle CAO = AO \sin \angle BAO = OK =$
$= BO \sin \angle ABO = BO \sin \angle CBO = OM$.

Следовательно $ON = OM$, поэтому

$$\sin \angle NCO = \frac{ON}{OC} = \frac{ON}{OC} = \sin \angle MCO.$$

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Пусть AO и BO — биссектрисы. Проведем отрезок CO и опустим к сторонам треугольника перпендикуляры OM, ON, OK.

По построению $\angle CAO = \angle BAO$ и $\angle ABO = \angle CBO$, поэтому $ON = AO \sin\angle CAO = AO \sin\angle BAO = OK = BO \sin\angle ABO = BO \sin\angle CBO = OM$.

Следовательно $ON = OM$, поэтому $\sin\angle NCO = \dfrac{ON}{OC} = \dfrac{ON}{OC} = \sin\angle MCO$. Учитывая, что в геометрии величина угла положительна не превосходит π, получаем $\angle NCO = \angle MCO$. Значит, CO – биссектриса. Теорема доказана.

I.2. Три примера презентаций по элементарной математике (второй вариант)

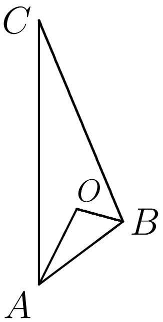
Первый вариант презентации: компьютер как средство предъявления информации.

Второй вариант презентации: компьютер как средство повышения наглядности.

Третий вариант презентации:

I.3. Три примера презентаций по элементарной математике (третий вариант)

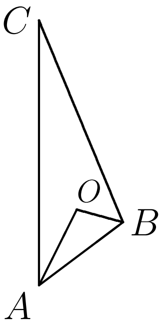
Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Как можно доказать, что три различные прямые пересекаются в одной точке?

I.3. Три примера презентаций по элементарной математике (третий вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

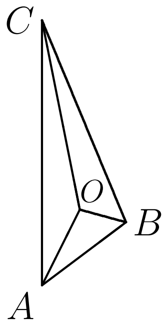


Как можно доказать, что три различные прямые пересекаются в одной точке?

1) проводим две прямые «по честному» (в данном случае — две биссектрисы), а третью прямую — через точку их пересечения, и доказываем, что третья прямая удовлетворяет оговоренным условиям (в данном случае — что она тоже является биссектрисой).

I.3. Три примера презентаций по элементарной математике (третий вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

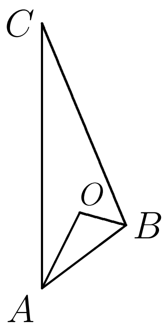


Как можно доказать, что три различные прямые пересекаются в одной точке?

1) проводим две прямые «по честному» (в данном случае — две биссектрисы), а третью прямую — через точку их пересечения, и доказываем, что третья прямая удовлетворяет оговоренным условиям (в данном случае — что она тоже является биссектрисой).

I.3. Три примера презентаций по элементарной математике (третий вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

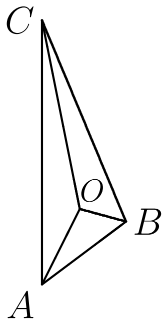


Как можно доказать, что три различные прямые пересекаются в одной точке?

2) показываем, что точка пересечения двух прямых обладает каким-либо особым свойством, из которого следует, что третья прямая должна пройти через эту же точку.

I.3. Три примера презентаций по элементарной математике (третий вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

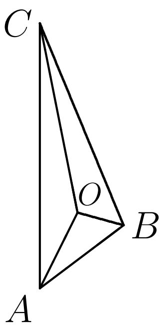


Как можно доказать, что три различные прямые пересекаются в одной точке?

2) показываем, что точка пересечения двух прямых обладает каким-либо особым свойством, из которого следует, что третья прямая должна пройти через эту же точку.

I.3. Три примера презентаций по элементарной математике (третий вариант)

Теорема 1. *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Итак, два возможных варианта:

1) **проводим две биссектрисы «по честному», третью прямую — через точку их пересечения**, и доказываем, что она — тоже биссектриса.

2) **показываем, что точка пересечения двух прямых обладает каким-либо особым свойством**.

I.3. Три примера презентаций по элементарной математике (третий вариант)

Первый вариант презентации: компьютер как средство предъявления информации.

Второй вариант презентации: компьютер как средство повышения наглядности.

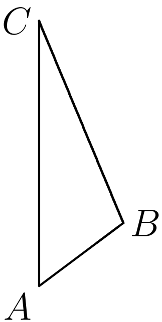
Третий вариант презентации: компьютер как средство вовлечения в **математическую деятельность** и, в частности, в **учебно-исследовательскую деятельность**.

Рассмотрим примеры презентаций по **высшей математике** или **вернемся к основному докладу**?

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

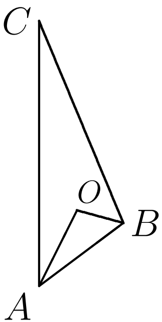
Проведем две биссектрисы AO и BO



I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

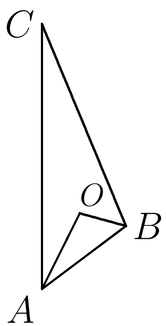
Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Проведем две биссектрисы AO и BO



I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

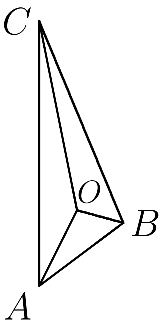
Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Проведем две биссектрисы AO и BO, и покажем, что луч CO

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

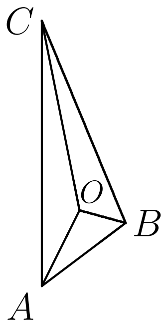
Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Проведем две биссектрисы AO и BO, и покажем, что луч CO

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

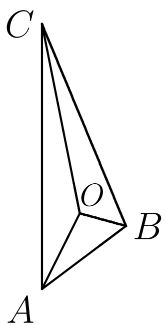
Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Проведем две биссектрисы AO и BO, и покажем, что луч CO тоже является биссектрисой.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

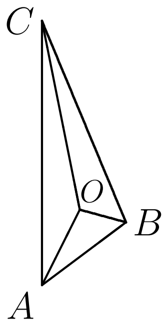
Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Надо показать, что луч CO тоже является биссектрисой.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

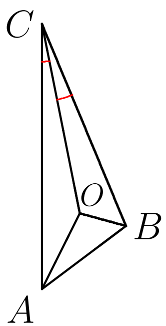


Надо показать, что луч CO тоже является биссектрисой.

Переведем это утверждение на «язык равенств»: надо доказать, что

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



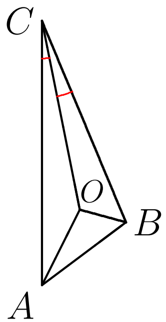
Надо показать, что луч CO тоже является биссектрисой.

Переведем это утверждение на «язык равенств»: надо доказать, что

$\angle ACO = \angle BCO.$

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

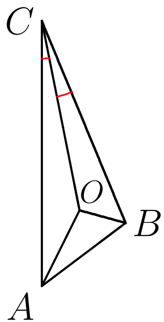
Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Надо доказать, что $\angle ACO = \angle BCO$. Как доказать равенство углов?

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

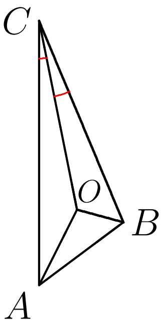


Надо доказать, что $\angle ACO = \angle BCO$. Как доказать равенство углов?

1) Воспользоваться определением равенства углов.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

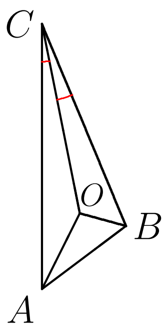


Надо доказать, что $\angle ACO = \angle BCO$. Как доказать равенство углов?

1) Воспользоваться определением равенства углов. Сложно...

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

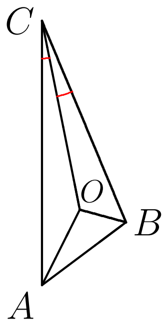


Надо доказать, что $\angle ACO = \angle BCO$. Как доказать равенство углов?

2) Вычислить величину угла.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



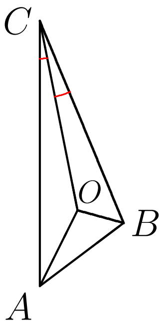
Надо доказать, что $\angle ACO = \angle BCO$. Как доказать равенство углов?

2) Вычислить величину угла.

Это вряд ли, неизвестны характеристики треугольника...

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

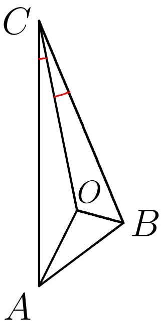


Надо доказать, что $\angle ACO = \angle BCO$. Как доказать равенство углов?

3) Воспользоваться теоремами, в которых утверждается равенство углов.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



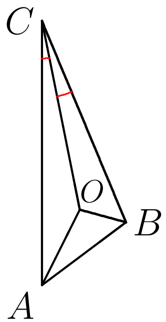
Надо доказать, что $\angle ACO = \angle BCO$. Как доказать равенство углов?

3) Воспользоваться теоремами, в которых утверждается равенство углов.

Параллельных прямых нет...

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



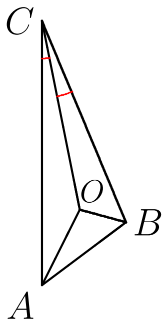
Надо доказать, что $\angle ACO = \angle BCO$. Как доказать равенство углов?

3) Воспользоваться теоремами, в которых утверждается равенство углов.

Параллельных прямых нет... Наиболее часто утверждение о равенстве углов получается как следствие равенства треугольников.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

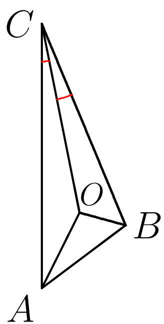
Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Надо доказать, что равны какие-то треугольники, углами которых являются $\angle ACO$ и $\angle BCO$.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

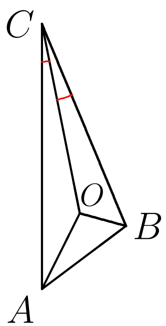


Надо доказать, что равны какие-то треугольники, углами которых являются $\angle ACO$ и $\angle BCO$.

На нашем чертеже эти углы входят только в треугольники COA и COB. Но эти треугольники, вообще говоря, не являются равными...

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

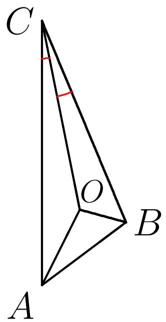


Надо доказать, что равны какие-то треугольники, углами которых являются $\angle ACO$ и $\angle BCO$.

Ну нет тут равных треугольников!

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

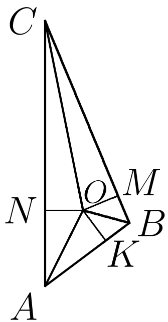


Надо доказать, что равны какие-то треугольники, углами которых являются $\angle ACO$ и $\angle BCO$.

Значит, нужные треугольники надо сотворить. Рукодельники, вперед!

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

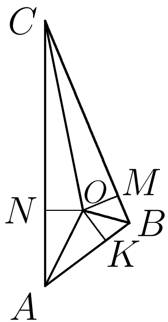
Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Для этого опустим перпендикуляры OK, OM, ON к сторонам треугольника.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

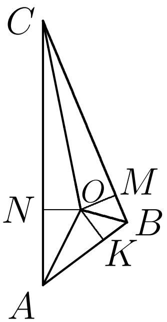


Для этого опустим перпендикуляры OK, OM, ON к сторонам треугольника.

Получим большое число великолепных прямоугольных треугольников.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



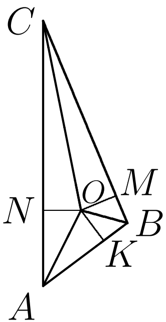
Для этого опустим перпендикуляры OK, OM, ON к сторонам треугольника.

Получим большое число великолепных прямоугольных треугольников.

Теперь можно перейти ко **второму варианту презентации** (после некоторой корректировки слайдов).

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



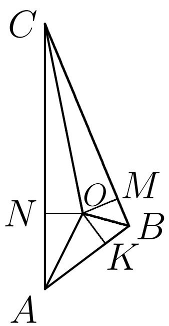
Для этого опустим перпендикуляры OK, OM, ON к сторонам треугольника.

Получим большое число великолепных прямоугольных треугольников.

Специфика: участие обучаемых в *поиске доказательства*.

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

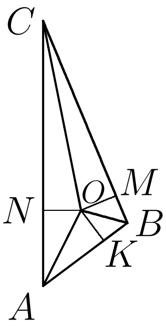


Для этого опустим перпендикуляры OK, OM, ON к сторонам треугольника.
Получим большое число великолепных прямоугольных треугольников.

Специфика: участие обучаемых в *поиске доказательства*. Обязательно необходимо завершить *строгим изложением доказательства*!

I.4. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 1)

Теорема 2 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Для этого опустим перпендикуляры OK, OM, ON к сторонам треугольника.

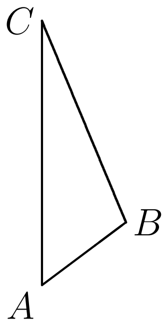
Получим большое число великолепных прямоугольных треугольников.

Вернемся к основному докладу или **завершим рассмотрение примера?**

I.5. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 2)

Теорема 3 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

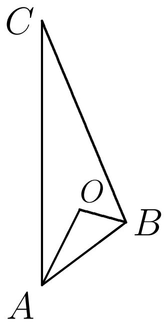
Проведем две биссектрисы AO и BO.



I.5. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 2)

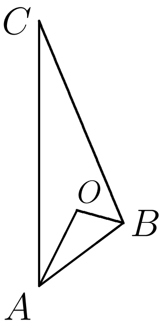
Теорема 3 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Проведем две биссектрисы AO и BO.



I.5. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 2)

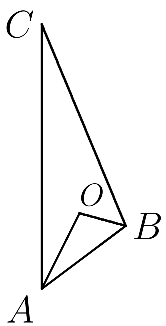
Теорема 3 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Нам надо установить особое свойство точки перечения двух биссектрис.

I.5. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 2)

Теорема 3 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

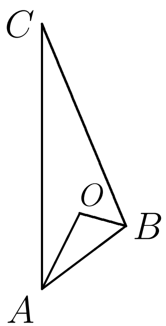


Нам надо установить особое свойство точки перечения двух биссектрис.

Любая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла.

I.5. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 2)

Теорема 3 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



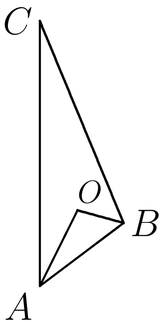
Нам надо установить особое свойство точки перечения двух биссектрис.

Любая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла.

Значит, точка O равноудалена от всех сторон треугольника. Такая точка является единственной.

I.5. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 2)

Теорема 3 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Нам надо установить особое свойство точки перечения двух биссектрис.

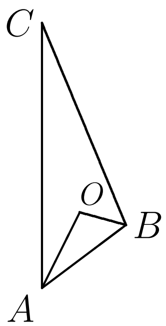
Любая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла.

Значит, точка O равноудалена от всех сторон треугольника. Такая точка является единственной.

Таким образом, третья биссектриса OC пересекает биссектрису, например, OA в той же точке O.

I.5. Три примера презентаций по элементарной математике (продолжение 2)

Теорема 3 (о пересечении биссектрис). *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Нам надо установить особое свойство точки перечения двух биссектрис.
Любая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла.
Значит, точка O равноудалена от всех сторон треугольника. Такая точка является единственной.
Таким образом, третья биссектриса OC пересекает биссектрису, например, OA в той же точке O.

Следовательно, все три биссектрисы пересекаются в точке O, равноудаленной от всех сторон треугольника.

Вернемся к основному докладу или **завершим рассмотрение примера?**

II. Три примера презентаций по высшей математике

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Рассмотрим презентации к доказательству этого свойства.

II.1. Презентация по высшей математике (вар-т 1)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}\right)c_{pj} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}\left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj}\right) = \sum_{v=1}^{n}\sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

Полагая в выражении для $r_{ij} \quad u = q$, $v = p$, получим

$$r_{ij} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq}f_{qj} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq}\left(\sum_{p=1}^{n} b_{qp}c_{pj}\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

Значит, $l_{ij} = r_{ij}$, то есть $\mathbf{R} = \mathbf{L}$, что и требовалось доказать.

II.1. Презентация по высшей математике (вар-т 1)

Первый вариант презентации: компьютер как средство предъявления информации.

Второй вариант презентации:

Третий вариант презентации:

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$.

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} =$$

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} =$$

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} =$$

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} =$$

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} =$$

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv} c_{vj} \right) =$$

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv} c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu} b_{uv} c_{vj}.$$

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

Полагая в выражении для r_{ij} $\quad u = q$, $v = p$, получим

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv} c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu} b_{uv} c_{vj}.$$

Полагая в выражении для $r_{ij} \quad u = q$, $v = p$, получим

$$r_{ij} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} f_{qj} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} \left(\sum_{p=1}^{n} b_{qp} c_{pj} \right) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}\right)c_{pj} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}\left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj}\right) = \sum_{v=1}^{n}\sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

Полагая в выражении для $r_{ij} \quad u = q$, $v = p$, получим

$$r_{ij} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq}f_{qj} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq}\left(\sum_{p=1}^{n} b_{qp}c_{pj}\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

Значит, $l_{ij} = r_{ij}$, то есть $\mathbf{R} = \mathbf{L}$, что и требовалось доказать.

II.2. Презентация по высшей математике (вар-т 2)

Первый вариант презентации: компьютер как средство предъявления информации.

Второй вариант презентации: компьютер как средство повышения наглядности.

Третий вариант презентации:

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$.

Доказательство.

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Как доказать равенство матриц?

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Как доказать равенство матриц?

Из **определения матрицы** следует, что *надо*...

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Как доказать равенство матриц?

Из **определения матрицы** следует, что *надо проверить совпадение соответствующих коэффициентов матриц в левой и правой частях доказываемого равенства.*

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$.

Доказательство. Как доказать равенство коэффициентов?

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$.

Доказательство. Как **доказать равенство коэффициентов**?

Применим доказательство приведением к одинаковому виду выражений в левой и правой частях равенства.

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$.

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} =$$

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} =$$

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} =$$

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{B}$, $\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{C}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}\right)c_{pj} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} =$$

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} =$$

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv} c_{vj} \right) =$$

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$, $\quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{BC}$. Тогда, по **определению произведения матриц**, с одной стороны,

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

С другой стороны,

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}\right)c_{pj} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}\left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj}\right) = \sum_{v=1}^{n}\sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

Как известно, индекс суммирования является «глухим», то есть фактически его в выражении «нет».

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

Как известно, индекс суммирования является «глухим», то есть фактически его в выражении «нет». Например выражение $\sum\limits_{i=1}^{3} h_i$ от i не зависит, так как $\sum\limits_{i=1}^{3} h_i = h_1 + h_2 + h_3 = \sum\limits_{j=1}^{3} h_j$.

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

Поэтому индекс суммирования всегда можно изменить. Полагая в выражении для $r_{ij} \quad u = q$, $v = p$, получим

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv} c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu} b_{uv} c_{vj}.$$

Поэтому индекс суммирования всегда можно изменить. Полагая в выражении для $r_{ij} \quad u = q$, $v = p$, получим

$$r_{ij} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} f_{qj} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} \left(\sum_{p=1}^{n} b_{qp} c_{pj} \right) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qp} c_{pj}.$$

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Доказательство. Положим $\mathbf{L} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$l_{ij} = \sum_{p=1}^{n} d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

$$r_{ij} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu}f_{uj} = \sum_{u=1}^{m} a_{iu} \left(\sum_{v=1}^{n} b_{uv}c_{vj} \right) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} a_{iu}b_{uv}c_{vj}.$$

Поэтому индекс суммирования всегда можно изменить. Полагая в выражении для $r_{ij} \quad u = q$, $v = p$, получим

$$r_{ij} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq}f_{qj} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} \left(\sum_{p=1}^{n} b_{qp}c_{pj} \right) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{iq}b_{qp}c_{pj}.$$

Значит, $l_{ij} = r_{ij}$, то есть $\mathbf{R} = \mathbf{L}$, что и требовалось доказать.

II.3. Презентация по высшей математике (вар-т 3)

Первый вариант презентации: компьютер как средство предъявления информации.

Второй вариант презентации: компьютер как средство повышения наглядности.

Третий вариант презентации: компьютер как средство вовлечения в **математическую деятельность** и, в частности, в **учебно-исследовательскую деятельность**.

Мельников Ю.Б. Алгебра и теория чисел // Екатеринбург : [б. и.], 2010, 65,1 уч.-изд.л. [режим доступа свободный]

http://lib.usue.ru/resource/free/10/MelnikovAlgebra3/index.html

Рассмотрим пример **презентаций по элементарной математике** или **вернемся к основному докладу?**

III. Степенная функция

В выражении a^b можно считать переменной a или b.

III. Степенная функция

В выражении a^b можно считать переменной a или b.

Если переменной считается a, то такая функция называется **степенной**.

III. Степенная функция

Определение 1. *Функция, которую можно задать формулой* $f(x) = x^{\alpha}$, *называется* **степенной функцией**.

III.1. График степенной функции

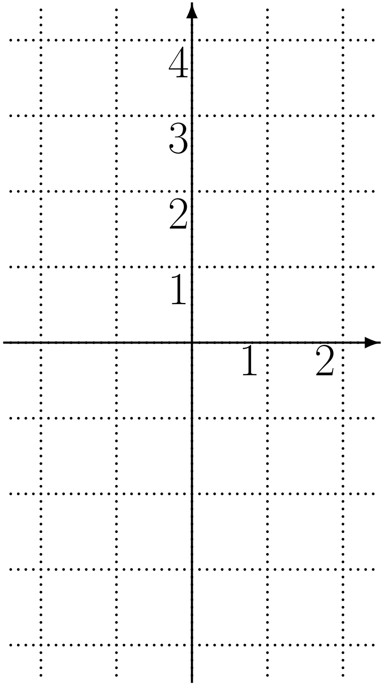


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$ построим «по точкам»:

x							
$\dfrac{1}{x^2}$							

III.1. График степенной функции

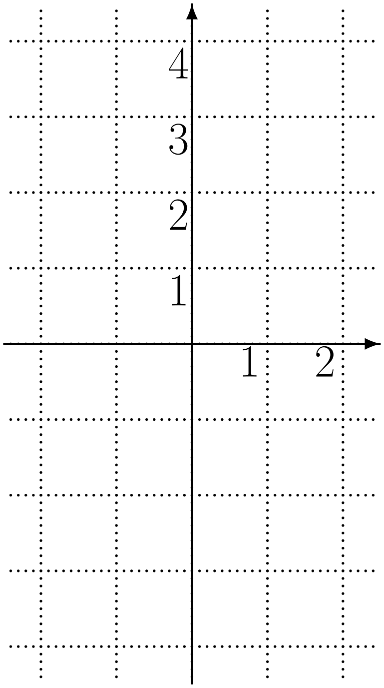


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$ построим «по точкам»:

x	-2						
$\dfrac{1}{x^2}$							

III.1. График степенной функции

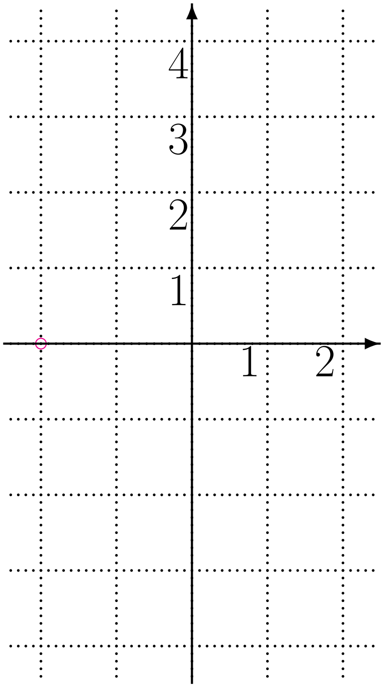


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$ построим «по точкам»:

x	-2						
$\dfrac{1}{x^2}$							

III.1. График степенной функции

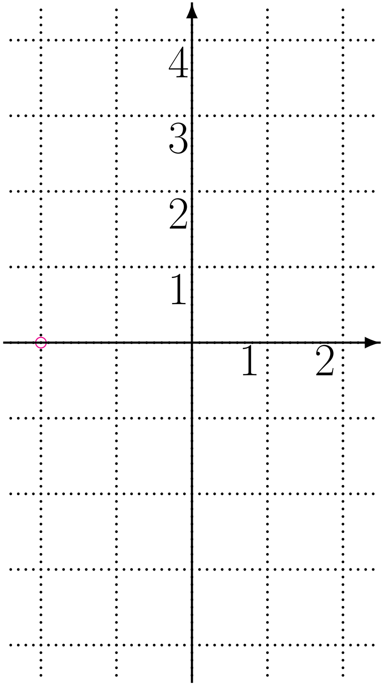


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2						
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{4}$						

III.1. График степенной функции

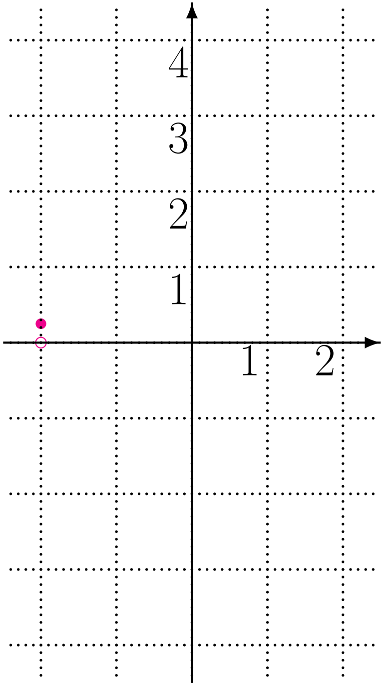


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2						
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{4}$						

III.1. График степенной функции

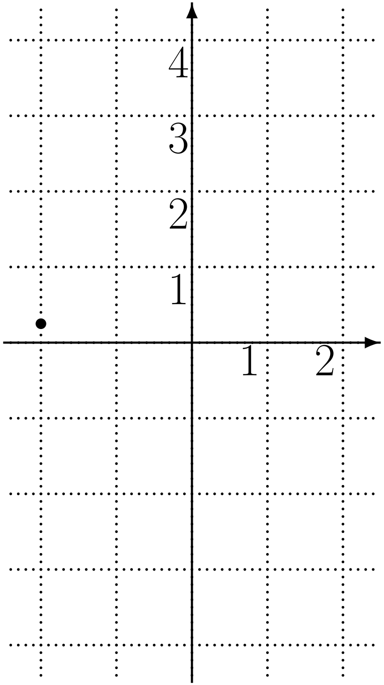


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1					
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$						

III.1. График степенной функции

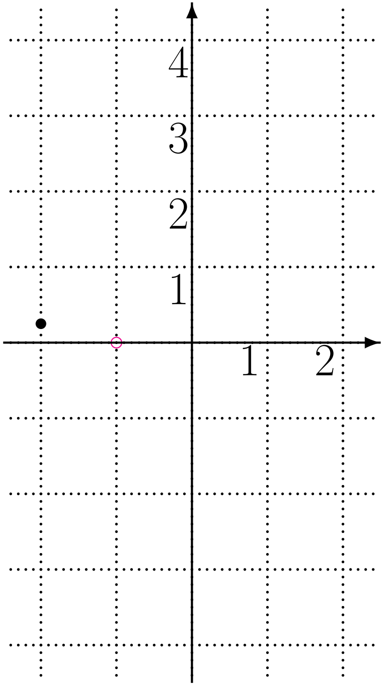


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1					
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$						

III.1. График степенной функции

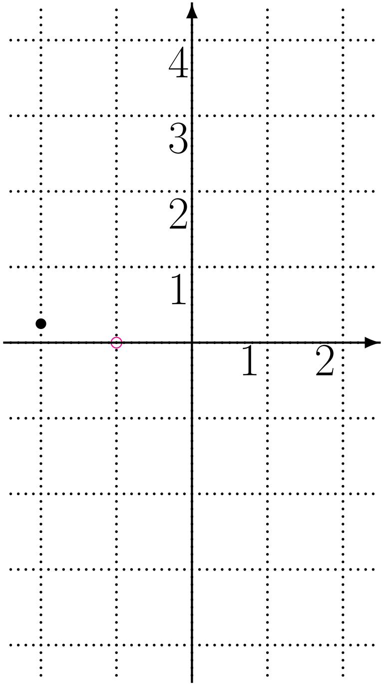


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1					
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1					

III.1. График степенной функции

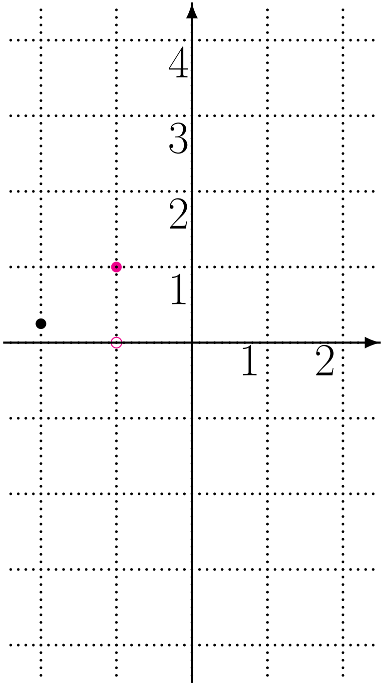


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$ построим «по точками»:

x	-2	-1					
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{4}$	1					

III.1. График степенной функции

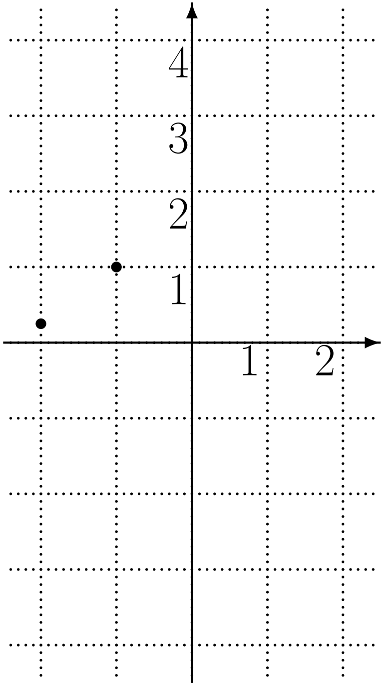


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1					

III.1. График степенной функции

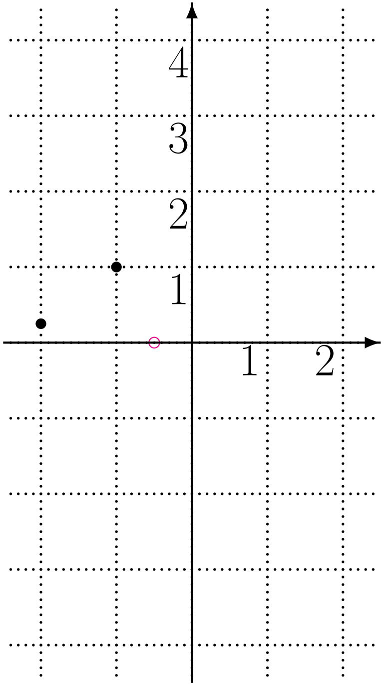


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1					

III.1. График степенной функции

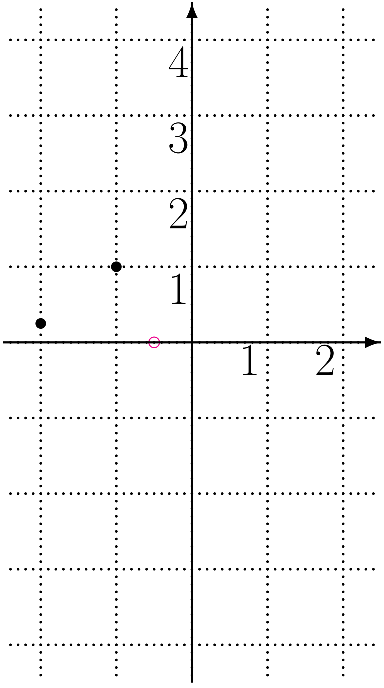


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4				

III.1. График степенной функции

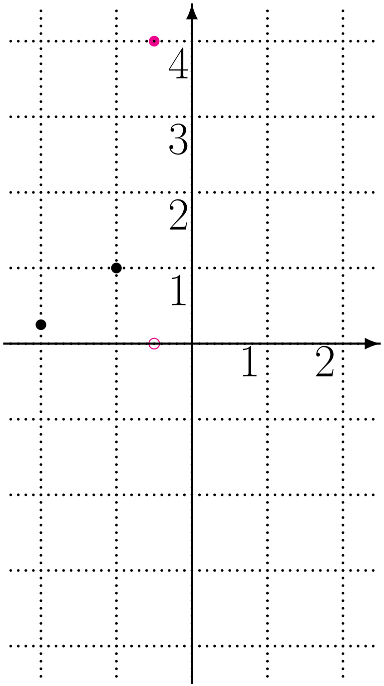


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4				

III.1. График степенной функции

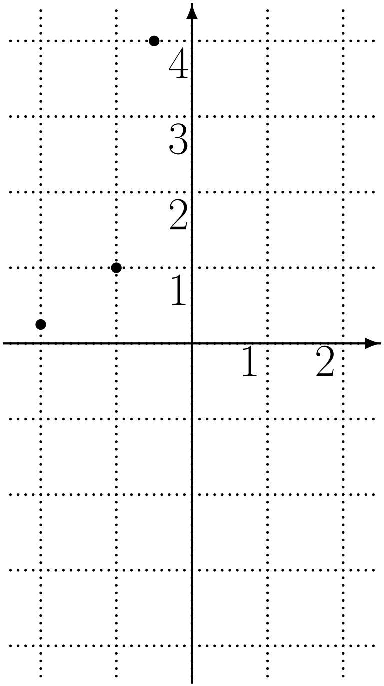


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4				

III.1. График степенной функции

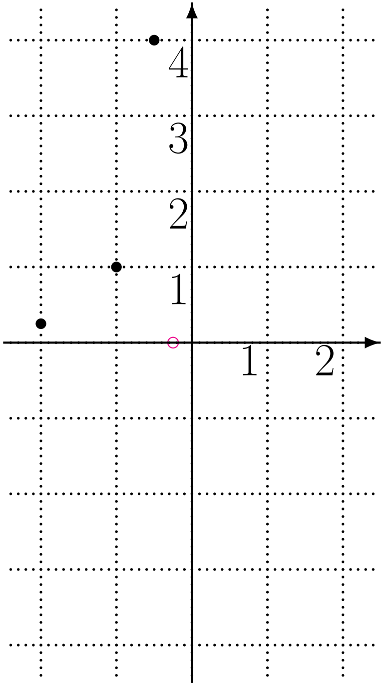


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4				

III.1. График степенной функции

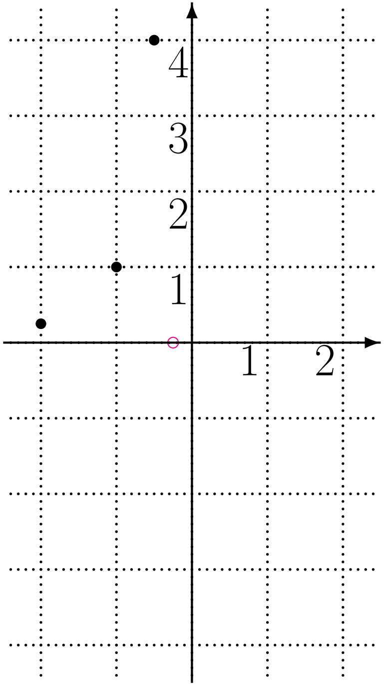


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16			

III.1. График степенной функции

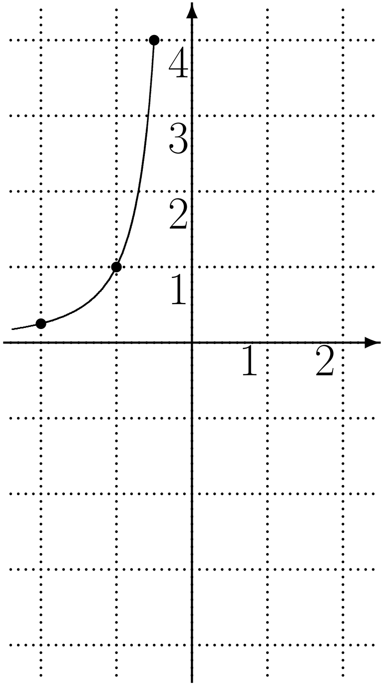


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16			

III.1. График степенной функции

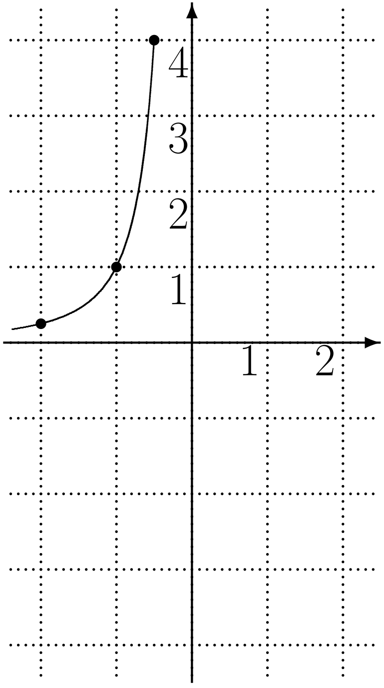


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16			

III.1. График степенной функции

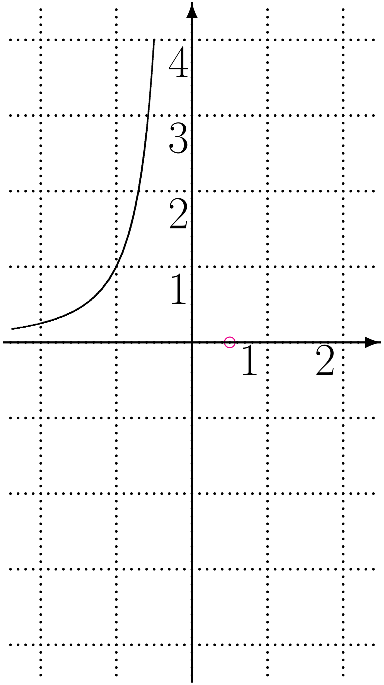


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точками»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16			

III.1. График степенной функции

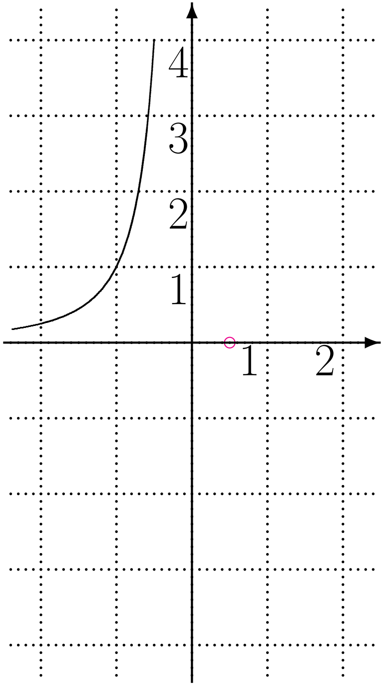


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4		

III.1. График степенной функции

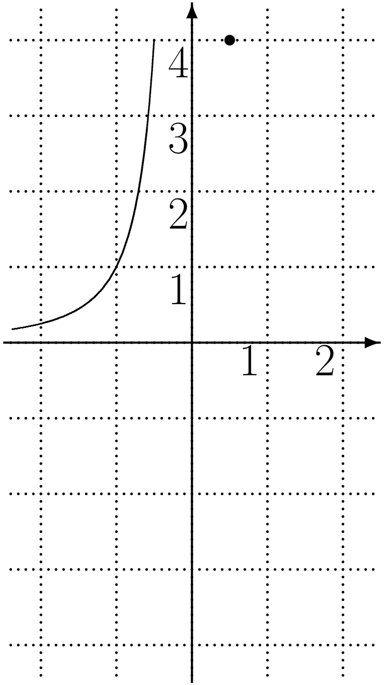


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4		

III.1. График степенной функции

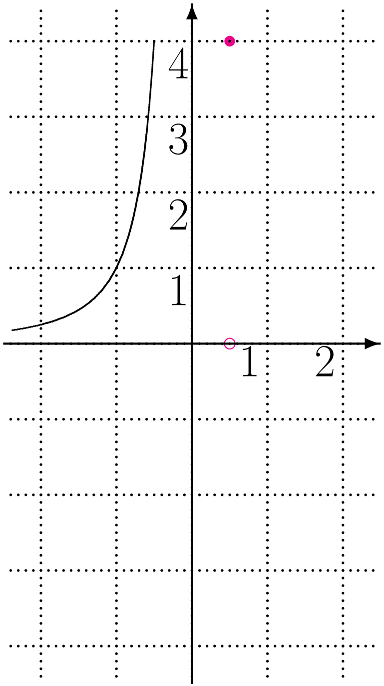


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4		

III.1. График степенной функции

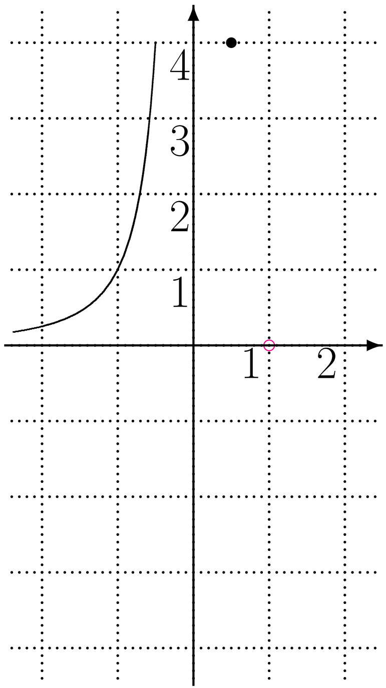


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4		

III.1. График степенной функции

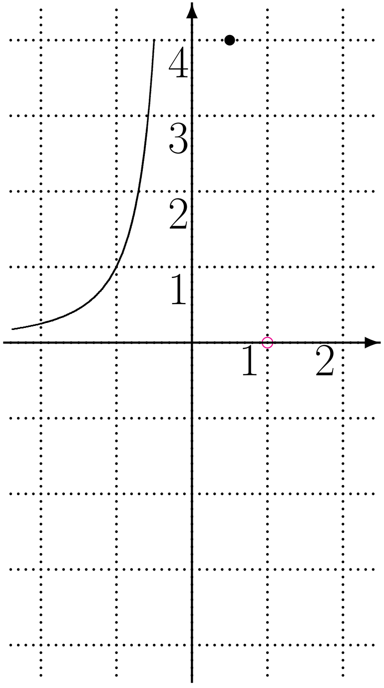


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4	1	

III.1. График степенной функции

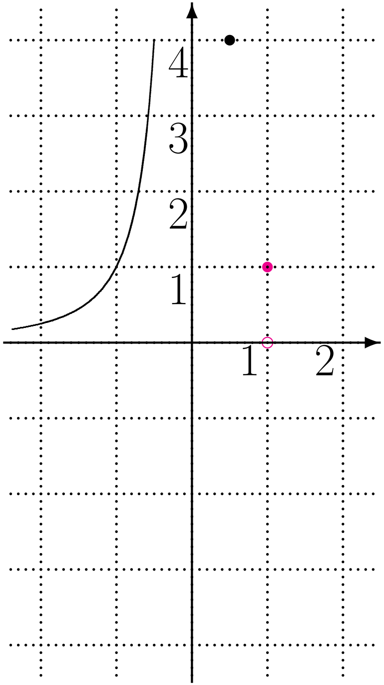


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	1	
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{4}$	1	4	16	4	1	

III.1. График степенной функции

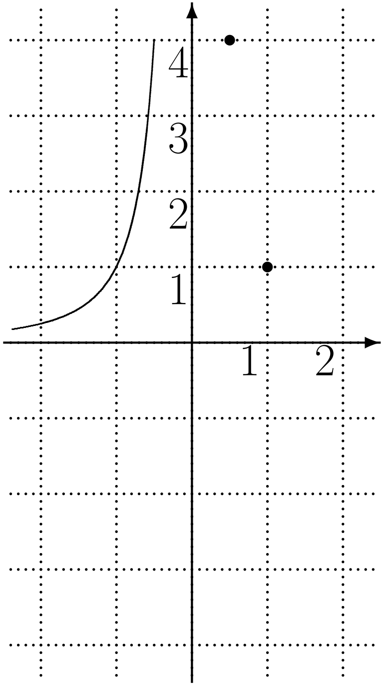


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4	1	

III.1. График степенной функции

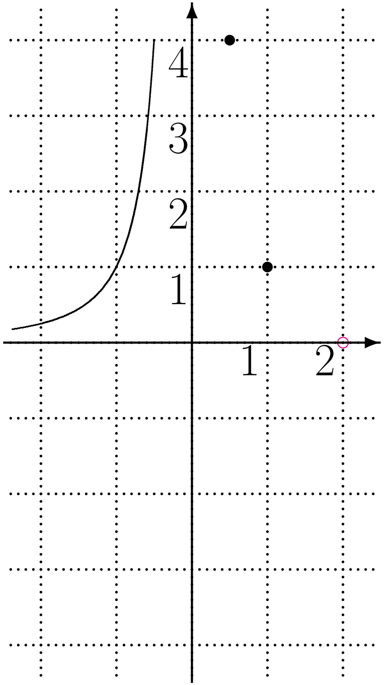


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4	1	

III.1. График степенной функции

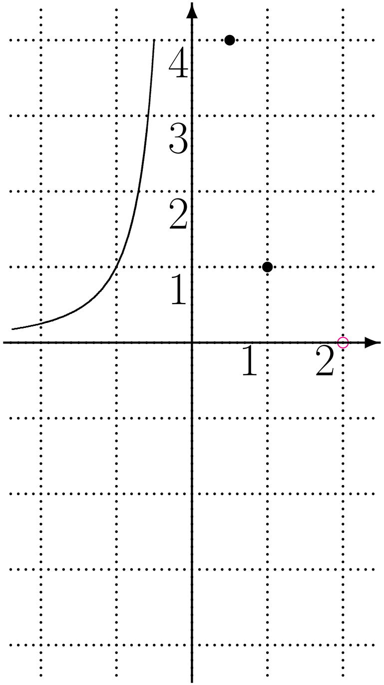


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4	1	$\frac{1}{4}$

III.1. График степенной функции

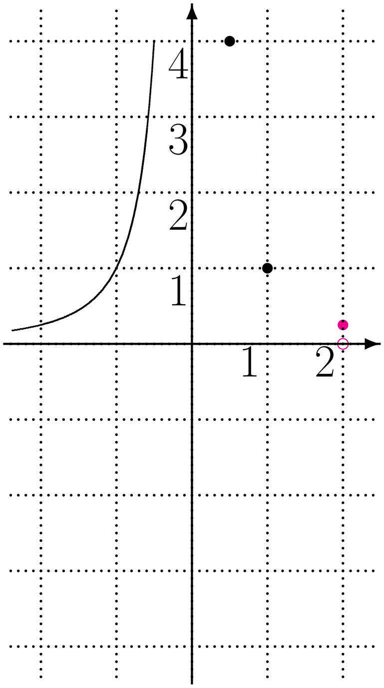


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4	1	$\frac{1}{4}$

III.1. График степенной функции

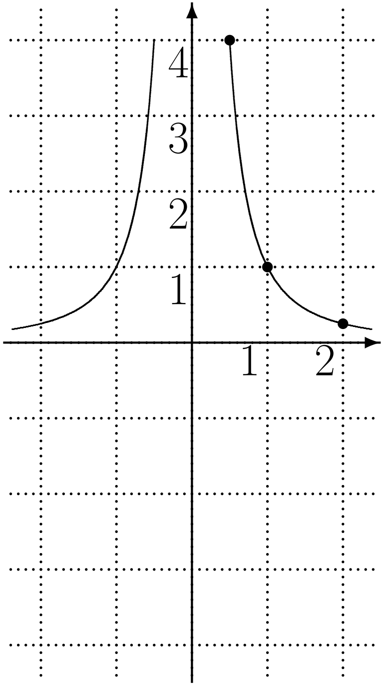


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$ построим «по точкам»:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	4	1	$\frac{1}{4}$

III.1. График степенной функции

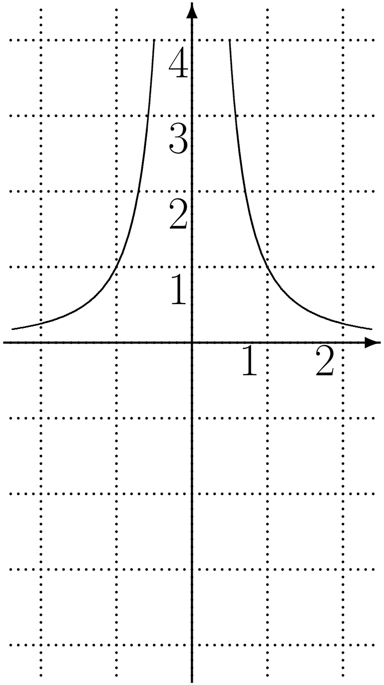


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$.
Посмотрим, как изменяется график при изменении показателя степени.
Нет ли какой-нибудь явной «странности» в их «поведении»?

III.1. График степенной функции

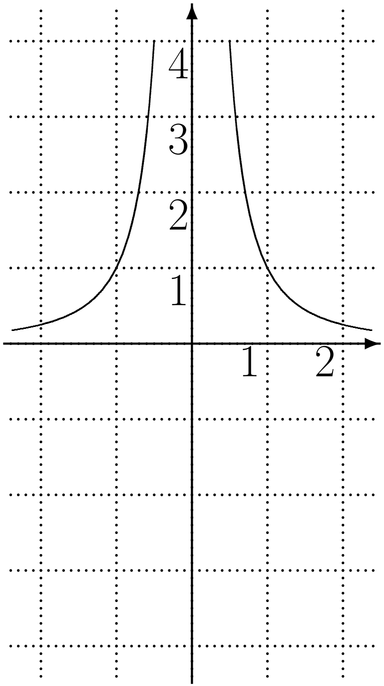


График степенной функции $f(x) = x^{-2}$.

III.1. График степенной функции

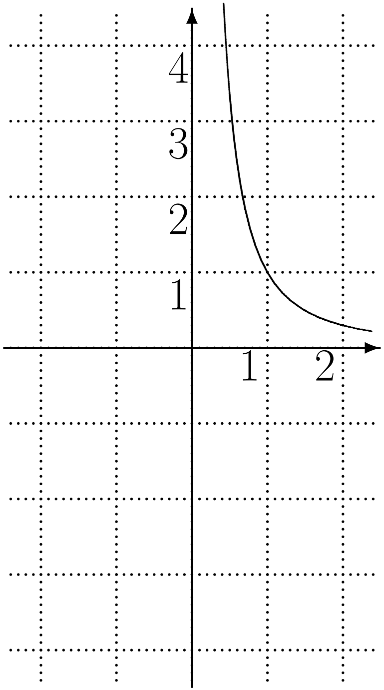


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-1,75}}$.

III.1. График степенной функции

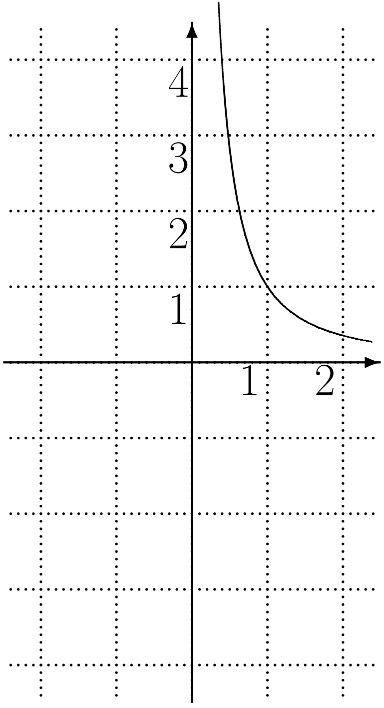


График степенной функции $f(x) = x^{-1{,}50}$.

III.1. График степенной функции

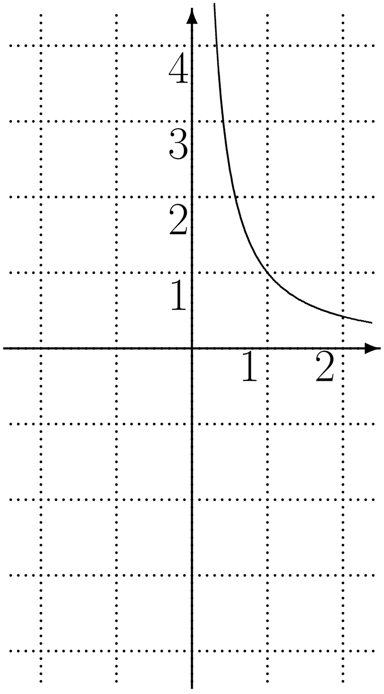


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-1,25}}$.

III.1. График степенной функции

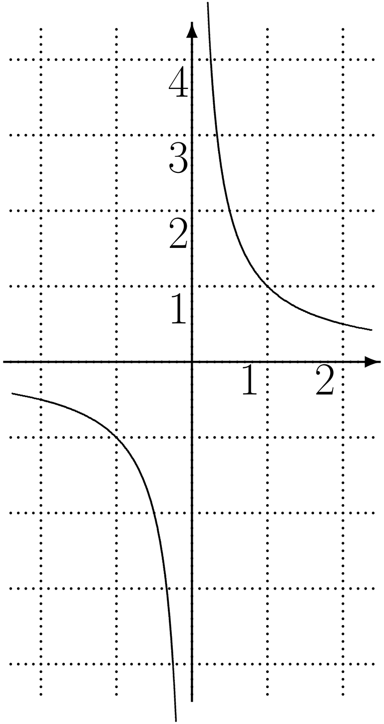


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-1}}$.

III.1. График степенной функции

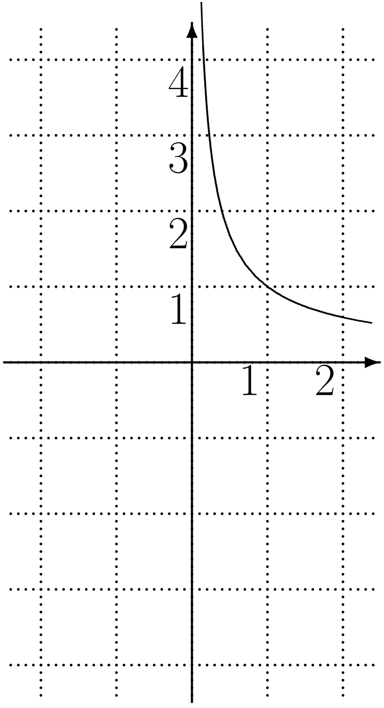


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0{,}75}}$.

III.1. График степенной функции

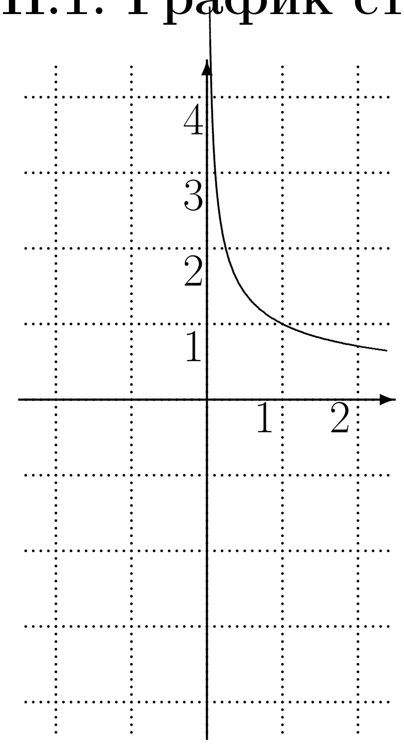


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0{,}50}}$.

III.1. График степенной функции

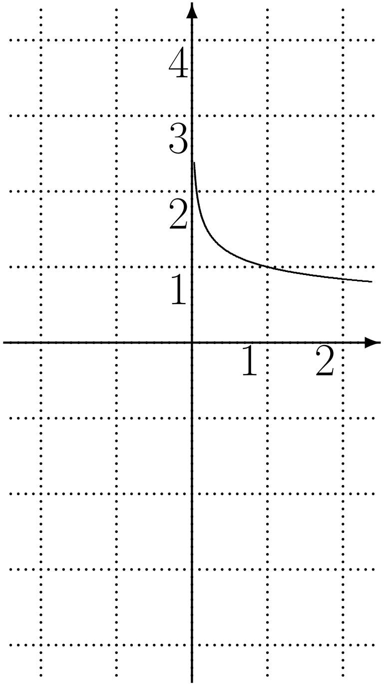


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0,25}}$.

III.1. График степенной функции

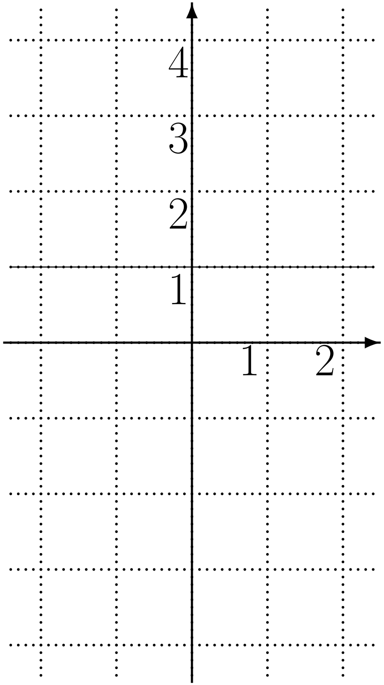


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0}}$.

III.1. График степенной функции

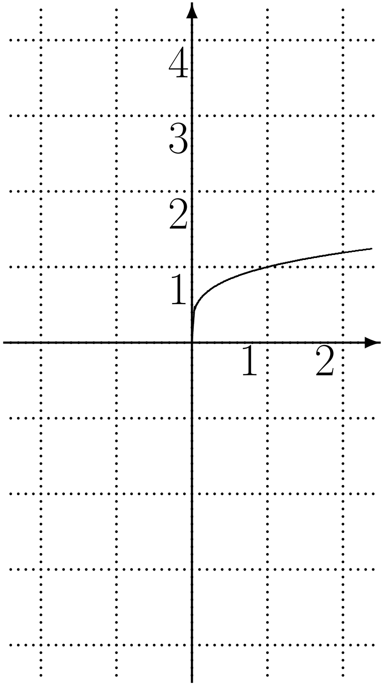


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,25}}$.

III.1. График степенной функции

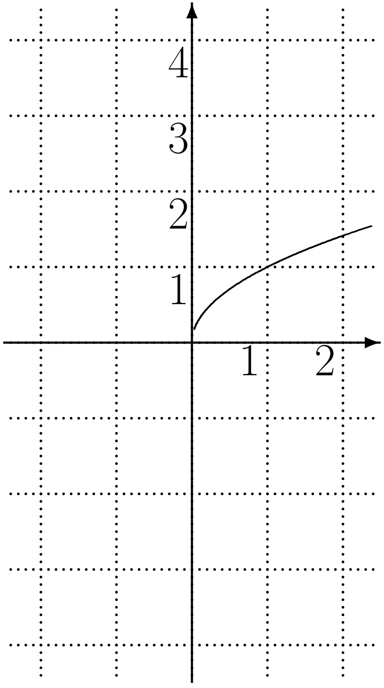


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,50}}$.

III.1. График степенной функции

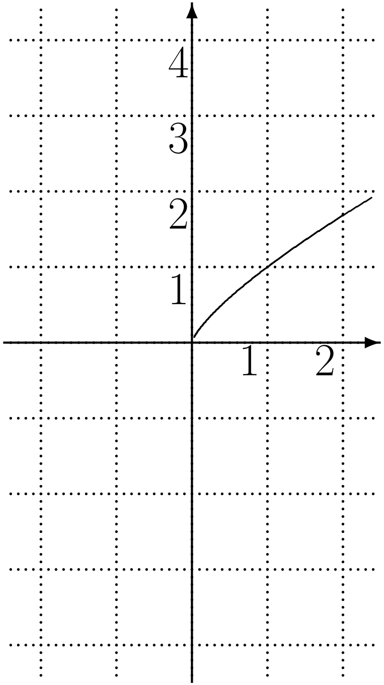


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,75}}$.

III.1. График степенной функции

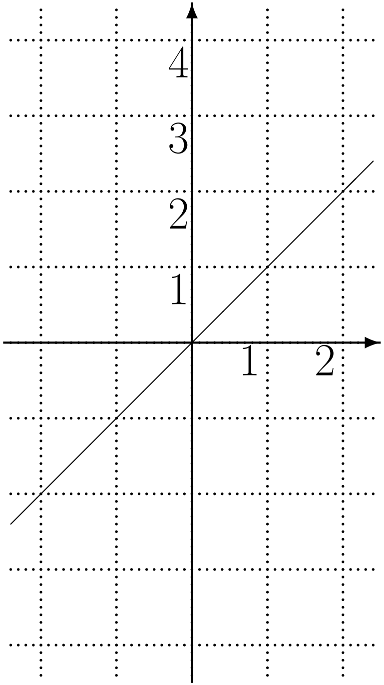


График степенной функции $f(x) = x^{1}$.

III.1. График степенной функции

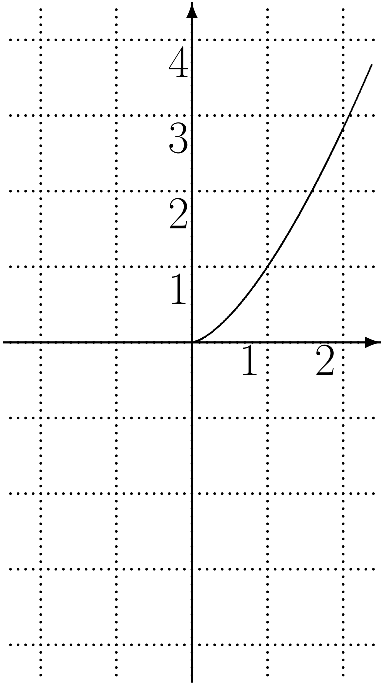


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1,5}}$.

III.1. График степенной функции

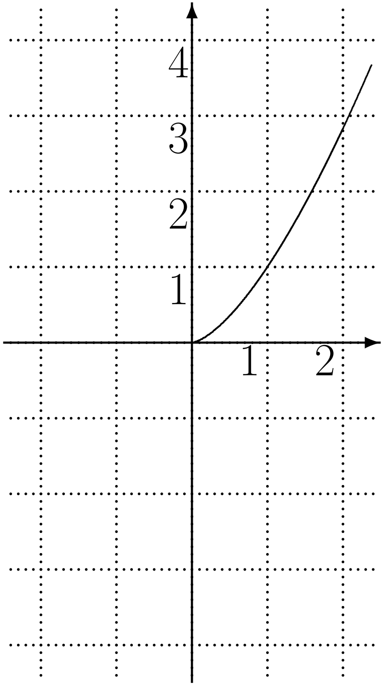


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1{,}5}}$.

Не кажется ли вам, что в «поведении» этих графиков имеются какие-то странности?

III.1. График степенной функции

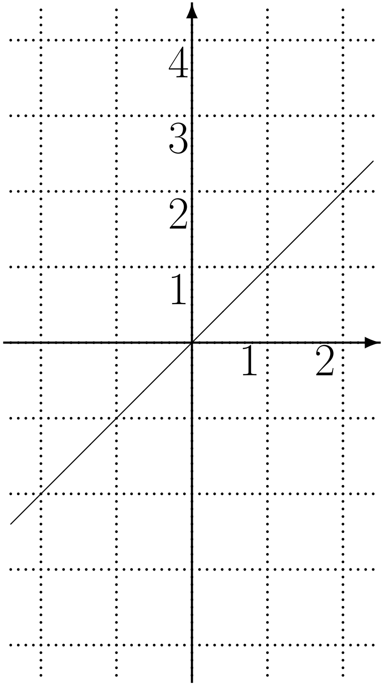


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1}}$.

Не кажется ли вам, что в «поведении» этих графиков имеются какие-то странности?

Почему график слева от оси ординат иногда «исчезает»?

III.1. График степенной функции

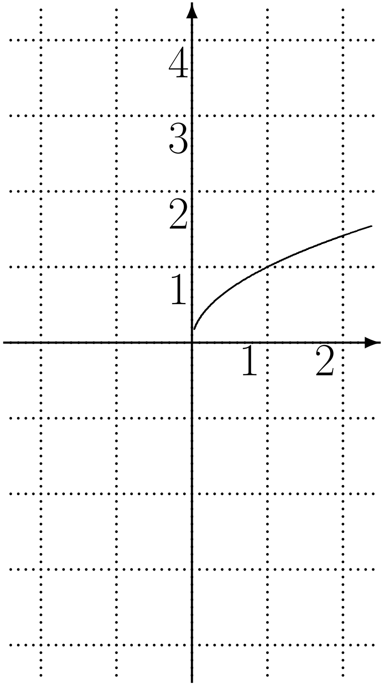


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,5}}$.

Не кажется ли вам, что в «поведении» этих графиков имеются какие-то странности?

Почему график слева от оси ординат иногда «исчезает»? Что означает фраза «слева от оси ординат график исчез»?

III.1. График степенной функции

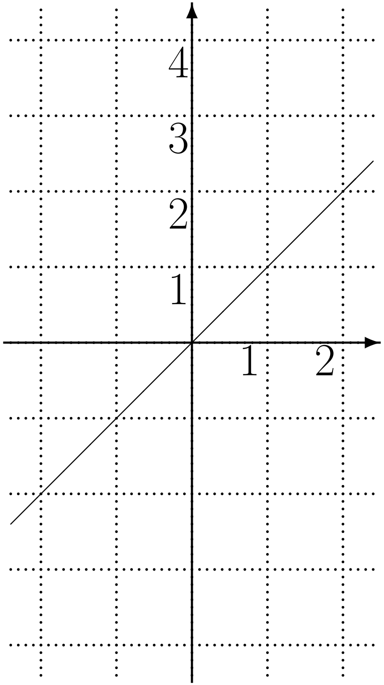


График степенной функции $f(x) = x^{1}$.

Не кажется ли вам, что в «поведении» этих графиков имеются какие-то странности?

Почему график слева от оси ординат иногда «исчезает»? Что означает фраза «слева от оси ординат график исчез»?

График — это множество точек. Поэтому, во-первых, переведем на «язык равенств и неравенств» утверждение, что *точка $M(x;y)$ находится левее оси ординат.*

III.1. График степенной функции

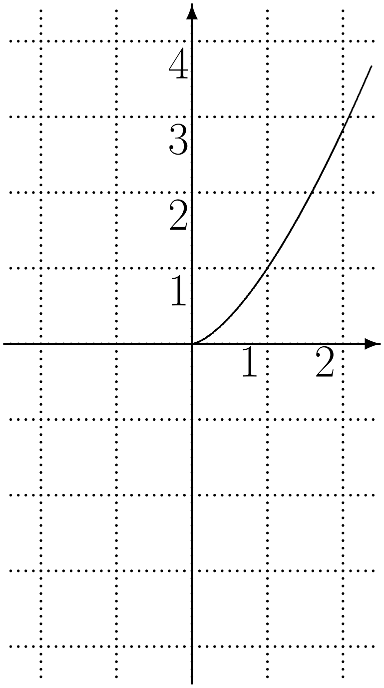


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1{,}5}}$.

Не кажется ли вам, что в «поведении» этих графиков имеются какие-то странности?

Почему график слева от оси ординат иногда «исчезает»? Что означает фраза «слева от оси ординат график исчез»?

График — это множество точек. Поэтому, во-первых, переведем на «язык равенств и неравенств» утверждение, что *точка $M(x;y)$ находится левее оси ординат*. Перевод: $x < 0$.

III.1. График степенной функции

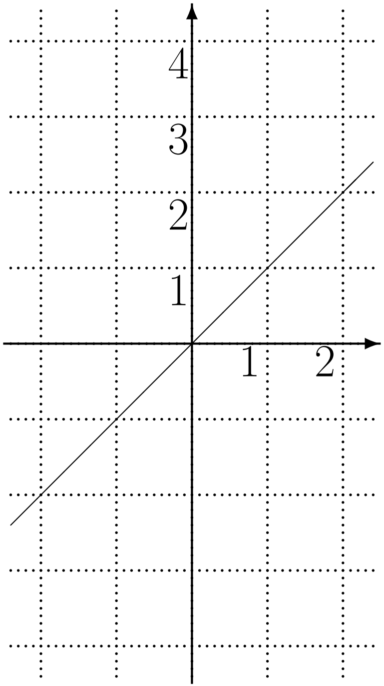


График степенной функции $f(x) = x^{1}$.

Не кажется ли вам, что в «поведении» этих графиков имеются какие-то странности?

Почему график слева от оси ординат иногда «исчезает»? Что означает фраза «слева от оси ординат график исчез»?

Во-вторых, что значит, что *точка* $M(x; y)$ *принадлежит графику функции* f?

III.1. График степенной функции

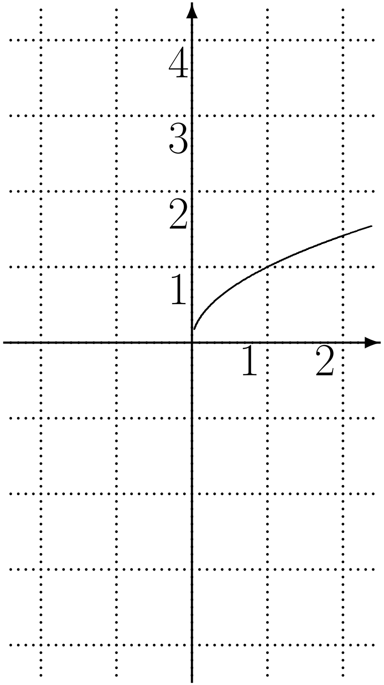


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,5}}$.

Не кажется ли вам, что в «поведении» этих графиков имеются какие-то странности?

Почему график слева от оси ординат иногда «исчезает»? Что означает фраза «слева от оси ординат график исчез»?

Во-вторых, что значит, что *точка* $M(x; y)$ *принадлежит графику функции* f?

Перевод: $y = f(x)$, т.е. $M(x;\ f(x))$.

III.1. График степенной функции

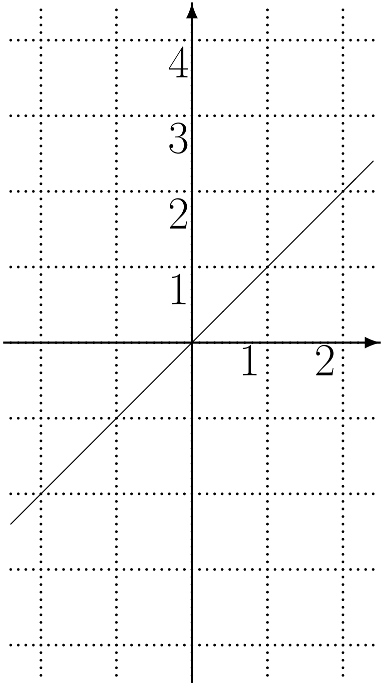


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1}}$.

Точка $M(x; y)$ *принадлежит графику функции* f *тогда и только тогда, когда ее координаты имеют вид* $(x;\ f(x))$.

Поэтому фраза «слева от оси ординат график исчез» означает, что *при отрицательных значениях аргумента функция не определена.*

III.1. График степенной функции

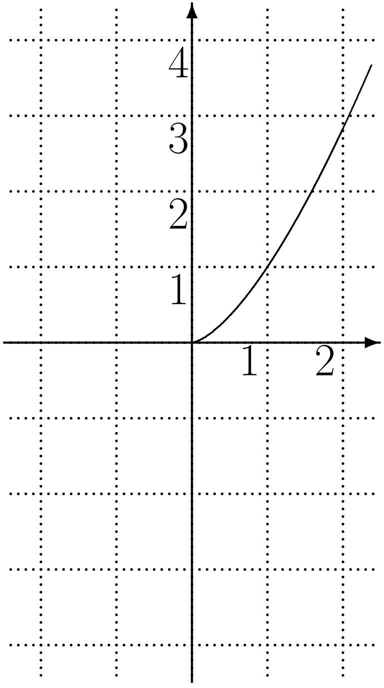


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1{,}5}}$.

Фраза «слева от оси ординат график исчез» означает, что при *отрицательных значениях аргумента функция не определена.*

Но почему???

III.1. График степенной функции

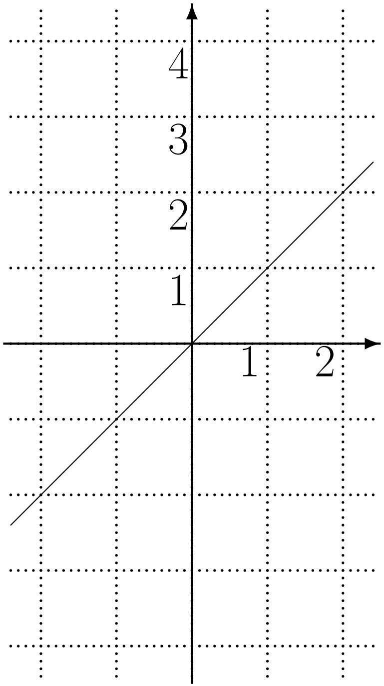


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1}}$.

Почему при дробных показателях степени а выражение x^a не определено для $x < 0$?

III.1. График степенной функции

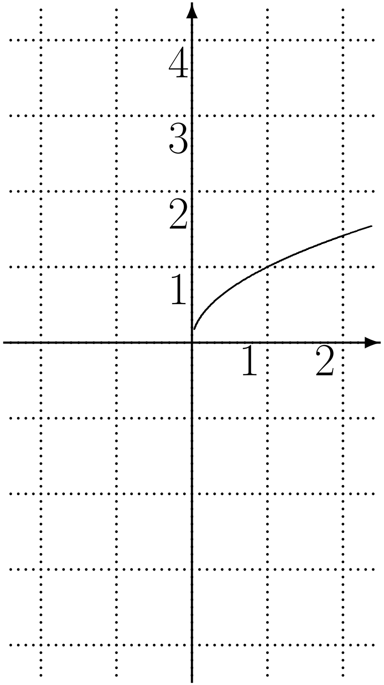


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,5}}$.

Почему при дробных показателях степени a выражение x^a *не определено для* $x < 0$*?*

Рассмотрим пример. С одной стороны,

$$= (-8)^{1/3}$$

III.1. График степенной функции

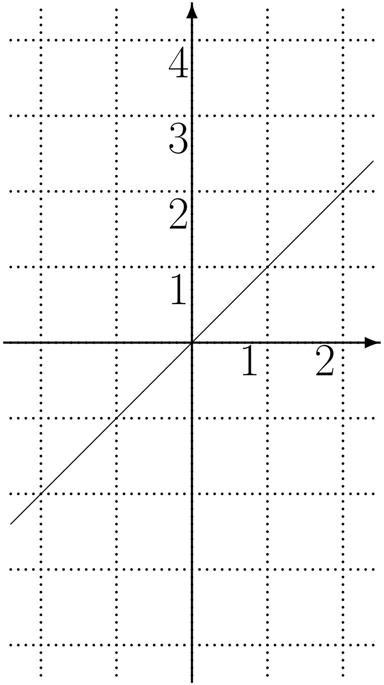


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1}}$.

Почему при дробных показателях степени a выражение x^a *не определено для* $x < 0$*?*

Рассмотрим пример. С одной стороны,
$(-2) = (-8)^{1/3}$

III.1. График степенной функции

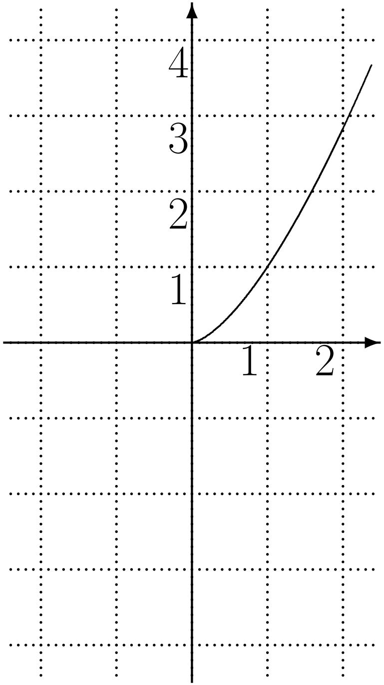


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1{,}5}}$.

Почему при дробных показателях степени a выражение x^a не определено для $x < 0$?

Рассмотрим пример. С другой стороны,
$(-2) = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} =$

III.1. График степенной функции

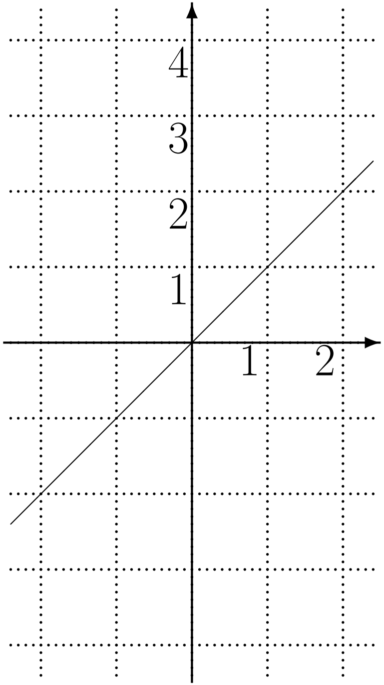


График степенной функции $f(x) = x^{1}$.

Почему при дробных показателях степени a выражение x^a не определено для $x < 0$?

Рассмотрим пример. С другой стороны,

$(-2) = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \left((-8)^2\right)^{1/6} =$

III.1. График степенной функции

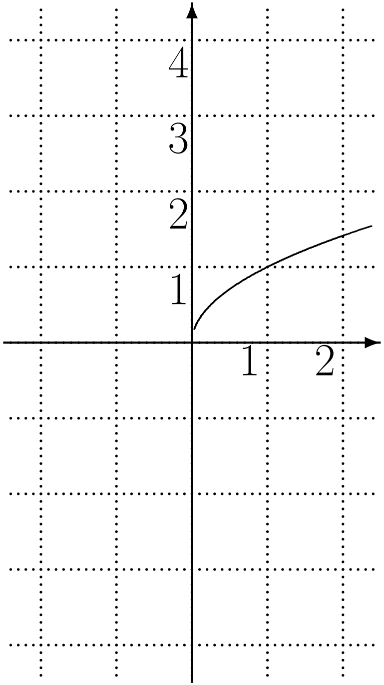


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,5}}$.

Почему при дробных показателях степени a выражение x^a *не определено для* $x < 0$*?*

Рассмотрим пример. С другой стороны, $(-2) = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \left((-8)^2\right)^{1/6} = 2$.

III.1. График степенной функции

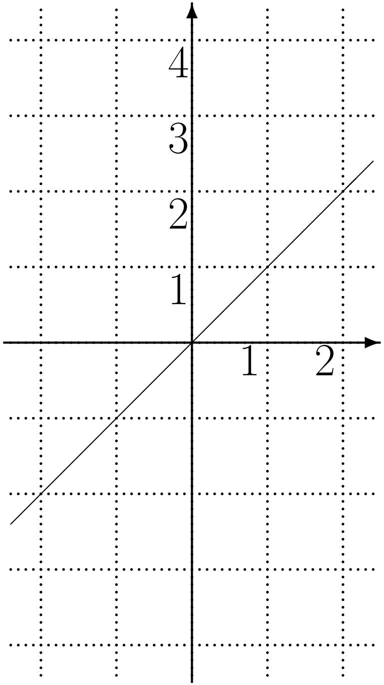


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1}}$.

Почему при дробных показателях степени a выражение x^a *не определено для* $x < 0$*?*

Рассмотрим пример. С другой стороны, $(-2) = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \left((-8)^2\right)^{1/6} = 2$.

Катастрофа! $(-2) = 2$, караул!

III.1. График степенной функции

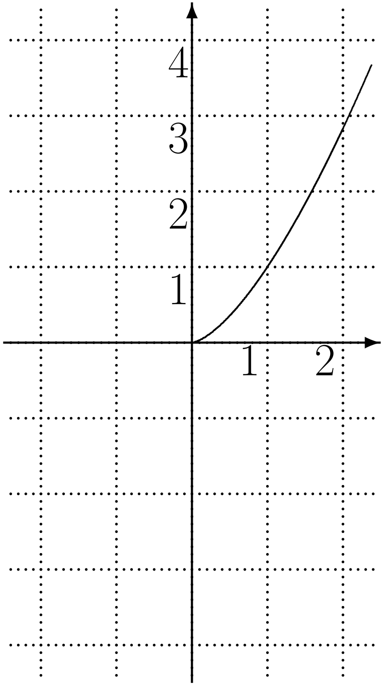


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1{,}5}}$.

Почему при дробных показателях степени а выражение x^a не определено для $x < 0$?

Рассмотрим пример. С другой стороны,
$(-2) = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \left((-8)^2\right)^{1/6} = 2$.
Катастрофа! $(-2) = 2$, караул!
Надо либо срочно менять математические правила работы с дробями, либо...

III.1. График степенной функции

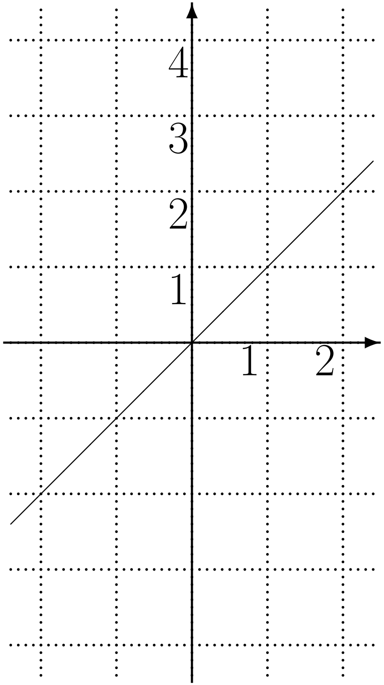


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1}}$.

Почему при дробных показателях степени a выражение x^a не определено для $x < 0$?

Рассмотрим пример. С другой стороны,

$$(-2) = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \left((-8)^2\right)^{1/6} = 2.$$

Катастрофа! $(-2) = 2$, караул!

Именно последнее «либо» и стало общепринятым:

если a — ***дробное число, то***

III.1. График степенной функции

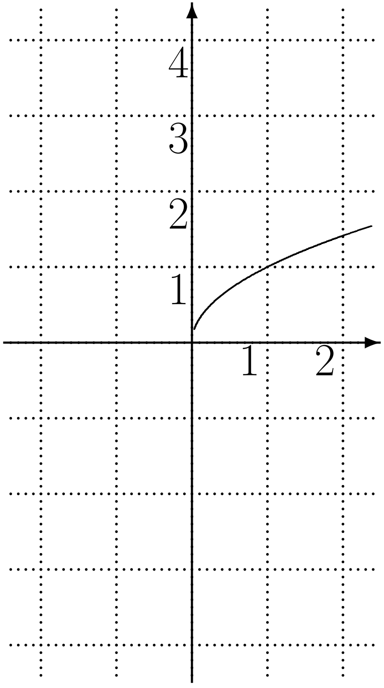


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0{,}5}}$.

Почему при дробных показателях степени a выражение x^a не определено для $x < 0$?

Рассмотрим пример. С другой стороны,
$$(-2) = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \left((-8)^2\right)^{1/6} = 2.$$
Катастрофа! $(-2) = 2$, караул!

Именно последнее «либо» и стало общепринятым:

если a ***— дробное число, то для отрицательных*** b ***значение*** b^a ***не определено***.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

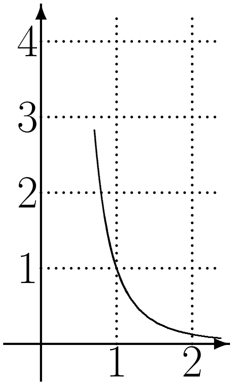


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-3}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

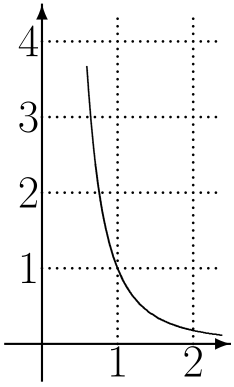


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2{,}50}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

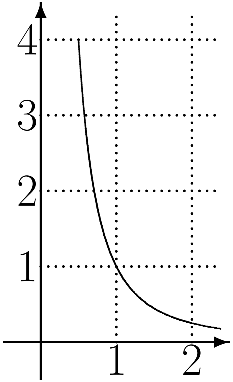


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-2}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

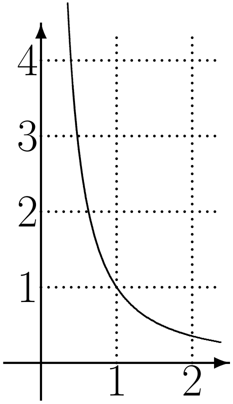


График степенной функции $f(x) = x^{-1,5}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

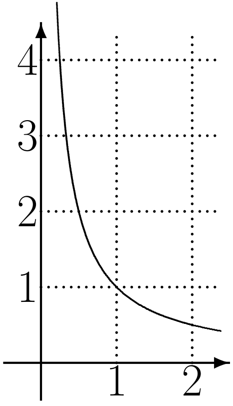


График степенной функции $f(x) = x^{-1}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

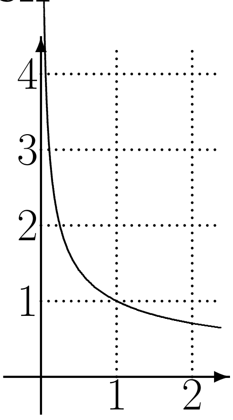


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0{,}5}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

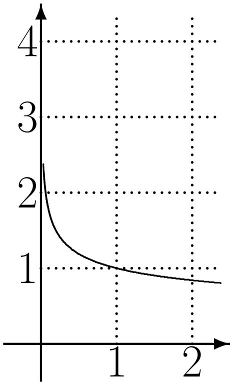


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0,25}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

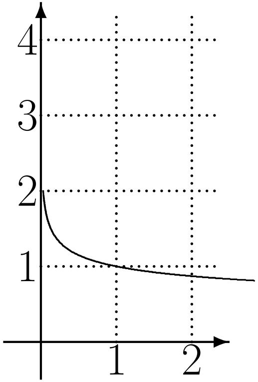


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0,2}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

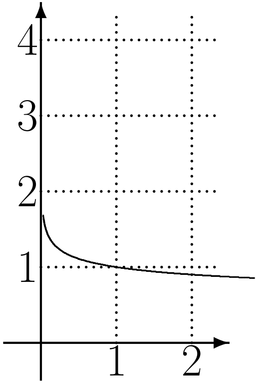


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0{,}15}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

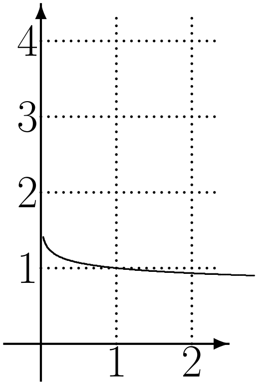


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0{,}1}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

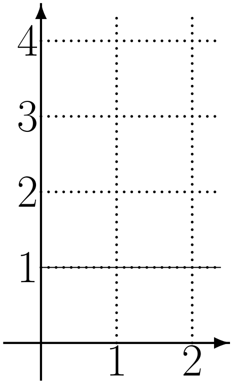


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

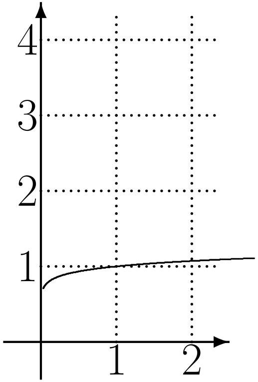


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,10}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

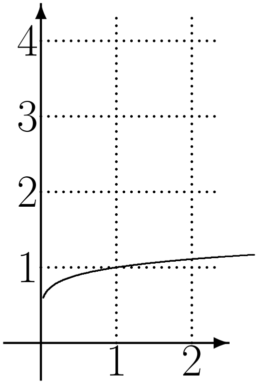


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0{,}15}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

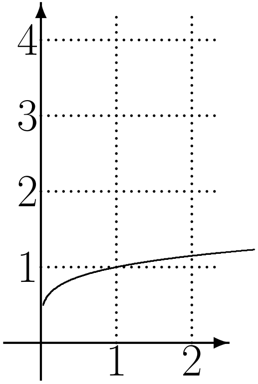


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0{,}20}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

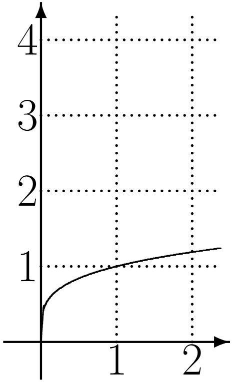


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,25}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

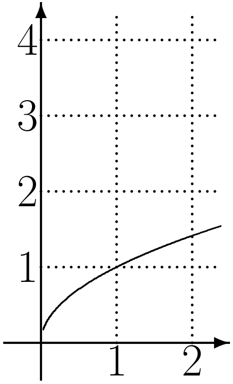


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0{,}5}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

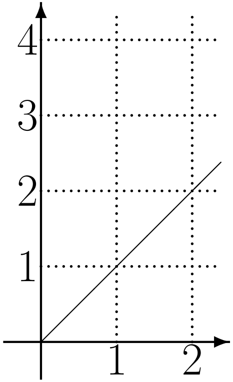


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{1}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

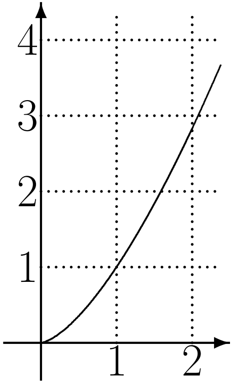


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0{,}5}}$ для $x > 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

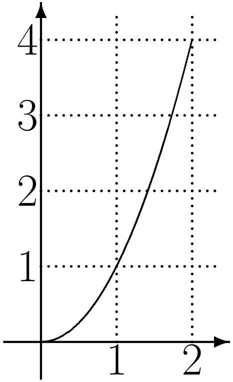


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{2}}$ для $x > 0$.

Не было ли в «поведении» графиков этих функции чего-либо «настораживающего»?

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

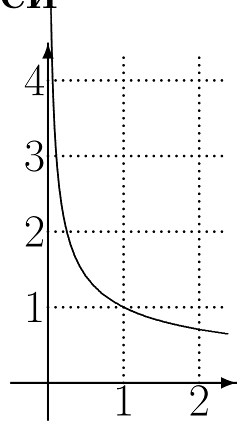


График степенной функции $f(x) = x^{-0{,}5}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

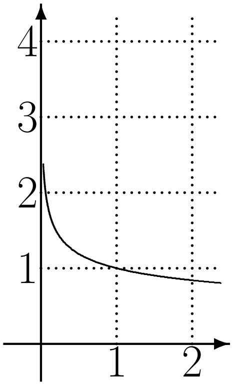


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0,25}}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

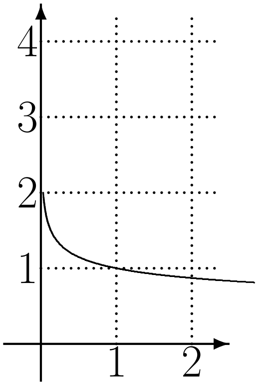


График степенной функции $f(x) = x^{-0{,}2}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

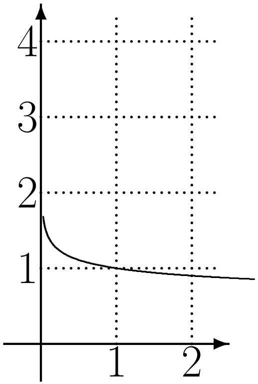


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{-0{,}15}}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

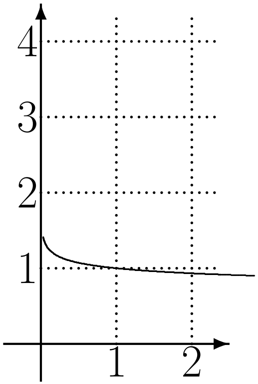


График степенной функции $f(x) = x^{-0,1}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

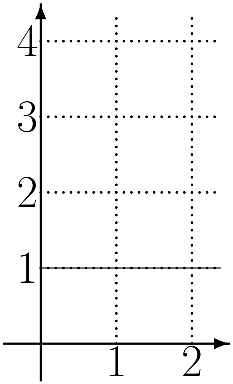


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0}}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

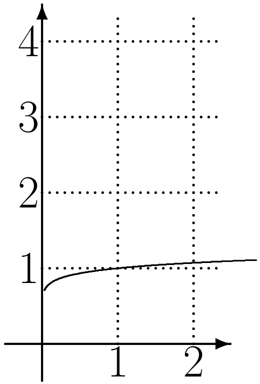


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,1}}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

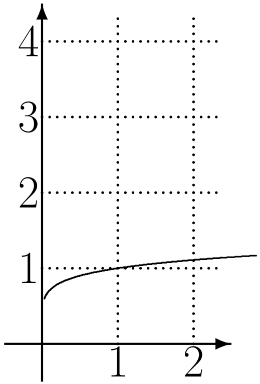


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,15}}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

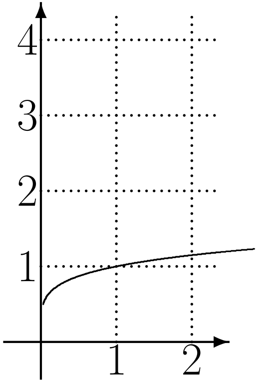


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0{,}2}}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

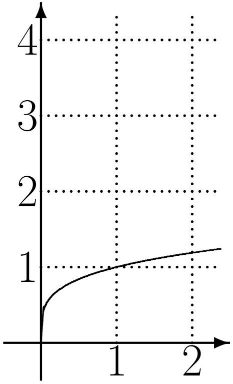


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0,25}}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

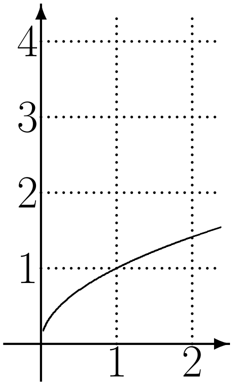


График степенной функции $f(x) = x^{\mathbf{0{,}5}}$ для $x > 0$.

Как обычно, неприятности поджидают вблизи особых, «экстремальных» значений параметра. Действительно, обратите внимание на поведение графиков вблизи точки с абсциссой 0: $x = 0$.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

При небольшом изменении показателя степени (параметра a) значение функции $f(x) = x^a$ вблизи 0 резко изменяется. Эта неустойчивость значений привела к тому, что значение 0^0 не удалось определить удобным для всех образом, т.е.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

При небольшом изменении показателя степени (параметра a) значение функции $f(x) = x^a$ вблизи 0 резко изменяется. Эта неустойчивость значений привела к тому, что значение 0^0 не удалось определить удобным для всех образом, т.е.
значение 0^0 ***не определено***.

III.2. Степенная функция на положительной полуоси

При небольшом изменении показателя степени (параметра a) значение функции $f(x) = x^a$ вблизи 0 резко изменяется. Эта неустойчивость значений привела к тому, что значение 0^0 не удалось определить удобным для всех образом, т.е.

значение 0^0 ***не определено***.

III.3. Некоторые алгебраические соотношения для степенных функций

Некоторые алгебраические соотношения для степенных функций в предположении, что a, b, x не обращаются в 0 одновременно, то есть $a^2 + b^2 + x^2 \neq 0$:

III.3. Некоторые алгебраические соотношения для степенных функций

Некоторые алгебраические соотношения для степенных функций в предположении, что a, b, x не обращаются в 0 одновременно, то есть $a^2 + b^2 + x^2 \neq 0$:

1) $x^a x^b = x^{a+b}$ (произведение степенных функций есть степенная функция);

III.3. Некоторые алгебраические соотношения для степенных функций

Некоторые алгебраические соотношения для степенных функций в предположении, что a, b, x не обращаются в 0 одновременно, то есть $a^2 + b^2 + x^2 \neq 0$:

1) $x^a x^b = x^{a+b}$ (произведение степенных функций есть степенная функция);

2) $x^a / x^b = x^{a-b}$ (частное степенных функций есть степенная функция);

III.3. Некоторые алгебраические соотношения для степенных функций

Некоторые алгебраические соотношения для степенных функций в предположении, что a, b, x не обращаются в 0 одновременно, то есть $a^2 + b^2 + x^2 \neq 0$:

1) $x^a x^b = x^{a+b}$ (произведение степенных функций есть степенная функция);

2) $x^a / x^b = x^{a-b}$ (частное степенных функций есть степенная функция);

3) $(x^a)^b = x^{ab}$ (**суперпозиция** степенных функций есть степенная функция).

Вернемся к основному докладу?

IV. Формализация информации

В школьном курсе математики наиболее мощный аналитический аппарат разработан для обработки ***равенств*** и ***неравенств***. Поэтому особую актуальность имеют правила перевода высказывания на «язык равенств и неравенств» и обратно, на язык, основанный на других терминах.

IV.1. Некоторые правила перевода

В школьном курсе математики наиболее мощный аналитический аппарат разработан для обработки ***равенств*** и ***неравенств***. Поэтому особую актуальность имеют правила перевода высказывания на «язык равенств и неравенств» и обратно, на язык, основанный на других терминах.

IV.1.1. Высказывания о числах

— Множество рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$.

IV.1.1. Высказывания о числах

— Множество рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$. Число x называется **рациональным** тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число (язык алгебраических выражений),

IV.1.1. Высказывания о числах

— Множество рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$. Число x называется **рациональным** тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число (язык алгебраических выражений), т.е.

$$x \in \mathbb{Q} \;\Leftrightarrow$$

IV.1.1. Высказывания о числах

— Множество рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$. Число x называется **рациональным** тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число (язык алгебраических выражений), т.е.

$$x \in \mathbb{Q} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x = \dfrac{m}{n}, \\ m \in \mathbb{Z}, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

IV.1.1. Высказывания о числах

— k-значное число x записано последовательностью цифр $n_k \ldots n_1 n_0$ тогда и только тогда, когда

$$x = n_k \cdot 10^k + \ldots + n_2 \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10 + n_0.$$

IV.1.1. Высказывания о числах

— Целое число a называется **частным** от деления целого числа b на целое число c тогда и только тогда, когда $b = ac + r$, где $0 \leq r < c$.

IV.1.1. Высказывания о числах

— Целое число a называется **частным** от деления целого числа b на целое число c тогда и только тогда, когда $b = ac + r$, где $0 \leq r < c$. При этом число r называется **остатком** от деления целого числа b на целое число c. Если при этом $r \neq 0$, то a называется **неполным частным** от деления целого числа b на целое число c.

IV.1.1. Высказывания о числах

— Целое число a называется **частным** от деления целого числа b на целое число c тогда и только тогда, когда $b = ac + r$, где $0 \leq r < c$. При этом число r называется **остатком** от деления целого числа b на целое число c. Если при этом $r \neq 0$, то a называется **неполным частным** от деления целого числа b на целое число c.

— Логически эквивалентные утверждения

– целое число a **делится нацело** на целое число b;

IV.1.1. Высказывания о числах

— Целое число a называется **частным** от деления целого числа b на целое число c тогда и только тогда, когда $b = ac + r$, где $0 \leq r < c$. При этом число r называется **остатком** от деления целого числа b на целое число c. Если при этом $r \neq 0$, то a называется **неполным частным** от деления целого числа b на целое число c.

— Логически эквивалентные утверждения

– целое число a **делится нацело** на целое число b;

– целое число b **является делителем** a;

IV.1.1. Высказывания о числах

— Целое число a называется **частным** от деления целого числа b на целое число c тогда и только тогда, когда $b = ac + r$, где $0 \leq r < c$. При этом число r называется **остатком** от деления целого числа b на целое число c. Если при этом $r \neq 0$, то a называется **неполным частным** от деления целого числа b на целое число c.

— Логически эквивалентные утверждения

– целое число a **делится нацело** на целое число b;

– целое число b **является делителем** a;

– целое число a **кратно** целому числу b

IV.1.1. Высказывания о числах

— Целое число a называется **частным** от деления целого числа b на целое число c тогда и только тогда, когда $b = ac + r$, где $0 \leq r < c$. При этом число r называется **остатком** от деления целого числа b на целое число c. Если при этом $r \neq 0$, то a называется **неполным частным** от деления целого числа b на целое число c.

— Логически эквивалентные утверждения

– целое число a **делится нацело** на целое число b;

– целое число b **является делителем** a;

– целое число a **кратно** целому числу b

означает, что существует такое целое число c, что $a = bc$.

— Целое число n является **четным** тогда и только тогда, когда

IV.1.1. Высказывания о числах

— Целое число a называется **частным** от деления целого числа b на целое число c тогда и только тогда, когда $b = ac + r$, где $0 \leq r < c$. При этом число r называется **остатком** от деления целого числа b на целое число c. Если при этом $r \neq 0$, то a называется **неполным частным** от деления целого числа b на целое число c.

— Логически эквивалентные утверждения

– целое число a **делится нацело** на целое число b;

– целое число b **является делителем** a;

– целое число a **кратно** целому числу b

означает, что существует такое целое число c, что $a = bc$.

— Целое число n является **четным** тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа k имеет место равенство $n = 2k$. Целое число n является **нечетным** тогда и только тогда, когда

IV.1.1. Высказывания о числах

— Целое число a называется **частным** от деления целого числа b на целое число c тогда и только тогда, когда $b = ac + r$, где $0 \leq r < c$. При этом число r называется **остатком** от деления целого числа b на целое число c. Если при этом $r \neq 0$, то a называется **неполным частным** от деления целого числа b на целое число c.

— Логически эквивалентные утверждения

– целое число a **делится нацело** на целое число b;

– целое число b **является делителем** a;

– целое число a **кратно** целому числу b

означает, что существует такое целое число c, что $a = bc$.

— Целое число n является **четным** тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа k имеет место равенство $n = 2k$. Целое число n является **нечетным** тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа k имеет место равенство $n = 2k + 1$.

IV.1.1. Высказывания о числах

— **Наименьшим общим кратным** натуральных чисел m, n называется наименьшее такое натуральное число $\mathbf{НОК}(m, n)$, которое кратно и числу m, и числу n.

— **Наибольшим общим делителем** натуральных чисел m, n называется наибольшее такое натуральное число $\mathbf{НОД}(m, n)$, которое делится нацело и на число m, и на число n.

IV.1.1. Высказывания о числах

— **Наименьшим общим кратным** натуральных чисел m, n называется наименьшее такое натуральное число $\mathbf{НОК}(m; n)$, которое кратно и числу m, и числу n.

— **Наибольшим общим делителем** натуральных чисел m, n называется наибольшее такое натуральное число $\mathbf{НОД}(m; n)$, которое делится нацело и на число m, и на число n.

IV.1.2. Высказывания о прогрессиях

— Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ является **арифметической прогрессией** тогда и только тогда, когда для любого номера n имеет место *равенство*

IV.1.2. Высказывания о прогрессиях

— Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ является **арифметической прогрессией** тогда и только тогда, когда для любого номера n имеет место *равенство*

$$x_2 - x_1 = x_{n+1} - x_n.$$

IV.1.2. Высказывания о прогрессиях

— Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ является **арифметической прогрессией** тогда и только тогда, когда для любого номера n имеет место *равенство*

$$x_2 - x_1 = x_{n+1} - x_n.$$

— Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ является **геометрической прогрессией** тогда и только тогда, когда для любого номера n имеет место *равенство*

IV.1.2. Высказывания о прогрессиях

— Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ является **арифметической прогрессией** тогда и только тогда, когда для любого номера n имеет место *равенство*

$$x_2 - x_1 = x_{n+1} - x_n.$$

— Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ является **геометрической прогрессией** тогда и только тогда, когда для любого номера n имеет место *равенство*

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

IV.1.3. Высказывания об однозначности

— Тот факт, что имеется *только один элемент с данным свойством* φ, в переводе на язык равенств (основной язык школьной математики и один из основных языков всей современной математики) выглядит следующим образом: если элементы x и y обладают свойством φ, то $x = y$, т.е.

$$\begin{cases} \varphi(x), \\ \varphi(y) \end{cases} \Rightarrow \ x = y.$$

IV.1.3. Высказывания об однозначности

— Тот факт, что имеется *только один элемент с данным свойством* φ, в переводе на язык равенств (основной язык школьной математики и один из основных языков всей современной математики) выглядит следующим образом: если элементы x и y обладают свойством φ, то $x = y$, т.е.

$$\begin{cases} \varphi(x), \\ \varphi(y) \end{cases} \Rightarrow \; x = y.$$

— Утверждение о том, что существует несколько элементов со свойством φ переводится на «язык равенств и неравенств», например, следующим образом:

$$(\exists x)\ (\exists y)\ \begin{cases} \varphi(x), \\ \varphi(y), \\ x \neq y. \end{cases}$$

IV.1.4. Высказывания о функциях

— Отображение f является **однозначным** тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} \{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f), \\ \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)$$

или

IV.1.4. Высказывания о функциях

— Отображение f является **однозначным** тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} \{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f), \\ \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)$$
или $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f)\ \Rightarrow\ \Big(\alpha = \beta\ \Rightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

IV.1.4. Высказывания о функциях

— Отображение f является **однозначным** тогда и только тогда, когда $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \ \Rightarrow\ \left(\alpha = \beta \ \Rightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\right)$.

— Отображение f является **взаимно однозначным** тогда и только тогда, когда

IV.1.4. Высказывания о функциях

— Отображение f является **однозначным** тогда и только тогда, когда $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \ \Rightarrow\ \Big(\alpha = \beta \ \Rightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

— Отображение f является **взаимно однозначным** тогда и только тогда, когда $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \ \Rightarrow\ \Big(\alpha = \beta \ \Leftrightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

IV.1.4. Высказывания о функциях

— Отображение f является **однозначным** тогда и только тогда, когда $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \ \Rightarrow\ \Big(\alpha = \beta \ \Rightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

— Отображение f является **взаимно однозначным** тогда и только тогда, когда $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \ \Rightarrow\ \Big(\alpha = \beta \ \Leftrightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

— Функция называется **четной** тогда и только тогда, когда $x \in D(f) \ \Rightarrow\ f(-x) = f(x)$.

IV.1.4. Высказывания о функциях

— Отображение f является **однозначным** тогда и только тогда, когда $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \ \Rightarrow\ \Big(\alpha = \beta \ \Rightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

— Отображение f является **взаимно однозначным** тогда и только тогда, когда $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \ \Rightarrow\ \Big(\alpha = \beta \ \Leftrightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

— Функция называется **четной** тогда и только тогда, когда $x \in D(f) \ \Rightarrow\ f(-x) = f(x)$.

— Функция называется **нечетной** тогда и только тогда, когда $x \in D(f) \ \Rightarrow\ f(-x) = -f(x)$.

IV.1.4. Высказывания о функциях

— Отображение f является **однозначным** тогда и только тогда, когда $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \ \Rightarrow\ \Big(\alpha = \beta \ \Rightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

— Отображение f является **взаимно однозначным** тогда и только тогда, когда $\{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \ \Rightarrow\ \Big(\alpha = \beta \ \Leftrightarrow\ f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

— Функция называется **четной** тогда и только тогда, когда $x \in D(f) \ \Rightarrow\ f(-x) = f(x)$.

— Функция называется **нечетной** тогда и только тогда, когда $x \in D(f) \ \Rightarrow\ f(-x) = -f(x)$.

— Функция f называется **убывающей** тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f), \\ \alpha < \beta \end{cases} \Rightarrow\ f(\alpha) > f(\beta).$$

IV.1.4. Высказывания о функциях

— Отображение f является **однозначным** тогда и только тогда, когда $\quad \{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \Rightarrow \Big(\alpha = \beta \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

— Отображение f является **взаимно однозначным** тогда и только тогда, когда $\quad \{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f) \Rightarrow \Big(\alpha = \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta)\Big)$.

— Функция называется **четной** тогда и только тогда, когда $x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = f(x)$.

— Функция называется **нечетной** тогда и только тогда, когда $x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.

— Функция f называется **убывающей** тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f), \\ \alpha < \beta \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta).$$

— Функция f называется **возрастающей** тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \{\alpha,\ \beta\} \subseteq D(f), \\ \alpha < \beta \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$.

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеет **координаты** (x, y, z) (язык чисел) тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{x}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ (задание вектора с помощью координат).

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеет **координаты** (x, y, z) тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{x}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

— Точка M имеет **координаты** (x, y, z) (язык чисел) тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ (равенство координат точки и координат ее *радиуса-вектора*).

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеет **координаты** (x, y, z) тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{x}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

— Точка M имеет **координаты** (x, y, z) тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

— Равенство векторов[1] $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно *системе уравнений* для координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

[1]Обычно хотя бы один из этих векторов задан выражением.

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеет **координаты** (x, y, z) тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{x}} = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

— Точка M имеет **координаты** (x, y, z) тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

— Равенство векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно *системе уравнений* для координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

— Если известны координаты точек $A\,(x_A; y_A; z_A)$, $\quad B\,(x_B; y_B; z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB} =$$

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Вектор $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ имеет **координаты** (x, y, z) тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{\mathbf{x}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

— Точка M имеет **координаты** (x, y, z) тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

— Равенство векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно *системе уравнений* для координат:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

— Если известны координаты точек $A\,(x_A; y_A; z_A)$, $\quad B\,(x_B; y_B; z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y_A - y_B)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (z_A - z_B)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Утверждение об **ортогональности** (т.е. **перпендикулярности**) ненулевых векторов равносильно утверждению о равенстве 0 скалярного произведения этих векторов, что, благодаря формуле для вычисления скалярного произведения с помощью координат, позволяет «перевести» утверждение «вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$» на язык равенств следующим образом:

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Утверждение об **ортогональности** (т.е. **перпендикулярности**) ненулевых векторов равносильно утверждению о равенстве 0 скалярного произведения этих векторов, что, благодаря формуле для вычисления скалярного произведения с помощью координат, позволяет «перевести» утверждение «вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$» на язык равенств следующим образом:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\; \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = 0 \;\Leftrightarrow$$

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Утверждение об **ортогональности** (т.е. **перпендикулярности**) ненулевых векторов равносильно утверждению о равенстве 0 скалярного произведения этих векторов, что, благодаря формуле для вычисления скалярного произведения с помощью координат, позволяет «перевести» утверждение «вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$» на язык равенств следующим образом:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Утверждение об **ортогональности** (т.е. **перпендикулярности**) ненулевых векторов равносильно утверждению о равенстве 0 скалярного произведения этих векторов, что, благодаря формуле для вычисления скалярного произведения с помощью координат, позволяет «перевести» утверждение «вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$» на язык равенств следующим образом:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\; \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

— Утверждение о **коллинеарности** (т.е. «параллельности») ненулевых векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Утверждение об **ортогональности** (т.е. **перпендикулярности**) ненулевых векторов равносильно утверждению о равенстве 0 скалярного произведения этих векторов, что, благодаря формуле для вычисления скалярного произведения с помощью координат, позволяет «перевести» утверждение «вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$» на язык равенств следующим образом:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

— Утверждение о **коллинеарности** (т.е. «параллельности») ненулевых векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно существованию такого числа λ, что $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}}$, т.е.

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} || \overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{b}} \Leftrightarrow$$

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Утверждение об **ортогональности** (т.е. **перпендикулярности**) ненулевых векторов равносильно утверждению о равенстве 0 скалярного произведения этих векторов, что, благодаря формуле для вычисления скалярного произведения с помощью координат, позволяет «перевести» утверждение «вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\mathbf{b}}$» на язык равенств следующим образом:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \left(\overrightarrow{\mathbf{a}};\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

— Утверждение о **коллинеарности** (т.е. «параллельности») ненулевых векторов $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно существованию такого числа λ, что $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{b}}$, т.е.

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \,||\, \overrightarrow{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{\mathbf{a}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_x = \lambda b_x, \\ a_y = \lambda b_y, \\ a_z = \lambda b_z. \end{cases}$$

IV.1.5. Геометрические отношения, векторные и координатные равенства

— Утверждение о том, что $AB = \alpha$ равносильно утверждению, что длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна α, что равносильно равенству

$$(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2 = \alpha^2.$$

IV.1.6. Геометрические фигуры и координатные равенства

— **Уравнение линии** L — это *утверждение* $f(x,y)=0$ *о координатах* $(x;y)$ *произвольной точки линии* L.

IV.1.6. Геометрические фигуры и координатные равенства

— **Уравнение линии** L — это *утверждение* $f(x, y) = 0$ *о координатах* $(x; y)$ *произвольной точки линии* L.

Точнее, следующие утверждения равносильны:

IV.1.6. Геометрические фигуры и координатные равенства

— **Уравнение линии** L — это *утверждение* $f(x,y)=0$ *о координатах* $(x;y)$ *произвольной точки линии* L.

Точнее, следующие утверждения равносильны:

а) *точка* $M(x;y)$ *принадлежит линии* L; б) $f(x;y)=0$.

IV.1.6. Геометрические фигуры и координатные равенства

— **Уравнение линии** L — это *утверждение* $f(x,y)=0$ *о координатах* $(x;y)$ *произвольной точки линии* L.

Точнее, следующие утверждения равносильны:

а) *точка* $M(x;y)$ *принадлежит линии* L; б) $f(x;y)=0$.

— Неравенству $f(x,y)<0$ и т.п. соответствует геометрическая фигура, состоящая из всех тех точек, для координат $(x;y)$ которых это неравенство выполняется.

IV.1.6. Геометрические фигуры и координатные равенства

— **Уравнение линии** L — это *утверждение* $f(x,y)=0$ *о координатах* $(x;y)$ *произвольной точки линии* L.

Точнее, следующие утверждения равносильны:

а) *точка* $M(x;y)$ *принадлежит линии* L; б) $f(x;y)=0$.

— Неравенству $f(x,y)<0$ и т.п. соответствует геометрическая фигура, состоящая из всех тех точек, для координат $(x;y)$ которых это неравенство выполняется.

— Прямые $y=ax+b$ и $y=cx+d$ **параллельны** тогда и только тогда, когда $a=c$.

IV.1.6. Геометрические фигуры и координатные равенства

— **Уравнение линии** L — это *утверждение* $f(x, y) = 0$ *о координатах* $(x; y)$ *произвольной точки линии* L.

Точнее, следующие утверждения равносильны:

а) *точка* $M(x; y)$ *принадлежит линии* L; б) $f(x; y) = 0$.

— Неравенству $f(x, y) < 0$ и т.п. соответствует геометрическая фигура, состоящая из всех тех точек, для координат $(x; y)$ которых это неравенство выполняется.

— Прямые $y = ax + b$ и $y = cx + d$ **параллельны** тогда и только тогда, когда $a = c$.

— Прямые $y = ax + b$ и $y = cx + d$, где $a \neq 0$ и $c \neq 0$, **перпендикулярны** тогда и только тогда, когда $ac = -1$.

IV.2. Последовательность перевода

1) записать определения понятий, использованных в задании;

IV.2. Последовательность перевода

1) записать определения понятий, использованных в задании;

2) конкретизировать объекты, о которых идет речь в условии (взять конкретные числа, фигуры и др.);

IV.2. Последовательность перевода

1) записать определения понятий, использованных в задании;

2) конкретизировать объекты, о которых идет речь в условии (взять конкретные числа, фигуры и др.);

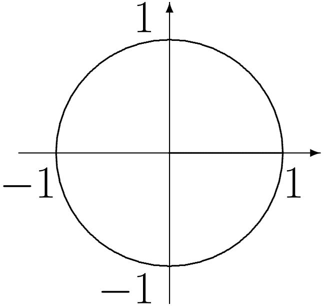
3) рассмотреть противоположную ситуацию.

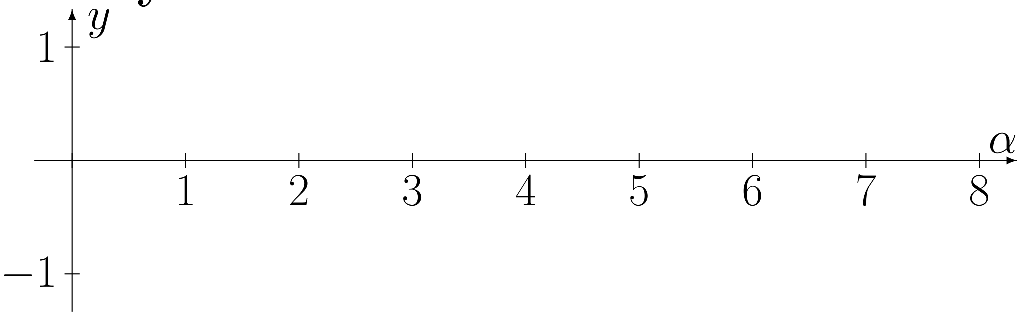
Вернемся к основному докладу?

V. Графики тригонометрических функций

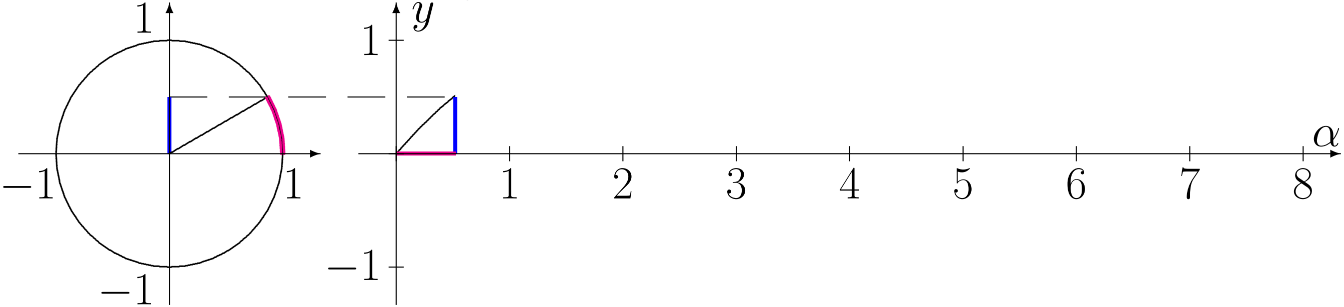
Рассмотрим графики синуса, косинуса и тангенса.

V.1. График синуса

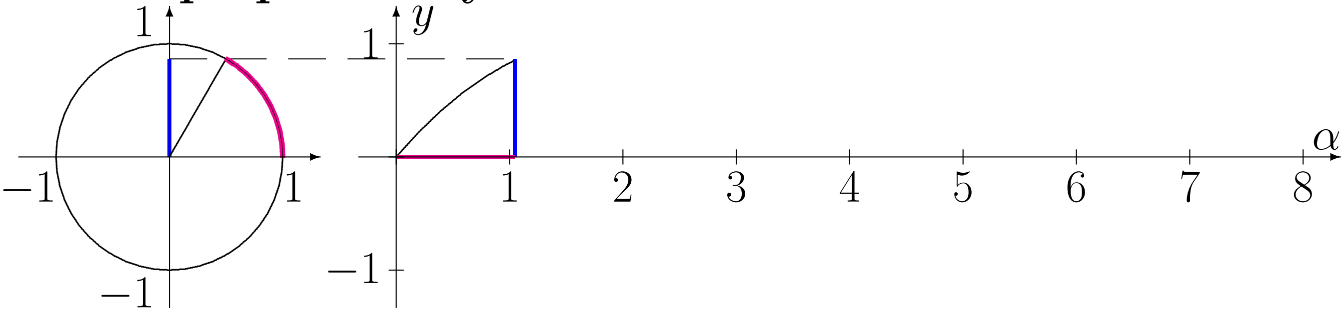




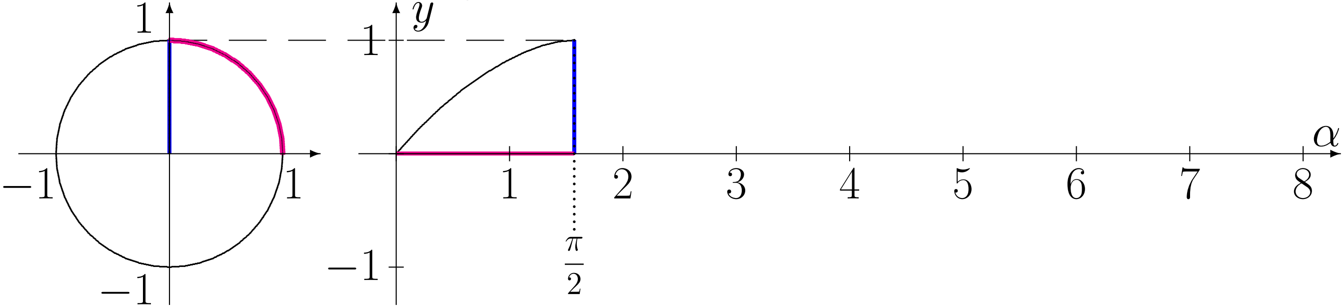
V.1. График синуса



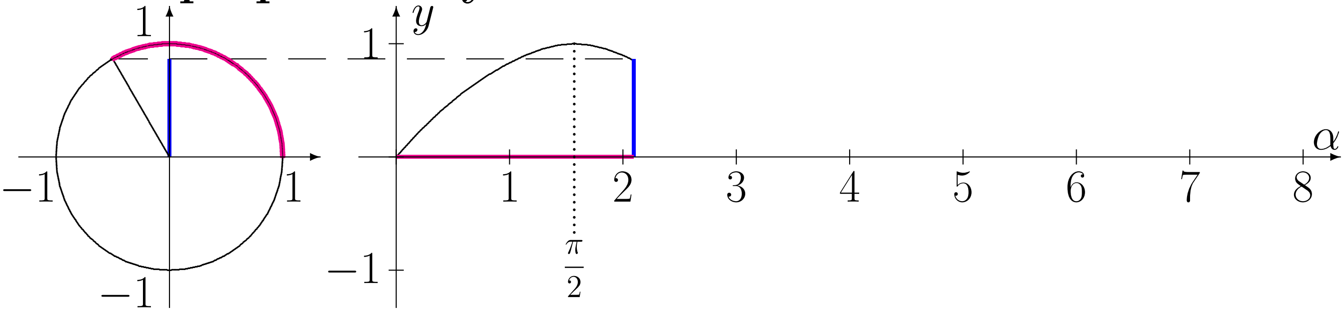
V.1. График синуса



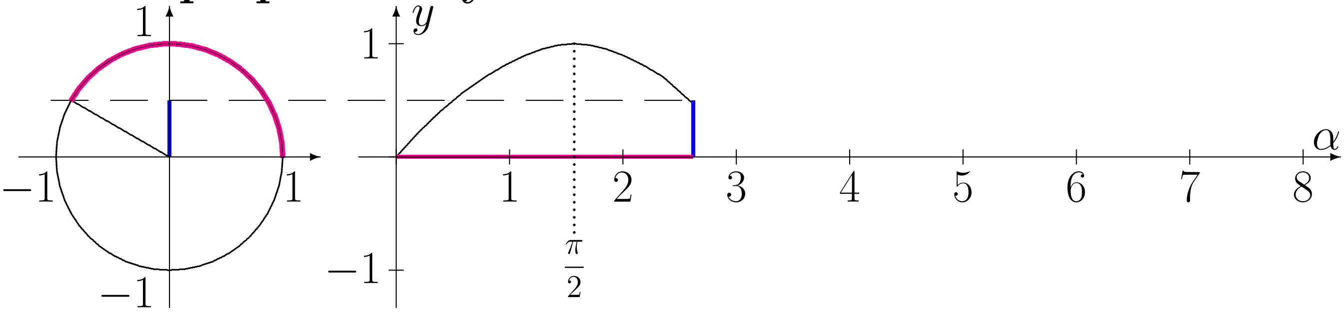
V.1. График синуса



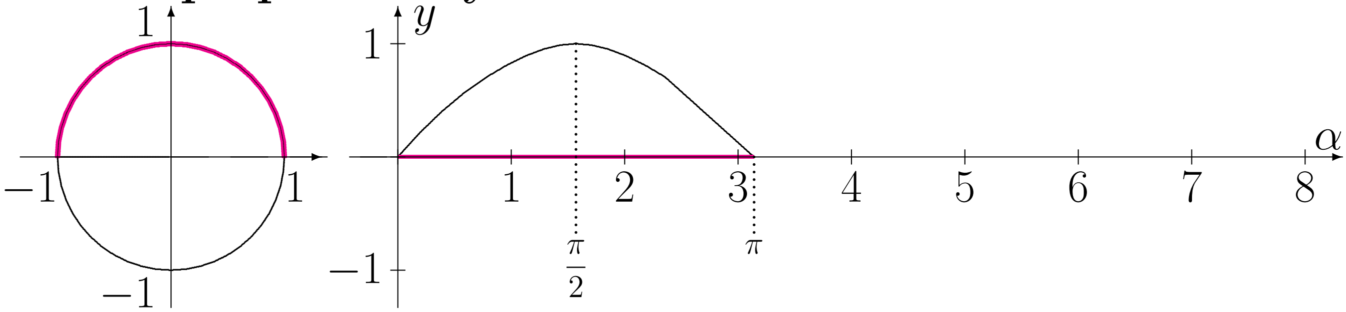
V.1. График синуса



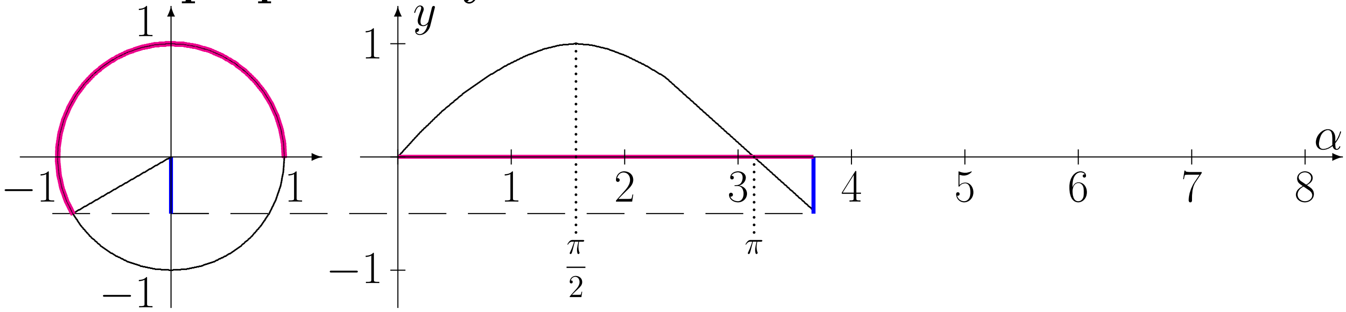
V.1. График синуса



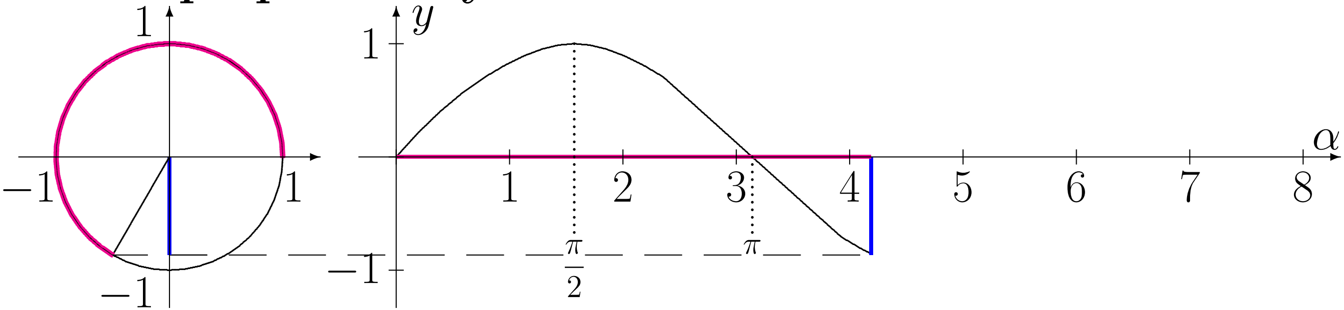
V.1. График синуса



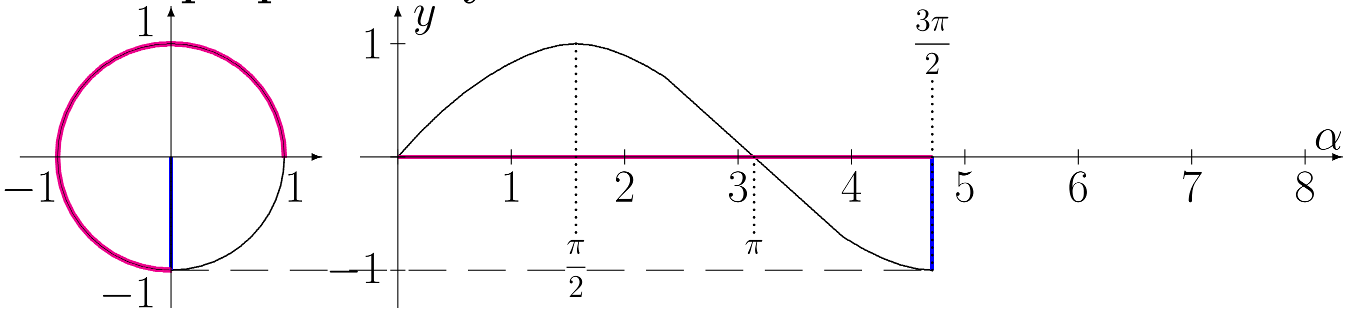
V.1. График синуса



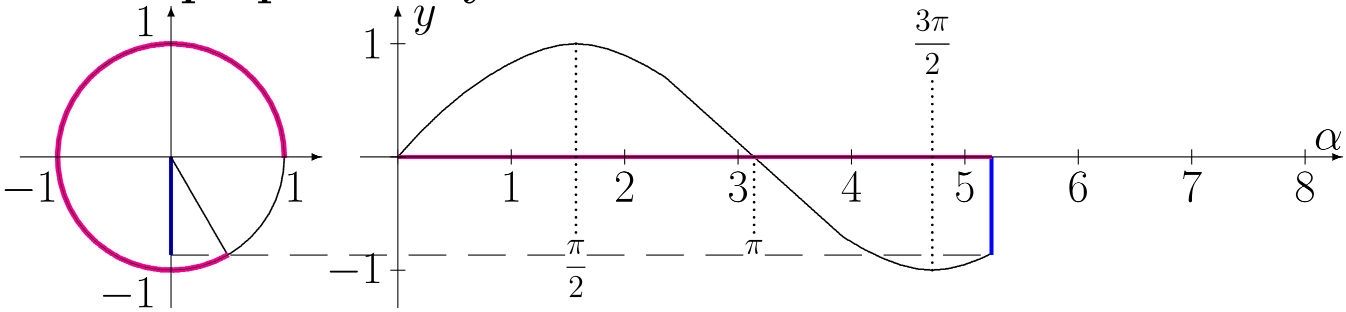
V.1. График синуса



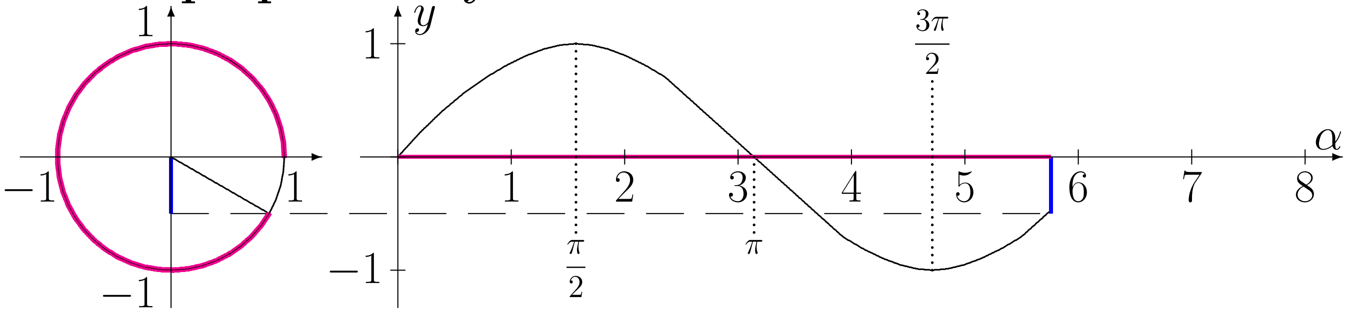
V.1. График синуса



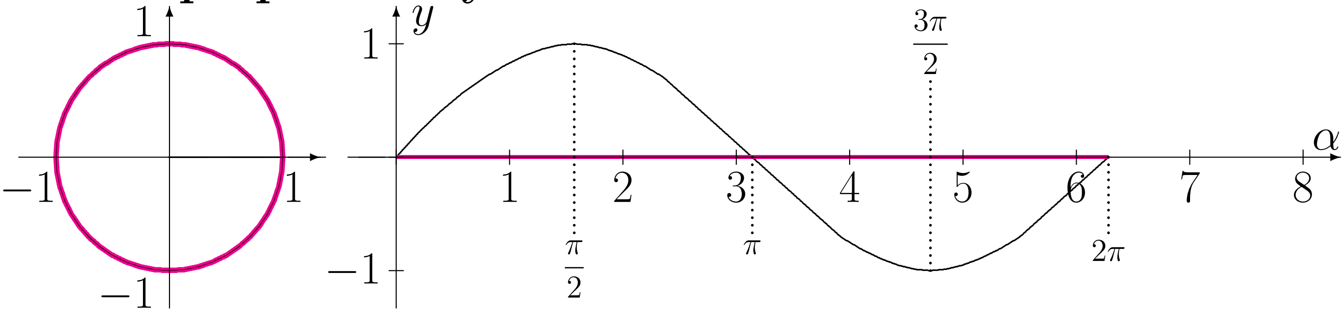
V.1. График синуса



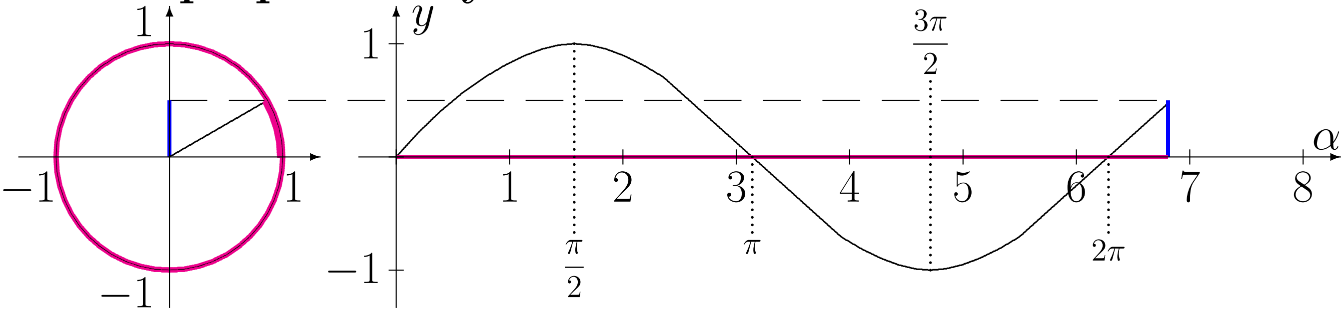
V.1. График синуса



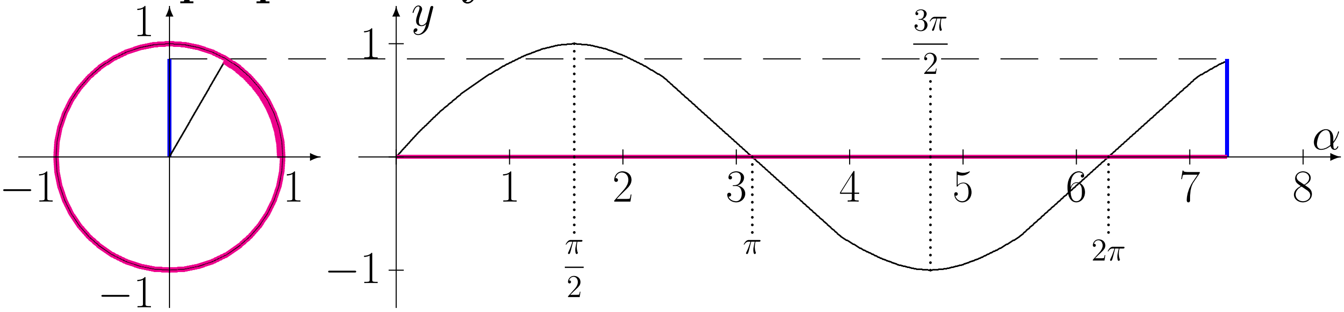
V.1. График синуса



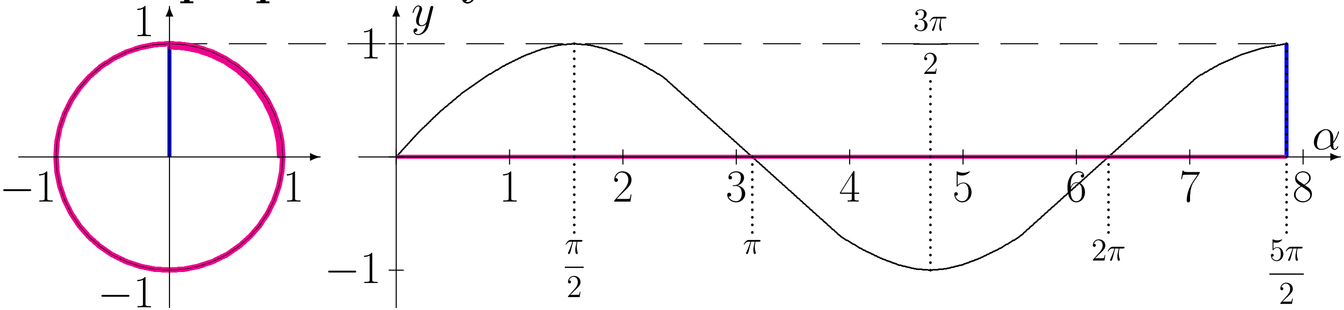
V.1. График синуса



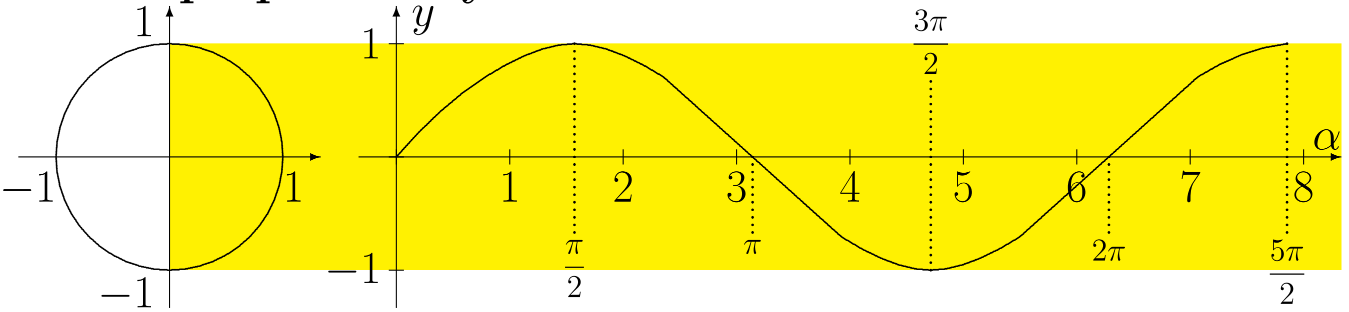
V.1. График синуса



V.1. График синуса



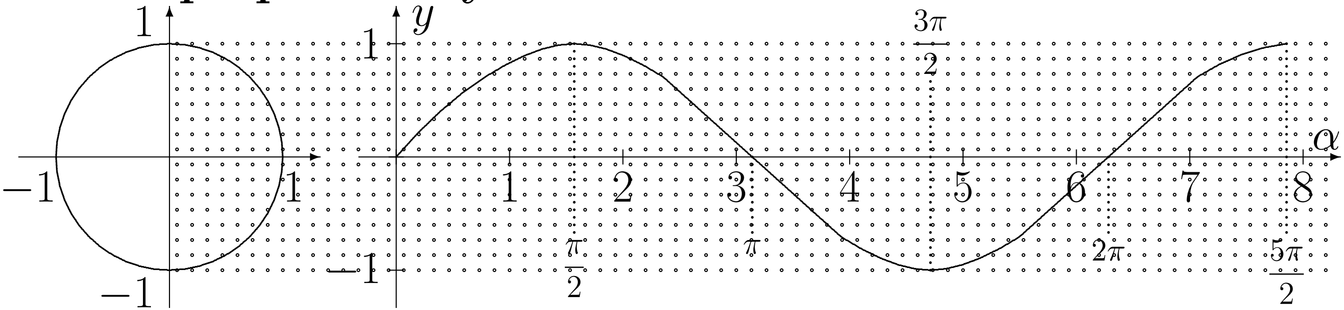
V.1. График синуса



Очевидна ограниченность значений синуса для любого значения α:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1, \quad \text{т.е.} \quad |\sin\alpha| \leq 1.$$

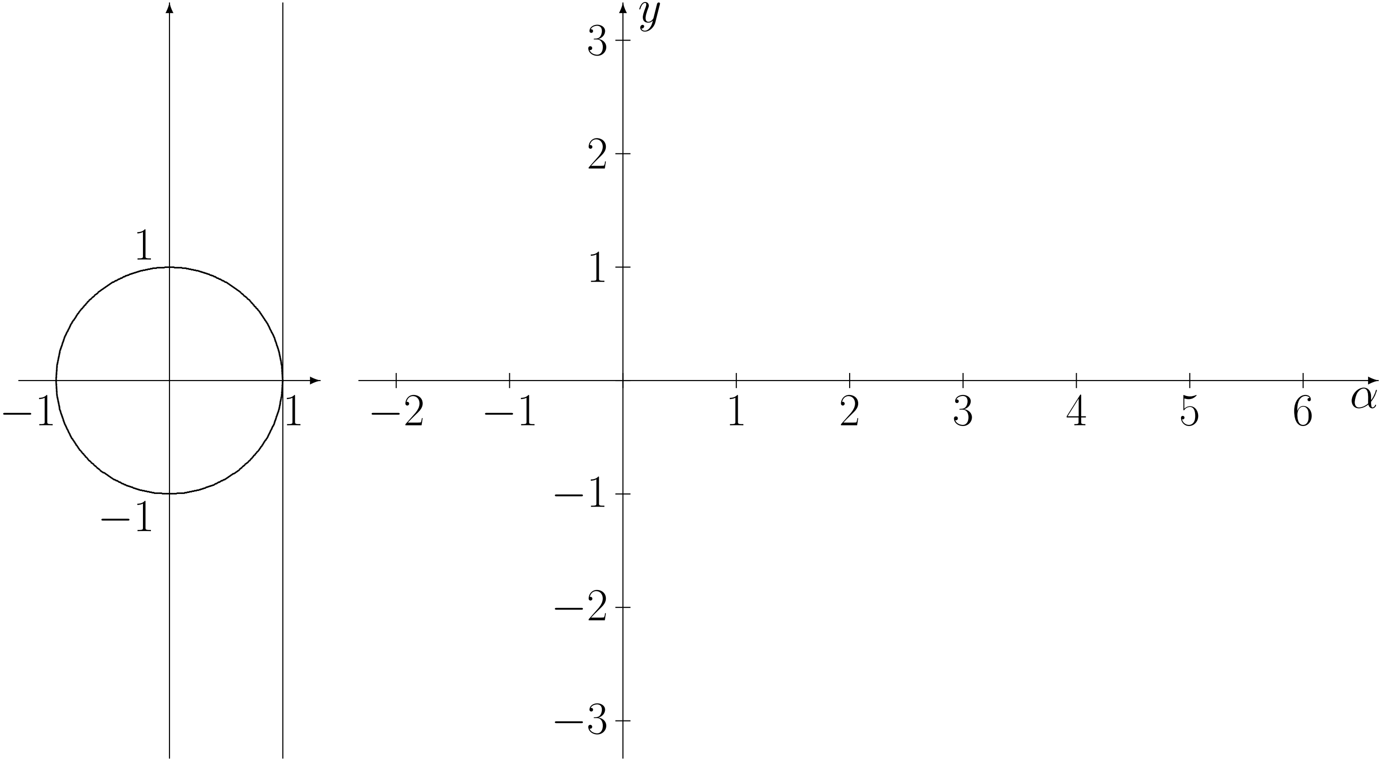
V.1. График синуса



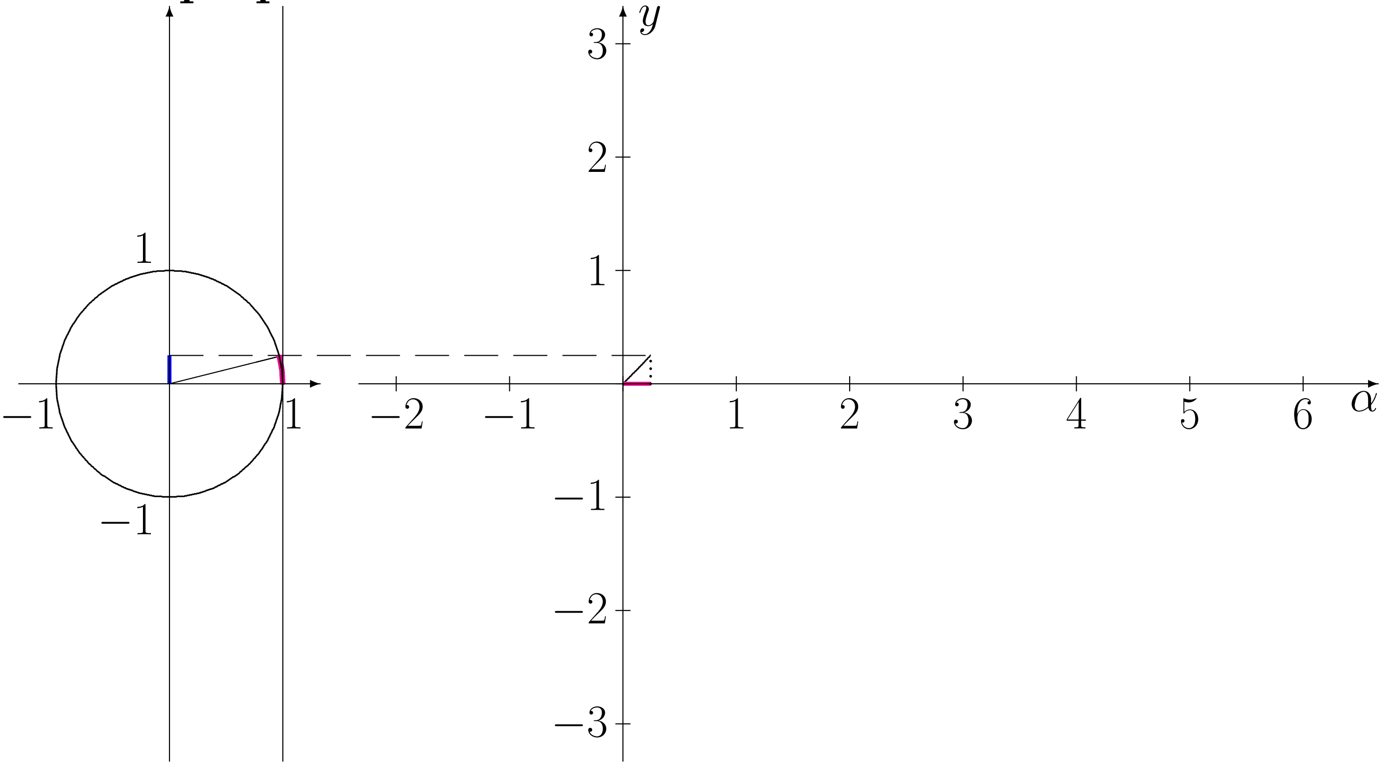
Очевидна ограниченность значений синуса для любого значения α:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1, \quad \text{т.е.} \quad |\sin\alpha| \leq 1.$$

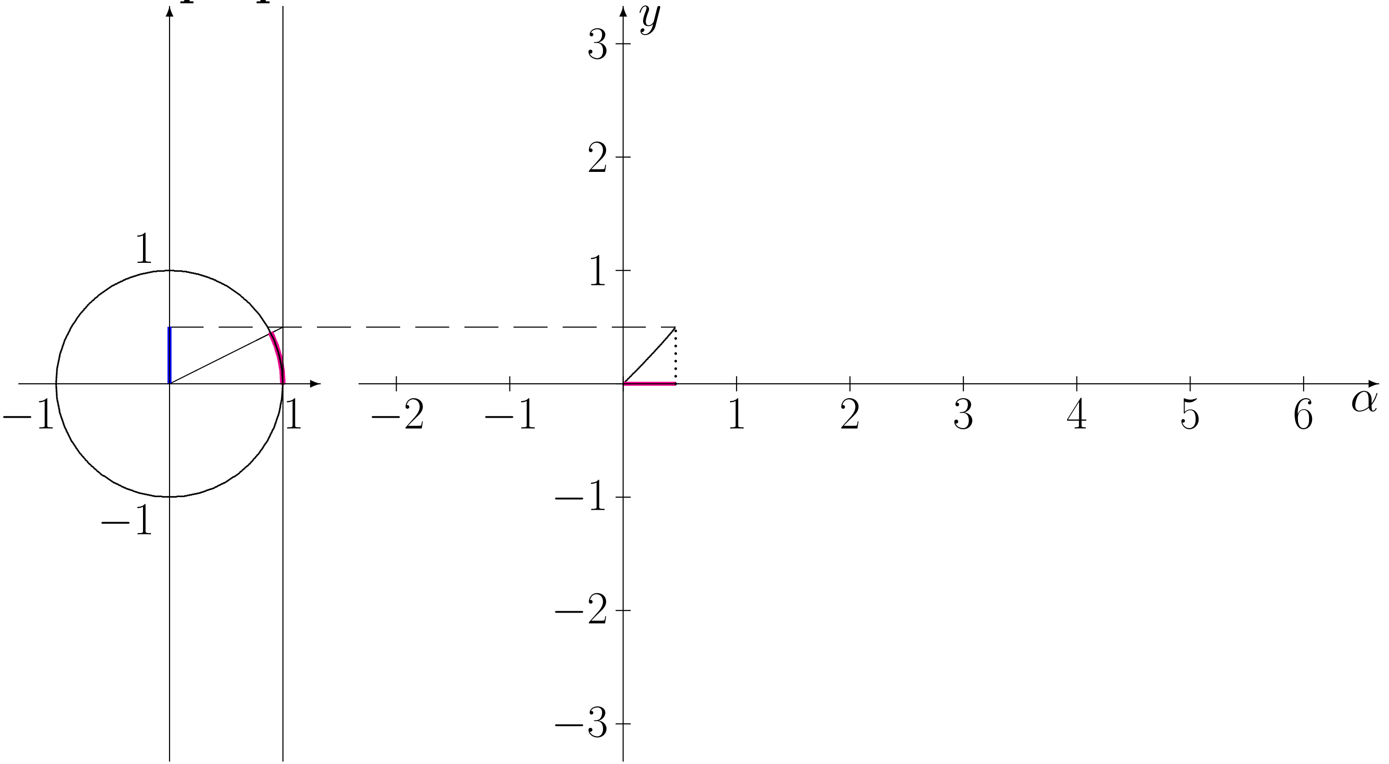
V.2. График тангенса



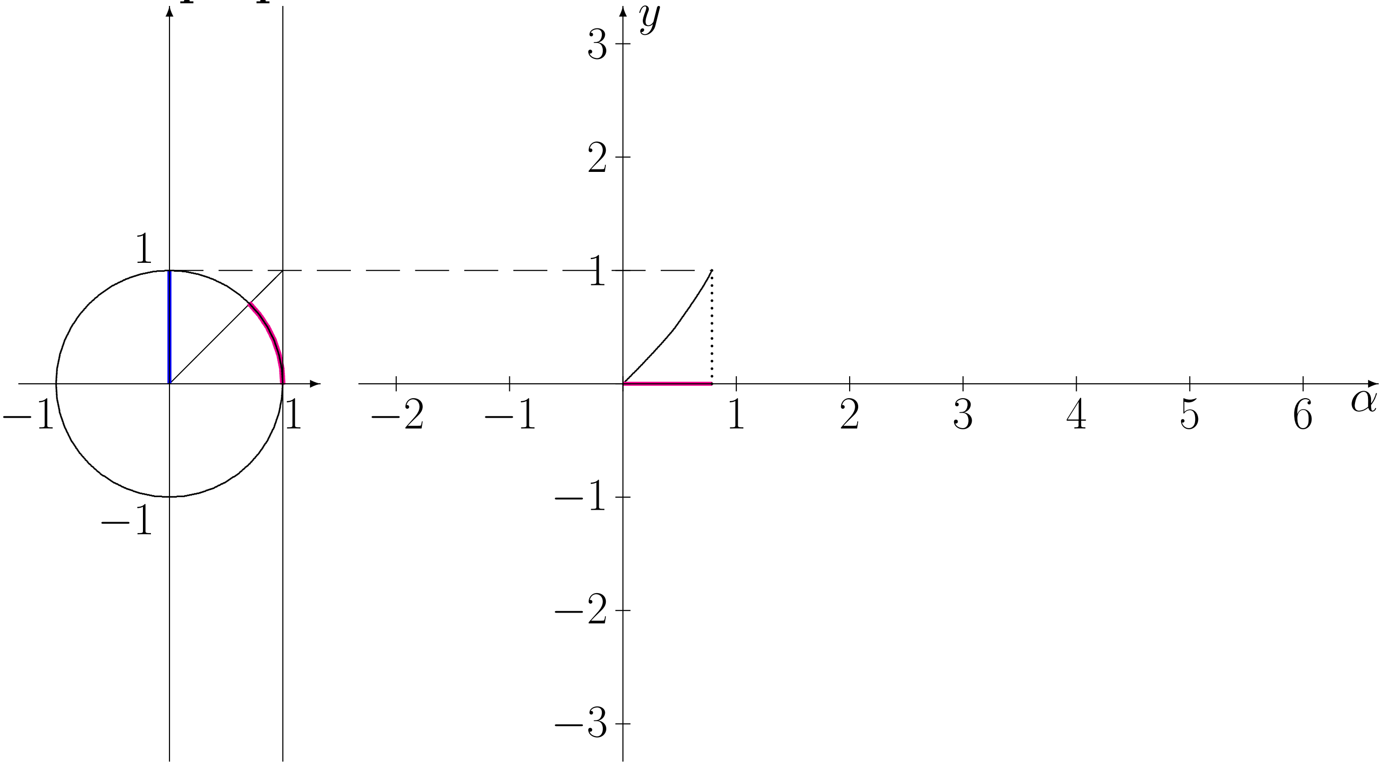
V.2. График тангенса



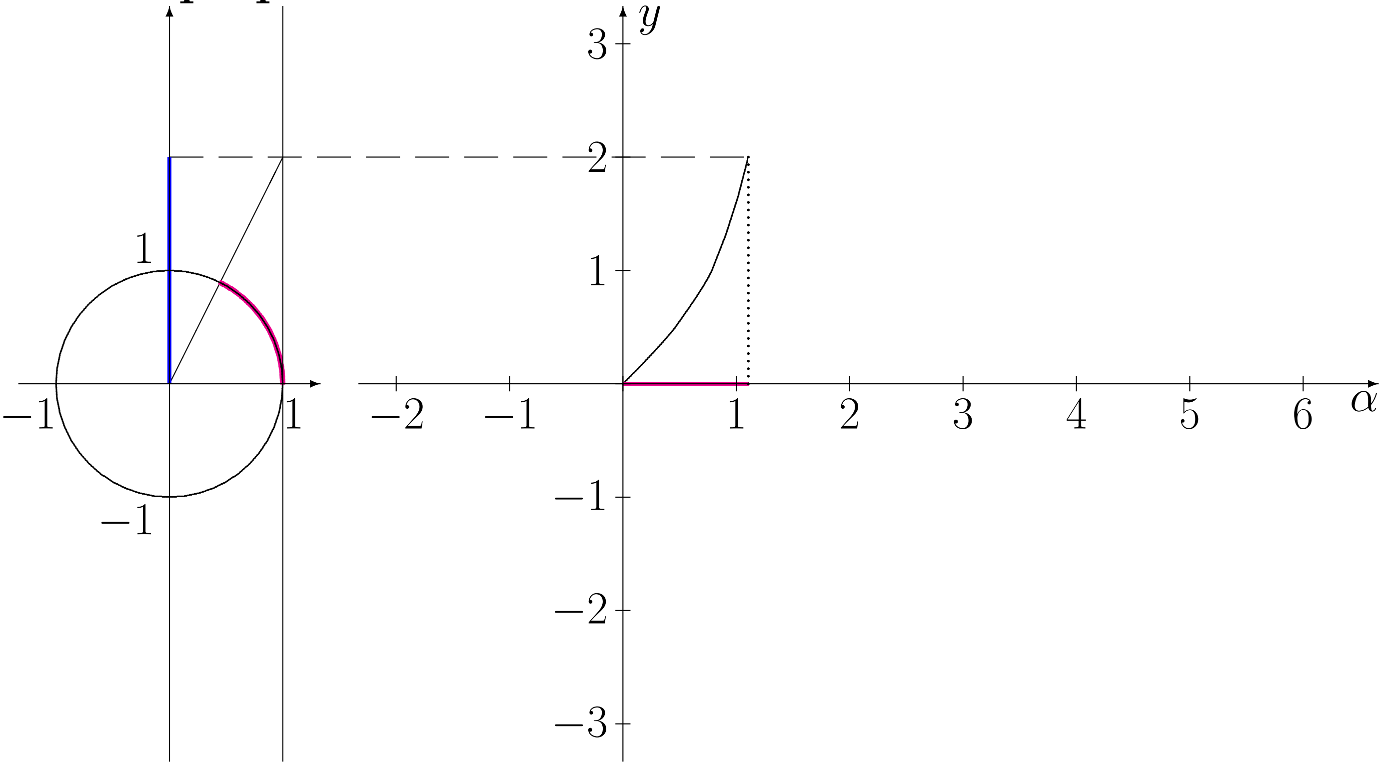
V.2. График тангенса



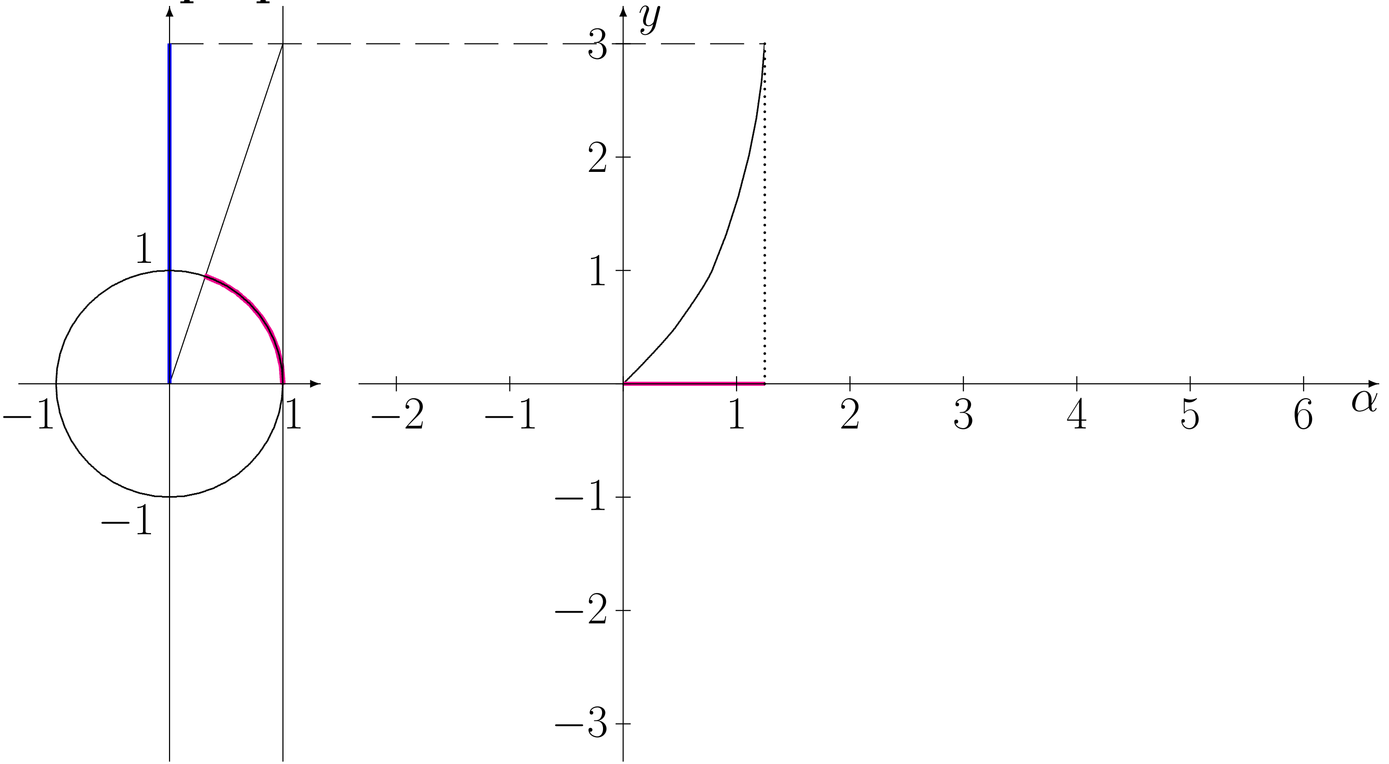
V.2. График тангенса



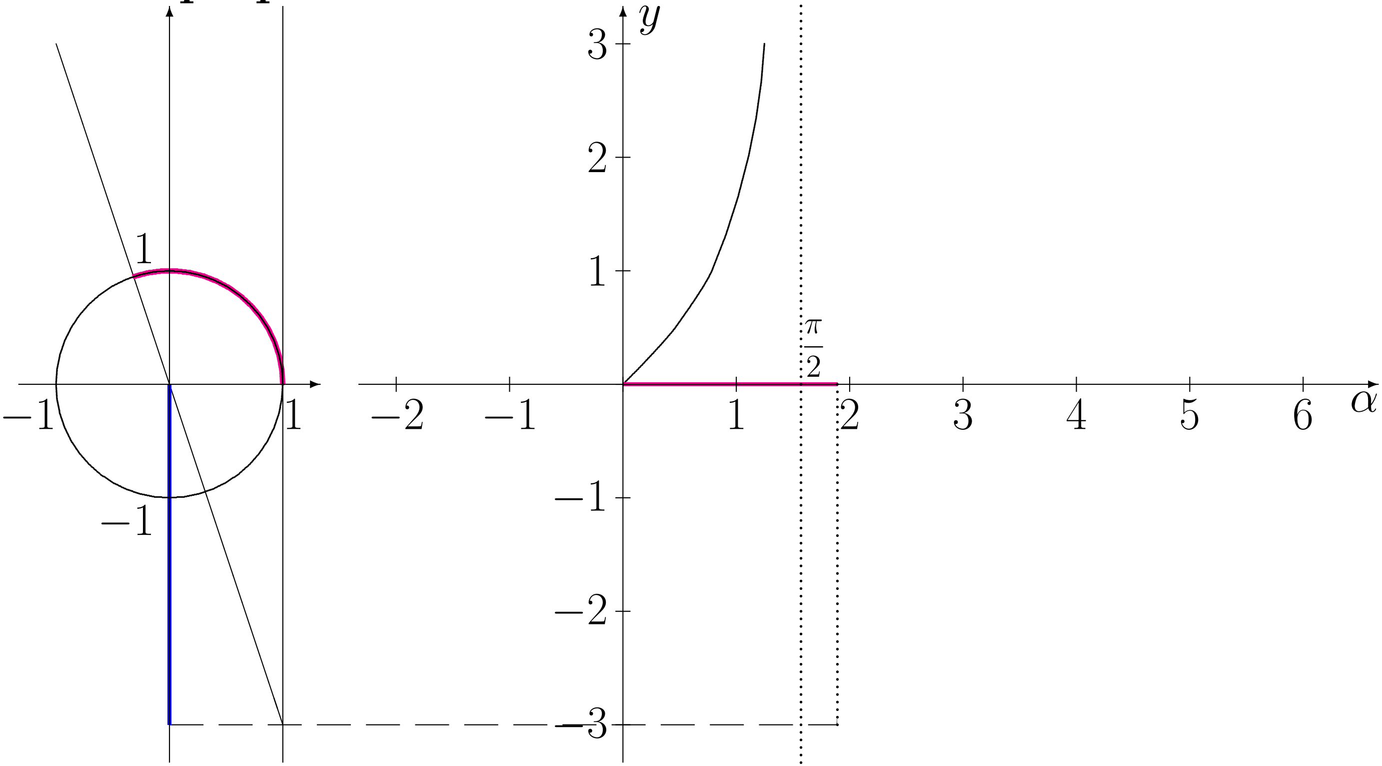
V.2. График тангенса



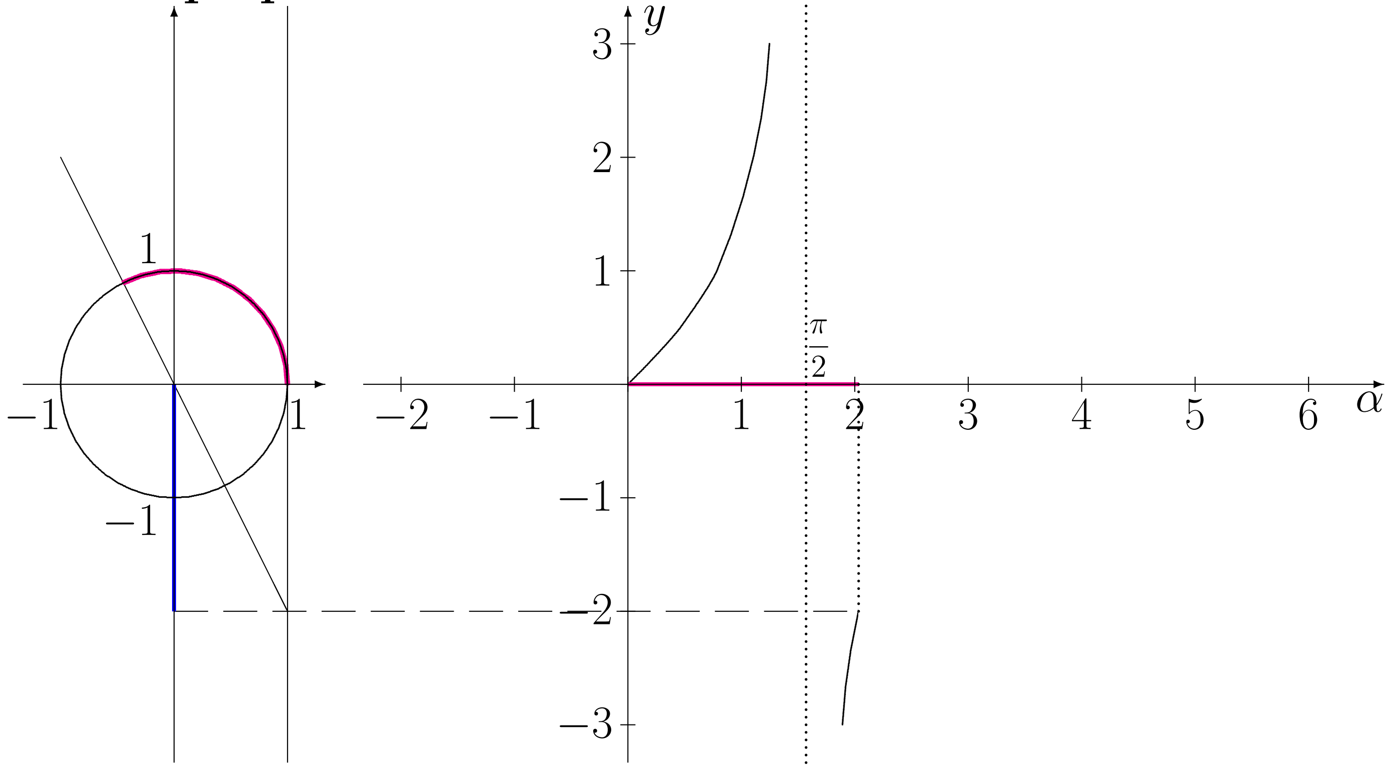
V.2. График тангенса



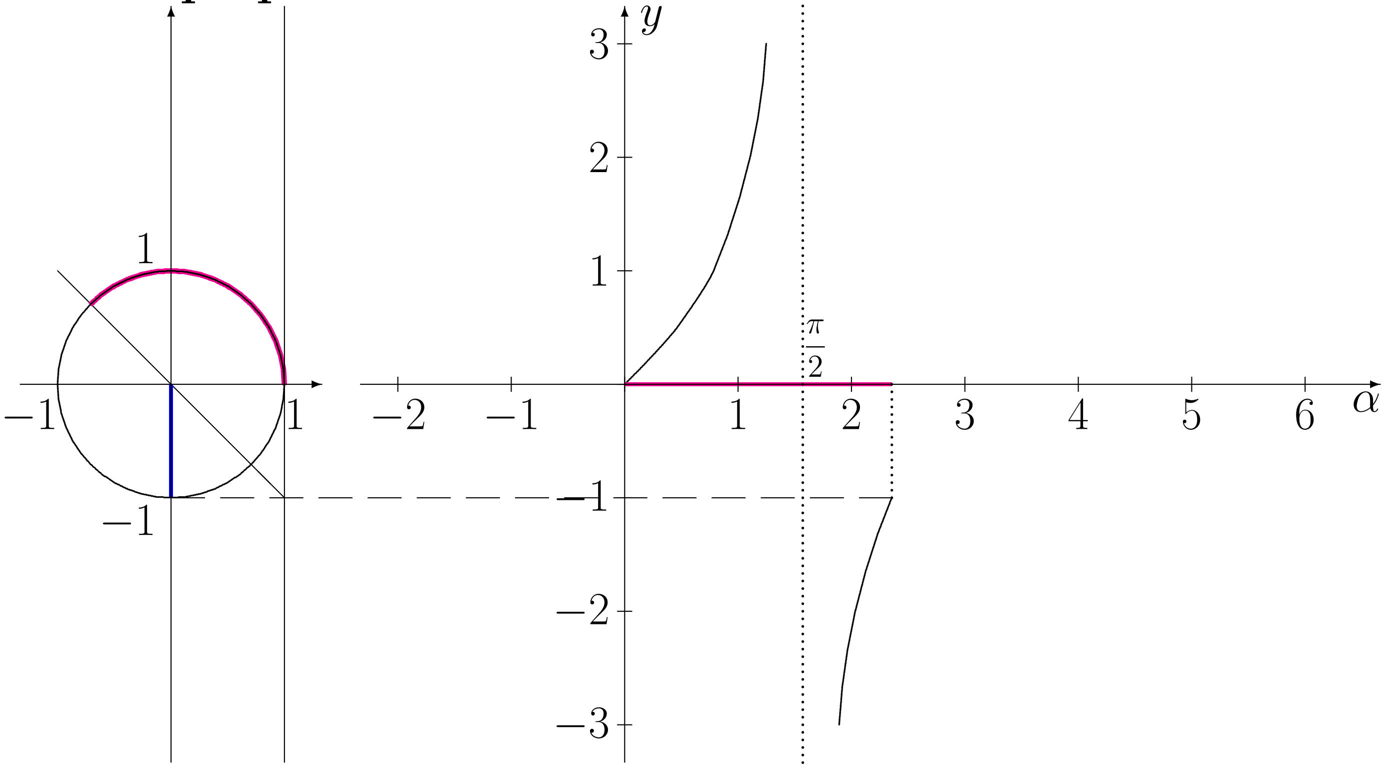
V.2. График тангенса



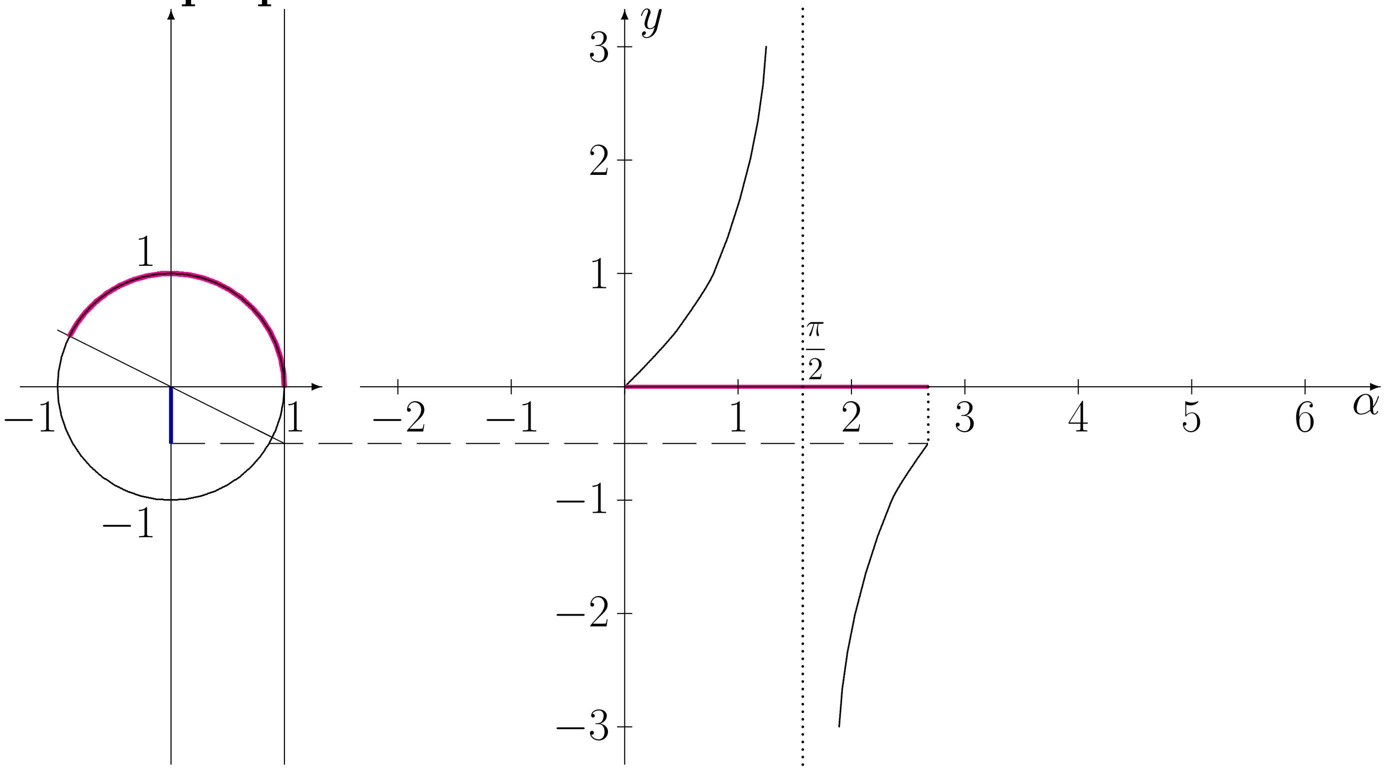
V.2. График тангенса



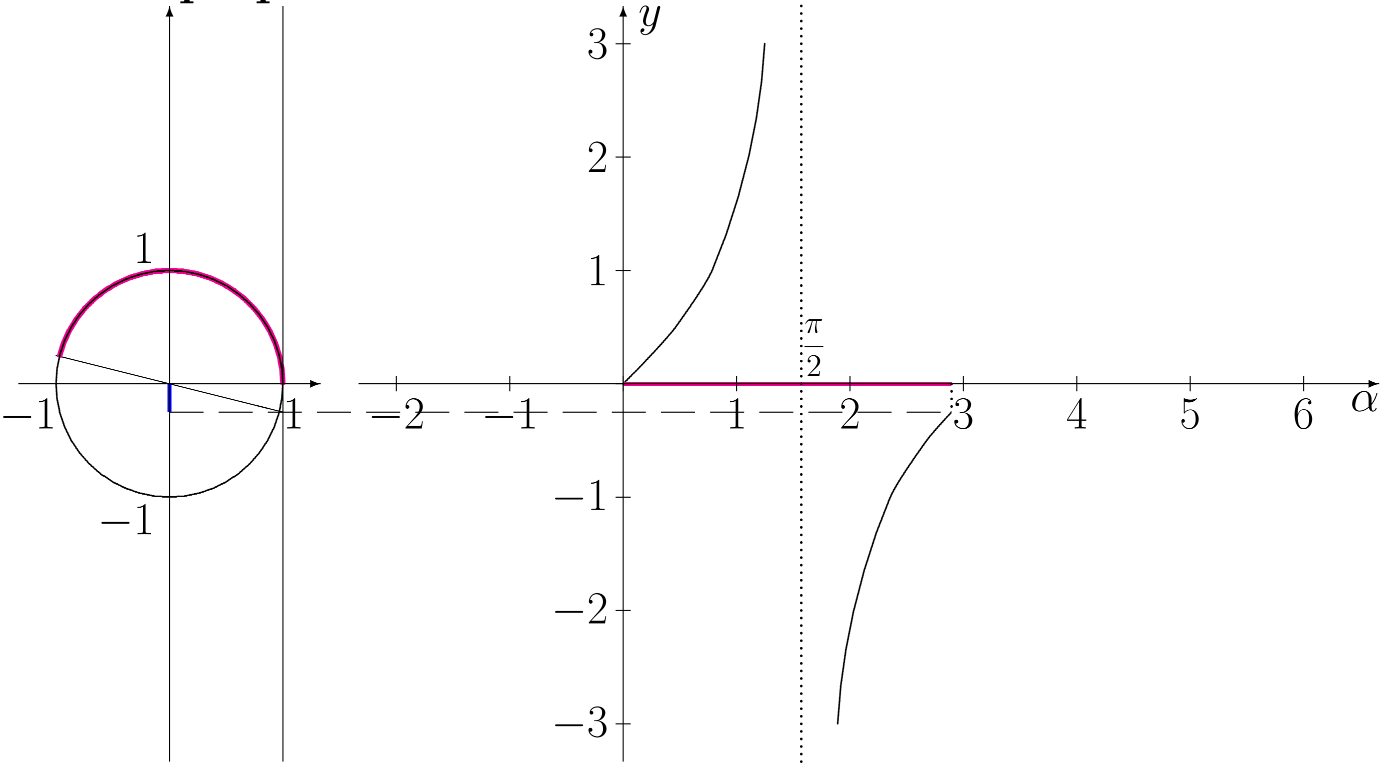
V.2. График тангенса



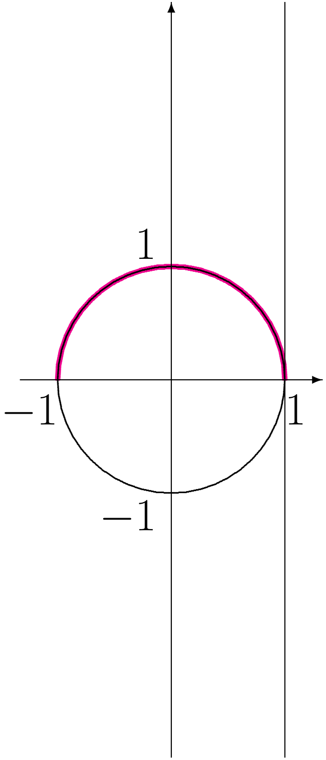
V.2. График тангенса

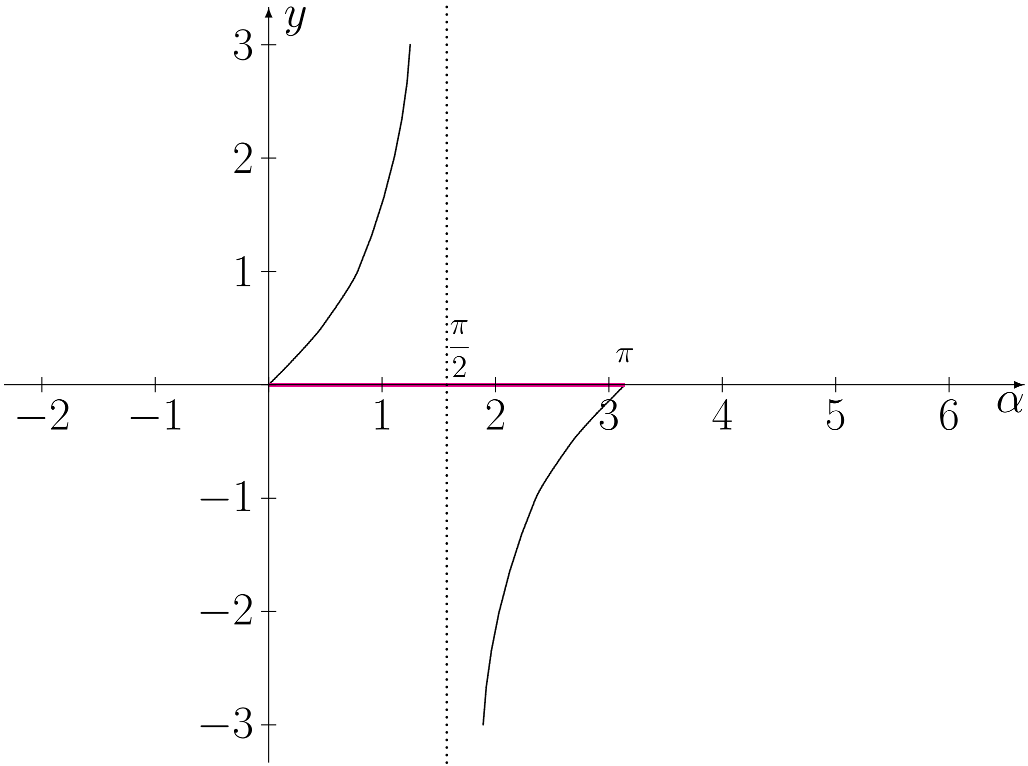


V.2. График тангенса

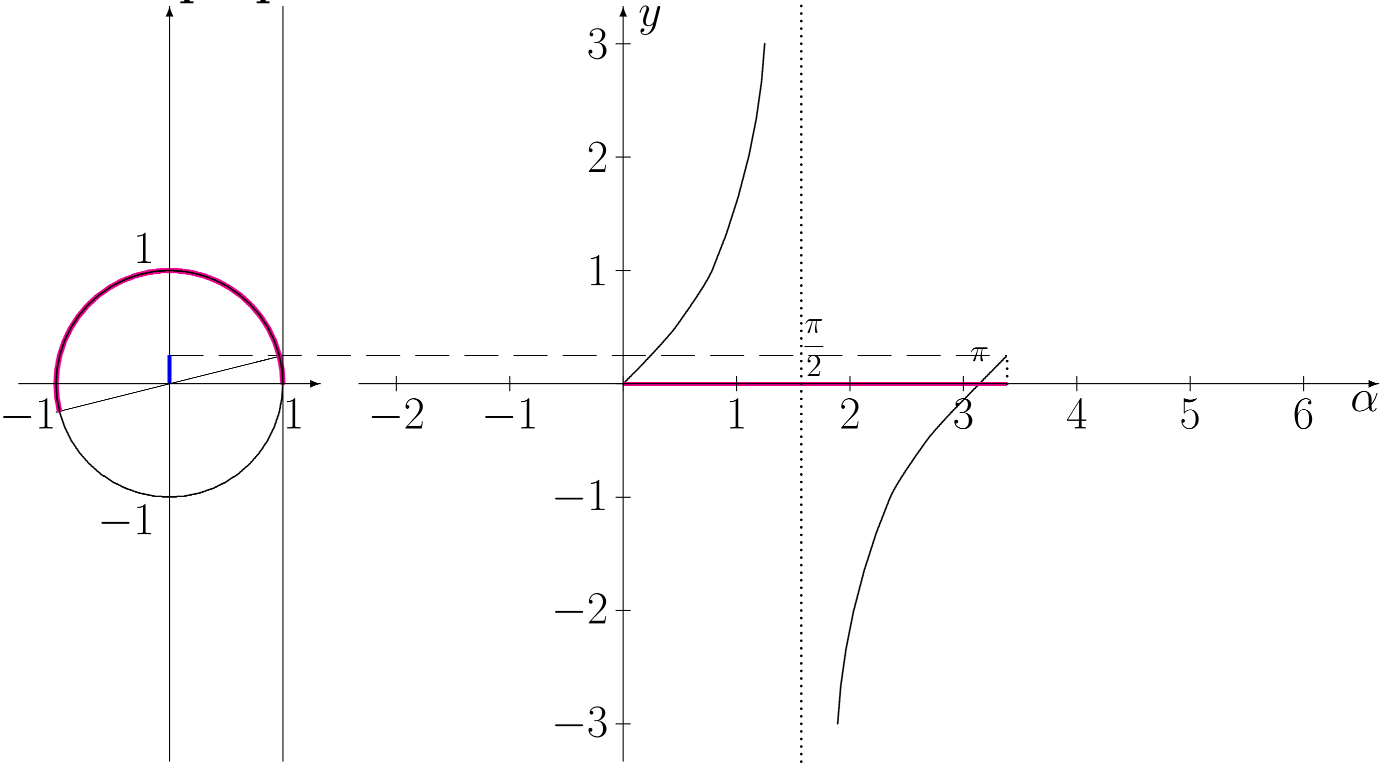


V.2. График тангенса

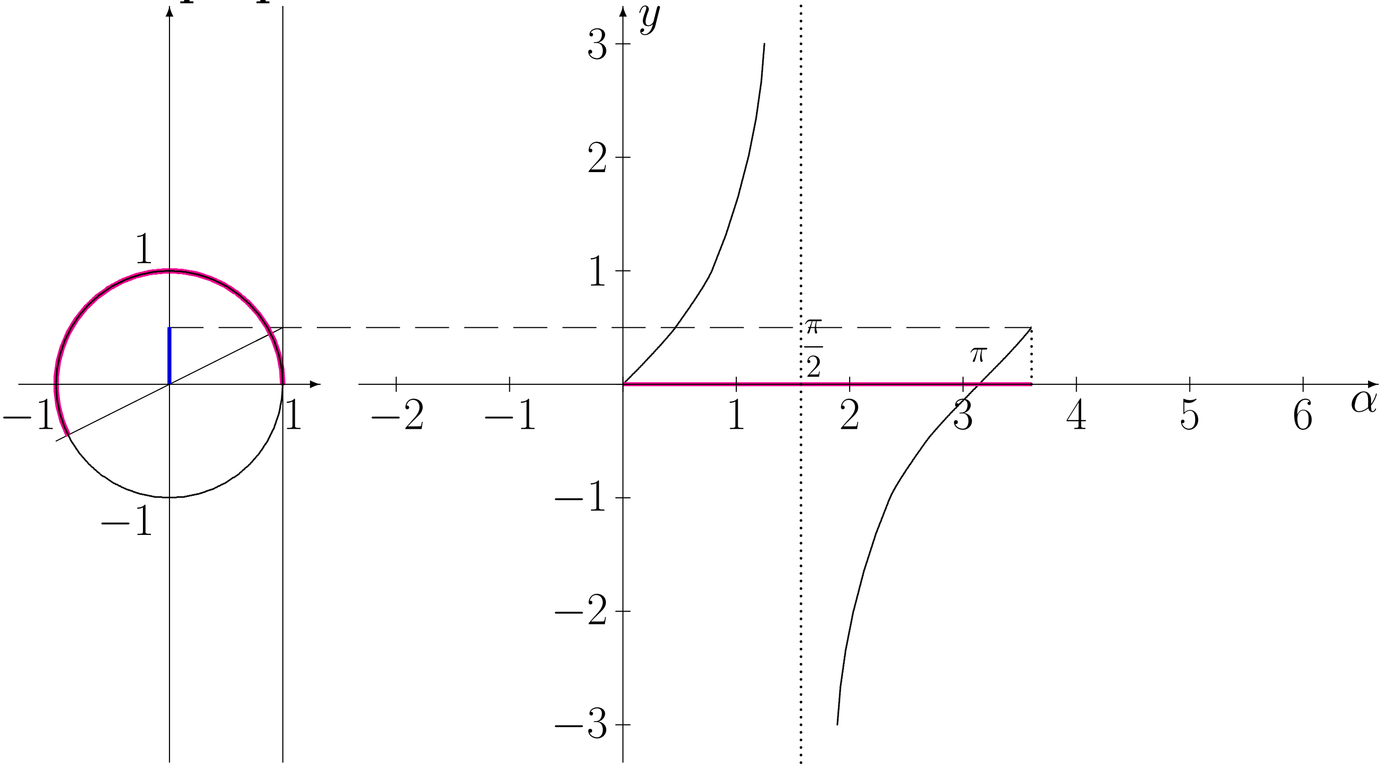




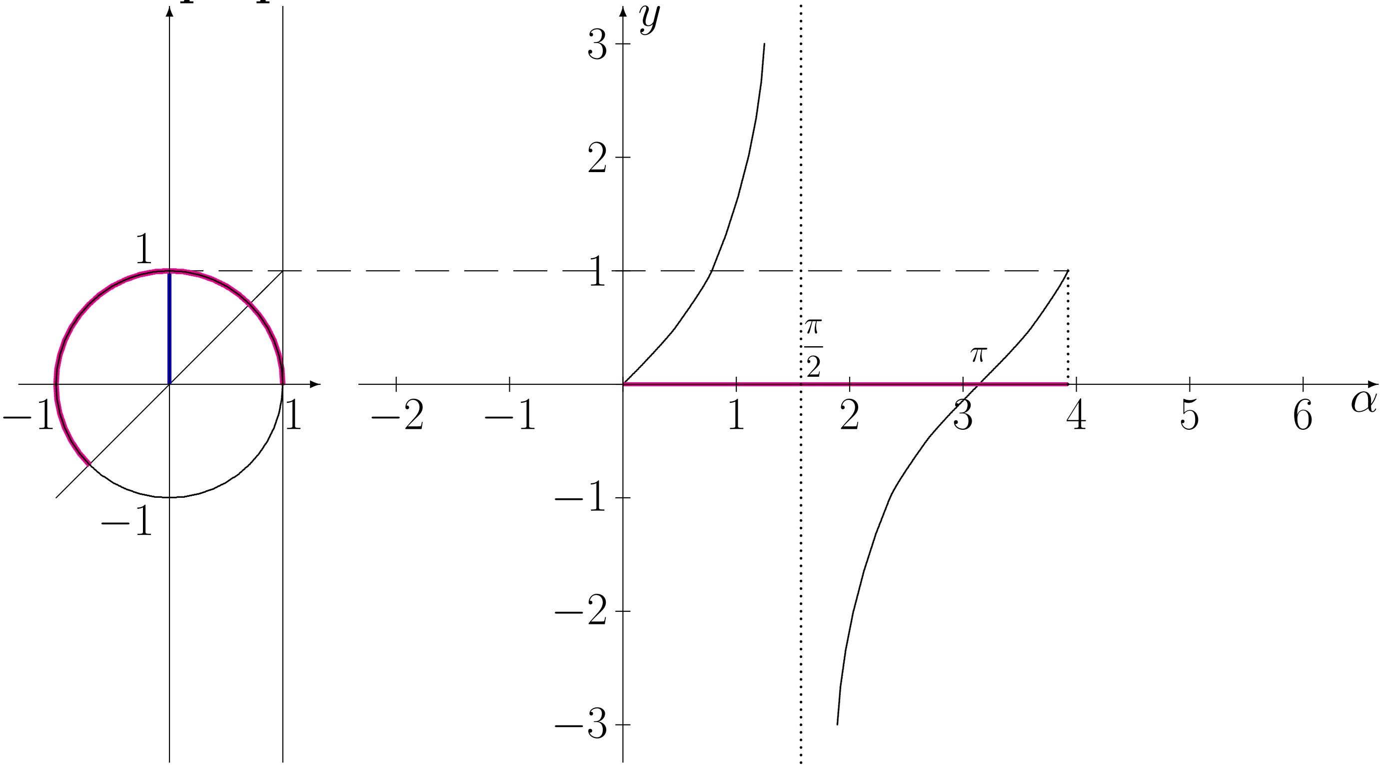
V.2. График тангенса



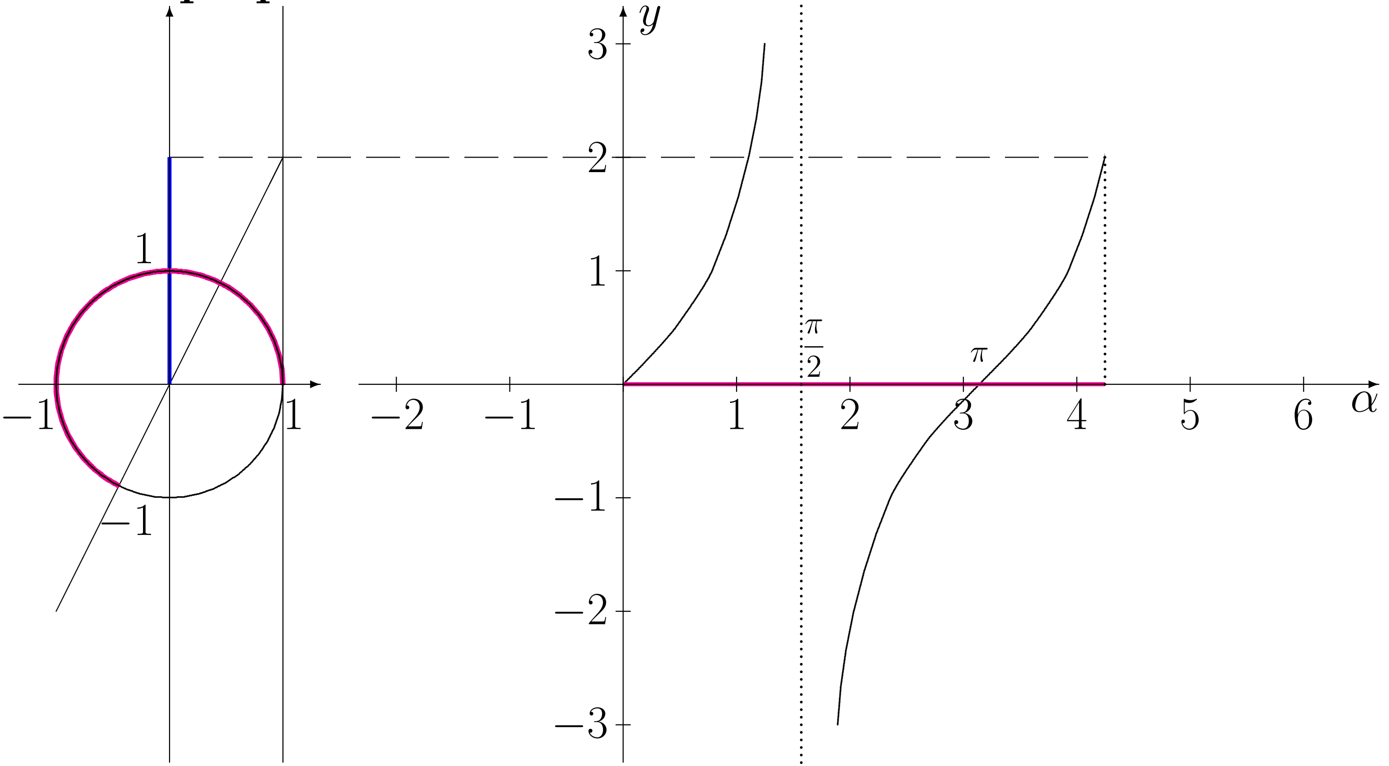
V.2. График тангенса



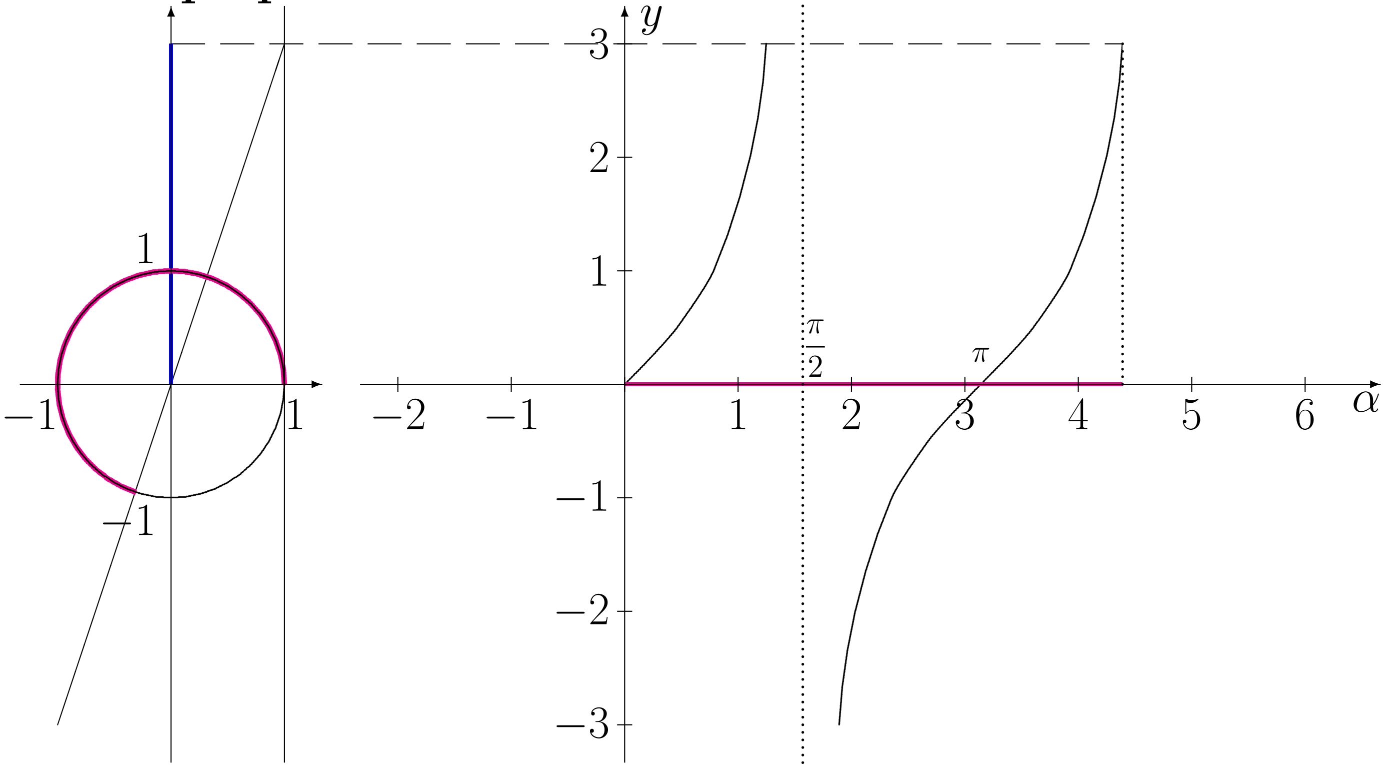
V.2. График тангенса



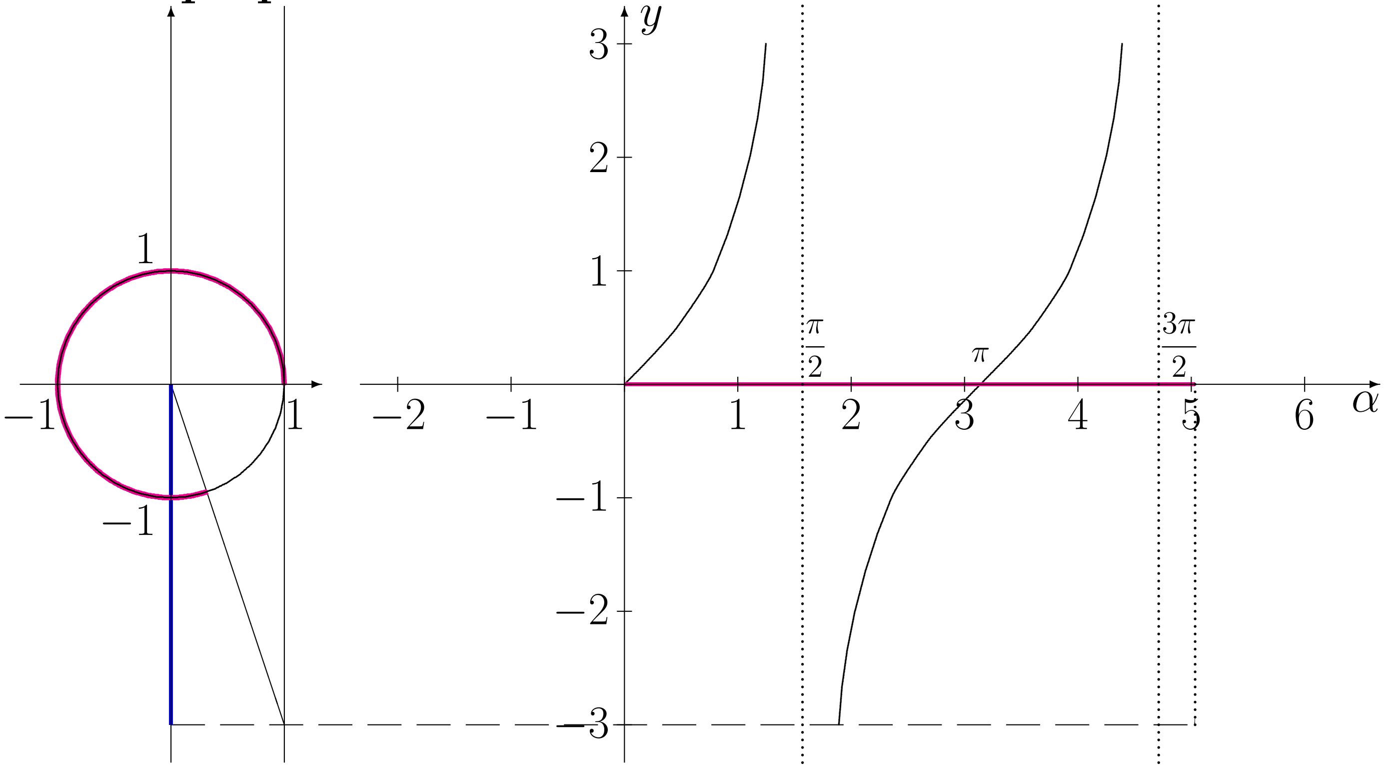
V.2. График тангенса



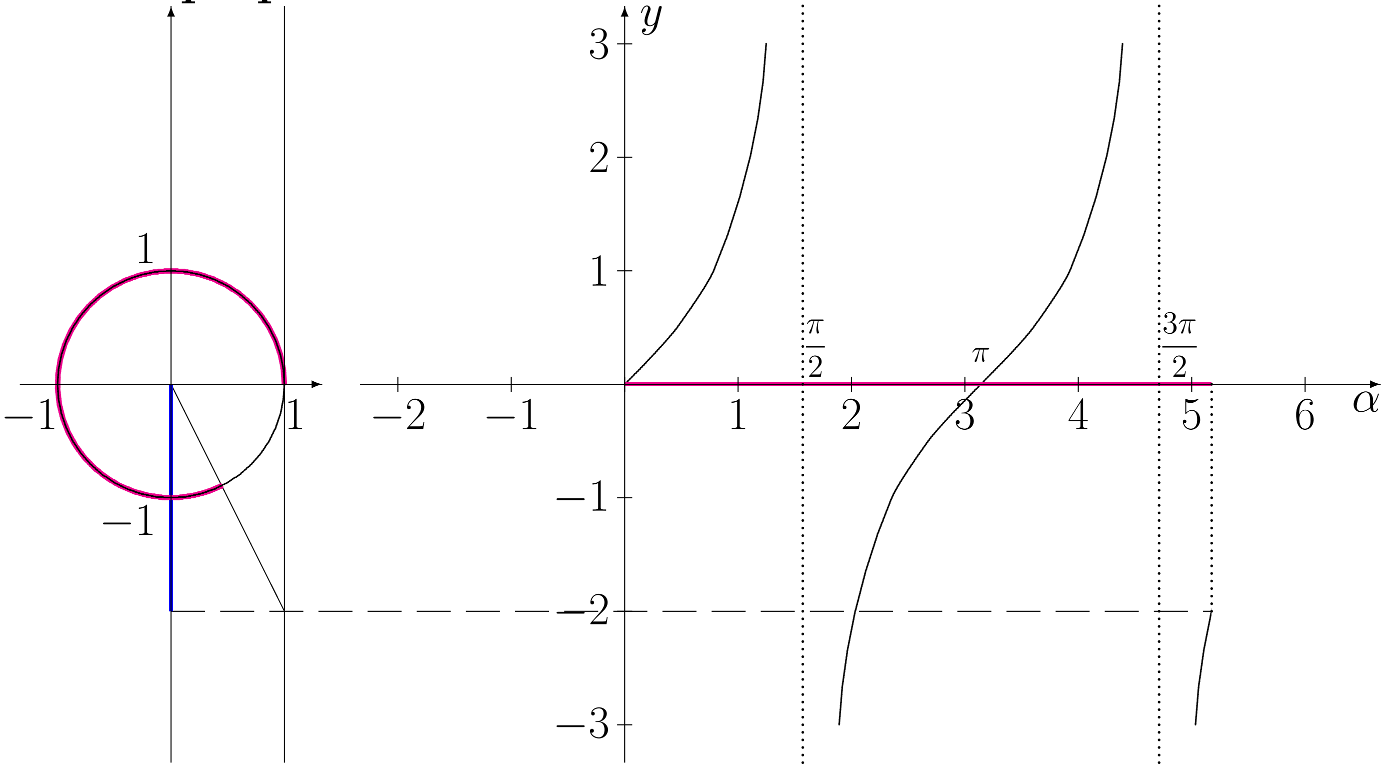
V.2. График тангенса



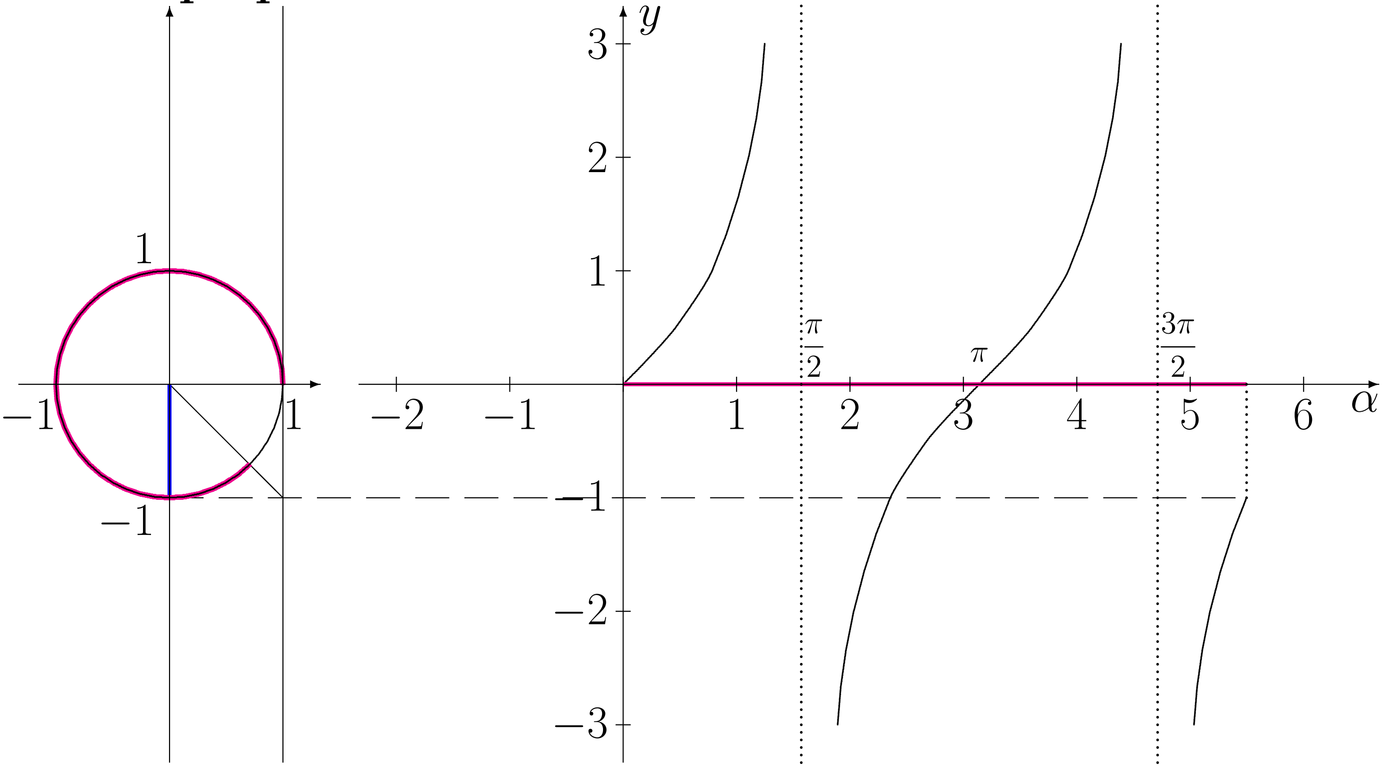
V.2. График тангенса



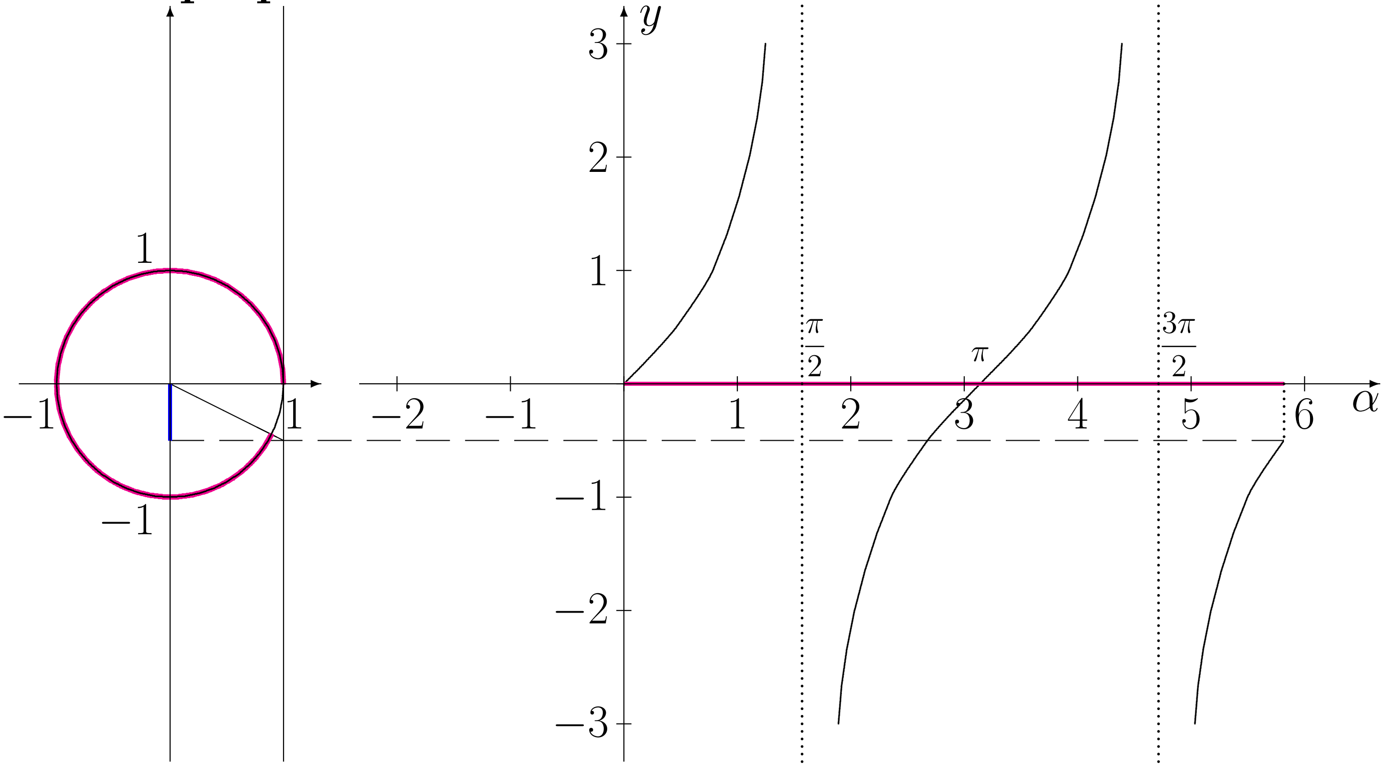
V.2. График тангенса



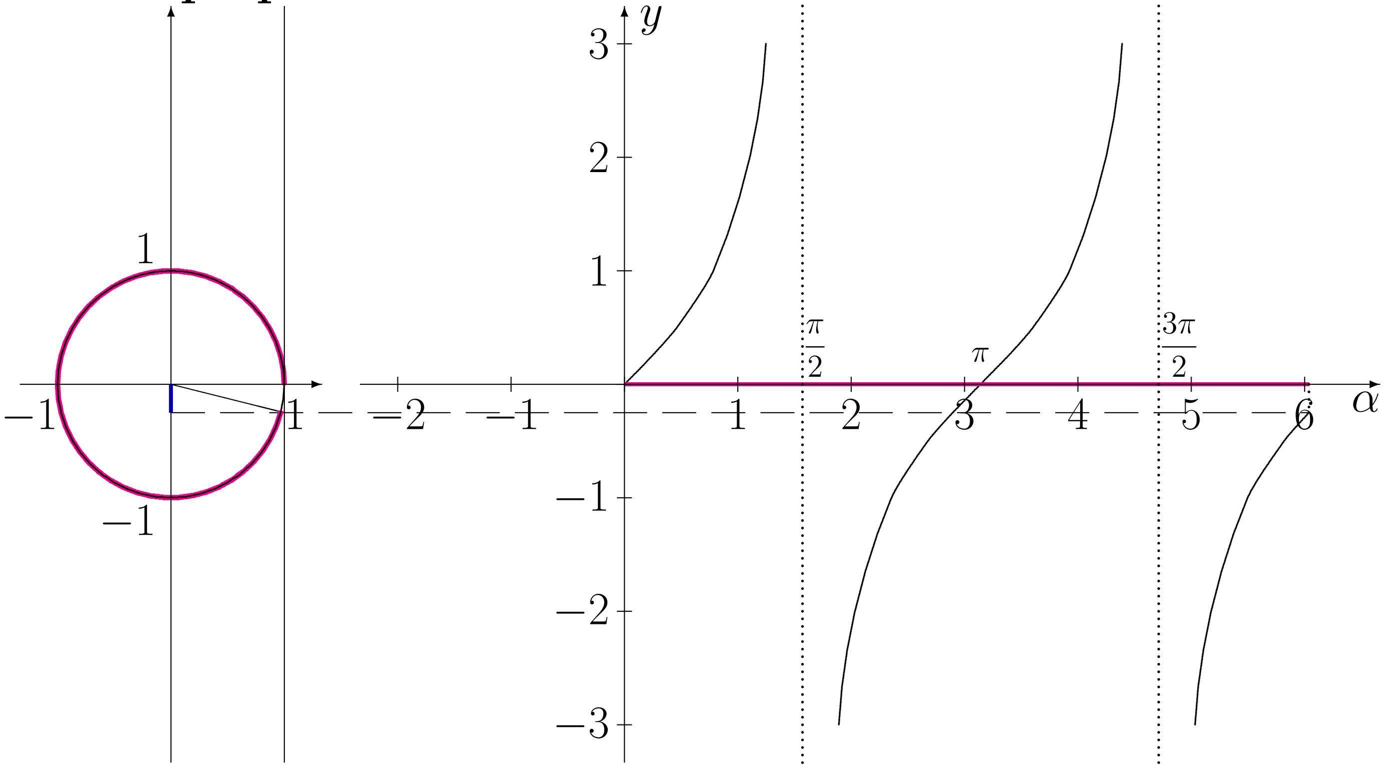
V.2. График тангенса



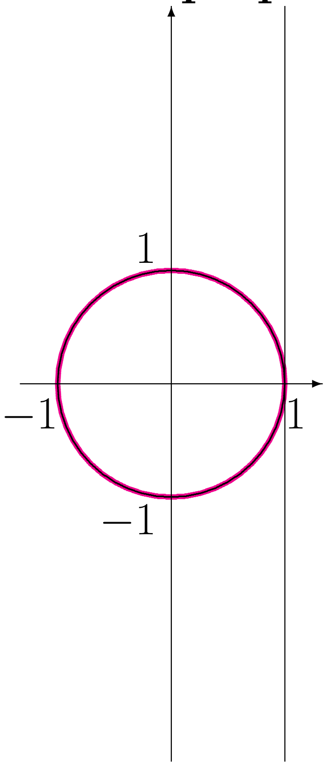
V.2. График тангенса

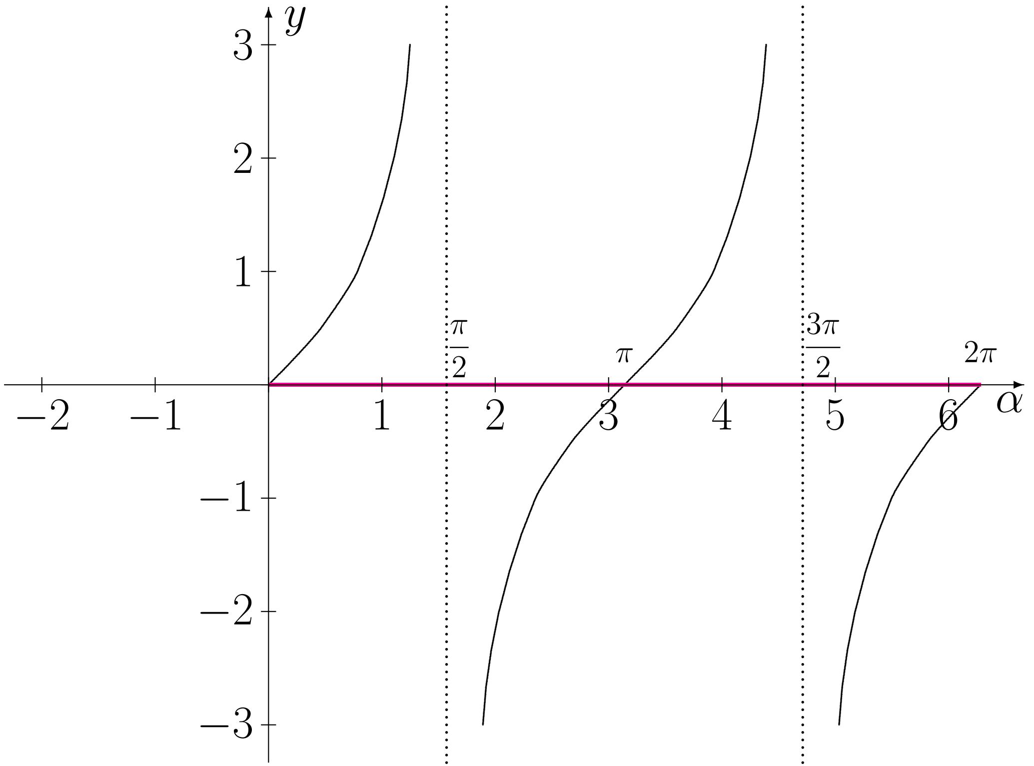


V.2. График тангенса

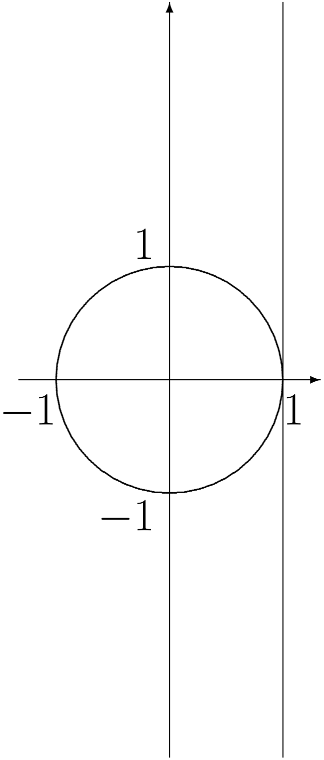


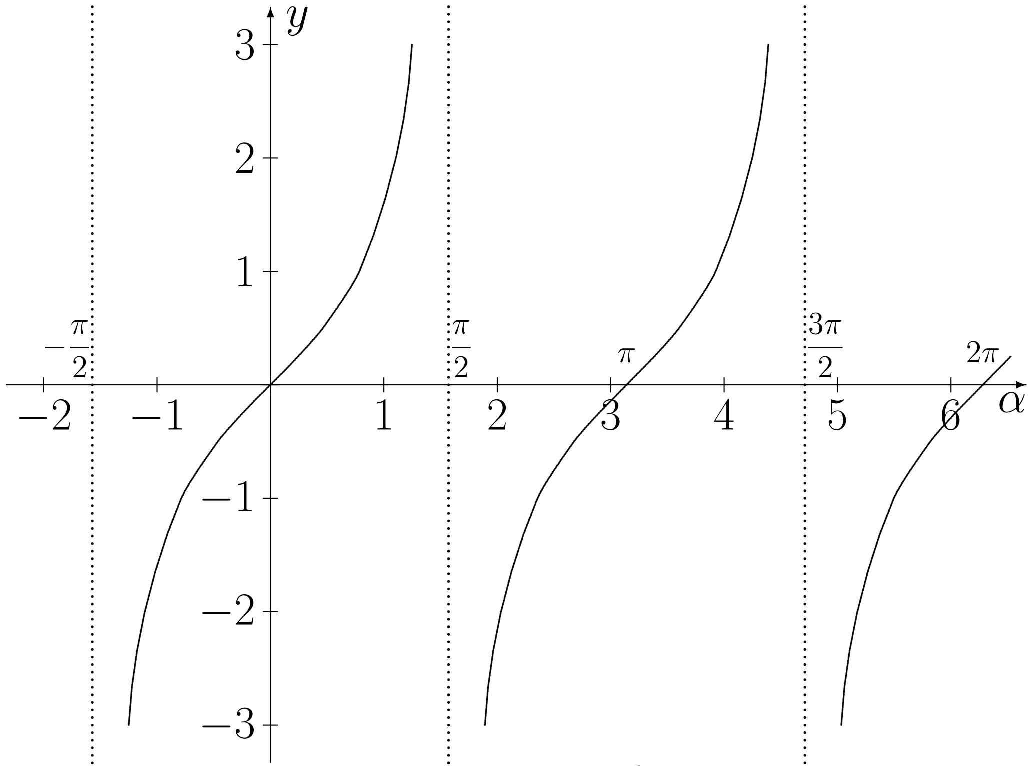
V.2. График тангенса





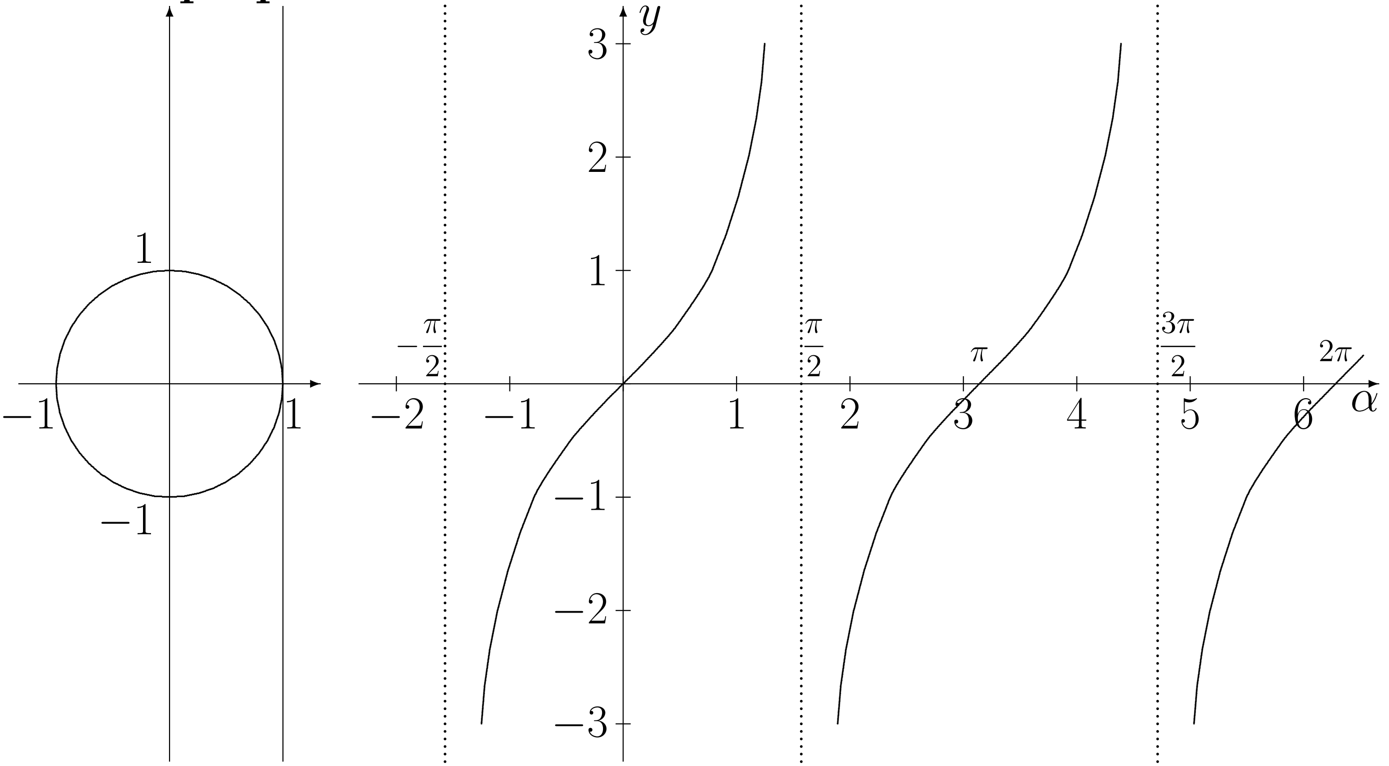
V.2. График тангенса





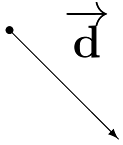
Итак, тангенс не ограничен вблизи точек $x = \dfrac{k\pi}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

V.2. График тангенса



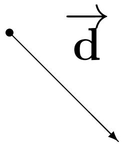
Вернемся к основному докладу?

VI. Модели векторной алгебры

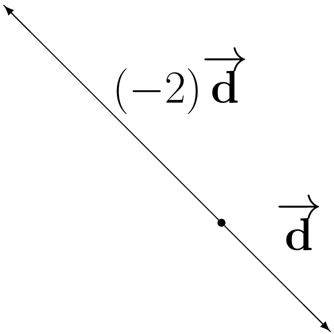


VI. Модели векторной алгебры

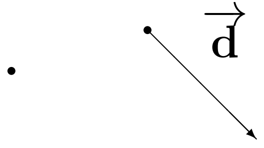
$(-2)\overrightarrow{\mathbf{d}}\,?$



VI. Модели векторной алгебры

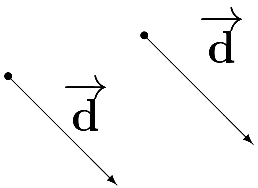


VI. Модели векторной алгебры



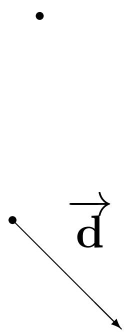
Отложите $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от другой точки.

VI. Модели векторной алгебры



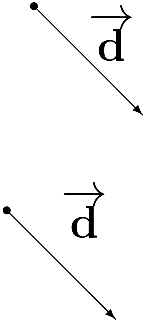
Отложите $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от другой точки.

VI. Модели векторной алгебры



Отложите $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от другой точки.

VI. Модели векторной алгебры

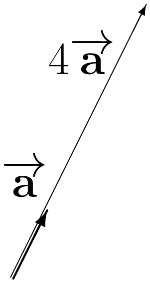


Отложите $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ от другой точки.

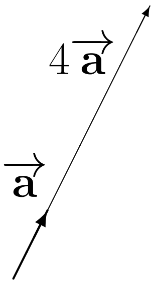
VI. Модели векторной алгебры

$\overrightarrow{\mathbf{a}}$

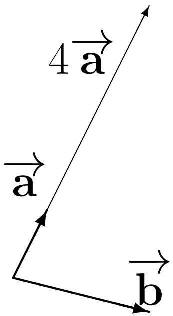
VI. Модели векторной алгебры



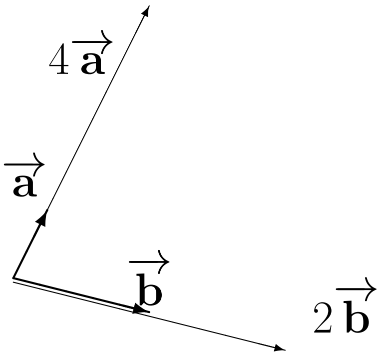
VI. Модели векторной алгебры



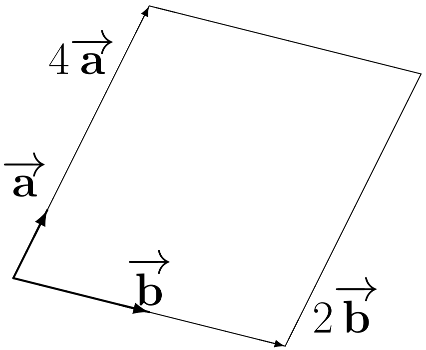
VI. Модели векторной алгебры



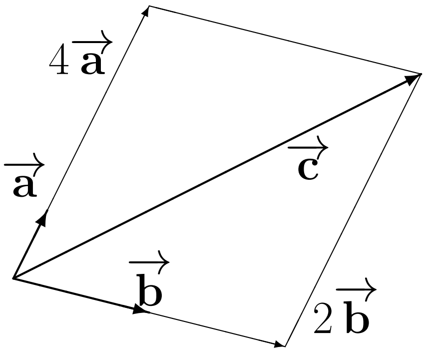
VI. Модели векторной алгебры



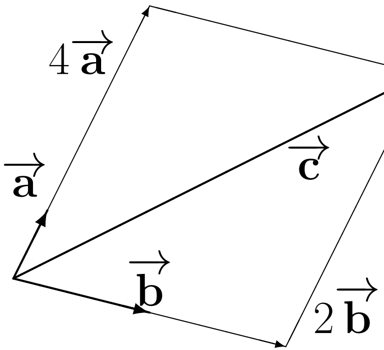
VI. Модели векторной алгебры



VI. Модели векторной алгебры

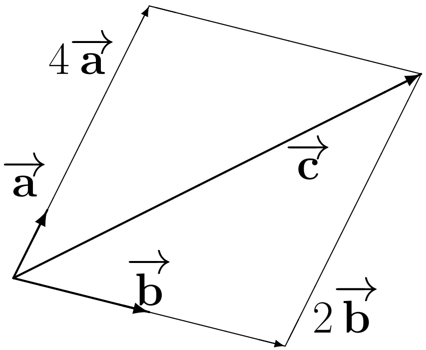


VI. Модели векторной алгебры



Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить формулой.

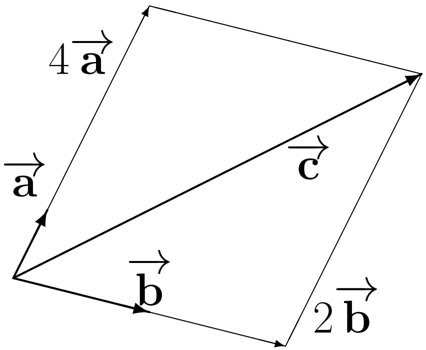
VI. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = ?\overrightarrow{\mathbf{a}} + ?\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить формулой.

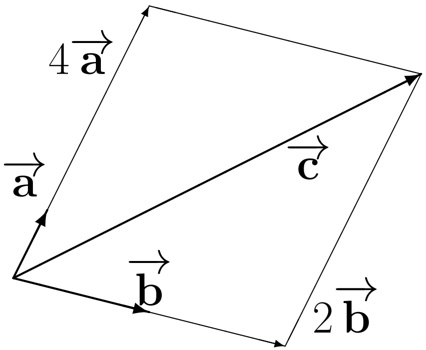
VI. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить формулой.

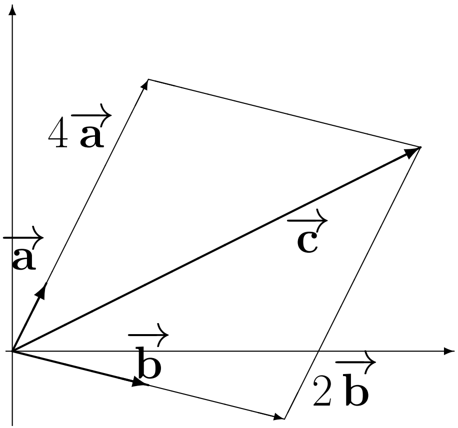
VI. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить другим способом, с помощью системы координат.

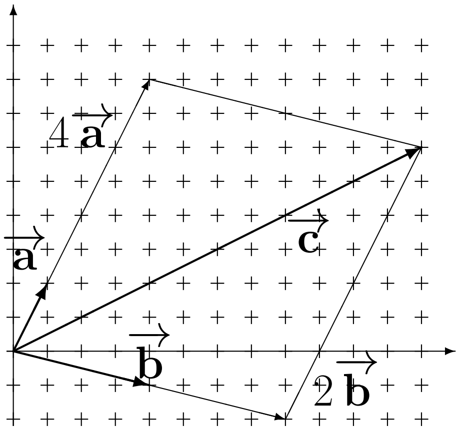
VI. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить другим способом, с помощью системы координат.

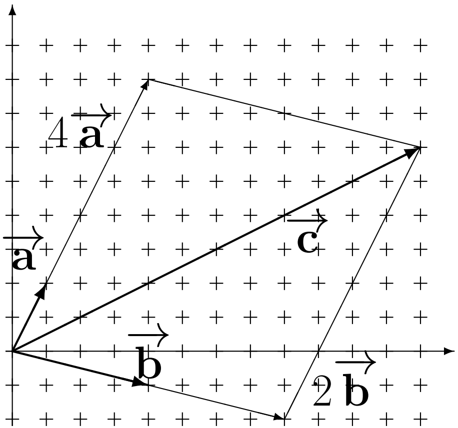
VI. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить другим способом, с помощью системы координат.

VI. Модели векторной алгебры

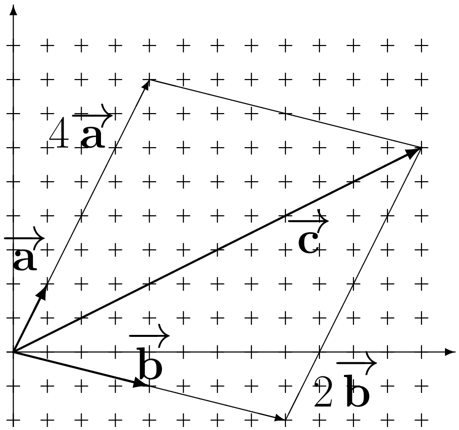


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(?;\ ?)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(?;\ ?)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(?;\ ?)$,

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить другим способом, с помощью системы координат.

VI. Модели векторной алгебры

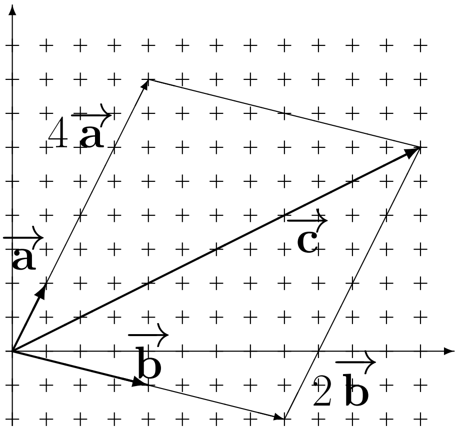


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(?;\ ?)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(?;\ ?)$,

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить другим способом, с помощью системы координат.

VI. Модели векторной алгебры

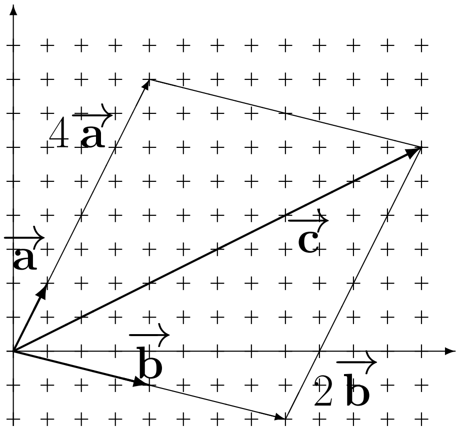


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(?;\ ?)$,

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить другим способом, с помощью системы координат.

VI. Модели векторной алгебры

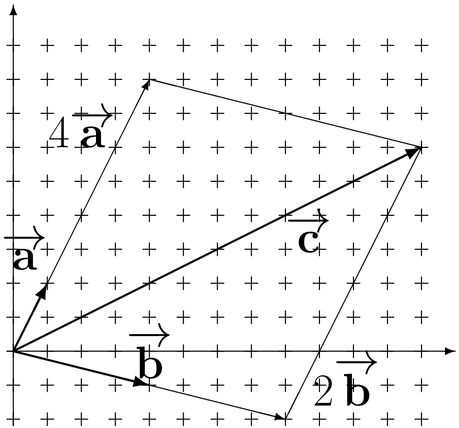


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить другим способом, с помощью системы координат.

VI. Модели векторной алгебры

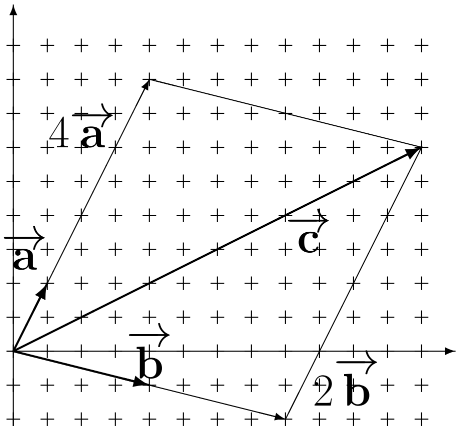


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= ?(1;\ 2) + ?(4;\ -1)$

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить другим способом, с помощью системы координат.

VI. Модели векторной алгебры

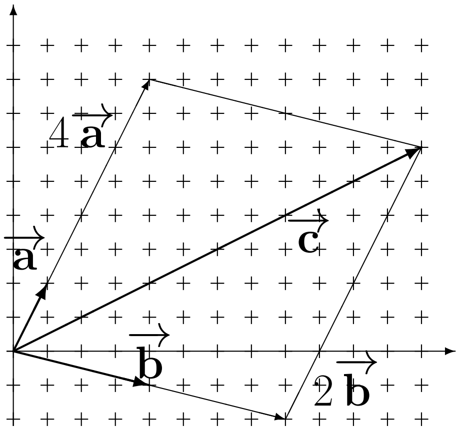


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= 4(1;\ 2) + 2(4;\ -1)$

Можно ситуацию, изображённую на рисунке, представить другим способом, с помощью системы координат.

VI. Модели векторной алгебры

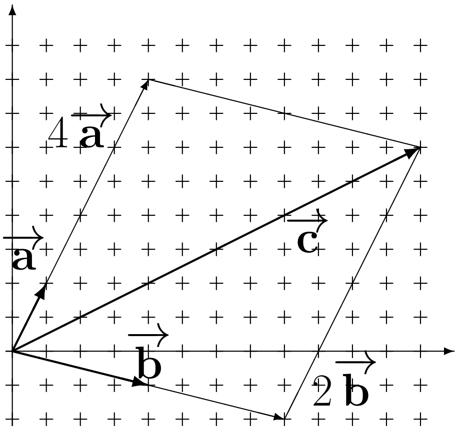


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= 4(1;\ 2) + 2(4;\ -1)$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

VI. Модели векторной алгебры

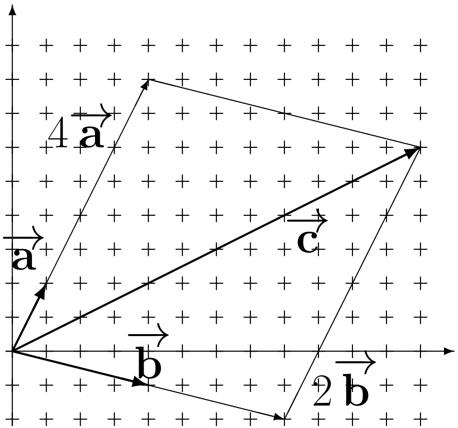


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= ?(1;\ 2) + ?(4;\ -1)$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

VI. Модели векторной алгебры

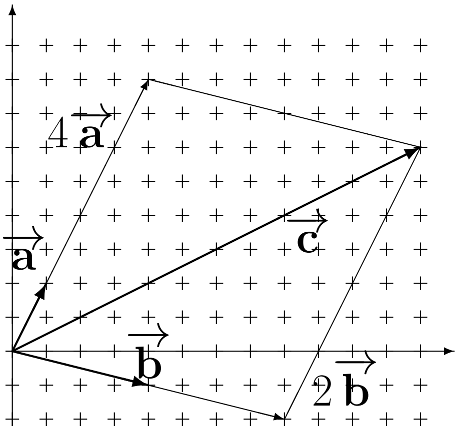


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = ?\overrightarrow{\mathbf{a}} + ?\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= ?(1;\ 2) + ?(4;\ -1)$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

VI. Модели векторной алгебры



$\overrightarrow{\mathbf{c}} = ?\overrightarrow{\mathbf{a}} + ?\overrightarrow{\mathbf{b}}$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

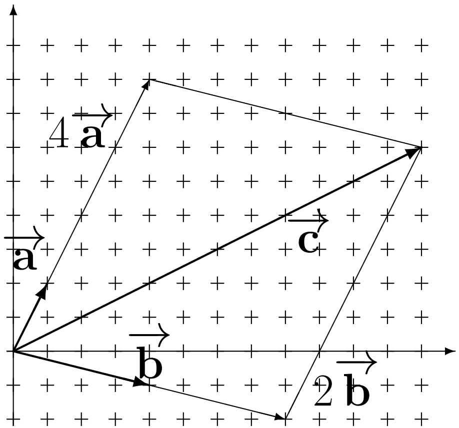
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(12;\ 6) =$

$= ?(1;\ 2) + ?(4;\ -1)$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны? Обозначим коэффициентами и составим систему уравнений.

VI. Модели векторной алгебры

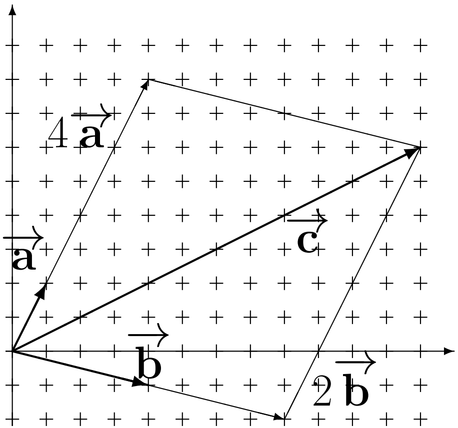


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = ?\overrightarrow{\mathbf{a}} + ?\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Обозначим коэффициентами и составим систему уравнений.

VI. Модели векторной алгебры

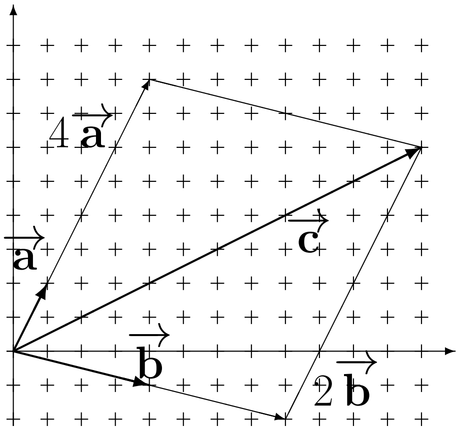


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Обозначим коэффициентами и составим систему уравнений.

VI. Модели векторной алгебры

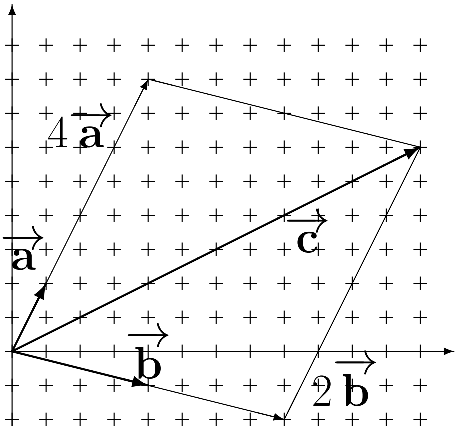


$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Векторное равенство $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.

VI. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(\mathbf{12};\ 6) =$

$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

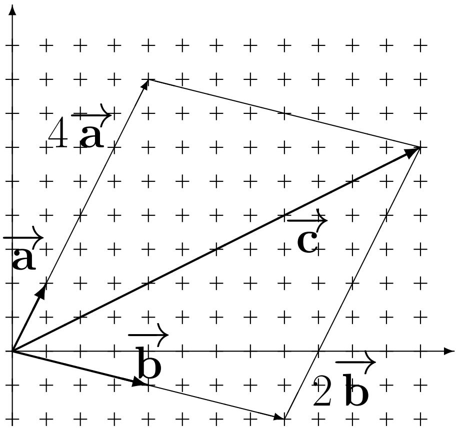
$$\begin{cases} \qquad\qquad = \mathbf{12}, \\ \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

Векторное равенство $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.

Равенство для первой координаты.

VI. Модели векторной алгебры



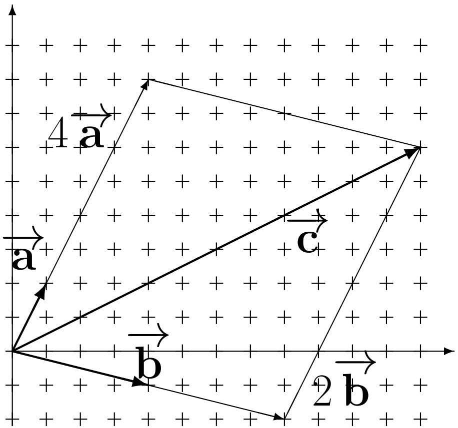
$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(\mathbf{12};\ 6) =$
$= \alpha(\mathbf{1};\ 2) + \beta(\mathbf{4};\ -1)$

$$\begin{cases} \qquad\qquad = \mathbf{12}, \\ \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Векторное равенство $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.
Равенство для первой координаты.

VI. Модели векторной алгебры



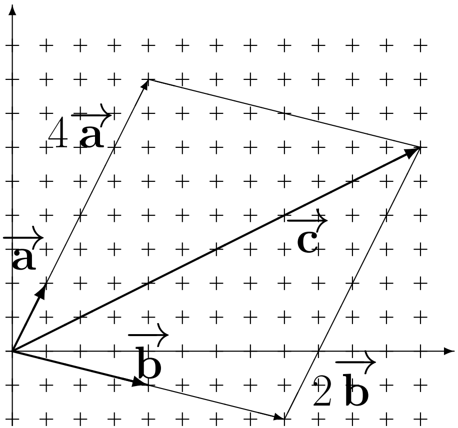
$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(\mathbf{12};\ 6) =$
$= \alpha(\mathbf{1};\ 2) + \beta(\mathbf{4};\ -1)$

$$\begin{cases} \mathbf{1}\alpha + \mathbf{4}\beta = \mathbf{12}, \\ \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Векторное равенство $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.
Равенство для первой координаты.

VI. Модели векторной алгебры



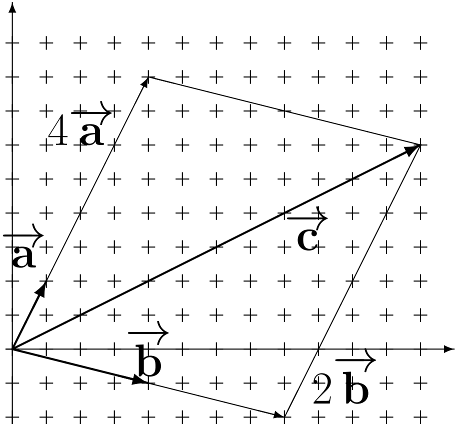
$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ \mathbf{6}) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ \qquad\qquad\quad = \mathbf{6}. \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Векторное равенство $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.
Равенство для второй координаты.

VI. Модели векторной алгебры



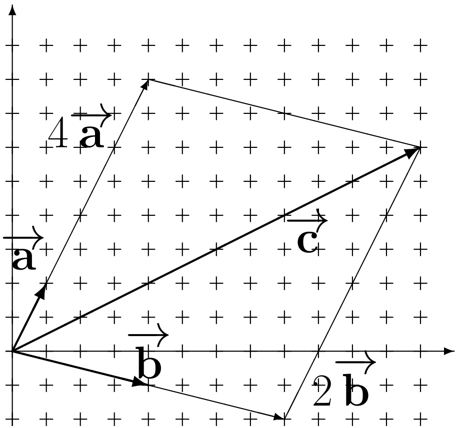
$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ \mathbf{6}) =$
$= \alpha(1;\ \mathbf{2}) + \beta(4;\ \mathbf{-1})$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ \qquad\qquad\quad = \mathbf{6}. \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Векторное равенство $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.
Равенство для второй координаты.

VI. Модели векторной алгебры



$$\vec{\mathbf{c}} = \alpha\,\vec{\mathbf{a}} + \beta\,\vec{\mathbf{b}}$$

$\vec{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \vec{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\vec{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(12;\ \mathbf{6}) =$

$= \alpha(1;\ \mathbf{2}) + \beta(4;\ \mathbf{-1})$

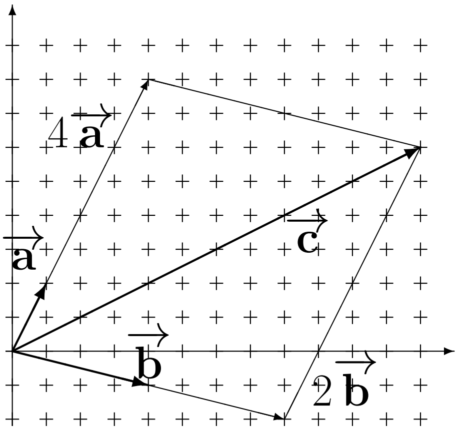
$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ \mathbf{2}\alpha + (\mathbf{-1})\beta = \mathbf{6}. \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?

Векторное равенство $\vec{\mathbf{c}} = \alpha\,\vec{\mathbf{a}} + \beta\,\vec{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.

Равенство для второй координаты.

VI. Модели векторной алгебры



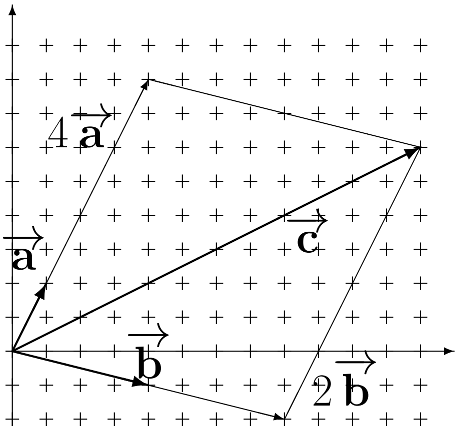
$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6. \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Векторное равенство $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.
Осталось решить полученную систему уравнений.

VI. Модели векторной алгебры



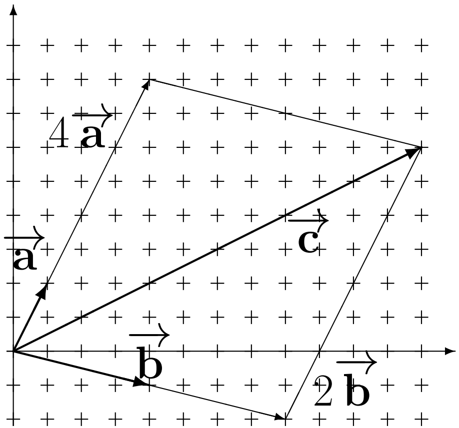
$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Векторное равенство $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\,\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.
Осталось решить полученную систему уравнений.

VI. Модели векторной алгебры



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

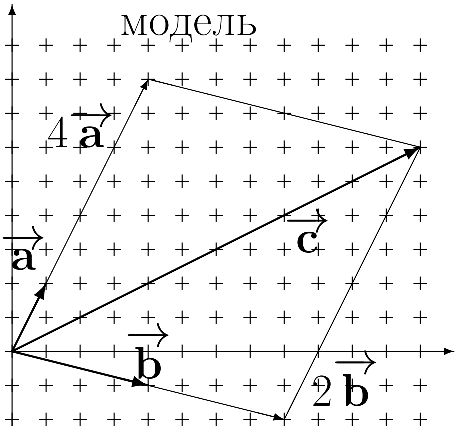
$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

А если бы коэффициенты были бы неизвестны?
Векторное равенство $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}$ равносильно системе двух или трёх числовых равенств.
Осталось решить полученную систему уравнений.

VI. Модели векторной алгебры

Векторно-геометрическая модель



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

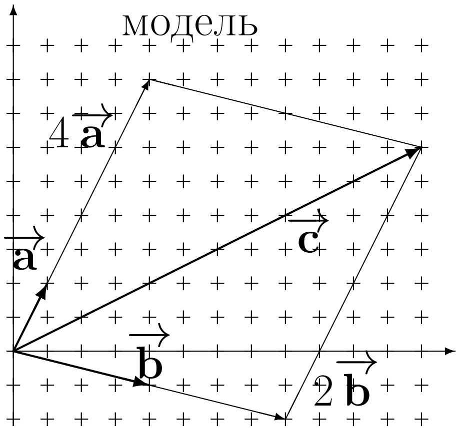
$$(12;\ 6) = \\ = \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

Таким образом, векторная алгебра представляет собой модель-триаду, компонентами которой являются векторно-геометрическая,

VI. Модели векторной алгебры

Векторно-геометрическая модель



$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,
$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,
$(12;\ 6) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

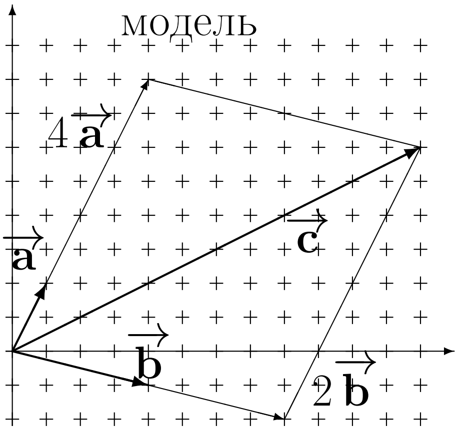
$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

Таким образом, векторная алгебра представляет собой модель-триаду, компонентами которой являются
векторно-геометрическая,

В этой модели оперируем направленными отрезками.

VI. Модели векторной алгебры

Векторно-геометрическая модель



Векторно-символическая модель

$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$$\left(\gamma\overrightarrow{\mathbf{a}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \perp \overrightarrow{\mathbf{c}}$$

$$\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \parallel \overrightarrow{\mathbf{c}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(12;\ 6) =$

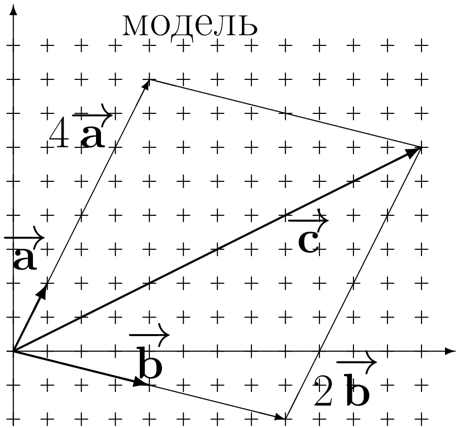
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

Таким образом, векторная алгебра представляет собой модель-триаду, компонентами которой являются векторно-геометрическая, векторно-символическая

VI. Модели векторной алгебры

Векторно-геометрическая модель



Векторно-символическая модель

$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$$\left(\gamma\overrightarrow{\mathbf{a}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \perp \overrightarrow{\mathbf{c}}$$

$$\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \parallel \overrightarrow{\mathbf{c}}$$

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$(12;\ 6) =$
$= \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$

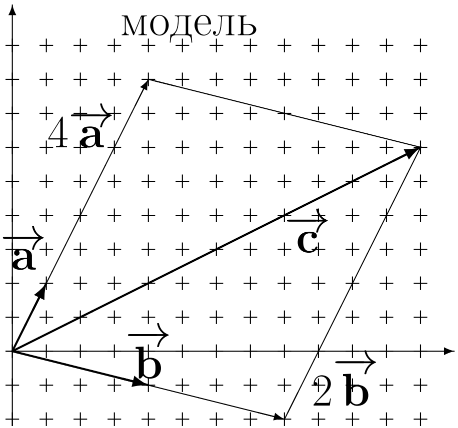
$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

Таким образом, векторная алгебра представляет собой модель-триаду, компонентами которой являются векторно-геометрическая, векторно-символическая

В этой модели оперируем соответствующими выражениями.

VI. Модели векторной алгебры

Векторно-геометрическая модель



Векторно-символическая модель

$$\overrightarrow{\mathbf{c}} = 4\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}$$

$$\left(\gamma\overrightarrow{\mathbf{a}} + \delta\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \perp \overrightarrow{\mathbf{c}}$$

$$\left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \parallel \overrightarrow{\mathbf{c}}$$

Координатная модель

$\overrightarrow{\mathbf{a}}(1;\ 2)$, $\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}(4;\ -1)$,

$\overrightarrow{\mathbf{c}}(12;\ 6)$,

$$(12;\ 6) = \alpha(1;\ 2) + \beta(4;\ -1)$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 12, \\ 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

Таким образом, векторная алгебра представляет собой модель-триаду, компонентами которой являются векторно-геометрическая, векторно-символическая и координатная модели.

Вернемся к основному докладу?

VII. Разложение функции в ряд

Рассмотрим примеры различных разложений функций в ряды.

VII.1. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора

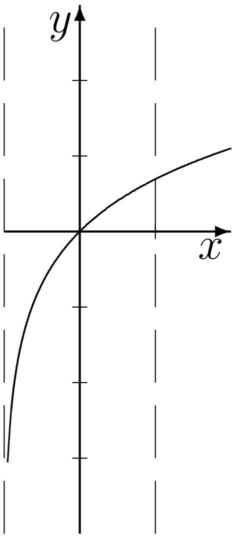


График функции $\ln(1+x)$ и частичных сумм ее разложения в ряд Маклорена:

VII.1. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора

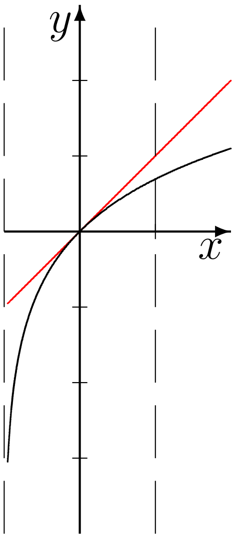


График функции $\ln(1+x)$ и частичных сумм ее разложения в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) \approx \sum_{n=1}^{1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n =$$

$$= x$$

VII.1. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора

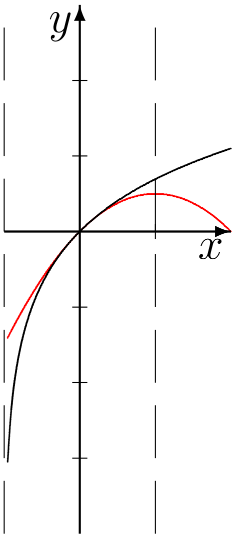


График функции $\ln(1+x)$ и частичных сумм ее разложения в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) \approx \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n =$$

$$= x - \frac{x^2}{2}.$$

VII.1. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора

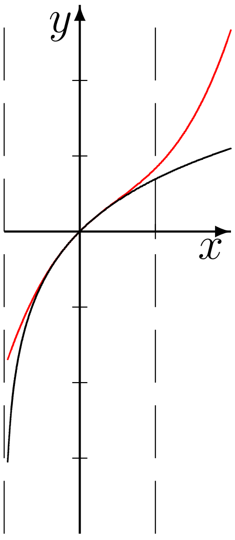


График функции $\ln(1+x)$ и частичных сумм ее разложения в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) \approx \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

VII.1. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора

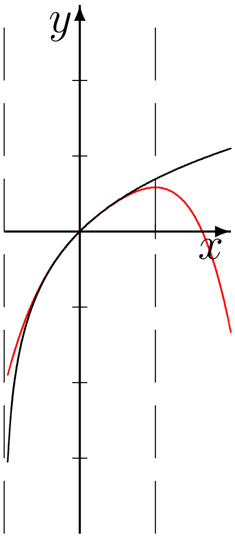


График функции $\ln(1+x)$ и частичных сумм ее разложения в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) \approx \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

VII.1. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора

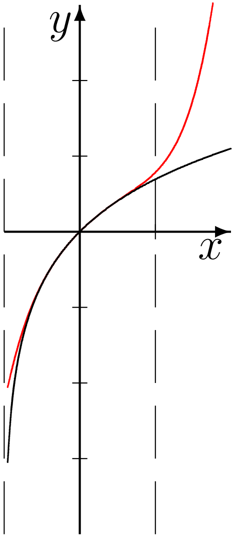


График функции $\ln(1+x)$ и частичных сумм ее разложения в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) \approx \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}.$$

VII.1. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора

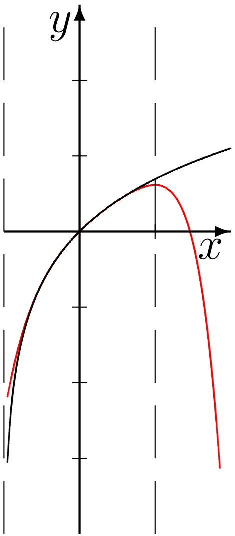


График функции $\ln(1+x)$ и частичных сумм ее разложения в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) \approx \sum_{n=1}^{6} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}.$$

VII.1. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора

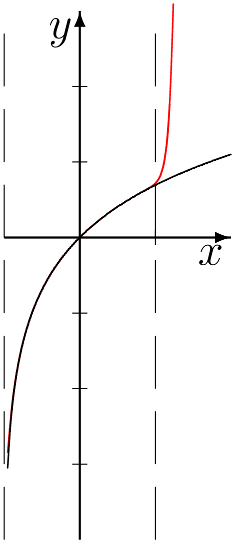


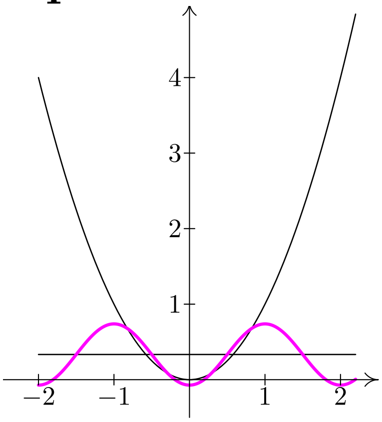
График функции $\ln(1+x)$ и частичных сумм ее разложения в ряд Маклорена:

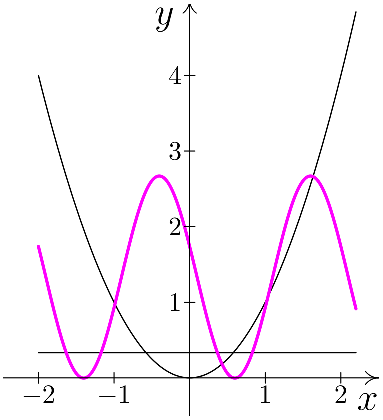
$$\ln(1+x) \approx \sum_{n=1}^{21} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{21}}{21}.$$

Рассмотрим **разложение в ряда Фурье** **или вернемся к основному докладу?**

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках



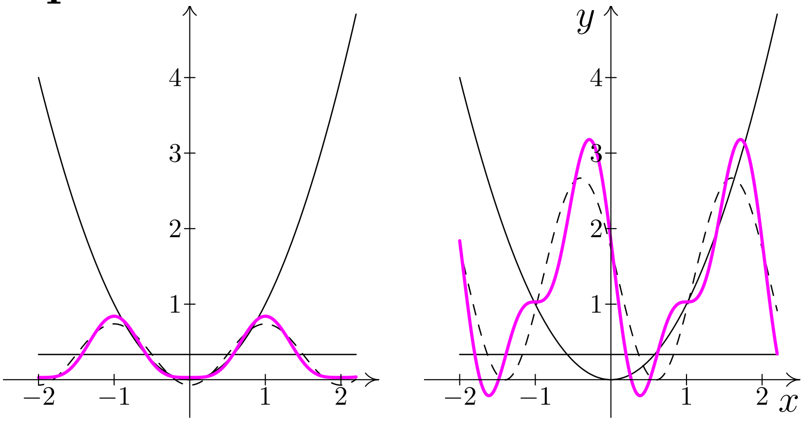


Частичные суммы S_1 **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1; 1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0; 2)\,. \tag{2}$$

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках

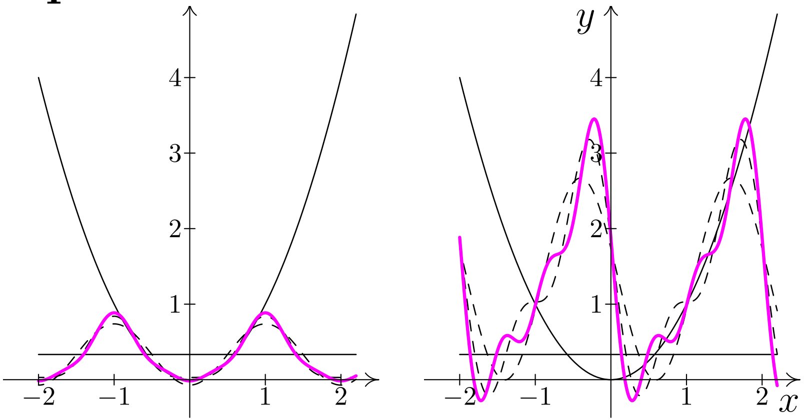


Частичные суммы S_2 **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1; 1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0; 2)\,. \tag{2}$$

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках

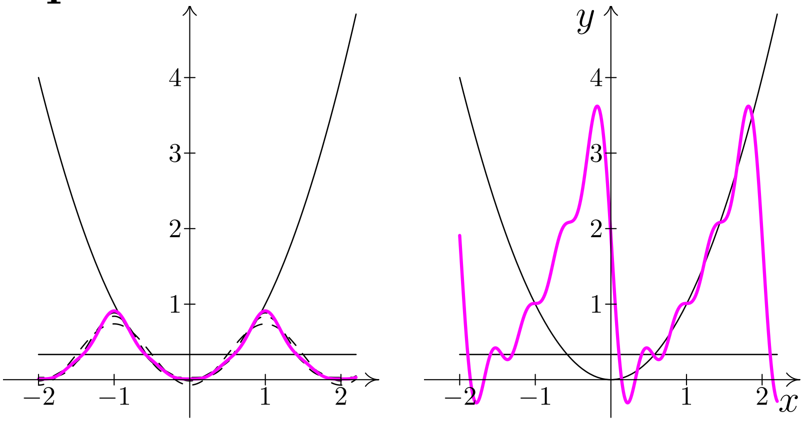


Частичные суммы S_3 **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1; 1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0; 2)\,. \tag{2}$$

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках

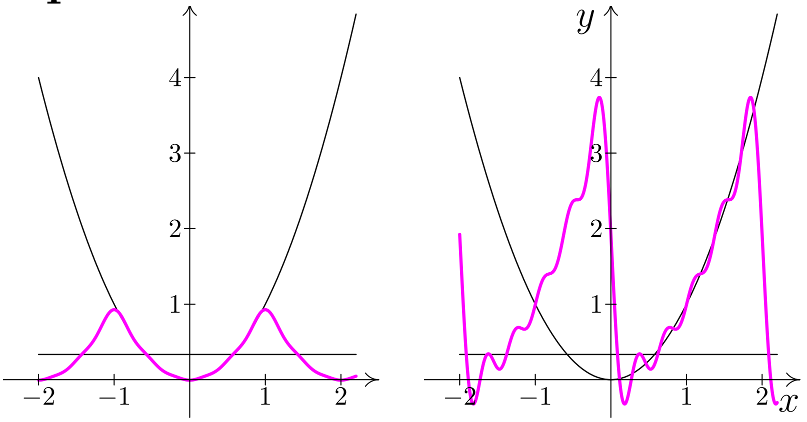


Частичные суммы S_4 **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1;1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0;2)\,. \tag{2}$$

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках

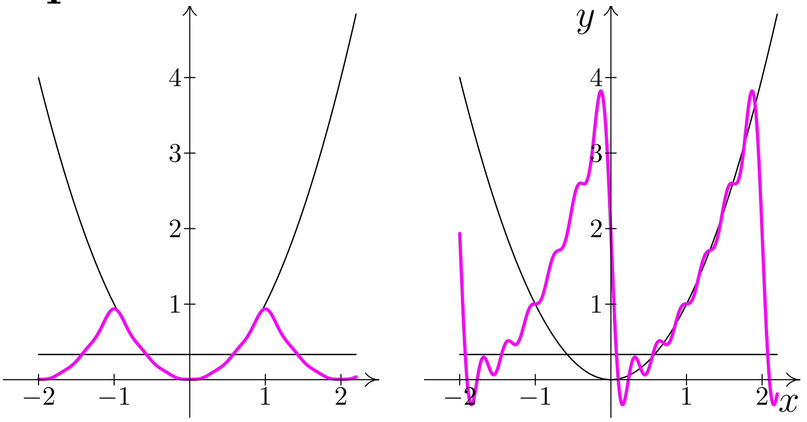


Частичные суммы S_5 **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1;1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0;2)\,. \tag{2}$$

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках

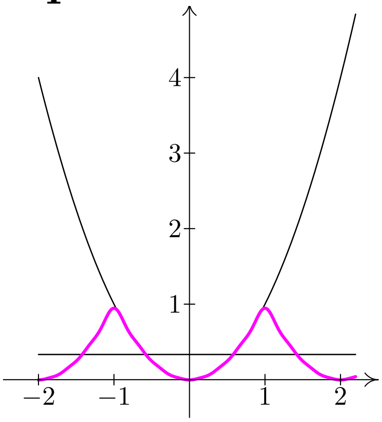


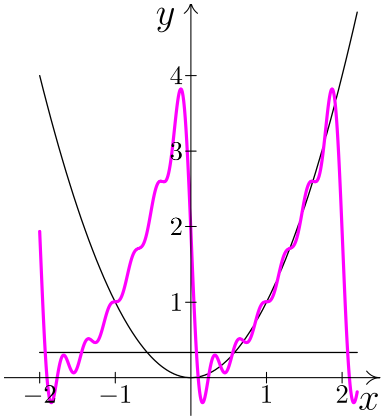
Частичные суммы S_6 **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1; 1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0; 2)\,. \tag{2}$$

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках



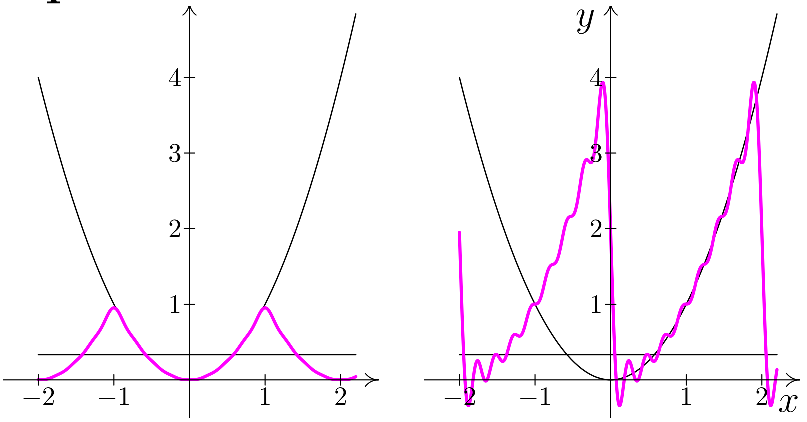


Частичные суммы S_7 **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1;1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0;2)\,. \tag{2}$$

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках

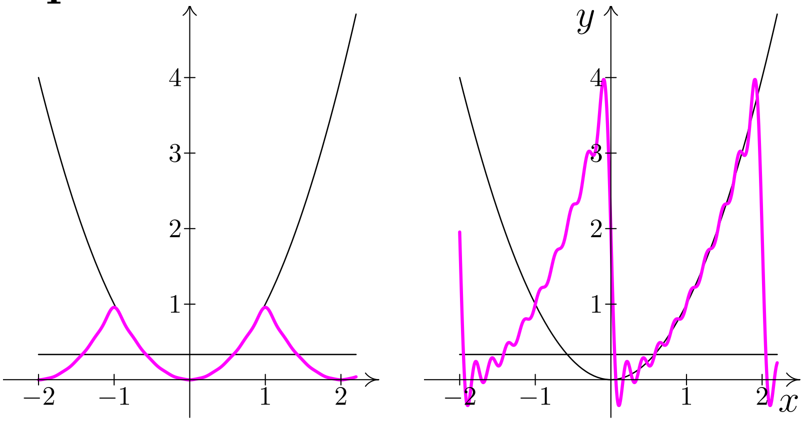


Частичные суммы S_8 **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1;1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0;2)\,. \tag{2}$$

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках

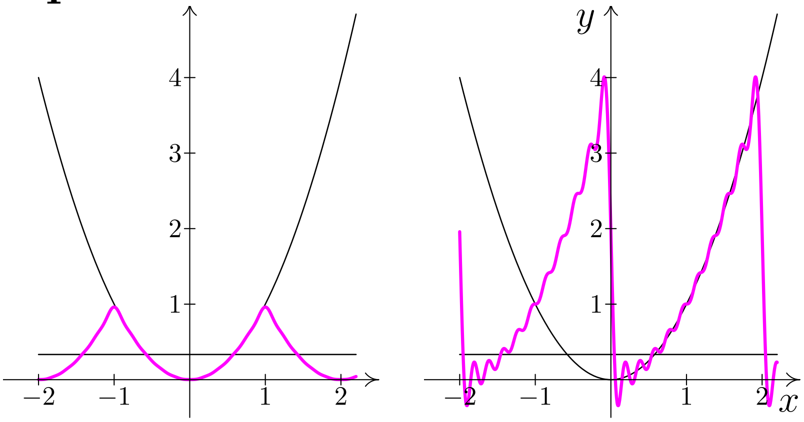


Частичные суммы S_9 **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1; 1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0; 2)\,. \tag{2}$$

VII.2. Разложение $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на разных отрезках



Частичные суммы S_{10} **ряда (1)** и **ряда (2)**.

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x, \qquad x \in (-1;1)\,. \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{4}{\pi n} \sin n\pi x \right), \qquad x \in (0;2)\,. \tag{2}$$

Вернемся к основному докладу?

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\
\cline{2-2}
 &
\end{array}
$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2}
 & 3x
\end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2}
-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x \\ \hline
\end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\
\cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x \\
\cline{1-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 &
\end{array}$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & \boxed{2x^3} + x^2 - 2x - 1 \\
\cline{2-2}
-\underline{6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x\phantom{{}+2}} & 3x \\
\boxed{-2x^3} - 2x^2 + 2x + 2 &
\end{array}
$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{2-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 &
\end{array}
$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
- & -2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-2}
\end{array}
$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
- & -2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-2}
 & -x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4+x^3-8x^2-x+2$ *на многочлен* $2x^3+x^2-2x-1$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4+x^3-8x^2-x+2 & 2x^3+x^2-2x-1 \\ \cline{2-2}
-\,6x^4+3x^3-6x^2-3x & 3x-1 \\ \cline{1-1}
-2x^3-2x^2+2x+2 & \\
-\,-2x^3-x^2+2x+1 & \\ \cline{1-1}
-x^2+1 &
\end{array}
$$

Степень многочлена $\left(-x^2+1\right)$ меньше степени делителя, т.е. степени многочлена $\left(2x^3+x^2-2x-1\right)$. Поэтому многочлен $\left(-x^2+1\right)$ является остатком от деления многочлена $\left(6x^4+x^3-8x^2-x+2\right)$ на многочлен $\left(2x^3+x^2-2x-1\right)$.

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\
\cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\
\cline{1-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
- & -2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\
\cline{1-2}
 & -x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) =$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4+x^3-8x^2-x+2$ *на многочлен* $2x^3+x^2-2x-1$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4+x^3-8x^2-x+2 & 2x^3+x^2-2x-1 \\ \cline{2-2}
-\ 6x^4+3x^3-6x^2-3x & 3x-1 \\ \cline{1-1}
-2x^3-2x^2+2x+2 & \\
-\ -2x^3-x^2+2x+1 & \\ \cline{1-1}
-x^2+1 &
\end{array}
$$

Представим многочлен $\left(6x^4+x^3-8x^2-x+2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4+x^3-8x^2-x+2\right)=$

Если «Ой, а как это?», перейдите к следующему слайду.

Если вы уже получили искомое выражение, наведите указатель мыши на эту надпись и «кликните» левой кнопкой.

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2}
-\,6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{1-1}
-\,2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
-\,{-2x^3} - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-1}
-\,x^2 + 1 &
\end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) =$

Рассмотрим пример: $\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4+x^3-8x^2-x+2$ *на многочлен* $2x^3+x^2-2x-1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4+x^3-8x^2-x+2 & 2x^3+x^2-2x-1 \\ \cline{3-3}
- & 6x^4+3x^3-6x^2-3x & 3x-1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^3-2x^2+2x+2 & \\
- & -2x^3-x^2+2x+1 & \\ \cline{1-2}
 & -x^2+1 &
\end{array}
$$

Представим многочлен $\left(6x^4+x^3-8x^2-x+2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4+x^3-8x^2-x+2\right)=$

Рассмотрим пример: $\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$ $\qquad 21=5\cdot 4+1.$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\
\cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & \colorbox{yellow}{$3x - 1$} \\
\cline{1-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
- & -2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\
\cline{1-2}
 & -x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) =$

Рассмотрим пример: $\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 5 \\ \hline 1 & \end{array}$ $\qquad 21 = \colorbox{yellow}{5} \cdot 4 + 1.$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{2-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
- & -2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{2-2}
 & -x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = \left(3x - 1\right) \cdot$

Рассмотрим пример:
$$
\begin{array}{r|l}
21 & 4 \\ \cline{2-2}
20 & 5 \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
\qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.
$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
- & -2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-2}
 & -x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = (3x - 1) \cdot$

Рассмотрим пример:
$$
\begin{array}{r|l}
21 & 4 \\ \cline{2-2}
20 & 5 \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
\qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.
$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
- & -2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-2}
 & -x^2 + 1 &
\end{array}$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = (3x - 1) \cdot \left(2x^3 + x^2 - 2x - 1\right) +$$

Рассмотрим пример:
$$\begin{array}{r|l}
21 & 4 \\ \cline{2-2}
20 & 5 \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array} \qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.$$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2}
-\;6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
-\;-2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-1}
-x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = (3x - 1) \cdot \left(2x^3 + x^2 - 2x - 1\right) +$

Рассмотрим пример: $\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$ $\quad 21 = 5 \cdot 4 + 1$.

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2}
-\;6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x \phantom{{}+2} & 3x - 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
-\;-2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-1}
-x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = (3x - 1) \cdot \left(2x^3 + x^2 - 2x - 1\right) + \left(-x^2 + 1\right)$$

Рассмотрим пример: $\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$ $\qquad 21 = 5 \cdot 4 + 1.$

Пример 1. *Разделить многочлен* $6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2$ *на многочлен* $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{3-3}
- & 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x & 3x - 1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
- & -2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-2}
 & -x^2 + 1 &
\end{array}
$$

Представим многочлен $\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right)$ выражением от полученных многочленов:

$$\left(6x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 2\right) = (3x - 1)\left(2x^3 + x^2 - 2x - 1\right) + \left(-x^2 + 1\right).$$

Вернемся к основному докладу?