

Министерство образования и науки РФ
Уральский государственный
экономический университет



Ю. Б. Мельников

Решение геометрических задач «на вычисление»

Раздел **электронного учебника**
«Элементарная математика»
(теоретический материал)



e-mail:
UriiMelnikov58@gmail.com,
melnikov@k66.ru

сайты:
<http://melnikov.k66.ru>,
<http://melnikov.web.ur.ru>

Екатеринбург

2014

I. Инструкция к пособию	6
II. О треугольниках	15
II.1. Хорошие треугольники	16
II.2. Площадь треугольника	30
III. Базовые ассоциации	39
III.1. Прямоугольный треугольник	40
III.2. Высота	42
III.3. Параллельные прямые	44
III.4. Площадь треугольника	58
IV. Рекомендации по работе с чертежом	60
IV.1. Внешнее и внутреннее обогащение модели	61
IV.2. Основная идея обогащения геометрической модели . . .	67

IV.3. Правила, обязательные для исполнения	68
IV.4. Дополнительные рекомендации	103
IV.5. Формулировки для запоминания.	134
V. Построение иллюстративных геометрических моделей	151
V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей	155
V.2. Окружность и хорда	165
V.3. Вывод о построении чертежа, содержащего окружность	175
VI. Теорема Пифагора	177
VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы	178
VI.2. Теорема Пифагора: доказательство	223
VII. Теорема синусов и теорема косинусов	240
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза	246

VII.2. Доказательство теоремы косинусов	273
VIII. Треугольник и окружность	305
VIII.1. Постановка задачи о $\triangle$ и $\bigcirc$	309
VIII.2. Вписанная окружность	315
VIII.3. Пересечение «экстремальных линий» в $\triangle$	341
VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$	344
VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике	353
VIII.3.3. Медианы треугольника	363
VIII.3.4. Серединные перпендикуляры	404
VIII.3.5. Высоты треугольника	432
IX. Рекомендации для решения задач по стереометрии	466
IX.1. Источники «хороших треугольников»	467

IX.2. Дополнительные рекомендации для решения задач по стереометрии	475
IX.3. Основные фигуры и отношения в стереометрии	478
IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса	481
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра	514
IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере .	526

X. Лаборатория интерактивного учебно-методического обеспечения	541
---	-----

XI. Благодарность	544
-------------------	-----

XII. Благодарность	545
--------------------	-----

I. Инструкция к пособию

Данная работа представлена в формате pdf и, следовательно, может использоваться на различных аппаратных и программных платформах.

I. Инструкция к пособию

Данная работа представлена в формате pdf и, следовательно, может использоваться на различных аппаратных и программных платформах.

Для просмотра файлов pdf желательно использовать программу **Adobe Reader** версии 8 или 9, но для операционной системы Android желательно применять **Smart Office**. Можно использовать другую программу, поддерживающую выполнение скриптов, включенных в файл pdf. Следует проследить, чтобы было разрешено выполнение скриптов. Это необходимо для выполнения переходов по гиперссылкам.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader версии 8 или 9.

Электронный учебник представляет собой систему файлов, которые следует просматривать с помощью программы Adobe Reader. Основным из этих файлов является 0000Spisok.pdf, содержащий гиперссылки на файлы с представлениями лекций и практических занятий.

Вернуться из презентации любой лекции и практического занятия к файлу 0000Spisok.pdf можно двумя способами:

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader версии 8 или 9.

Электронный учебник представляет собой систему файлов, которые следует просматривать с помощью программы Adobe Reader. Основным из этих файлов является 0000Spisok.pdf, содержащий гиперссылки на файлы с представлениями лекций и практических занятий.

Вернуться из презентации любой лекции и практического занятия к файлу 0000Spisok.pdf можно двумя способами: во-первых, с титульного листа с помощью гиперссылки, отмеченной словосочетанием «электронного учебника» во фразе «Раздел электронного учебника»;

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader версии 8 или 9.

Электронный учебник представляет собой систему файлов, которые следует просматривать с помощью программы Adobe Reader. Основным из этих файлов является 0000Spisok.pdf, содержащий гиперссылки на файлы с представлениями лекций и практических занятий.

Вернуться из презентации любой лекции и практического занятия к файлу 0000Spisok.pdf можно двумя способами:

во-первых, с титульного листа с помощью гиперссылки, отмеченной словосочетанием «электронного учебника» во фразе «Раздел электронного учебника»;

во-вторых, с последней страницы, по гиперссылке «Вернуться к списку презентаций».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader версии 8 или 9.

В презентациях, предназначенных для проведения практических занятий, имеется два вида учебных заданий: примеры, предназначенные для иллюстрации теоретического материала, демонстрации методов решения задач и т. п., и задачи, предназначенные для самостоятельного решения.

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader версии 8 или 9.

В программе Adobe Reader переход в полноэкранный режим и возвращение к режиму работы в окне осуществляется комбинацией клавиш Ctrl+L (т.е. одновременным нажатием клавиш «Ctrl» и «L»). Переход к следующему слайду или возвращение к предыдущему слайду осуществляется клавишами «Page Up» или «Page Down».

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader версии 8 или 9.

Для перехода по гиперссылке, как обычно, следует навести указатель мыши на текст, выделенный красным (но не пурпурным) или синим цветом и нажать на левую кнопку мыши или левую кнопку тачпада (для ноутбука). «Откат», т.е. отмена предыдущей команды (например, перехода по гиперссылке) осуществляется одновременным нажатием клавиш Alt и ← (в Adobe Reader X может не работать).

I. Инструкция к пособию

Для просмотра файлов pdf настоятельно рекомендуем использовать программу Adobe Reader версии 8 или 9.

В случае, если два соседних слова выделены, допустим, синим цветом, но одно набрано обычным, а другое — полужирным шрифтом, то это означает, что переход по гиперссылкам осуществляется на различные мишени.

II. О треугольниках

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

I) Одиночные треугольники:

1)

2)

3)

II) Пары треугольников:

1)

2)

3)

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

I) Одиночные треугольники:

1) **равнобедренные (в т.ч. равносторонние);**

2)

3)

II) Пары треугольников:

1)

2)

3)

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

I) Одиночные треугольники:

- 1) равнобедренные (в т.ч. равносторонние);
- 2) **прямоугольные**;
- 3)

II) Пары треугольников:

- 1)
- 2)
- 3)

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

I) Одиночные треугольники:

- 1) равнобедренные (в т.ч. равносторонние);
- 2) прямоугольные;
- 3) **треугольники, в которых (как бы) известно «все нужное»;**

II) Пары треугольников:

- 1)
- 2)
- 3)

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

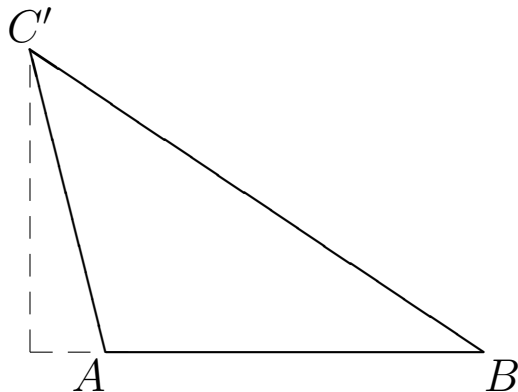
I) Одиночные треугольники:

- 1) равнобедренные (в т.ч. равносторонние);
- 2) прямоугольные;
- 3) **треугольники, в которых (как бы) известно «все нужное»;**

Внимание! Часто смысл последнего пункта искажают! Нам не обязательно знать о треугольнике все, достаточно знать «все нужное»!

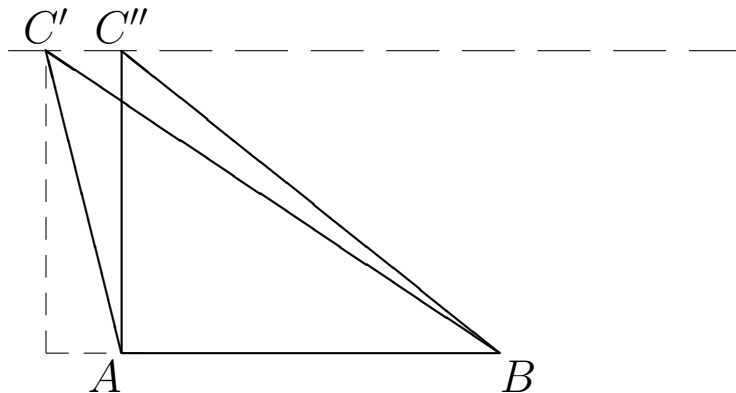
II.1. Хорошие треугольники

Например, пусть в треугольнике ABC известны или «как бы известны» (обозначены буквой) площадь, длина высоты CH и длина основания AB . По этим данным мы не можем восстановить треугольник с точностью до равенства:



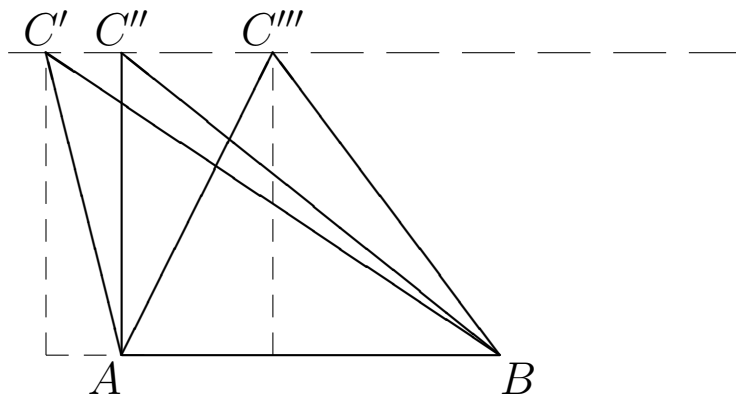
II.1. Хорошие треугольники

Например, пусть в треугольнике ABC известны или «как бы известны» (обозначены буквой) площадь, длина высоты CH и длина основания AB . По этим данным мы не можем восстановить треугольник с точностью до равенства:



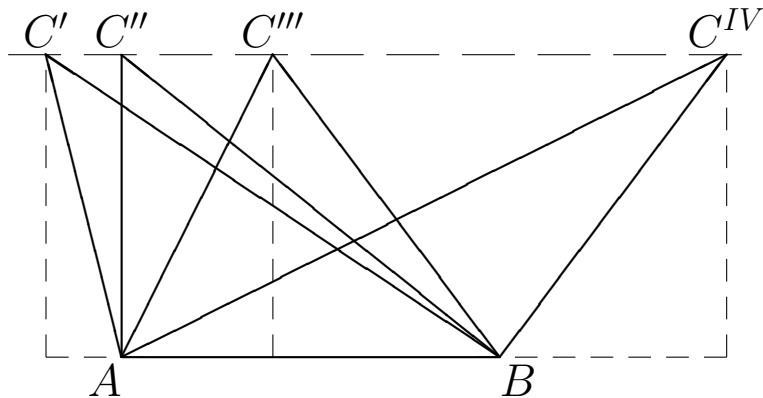
II.1. Хорошие треугольники

Например, пусть в треугольнике ABC известны или «как бы известны» (обозначены буквой) площадь, длина высоты CH и длина основания AB . По этим данным мы не можем восстановить треугольник с точностью до равенства:



II.1. Хорошие треугольники

Например, пусть в треугольнике ABC известны или «как бы известны» (обозначены буквой) площадь, длина высоты CH и длина основания AB . По этим данным мы не можем восстановить треугольник с точностью до равенства:



Но все, что нужно, нам известно!

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

I) Одиночные треугольники:

- 1) равнобедренные (в т.ч. равносторонние);
- 2) прямоугольные;
- 3) **треугольники, в которых (как бы) известно «все нужное»;**

II) Пары треугольников:

- 1)
- 2)
- 3)

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

I) Одиночные треугольники:

- 1) равнобедренные (в т.ч. равносторонние);
- 2) прямоугольные;
- 3) треугольники, в которых (как бы) известно «все нужное»;

II) Пары треугольников:

- 1) **равные**;
- 2)
- 3)

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

I) Одиночные треугольники:

- 1) равнобедренные (в т.ч. равносторонние);
- 2) прямоугольные;
- 3) треугольники, в которых (как бы) известно «все нужное»;

II) Пары треугольников:

- 1) равные;
- 2) **подобные**;
- 3)

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

I) Одиночные треугольники:

- 1) равнобедренные (в т.ч. равносторонние);
- 2) прямоугольные;
- 3) треугольники, в которых (как бы) известно «все нужное»;

II) Пары треугольников:

- 1) равные;
- 2) подобные;
- 3) имеющие общий «элемент» (сторону, угол, высоту) или равные «элементы».

II.1. Хорошие треугольники

Идея: мы будем считать «хорошими» такие треугольники, с помощью которых можно вычислить искомые значения величин или получить уравнение. Список хороших треугольников состоит из 6 типов: 3 типа одиночных треугольников и 3 типа пар треугольников.

I) Одиночные треугольники:

- 1) равнобедренные (в т.ч. равносторонние);
- 2) прямоугольные;
- 3) треугольники, в которых (как бы) известно «все нужное»;

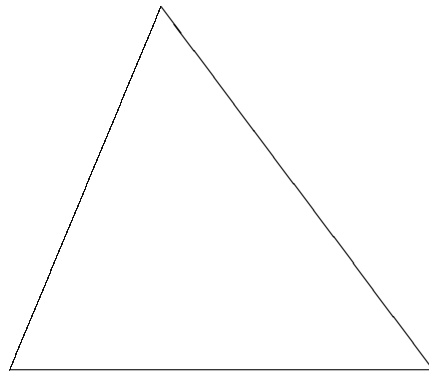
II) Пары треугольников:

- 1) равные;
- 2) подобные;
- 3) имеющие общий «элемент» (сторону, угол, высоту) или равные «элементы».

Рассмотрим пример?

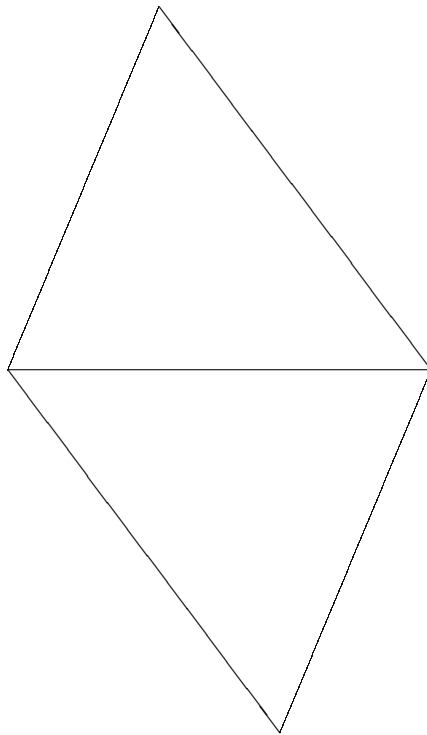
II.2. Площадь треугольника

II.2. Площадь треугольника



II.2. Площадь треугольника

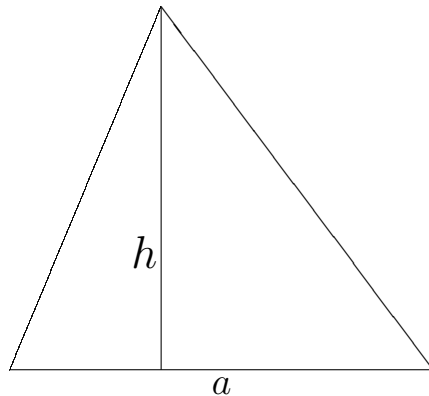
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{параллелограмма}},$$



II.2. Площадь треугольника

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} S_{\text{параллелограмма}},$$

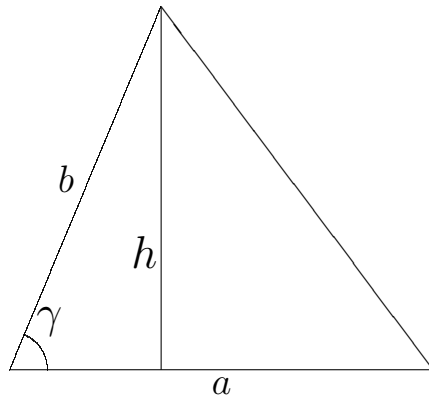
$$S_{\triangle} = \frac{ah}{2}$$



II.2. Площадь треугольника

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}S_{\text{параллелограмма}},$$

$$S_{\triangle} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma,$$



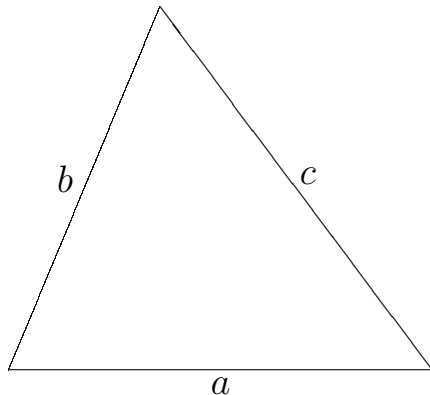
II.2. Площадь треугольника

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}S_{\text{параллелограмма}},$$

$$S_{\triangle} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma,$$

$$\underbrace{S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}_{\text{формула Герона}}$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр
треугольника.



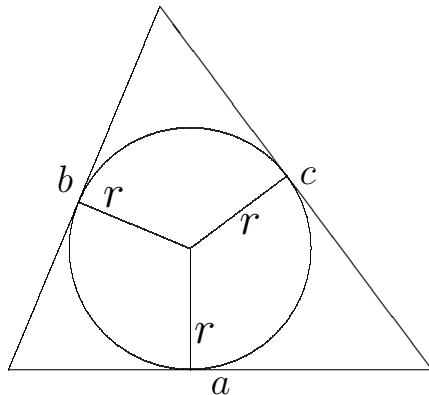
II.2. Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{параллелограмма}},$$

$$S_{\Delta} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

$$\underbrace{S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}_{\text{формула Герона}} = pr,$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр
треугольника.



II.2. Площадь треугольника

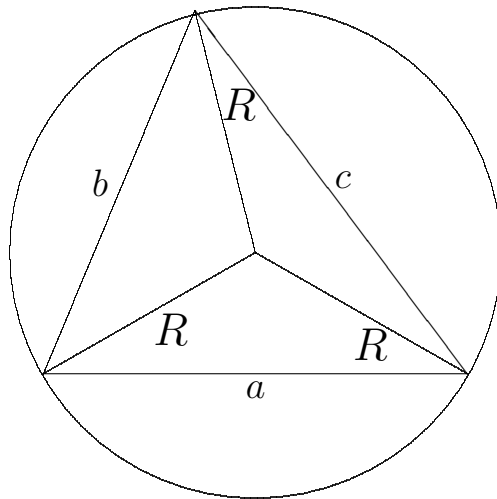
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{параллелограмма}},$$

$$S_{\Delta} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

$$\underbrace{S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}_{\text{формула Герона}} = pr,$$

$$S_{\Delta} = \frac{abc}{4R},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр
треугольника.



II.2. Площадь треугольника

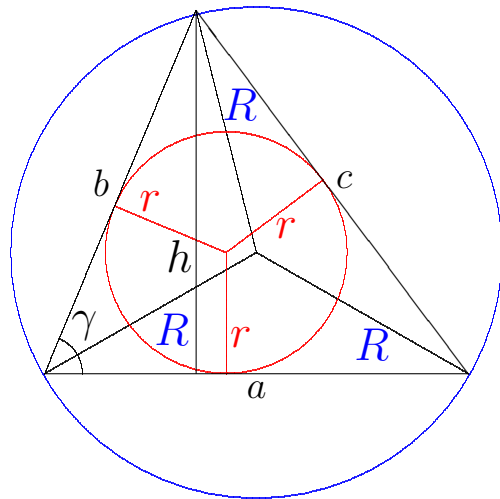
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}S_{\text{параллелограмма}},$$

$$S_{\Delta} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma,$$

$$\underbrace{S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}_{\text{формула Герона}} = pr,$$

$$S_{\Delta} = \frac{abc}{4R},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр
треугольника.



III. Базовые ассоциации

I) Прямоугольный треугольник должен в первую очередь ассоциироваться со следующими результатами и понятиями:

-
-
-
-
-

III.1. Прямоугольный треугольник

I) Прямоугольный треугольник должен в первую очередь ассоциироваться со следующими результатами и понятиями:

- теорема Пифагора;
-
-
-
-

III.1. Прямоугольный треугольник

I) **Прямоугольный треугольник** должен в первую очередь ассоциироваться со следующими результатами и понятиями:

- теорема Пифагора;
- прямой угол;
- тригонометрия (функции $\sin$, $\cos$, tg , $\arcsin$ и др.);
- площадь треугольника (половина произведения длин катетов);
- описанная окружность (ее центр лежит на середине гипотенузы).

III.2. Высота

2) **Высота** в первую очередь должна ассоциироваться с понятиями



III.2. Высота

- 2) **Высота** в первую очередь должна ассоциироваться с понятиями
- площадь;
 - прямоугольные треугольники (в данном случае они к тому же имеют общий катет).

III.3. Параллельные прямые

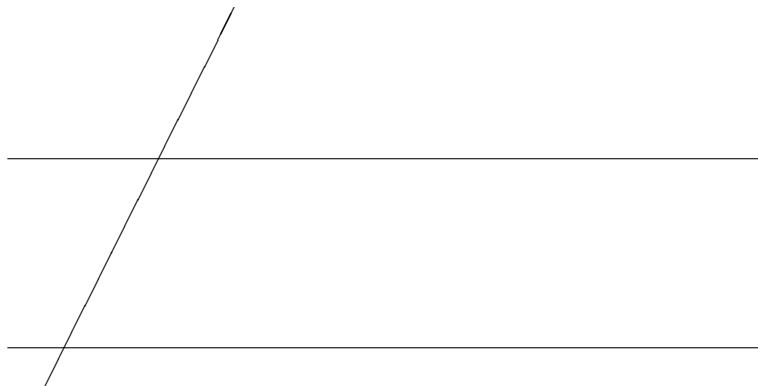
3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

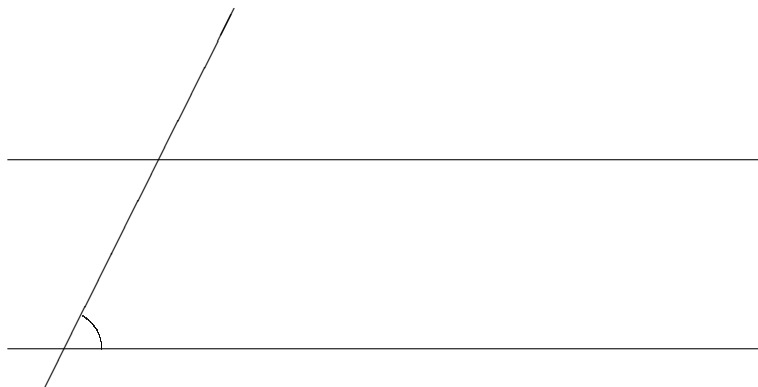
-
-
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

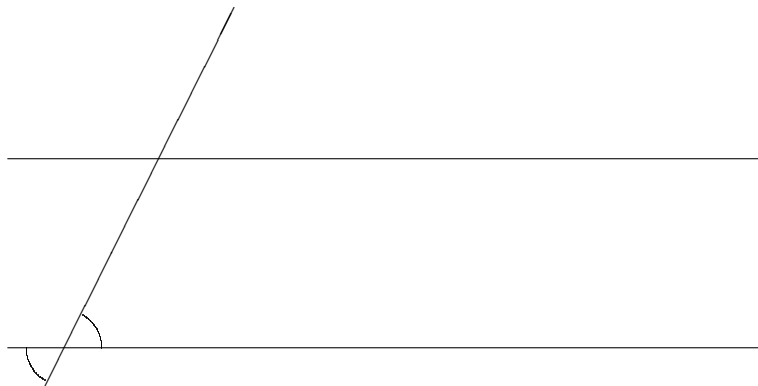
- равные углы;
-
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

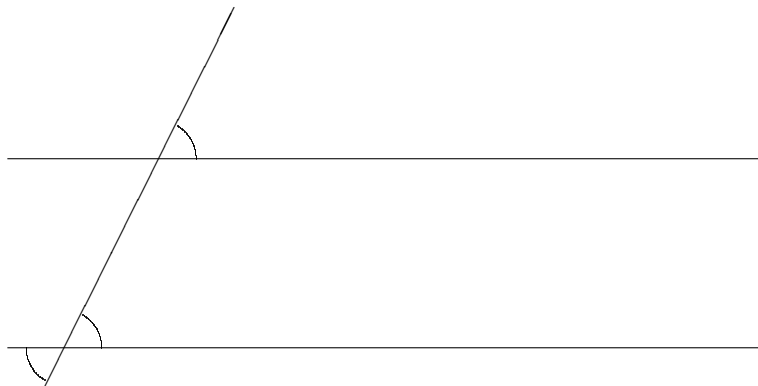
- равные углы;
-
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

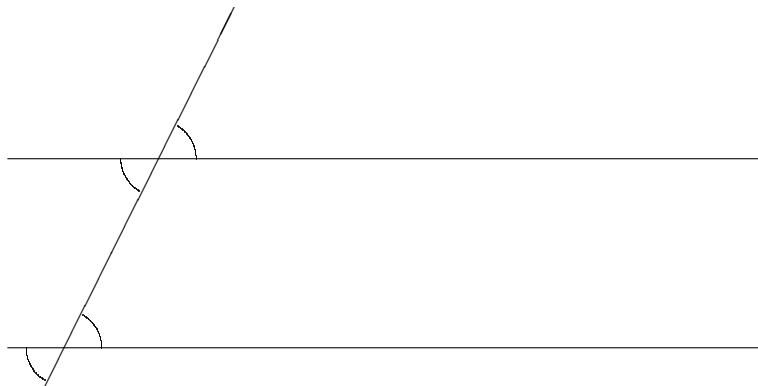
- равные углы;
-
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

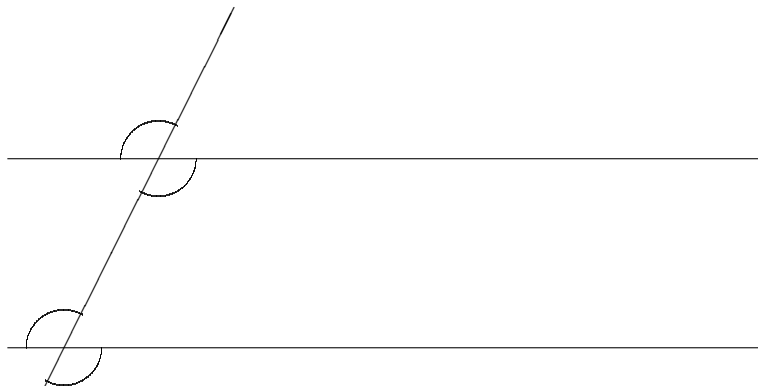
- равные углы;
-
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

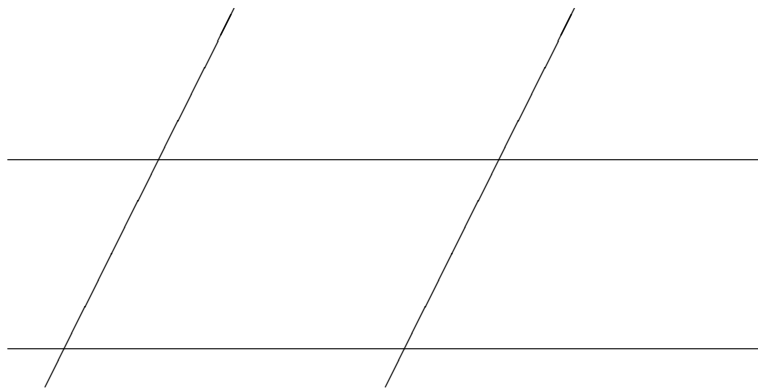
- равные углы;
-
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

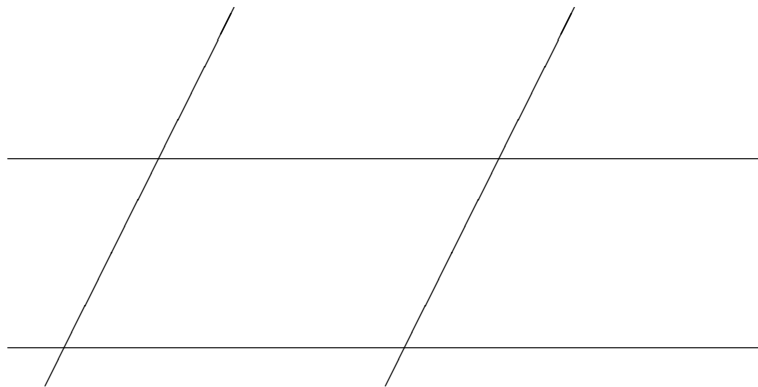
- равные углы;
-
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

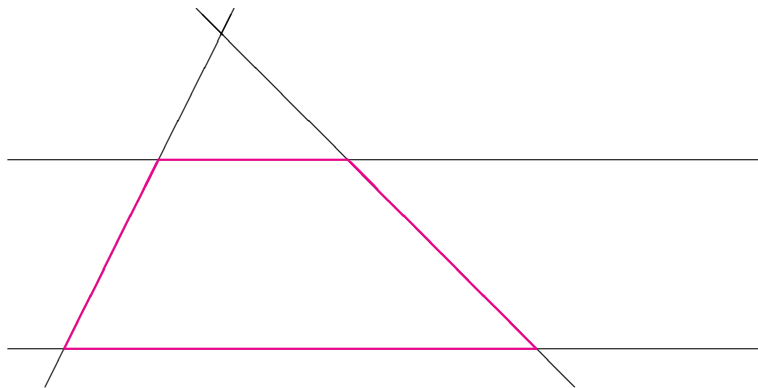
- равные углы;
- параллелограмм
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

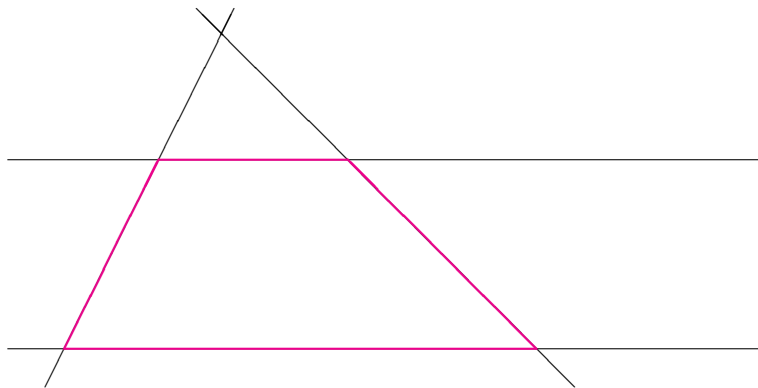
- равные углы;
- параллелограмм и
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

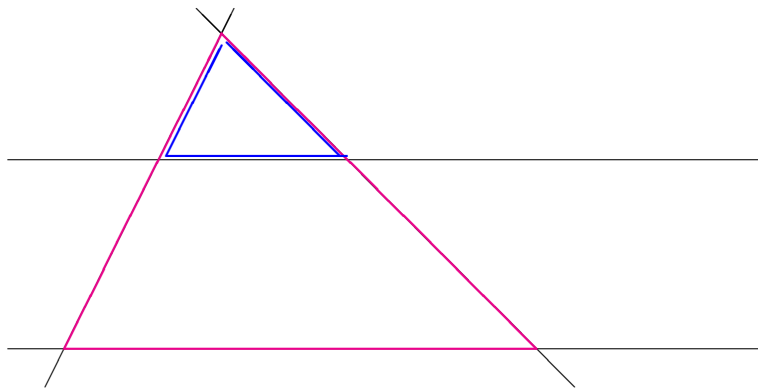
- равные углы;
- параллелограмм и трапеция;
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

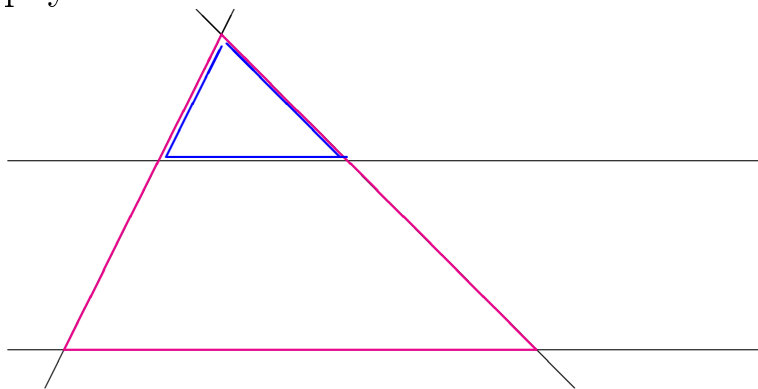
- равные углы;
- параллелограмм и трапеция;
-



III.3. Параллельные прямые

3) Параллельные прямые в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

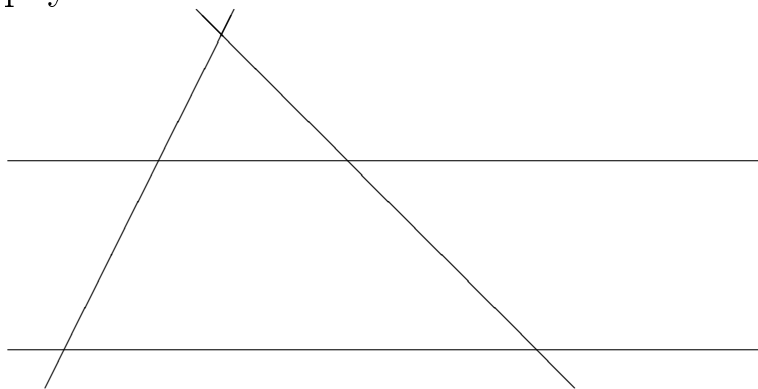
- равные углы;
- параллелограмм и трапеция;
- подобные треугольники.



III.3. Параллельные прямые

3) **Параллельные прямые** в первую очередь должны ассоциироваться с понятиями

- равные углы;
- параллелограмм и трапеция;
- подобные треугольники.



III.4. Площадь треугольника

4) **Площадь треугольника** в первую очередь должна ассоциироваться с понятиями, связанными с **соответствующими формулами**. В частности это

- **высота**;
-

III.4. Площадь треугольника

4) **Площадь треугольника** в первую очередь должна ассоциироваться с понятиями, связанными с **соответствующими формулами**. В частности это

- высота;
- вписанная и описанная окружности (формулы $S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$ и $S_{\Delta} = pr$).

IV. Рекомендации по работе с чертежом

Внешнее и внутреннее обогащение модели

Основная идея обогащения геометрической модели

Правила, обязательные для исполнения

Дополнительные рекомендации

Формулировки для запоминания

IV.1. Внешнее и внутреннее обогащение модели

Обогащение модели называется **внутренним**, если все вновь вводимые элементы могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

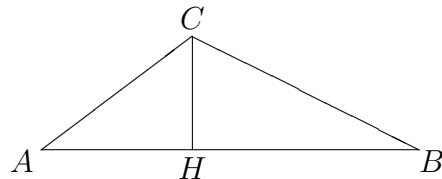
Обогащение модели называется **внешним**, если некоторые из вновь вводимых элементов не могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

IV.1. Внешнее и внутреннее обогащение модели

Обогащение модели называется **внутренним**, если все вновь вводимые элементы могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Обогащение модели называется **внешним**, если некоторые из вновь вводимых элементов не могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Высота CH треугольника ABC равна 15, $AC = 25$, $BC = 39$. Найдите AB .

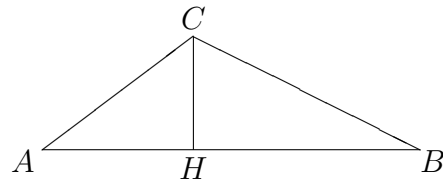


IV.1. Внешнее и внутреннее обогащение модели

Обогащение модели называется **внутренним**, если все вновь вводимые элементы могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Обогащение модели называется **внешним**, если некоторые из вновь вводимых элементов не могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Высота CH треугольника ABC равна 15, $AC = 25$, $BC = 39$. Найдите AB .



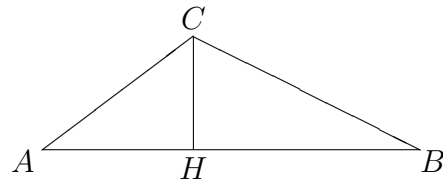
В исходной геометрической модели рассматривается треугольник ABC , отрезки AB , BC , AC , CH , традиционные геометрические величины.

IV.1. Внешнее и внутреннее обогащение модели

Обогащение модели называется **внутренним**, если все вновь вводимые элементы могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Обогащение модели называется **внешним**, если некоторые из вновь вводимых элементов не могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Высота CH треугольника ABC равна 15, $AC = 25$, $BC = 39$. Найдите AB .



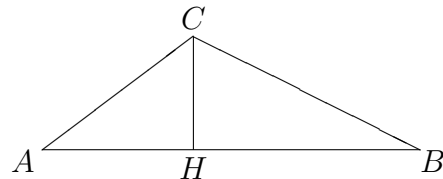
Обогащение геометрической модели треугольниками ACH и BCH является внутренним обогащением геометрической модели,

IV.1. Внешнее и внутреннее обогащение модели

Обогащение модели называется **внутренним**, если все вновь вводимые элементы могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Обогащение модели называется **внешним**, если некоторые из вновь вводимых элементов не могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Высота CH треугольника ABC равна 15, $AC = 25$, $BC = 39$. Найдите AB .



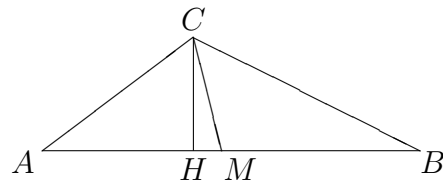
Обогащение геометрической модели треугольниками ACH и BCH является внутренним обогащением геометрической модели, как и введение отрезков AH и HB .

IV.1. Внешнее и внутреннее обогащение модели

Обогащение модели называется **внутренним**, если все вновь вводимые элементы могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Обогащение модели называется **внешним**, если некоторые из вновь вводимых элементов не могут быть адекватно смоделированы средствами исходной модели.

Высота CH треугольника ABC равна 15, $AC = 25$, $BC = 39$. Найдите AB .



Введение, например, медианы CM является внешним обогащением.

IV.2. Основная идея обогащения геометрической модели

Выделить минимальное **внешнее** обогащение геометрической модели, обеспечивающая максимально богатое **внутреннее** обогащение геометрической модели.

IV.3. Правила, обязательные для исполнения

1) Если речь идет о *расстоянии* (его надо найти или оно известно), то надо на чертеже провести отрезок, являющийся «носителем» этой величины, то есть тот отрезок, длина которого равна искомому расстоянию;

$\bullet$
 A

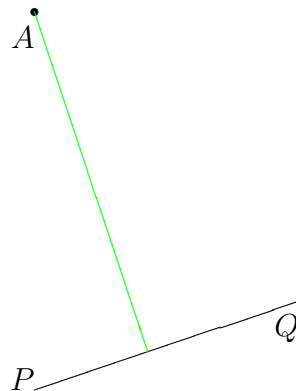
...точка A на расстоянии 5 от прямой PQ ...



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

1) Если речь идет о *расстоянии* (его надо найти или оно известно), то надо на чертеже провести отрезок, являющийся «носителем» этой величины, то есть тот отрезок, длина которого равна искомому расстоянию;

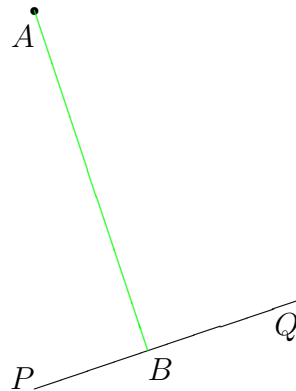
...точка A на расстоянии 5 от прямой PQ ...



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

1) Если речь идет о *расстоянии* (его надо найти или оно известно), то надо на чертеже провести отрезок, являющийся «носителем» этой величины, то есть тот отрезок, длина которого равна искомому расстоянию;

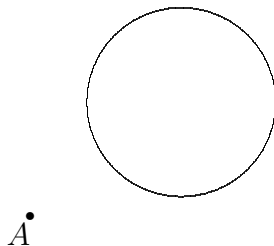
...точка A на расстоянии 5 от прямой PQ ...



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

1) Если речь идет о *расстоянии* (его надо найти или оно известно), то надо на чертеже провести отрезок, являющийся «носителем» этой величины, то есть тот отрезок, длина которого равна искомому расстоянию;

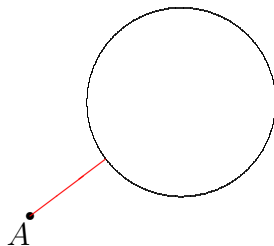
...Найти расстояние от точки A до окружности.



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

1) Если речь идет о *расстоянии* (его надо найти или оно известно), то надо на чертеже провести отрезок, являющийся «носителем» этой величины, то есть тот отрезок, длина которого равна искомому расстоянию;

...Найти расстояние от точки A до окружности.

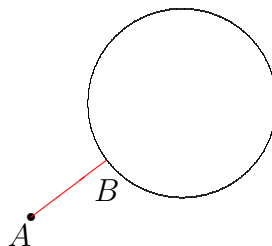


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

1) Если речь идет о *расстоянии* (его надо найти или оно известно), то надо на чертеже провести отрезок, являющийся «носителем» этой величины, то есть тот отрезок, длина которого равна искомому расстоянию;

...Найти расстояние от точки A до окружности.

Как провести AB ?

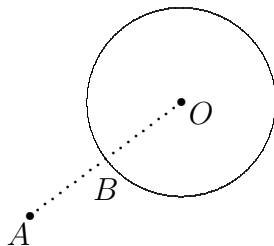


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

1) Если речь идет о *расстоянии* (его надо найти или оно известно), то надо на чертеже провести отрезок, являющийся «носителем» этой величины, то есть тот отрезок, длина которого равна искомому расстоянию;

...Найти расстояние от точки A до окружности.

Проведем AO .

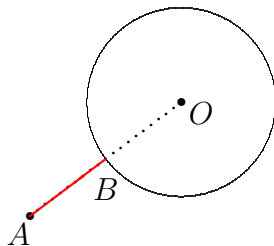


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

1) Если речь идет о *расстоянии* (его надо найти или оно известно), то надо на чертеже провести отрезок, являющийся «носителем» этой величины, то есть тот отрезок, длина которого равна искомому расстоянию;

...Найти расстояние от точки A до окружности.

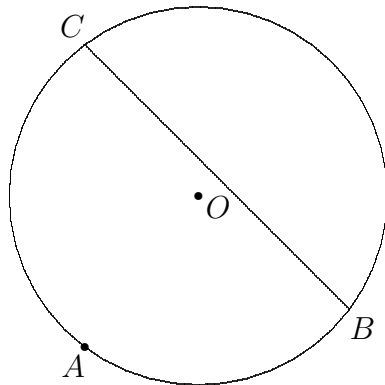
Получили AB , как часть AO .



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

2) если речь идет об *угле* (его надо найти или он известен), то надо на чертеже провести прямые, угол между которыми равен искомому углу;

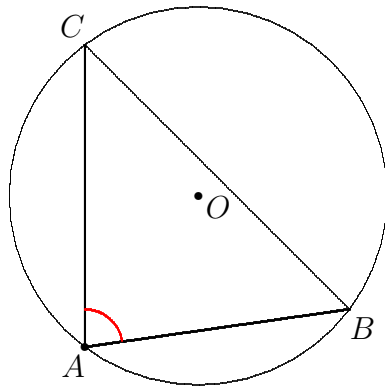
...Под каким углом из точки A
видна хорда BC ?



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

2) если речь идет об *угле* (его надо найти или он известен), то надо на чертеже провести прямые, угол между которыми равен искомому углу;

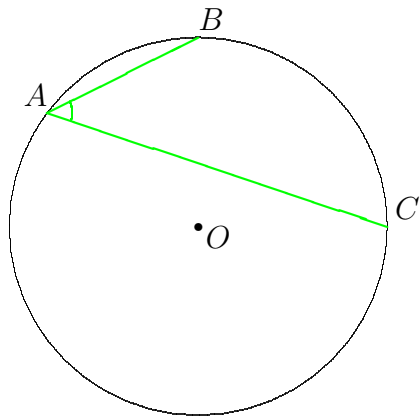
...Под каким углом из точки A
видна хорда BC ?



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

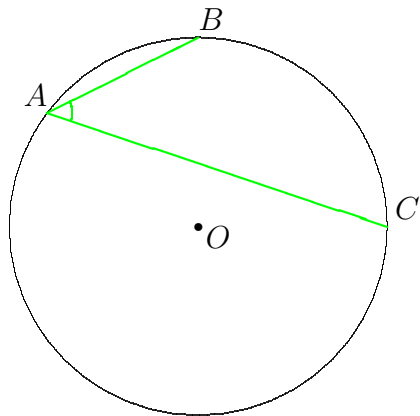


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

Надо найти *радиус* (длину!).

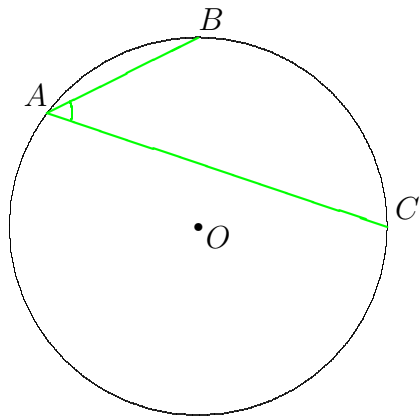


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

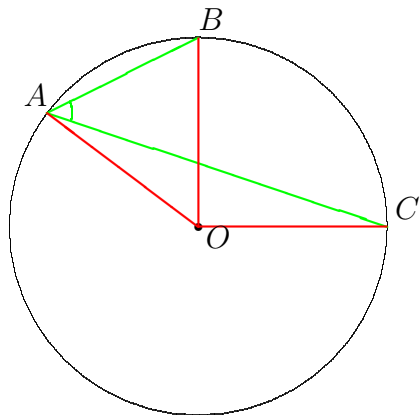
Надо найти *радиус* (длину!). Проведем OA , OB , OC .



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

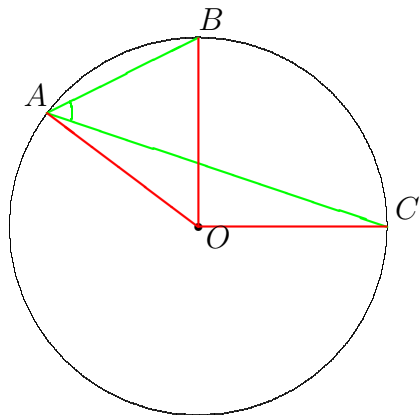


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

В чем недостаток чертежа?

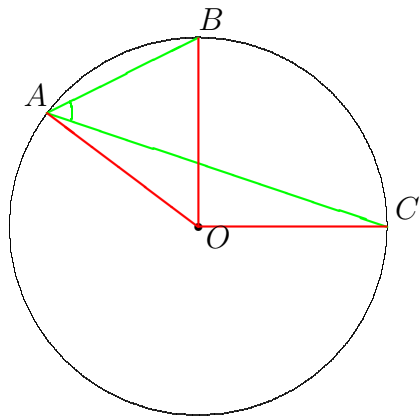


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

Угол BAC и отрезок AC — не в треугольниках!

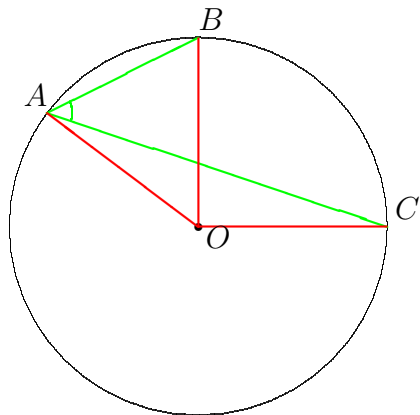


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

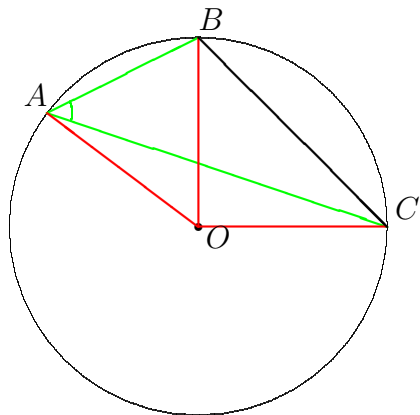
Проведем BC .



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

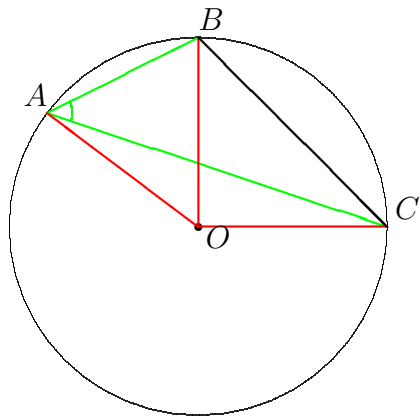


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

В треугольнике ABC нетрудно найти все стороны.

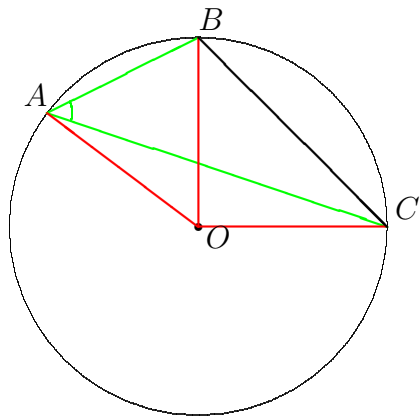


IV.3. Правила, обязательные для исполнения

3) отрезок и угол бесполезны без треугольника;

Угол между хордами AB и AC равен 45° , причем $AB = 10$, $AC = 30$. Найдите радиус окружности.

Значит можно найти радиус описанной окружности по теореме синусов или **из площади $\triangle ABC$**



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

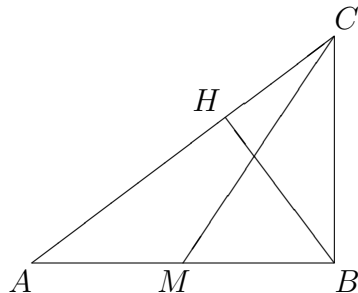
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

Что надо найти?



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

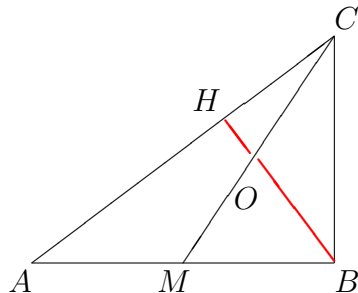
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

Ищем BO и HO .



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

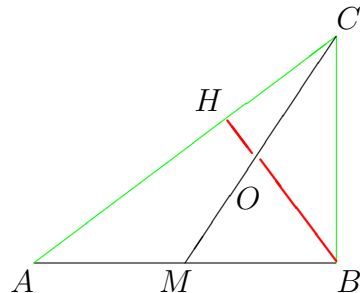
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

Выделим «зеленые» элементы.



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

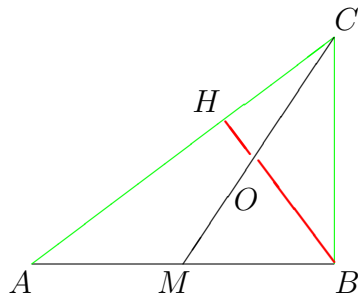
б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

BO — сторона $\triangle BOC$, $\triangle BOM$,

HO — прямоугольного(!) $\triangle HOC$.



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

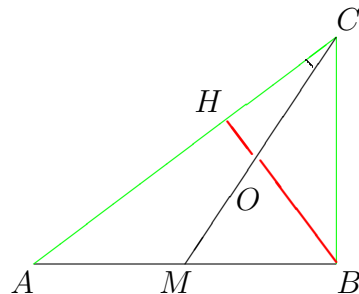
б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

$\triangle HOC$: HC — сторона $\triangle HCB$,

$\angle HCO$ входит в $\triangle ACM$.



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

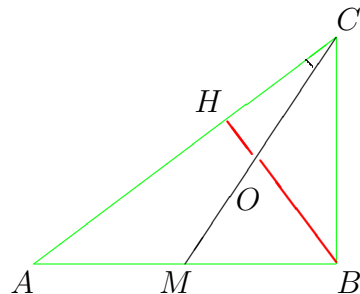
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

По теореме Пифагора «зеленеет» AB .



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

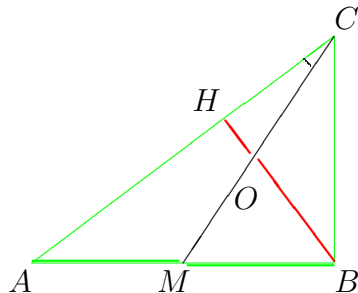
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

«Зеленеют» AM и MB как половинки AB .



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

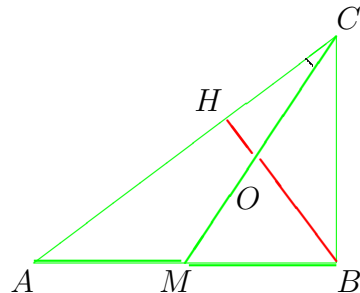
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

По теореме Пифагора, примененной к $\triangle MBC$, «зеленеет» MC .



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

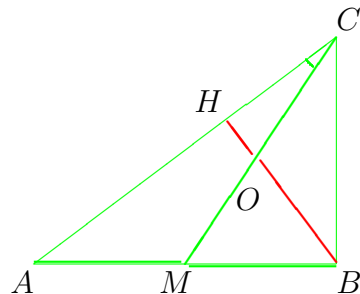
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

По теореме косинусов, примененной к $\triangle ACM$, «зеленеет» $\angle ACM$.



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

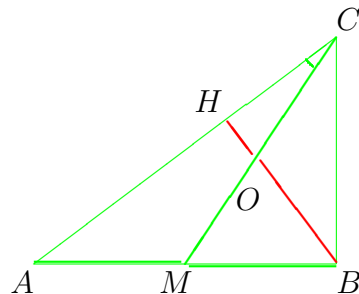
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

Чтобы «позеленел» HO , осталось найти HC .



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

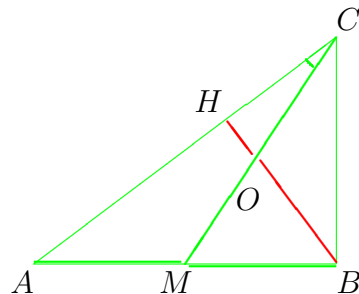
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

HC — сторона $\triangle CHB$, подобного $\triangle ABC$.



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

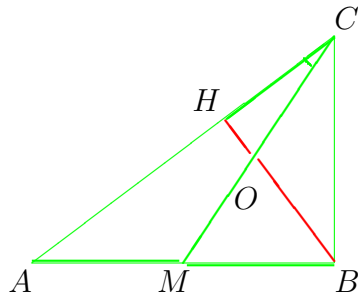
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

Значит, $HC = \frac{BC^2}{AC}$ («позеленел»).



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

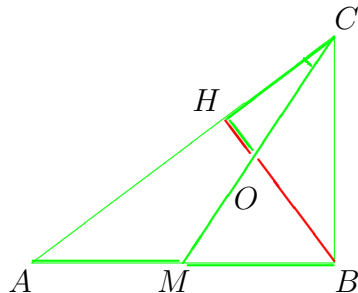
б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

«Зеленеет» HO :

$$HO = HC \cdot \operatorname{tg} \angle ACM.$$



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

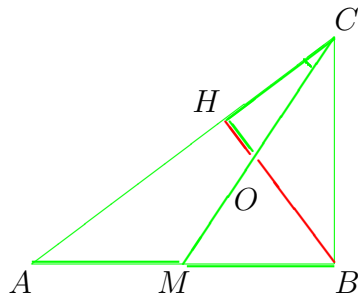
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

Наконец, «зеленеет» OB , как разность длин отрезков BH и OH .



IV.3. Правила, обязательные для исполнения

4) в первую очередь на чертеже надо видеть:

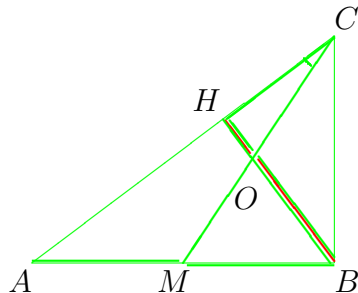
а) «зеленые» отрезки и углы, (величина которых легко вычисляемые из условий задачи);

б) «красные» отрезки и углы, которые надо найти;

в) параллельные и перпендикулярные прямые.

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

Здесь BH «зеленеет», например, с помощью подобия $\triangle BHC$ и $\triangle ABC$.



IV.4. Дополнительные рекомендации

1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»: дополнительно построенные прямые и плоскости должны, как правило, продолжать отрезки и лучи или проходить *параллельно* другим прямым и плоскостям или *перпендикулярно* им.

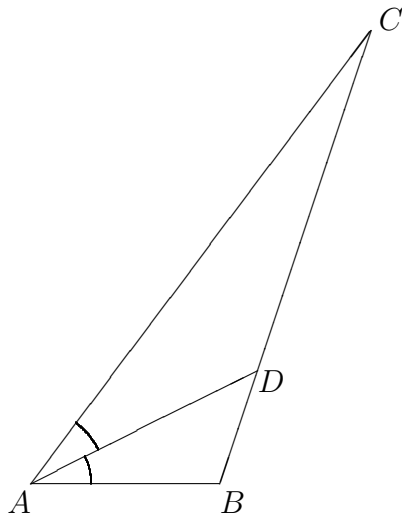
IV.4. Дополнительные рекомендации

1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»: дополнительно построенные прямые и плоскости должны, как правило, продолжать отрезки и лучи или проходить *параллельно* другим прямым и плоскостям или *перпендикулярно* им.

Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам сторон, смежных с этими отрезками.

Надо доказать равенство

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$



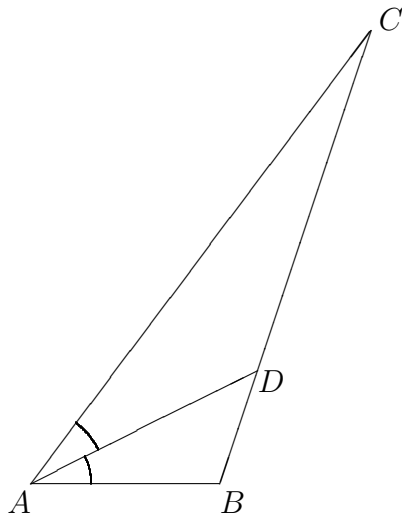
IV.4. Дополнительные рекомендации

1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»: дополнительно построенные прямые и плоскости должны, как правило, продолжать отрезки и лучи или проходить *параллельно* другим прямым и плоскостям или *перпендикулярно* им.

Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам сторон, смежных с этими отрезками.

Как доказать равенство

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}?$$



IV.4. Дополнительные рекомендации

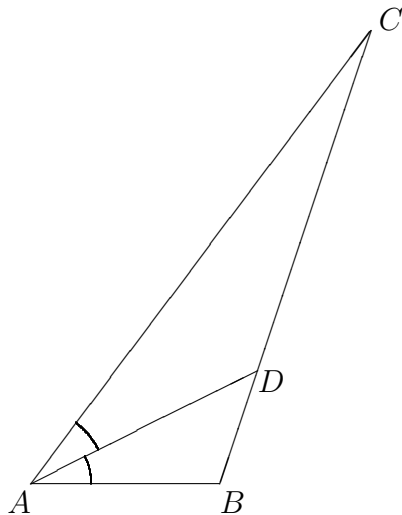
1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»: дополнительно построенные прямые и плоскости должны, как правило, продолжать отрезки и лучи или проходить *параллельно* другим прямым и плоскостям или *перпендикулярно* им.

Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам сторон, смежных с этими отрезками.

Как доказать равенство

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}?$$

Включить отрезки в подобные треугольники.



IV.4. Дополнительные рекомендации

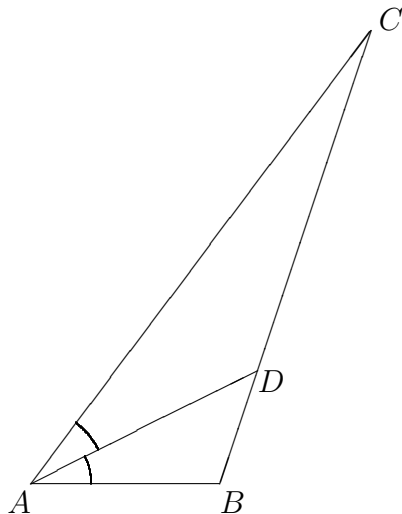
1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»: дополнительно построенные прямые и плоскости должны, как правило, продолжать отрезки и лучи или проходить *параллельно* другим прямым и плоскостям или *перпендикулярно* им.

Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам сторон, смежных с этими отрезками.

Как доказать равенство

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}?$$

Продолжим отрезок AD и опустим перпендикуляры на AD из B и C .



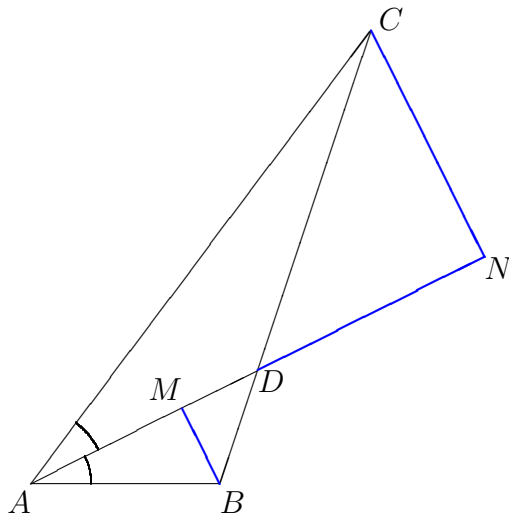
IV.4. Дополнительные рекомендации

1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»: дополнительно построенные прямые и плоскости должны, как правило, продолжать отрезки и лучи или проходить *параллельно* другим прямым и плоскостям или *перпендикулярно* им.

Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам сторон, смежных с этими отрезками.

$\triangle ABM \sim \triangle ACN$, поэтому

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{NC}.$$



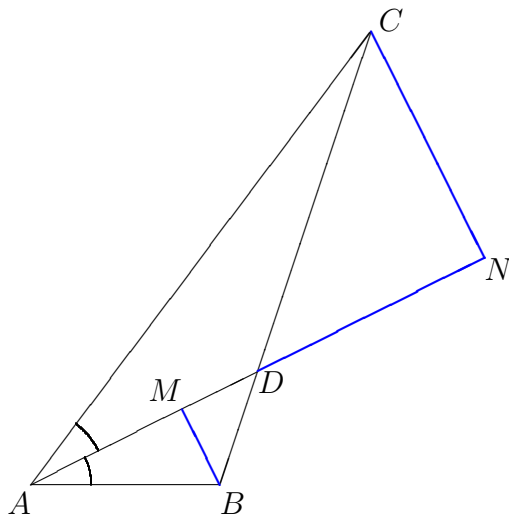
IV.4. Дополнительные рекомендации

1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»: дополнительно построенные прямые и плоскости должны, как правило, продолжать отрезки и лучи или проходить *параллельно* другим прямым и плоскостям или *перпендикулярно* им.

Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам сторон, смежных с этими отрезками.

$\triangle DBM \sim \triangle DCN$, поэтому

$$\frac{MB}{NC} = \frac{BD}{CD}.$$



IV.4. Дополнительные рекомендации

1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»: дополнительно построенные прямые и плоскости должны, как правило, продолжать отрезки и лучи или проходить *параллельно* другим прямым и плоскостям или *перпендикулярно* им.

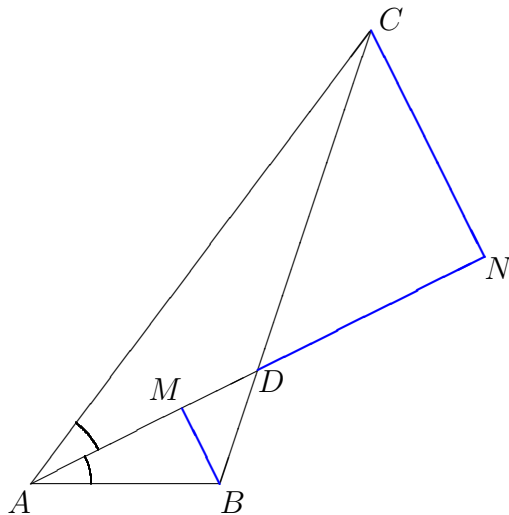
Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам сторон, смежных с этими отрезками.

Следовательно,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{NC} = \frac{BD}{CD},$$

откуда следует доказываемое равен-

ство $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$



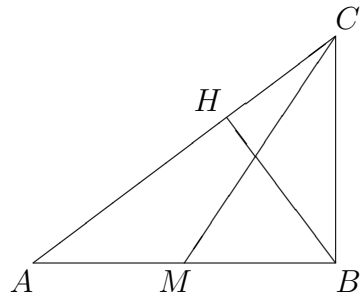
IV.4. Дополнительные рекомендации

2) Вспомогательные построения в треугольниках:

а) если D — середина какой-либо стороны треугольника ABC , то надо провести *средние линии* этого треугольника, проходящие через точку D ;

б) в равнобедренном треугольнике надо провести ту *медиану*, которая совпадает с *биссектрисой* и *высотой*;

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?



IV.4. Дополнительные рекомендации

2) Вспомогательные построения в треугольниках:

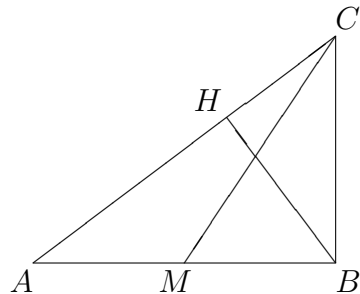
а) если D — середина какой-либо стороны треугольника ABC , то надо провести *средние линии* этого треугольника, проходящие через точку D ;

б) в равнобедренном треугольнике надо провести ту *медиану*, которая совпадает с *биссектрисой* и *высотой*;

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

M — середина AB

Проведем среднюю линию, параллельную AC .



IV.4. Дополнительные рекомендации

2) Вспомогательные построения в треугольниках:

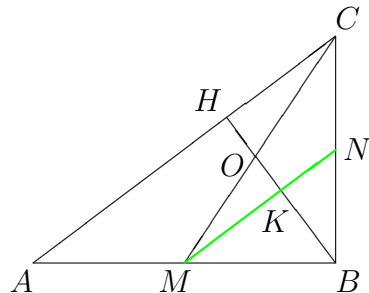
а) если D — середина какой-либо стороны треугольника ABC , то надо провести *средние линии* этого треугольника, проходящие через точку D ;

б) в равнобедренном треугольнике надо провести ту *медиану*, которая совпадает с *биссектрисой* и *высотой*;

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

M — середина AB

Проведем среднюю линию MN .



IV.4. Дополнительные рекомендации

2) Вспомогательные построения в треугольниках:

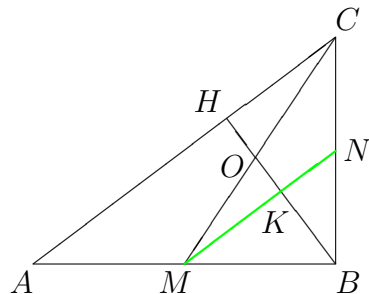
а) если D — середина какой-либо стороны треугольника ABC , то надо провести *средние линии* этого треугольника, проходящие через точку D ;

б) в равнобедренном треугольнике надо провести ту *медиану*, которая совпадает с *биссектрисой* и *высотой*;

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

НО можно найти из подобия

$\triangle COH$ и $\triangle MOK$.



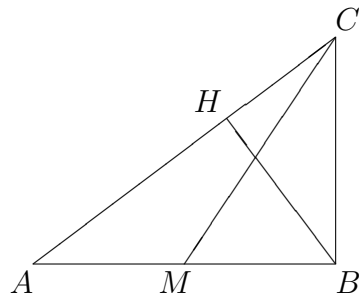
IV.4. Дополнительные рекомендации

2) Вспомогательные построения в треугольниках:

- а) если D — середина какой-либо стороны треугольника ABC , то надо провести *средние линии* этого треугольника, проходящие через точку D ;
- б) в равнобедренном треугольнике надо провести ту *медиану*, которая совпадает с *биссектрисой* и *высотой*;

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

Можно также провести среднюю линию $\triangle ABH$, параллельную BH .



IV.4. Дополнительные рекомендации

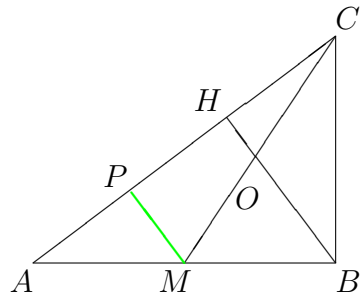
2) Вспомогательные построения в треугольниках:

а) если D — середина какой-либо стороны треугольника ABC , то надо провести *средние линии* этого треугольника, проходящие через точку D ;

б) в равнобедренном треугольнике надо провести ту *медиану*, которая совпадает с *биссектрисой* и *высотой*;

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC равна 5, а катет BC равен 3. Пусть BH — высота $\triangle ABC$, опущенная из B , CM — медиана $\triangle ABC$, опущенная из C . На отрезки какой длины делит высоту BH медиана CM ?

Можно использовать подобие $\triangle AHO \sim \triangle APM$ и отношения $BH = 2PM$, $AP = PH$.

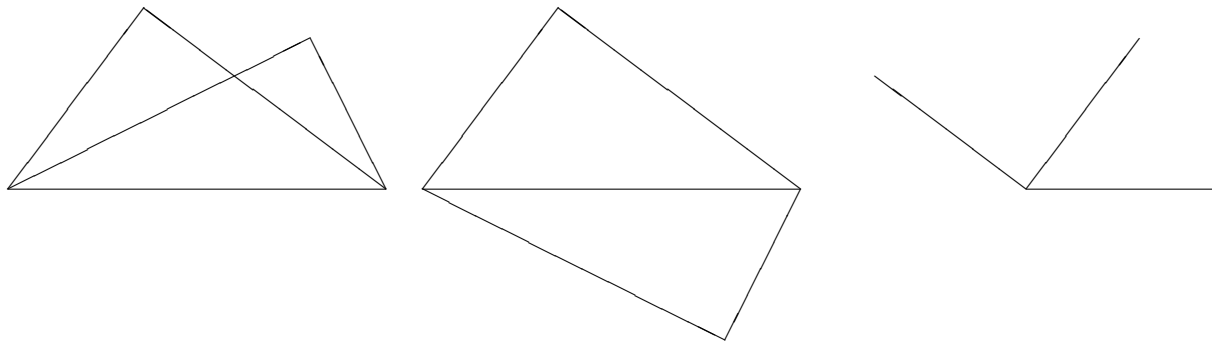


IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

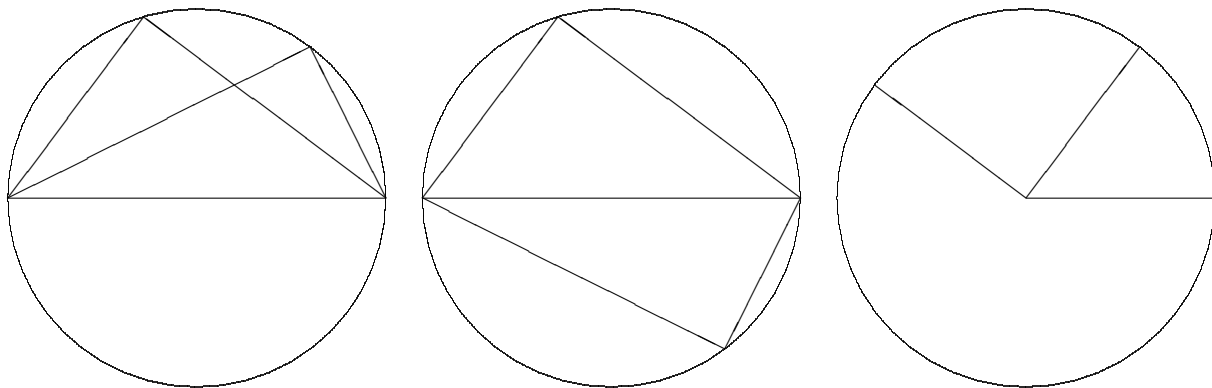


IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;



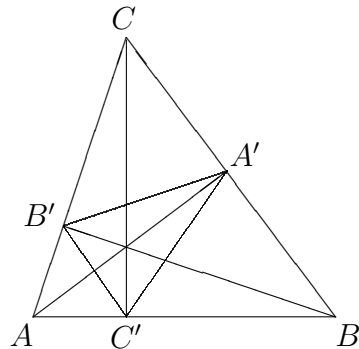
IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.



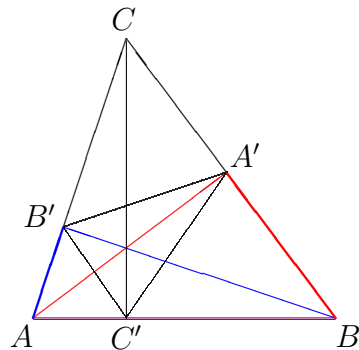
IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.



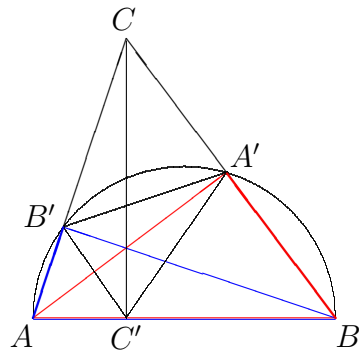
IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.



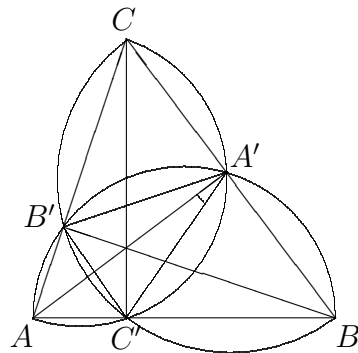
IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.



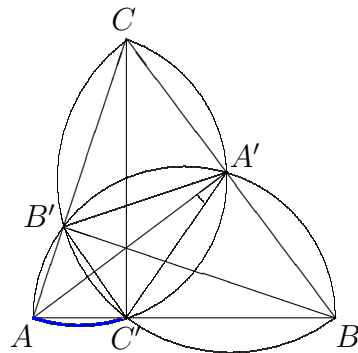
IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.



IV.4. Дополнительные рекомендации

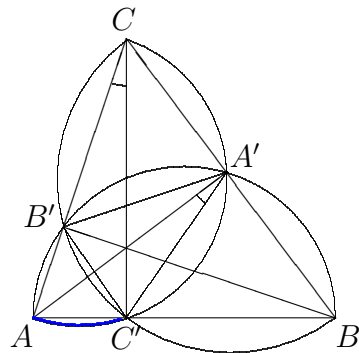
3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.

Получаем $\angle AA'C' = \angle ACC'$.



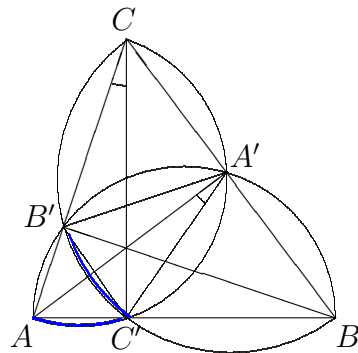
IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.



IV.4. Дополнительные рекомендации

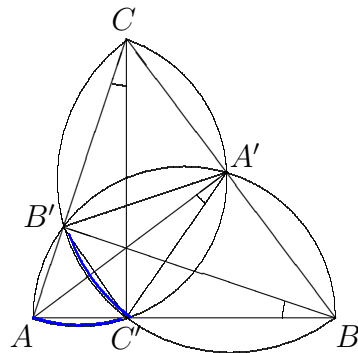
3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.

Получаем $\angle AA'C' = \angle ACC' = \angle ABB'$.



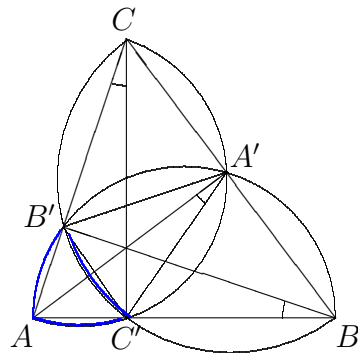
IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.



IV.4. Дополнительные рекомендации

3) Построение вспомогательных окружностей:

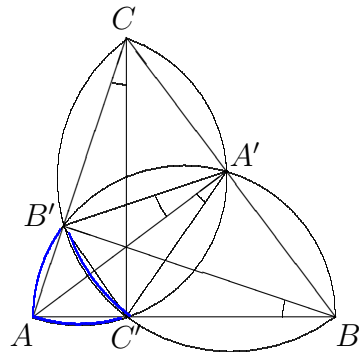
а) если имеется два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, изобразите описанную окружность (ее центр лежит на середине общей гипотенузы);

б) если имеется три равных отрезка AB , AC , AD , то следует провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' , BB' , CC' , где A' принадлежит стороне BC , B' — стороне AC , C' — стороне AB . Докажите, что в треугольнике $A'B'C'$ прямая AA' является биссектрисой.

Получаем $\angle AA'C' = \angle ACC' = \angle ABB' = \angle AA'B'$.

Ура!



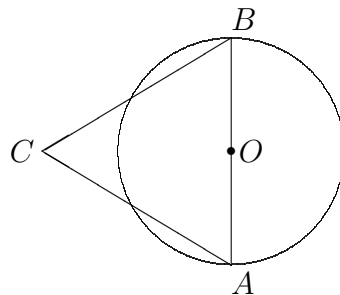
IV.4. Дополнительные рекомендации

4) Анализ имеющихся окружностей:

а) если есть окружность и какие-то точки на ней, проведите соответствующие радиусы;

б) особое внимание — вписанным и центральным углам, опирающимся на одинаковые дуги. Чрезвычайно важны вписанные углы, «опирающиеся на диаметр» (на дугу, стянутую диаметром), поскольку эти вписанные углы — прямые.

Сторона AB треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей другие стороны пополю. Найдите $\angle ACB$.



IV.4. Дополнительные рекомендации

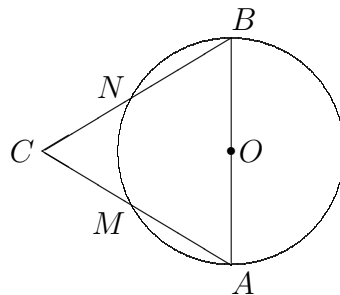
4) Анализ имеющихся окружностей:

а) если есть окружность и какие-то точки на ней, проведите соответствующие радиусы;

б) особое внимание — вписанным и центральным углам, опирающимся на одинаковые дуги. Чрезвычайно важны вписанные углы, «опирающиеся на диаметр» (на дугу, стянутую диаметром), поскольку эти вписанные углы — прямые.

Сторона AB треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей другие стороны по середине. Найдите $\angle ACB$.

Проведем радиусы OM , ON



IV.4. Дополнительные рекомендации

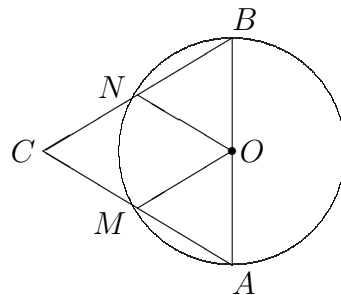
4) Анализ имеющихся окружностей:

а) если есть окружность и какие-то точки на ней, проведите соответствующие радиусы;

б) особое внимание — вписанным и центральным углам, опирающимся на одинаковые дуги. Чрезвычайно важны вписанные углы, «опирающиеся на диаметр» (на дугу, стянутую диаметром), поскольку эти вписанные углы — прямые.

Сторона AB треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей другие стороны пополам. Найдите $\angle ACB$.

Радиусы OM , ON являются также средними линиями $\triangle ABC$.



IV.4. Дополнительные рекомендации

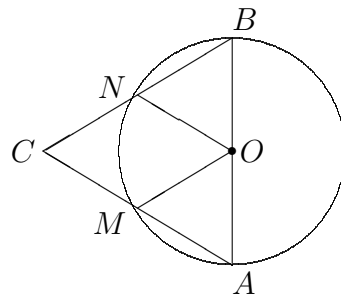
4) Анализ имеющихся окружностей:

а) если есть окружность и какие-то точки на ней, проведите соответствующие радиусы;

б) особое внимание — вписанным и центральным углам, опирающимся на одинаковые дуги. Чрезвычайно важны вписанные углы, «опирающиеся на диаметр» (на дугу, стянутую диаметром), поскольку эти вписанные углы — прямые.

Сторона AB треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей другие стороны пополам. Найдите $\angle ACB$.

Радиусы OM , ON являются также средними линиями $\triangle ABC$, поэтому $AC = BC = 2R$.



IV.4. Дополнительные рекомендации

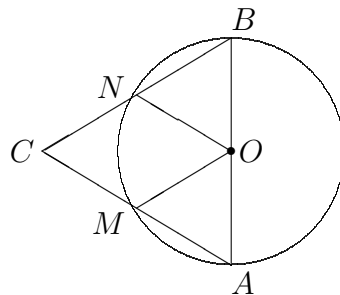
4) Анализ имеющихся окружностей:

а) если есть окружность и какие-то точки на ней, проведите соответствующие радиусы;

б) особое внимание — вписанным и центральным углам, опирающимся на одинаковые дуги. Чрезвычайно важны вписанные углы, «опирающиеся на диаметр» (на дугу, стянутую диаметром), поскольку эти вписанные углы — прямые.

Сторона AB треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей другие стороны по середине. Найдите $\angle ACB$.

Следовательно, $\triangle ABC$ — равносторонний, поэтому $\angle ACB = 60^\circ$.



IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) Если речь идет о *расстоянии* — провести соответствующий отрезок;

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) Если речь идет о *расстоянии* — провести соответствующий отрезок;
- 2) если речь идет об *угле* — провести соответствующие лучи;

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) Если речь идет о *расстоянии* — провести соответствующий отрезок;
- 2) если речь идет об *угле* — провести соответствующие лучи;
- 3) отрезок или угол «бесполезен без треугольника»;

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) Если речь идет о *расстоянии* — провести соответствующий отрезок;
- 2) если речь идет об *угле* — провести соответствующие лучи;
- 3) отрезок или угол «бесполезен без треугольника»;
- 4) «включить цветное зрение»:

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) Если речь идет о *расстоянии* — провести соответствующий отрезок;
- 2) если речь идет об *угле* — провести соответствующие лучи;
- 3) отрезок или угол «бесполезен без треугольника»;
- 4) «включить цветное зрение»:
 - а) «зеленые» отрезки и углы (величина которых легко вычисляется из условий задачи);

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) Если речь идет о *расстоянии* — провести соответствующий отрезок;
- 2) если речь идет об *угле* — провести соответствующие лучи;
- 3) отрезок или угол «бесполезен без треугольника»;
- 4) «включить цветное зрение»:
 - а) «зеленые» отрезки и углы (величина которых легко вычисляется из условий задачи);
 - б) «красные» отрезки и углы (которые надо найти);

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) Если речь идет о *расстоянии* — провести соответствующий отрезок;
- 2) если речь идет об *угле* — провести соответствующие лучи;
- 3) отрезок или угол «бесполезен без треугольника»;
- 4) «включить цветное зрение»:
 - а) «зеленые» отрезки и углы (величина которых легко вычисляется из условий задачи);
 - б) «красные» отрезки и углы (которые надо найти);
 - в) прямые, параллельные и перпендикулярные «цветным» отрезкам.

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир».

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир».
- 2) В треугольниках:

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир».
- 2) В треугольниках:
 - а) середина стороны — провести средние линии;

IV.5. Формулировки для запоминания.

1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир».

2) В треугольниках:

- а) середина стороны — провести средние линии;
- б) в равнобедренном треугольнике — провести
- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{медиану} = \\ \text{биссектрису} = \\ \text{высоту}. \end{array} \right.$$

IV.5. Формулировки для запоминания.

- 1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир».
 - 2) В треугольниках:
 - а) середина стороны — провести средние линии;
 - б) в равнобедренном треугольнике — провести
 - 3) Построение вспомогательных окружностей:
- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{медиану} = \\ \text{= биссектрису} = \\ \text{= высоту.} \end{array} \right.$$

IV.5. Формулировки для запоминания.

1) **«Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»**.

2) В треугольниках:

- а) середина стороны — провести средние линии;
б) в равнобедренном треугольнике — провести
- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{медиану} = \\ \text{биссектрису} = \\ \text{высоту}. \end{array} \right.$$

3) Построение вспомогательных окружностей:

- а) два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой — провести общую для них описанную окружность;

IV.5. Формулировки для запоминания.

1) **«Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»**.

2) В треугольниках:

- а) середина стороны — провести средние линии;
б) в равнобедренном треугольнике — провести
- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{медиану} = \\ \text{биссектрису} = \\ \text{высоту}. \end{array} \right.$$

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой — провести общую для них описанную окружность;

б) три равных отрезка AB , AC , AD — провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

IV.5. Формулировки для запоминания.

1) **«Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир»**.

2) В треугольниках:

а) середина стороны — провести средние линии;

б) в равнобедренном треугольнике — провести

3) Построение вспомогательных окружностей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{медиану} = \\ \text{биссектрису} = \\ \text{высоту}. \end{array} \right.$$

а) два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой — провести общую для них описанную окружность;

б) три равных отрезка AB , AC , AD — провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

4) Анализ имеющихся окружностей:

IV.5. Формулировки для запоминания.

1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир».

2) В треугольниках:

- а) середина стороны — провести средние линии;
 - б) в равнобедренном треугольнике — провести
- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{медиану} = \\ \text{биссектрису} = \\ \text{высоту}. \end{array} \right.$$

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой — провести общую для них описанную окружность;

б) три равных отрезка AB , AC , AD — провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

4) Анализ имеющихся окружностей:

- а) есть точки на окружности — провести в них радиусы;

IV.5. Формулировки для запоминания.

1) «Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир».

2) В треугольниках:

- а) середина стороны — провести средние линии;
 - б) в равнобедренном треугольнике — провести
- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{медиану} = \\ \text{биссектрису} = \\ \text{высоту.} \end{array} \right.$$

3) Построение вспомогательных окружностей:

а) два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой — провести общую для них описанную окружность;

б) три равных отрезка AB , AC , AD — провести окружность с центром в точке A радиусом $R = |AB| = |AC| = |AD|$;

4) Анализ имеющихся окружностей:

- а) есть точки на окружности — провести в них радиусы;
- б) внимание вписанным и центральным углам, опирающимся на одну дугу, особенно если это дуга стянута диаметром.

Применим к задачам на вычисление?

V. Построение иллюстративных геометрических моделей

Построение иллюстративной геометрической модели во многом сводится к выполнению чертежа.

V. Построение иллюстративных геометрических моделей

Построение иллюстративной геометрической модели во многом сводится к выполнению чертежа.

Построение геометрического чертежа в школьном курсе математики заключается в проведении отрезков прямых и дуг окружностей.

V. Построение иллюстративных геометрических моделей

Построение иллюстративной геометрической модели во многом сводится к выполнению чертежа.

Построение геометрического чертежа в школьном курсе математики заключается в проведении отрезков прямых и дуг окружностей.

Для проведения прямой нужно иметь две точки, принадлежащие этой прямой. Обычно выбор точки осуществляется с достаточно высокой точностью, даже, например, при проведении касательной к прямой.

V. Построение иллюстративных геометрических моделей

Построение иллюстративной геометрической модели во многом сводится к выполнению чертежа.

Построение геометрического чертежа в школьном курсе математики заключается в проведении отрезков прямых и дуг окружностей.

Для проведения прямой нужно иметь две точки, принадлежащие этой прямой. Обычно выбор точки осуществляется с достаточно высокой точностью, даже, например, при проведении касательной к прямой.

Для проведения окружности нужна точка (центр окружности) и отрезок (пара точек). Для проведения дуги необходимы еще две точки (концы дуги).

V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

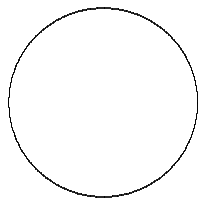
Прямая строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) проводится через точку параллельно или перпендикулярно имеющейся прямой, либо в) проводится через две точки.

V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

Прямая строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) проводится через точку параллельно или перпендикулярно имеющейся прямой, либо в) проводится через две точки.

Окружность строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо



V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

Прямая строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) проводится через точку параллельно или перпендикулярно имеющейся прямой, либо в) проводится через две точки.

Окружность строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) по *центру окружности*, и фиксированному отрезку, равному по длине *радиусу окружности*, либо



V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

Прямая строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) проводится через точку параллельно или перпендикулярно имеющейся прямой, либо в) проводится через две точки.

Окружность строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) по *центру окружности*, и фиксированному отрезку, равному по длине *радиусу окружности*, либо

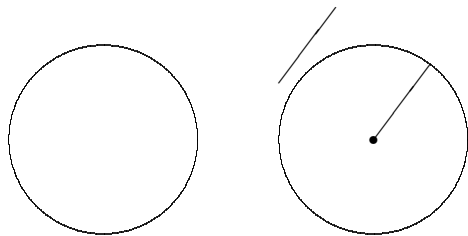


V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

Прямая строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) проводится через точку параллельно или перпендикулярно имеющейся прямой, либо в) проводится через две точки.

Окружность строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) по *центру окружности*, и фиксированному отрезку, равному по длине *радиусу окружности*, либо

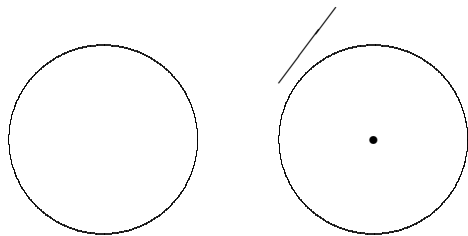


V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

Прямая строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) проводится через точку параллельно или перпендикулярно имеющейся прямой, либо в) проводится через две точки.

Окружность строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) по *центру окружности*, и фиксированному отрезку, равному по длине *радиусу окружности*, либо

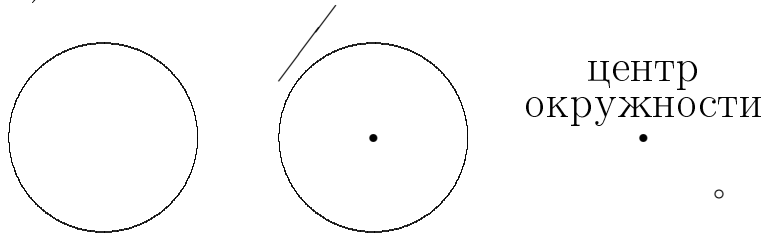


V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

Прямая строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) проводится через точку параллельно или перпендикулярно имеющейся прямой, либо в) проводится через две точки.

Окружность строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) по *центру окружности*, и фиксированному отрезку, равному по длине *радиусу окружности*, либо в) по *центру окружности* и фиксированной точке на окружности.

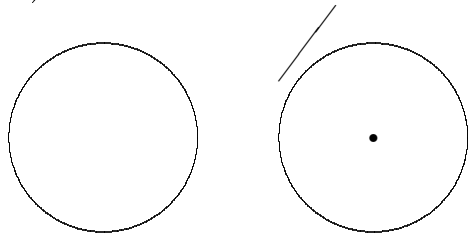


V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

Прямая строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) проводится через точку параллельно или перпендикулярно имеющейся прямой, либо в) проводится через две точки.

Окружность строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) по *центру окружности*, и фиксированному отрезку, равному по длине *радиусу окружности*, либо в) по *центру окружности* и фиксированной точке на окружности.



центр
окружности



точка на
окружности

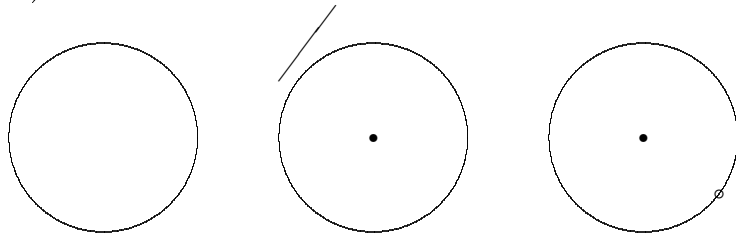


V.1. Построение основных элементов чертежа: точек, прямых и окружностей

Точка строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) как пересечение двух линий.

Прямая строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) проводится через точку параллельно или перпендикулярно имеющейся прямой, либо в) проводится через две точки.

Окружность строится либо а) случайным выбором в некоторой области, либо б) по *центру окружности*, и фиксированному отрезку, равному по длине *радиусу окружности*, либо в) по *центру окружности* и фиксированной точке на окружности.



Рассмотрим пример?

V.2. Окружность и хорда

Сравним построение 1) хорды в окружности; 2) окружности, проходящей через концы отрезка.

V.2. Окружность и хорда

Сравним построение 1) хорды в окружности; 2) окружности, проходящей через концы отрезка.

Для построения хорды следует найти две точки на окружности (например, взять произвольно или получить их как точки пересечения с какими-либо линиями).

V.2. Окружность и хорда

Сравним построение 1) хорды в окружности; 2) окружности, проходящей через концы отрезка.

Для построения хорды следует найти две точки на окружности (например, взять произвольно или получить их как точки пересечения с какими-либо линиями).

Для построения окружности, проходящей через концы отрезка (отрезок станет хордой) следует построить центр окружности (получим задачу проведения окружности с известным центром, проходящую через данную точку).

V.2. Окружность и хорда

Сравним построение 1) хорды в окружности; 2) окружности, проходящей через концы отрезка.

Для построения хорды следует найти две точки на окружности (например, взять произвольно или получить их как точки пересечения с какими-либо линиями).

Для построения окружности, проходящей через концы отрезка (отрезок станет хордой) следует построить центр окружности (получим задачу проведения окружности с известным центром, проходящую через данную точку).

Ясно, что второе построение значительно сложнее и осуществляется с бóльшей погрешностью.

V.2. Окружность и хорда

Сравним построение 1) хорды в окружности; 2) окружности, проходящей через концы отрезка.

Для построения хорды следует найти две точки на окружности (например, взять произвольно или получить их как точки пересечения с какими-либо линиями).

Для построения окружности, проходящей через концы отрезка (отрезок станет хордой) следует построить центр окружности (получим задачу проведения окружности с известным центром, проходящую через данную точку).

Ясно, что второе построение значительно сложнее и осуществляется с бóльшей погрешностью.

Поэтому в этом случае обычно выгоднее сначала построить окружность, а потом провести хорду.

V.2. Окружность и касательная

Сравним построение 1) касательной к окружности; 2) окружности, касающейся имеющейся прямой.

V.2. Окружность и касательная

Сравним построение 1) касательной к окружности; 2) окружности, касающейся имеющейся прямой.

Построение касательной, проходящей через точку окружности или точку вне окружности, не очень чувствительно к небольшим погрешностям в выборе угла.

V.2. Окружность и касательная

Сравним построение 1) касательной к окружности; 2) окружности, касающейся имеющейся прямой.

Построение касательной, проходящей через точку окружности или точку вне окружности, не очень чувствительно к небольшим погрешностям в выборе угла.

Для построения окружности, касательной по отношению к данному отрезку, следует построить центр окружности и ее радиус. Если центр окружности построен или выбран каким-либо образом, построение окружности не очень чувствительно к небольшим погрешностям в выборе радиуса.

V.2. Окружность и касательная

Сравним построение 1) касательной к окружности; 2) окружности, касающейся имеющейся прямой.

Построение касательной, проходящей через точку окружности или точку вне окружности, не очень чувствительно к небольшим погрешностям в выборе угла.

Для построения окружности, касательной по отношению к данному отрезку, следует построить центр окружности и ее радиус. Если центр окружности построен или выбран каким-либо образом, построение окружности не очень чувствительно к небольшим погрешностям в выборе радиуса.

Трудности обычно связаны с построением центра окружности.

V.2. Окружность и касательная

Сравним построение 1) касательной к окружности; 2) окружности, касающейся имеющейся прямой.

Построение касательной, проходящей через точку окружности или точку вне окружности, не очень чувствительно к небольшим погрешностям в выборе угла.

Для построения окружности, касательной по отношению к данному отрезку, следует построить центр окружности и ее радиус. Если центр окружности построен или выбран каким-либо образом, построение окружности не очень чувствительно к небольшим погрешностям в выборе радиуса.

Трудности обычно связаны с построением центра окружности.

Поэтому и в данном случае обычно выгоднее сначала построить окружность, а потом провести хорду.

V.3. Вывод о построении чертежа, содержащего окружность

Если в чертеже имеется окружность, обычно целесообразно построение чертежа начинать с построения этой окружности.

Рассмотрим пример построения чертежа в геометрии?

V.3. Вывод о построении чертежа, содержащего окружность

Если в чертеже имеется окружность, обычно целесообразно построение чертежа начинать с построения этой окружности.

Рассмотрим пример решения задачи с построением чертежа?

VI. Теорема Пифагора

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:
длина отрезка (длина стороны, длина высоты и др.),

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:
длина отрезка и величина угла.

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства

Например: сумма углов треугольника равна

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства

Например: сумма углов треугольника равна 180° ,

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства

Например: сумма углов треугольника равна 180° ,
сумма длин двух сторон _____ длины третьей стороны.

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства

Например: сумма углов треугольника равна 180° ,
сумма длин двух сторон не меньше длины третьей стороны.

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства и ввести новые понятия.

Например, площадь и периметр треугольника.

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства и ввести новые понятия.

Прямоугольный треугольник позволил нам естественным образом связать между собой длины сторон и углы (с помощью понятий «синус угла», «косинус угла», «тангенс угла»).

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства и ввести новые понятия.

Прямоугольный треугольник позволил нам естественным образом связать между собой длины сторон и углы (с помощью понятий «синус угла», «косинус угла», «тангенс угла»).

А если рассмотреть квадраты базовых величин?

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства и ввести новые понятия.

Прямоугольный треугольник позволил нам естественным образом связать между собой длины сторон и углы (с помощью понятий «синус угла», «косинус угла», «тангенс угла»).

А если рассмотреть квадраты базовых величин?

Имеет ли смысл рассматривать квадрат величины угла?

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства и ввести новые понятия.

Прямоугольный треугольник позволил нам естественным образом связать между собой длины сторон и углы (с помощью понятий «синус угла», «косинус угла», «тангенс угла»).

А если рассмотреть квадраты базовых величин?

«Квадратные градусы» трудно представить геометрически.

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Для треугольника базовыми величинами являются:

длина отрезка и величина угла.

С помощью комбинирования этих величин мы смогли установить свойства и ввести новые понятия.

Прямоугольный треугольник позволил нам естественным образом связать между собой длины сторон и углы (с помощью понятий «синус угла», «косинус угла», «тангенс угла»).

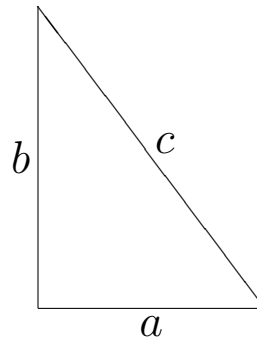
А если рассмотреть квадраты базовых величин?

А квадраты длин отрезков имеют естественную интерпретацию.

VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Квадрат длины отрезка

можно представить как

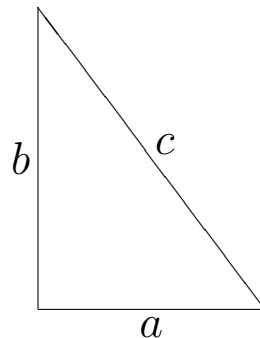


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Квадрат длины отрезка

можно представить как

площадь квадрата.

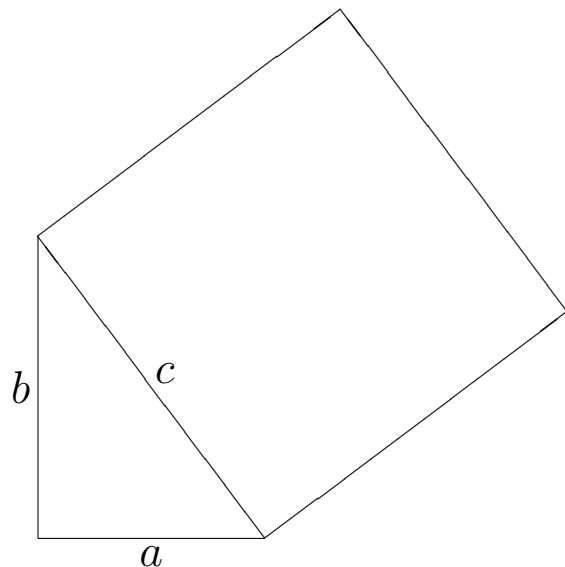


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Квадрат длины отрезка

можно представить как

площадь квадрата.

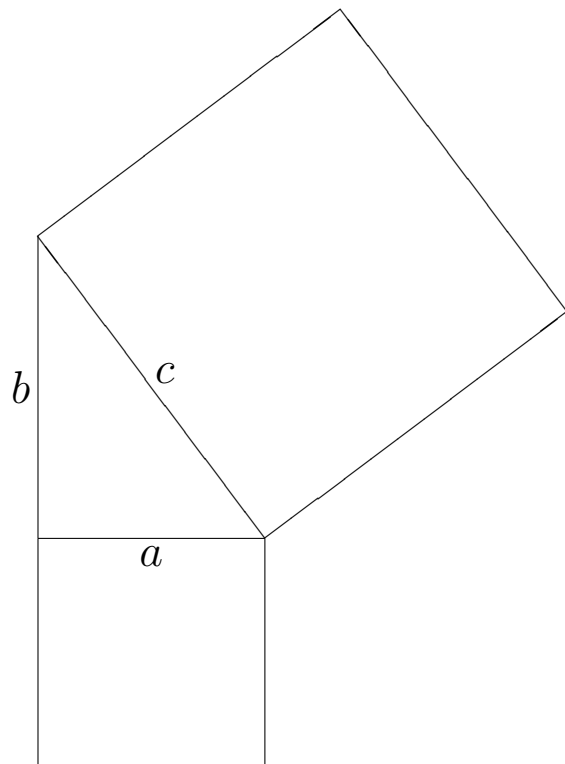


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Квадрат длины отрезка

можно представить как

площадь квадрата.

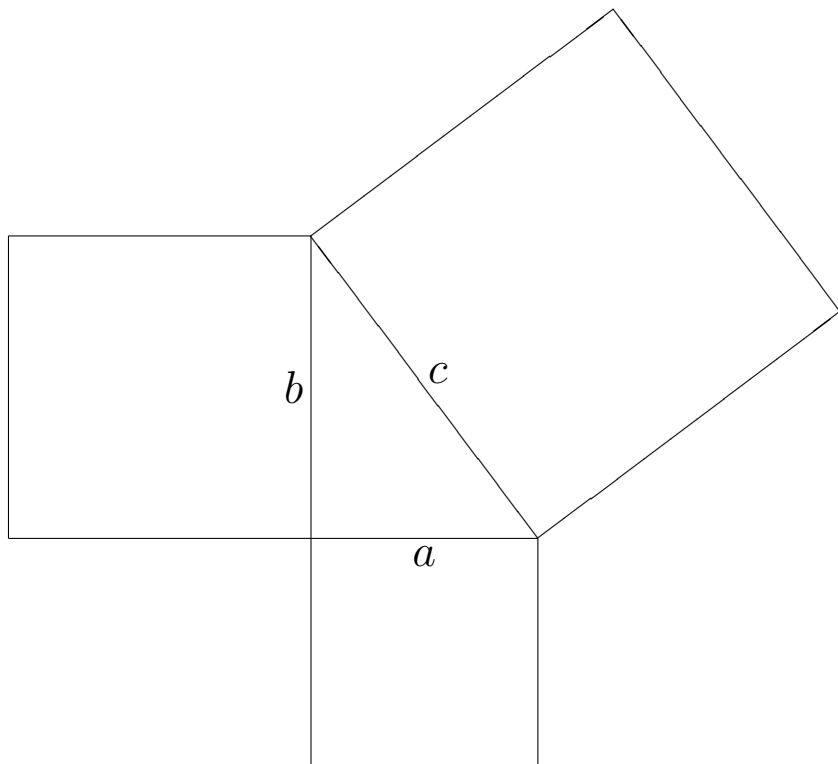


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Квадрат длины отрезка

можно представить как

площадь квадрата.



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Квадрат длины отрезка

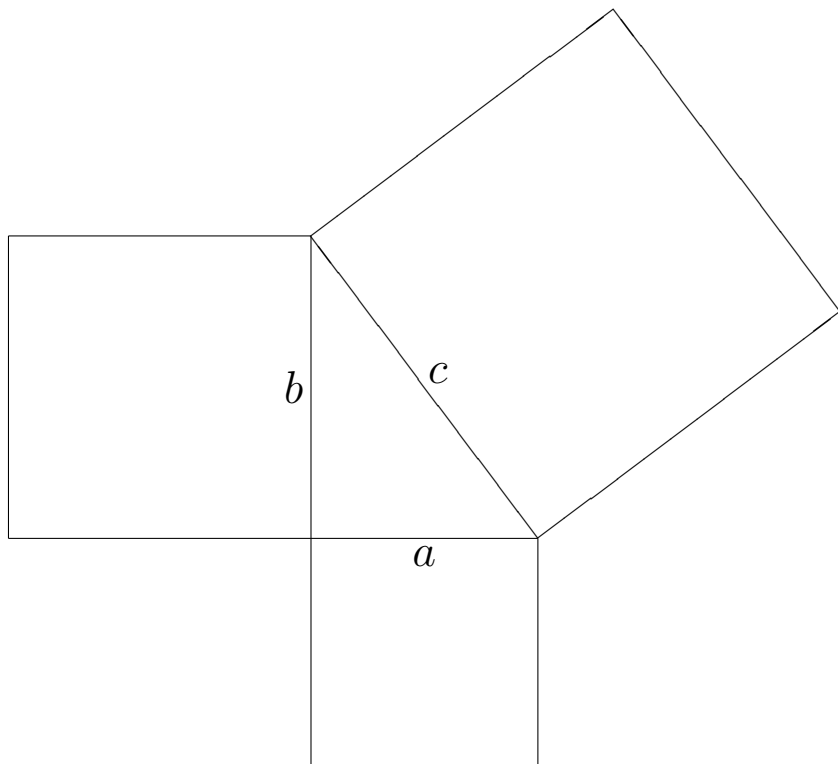
можно представить как

площадь квадрата.

Попробуем установить

связь между этими пло-

щадями.



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Квадрат длины отрезка

можно представить как

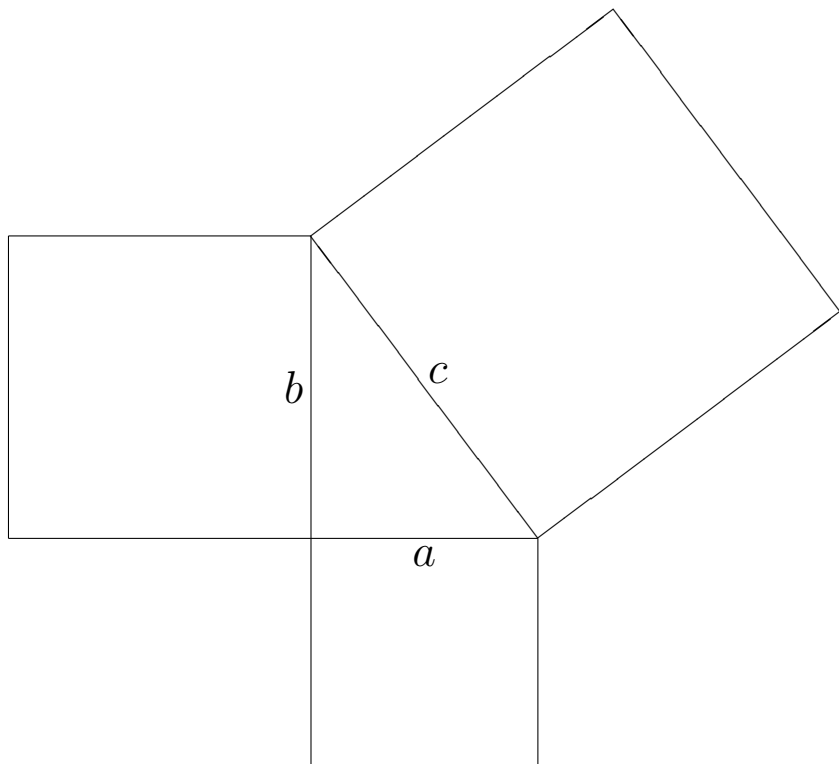
площадь квадрата.

Попробуем установить

связь между этими пло-

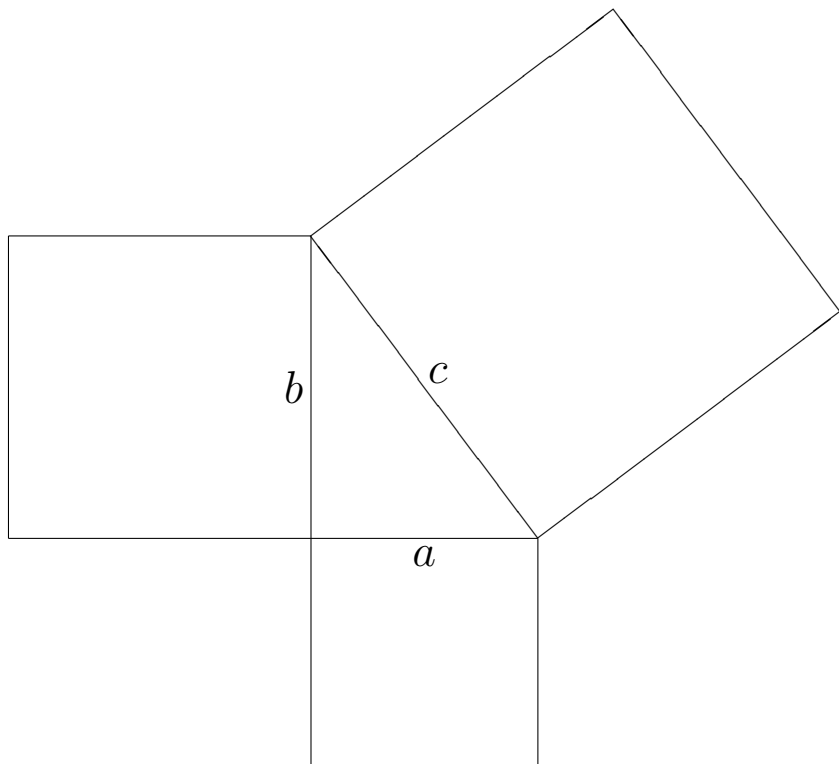
щадями.

Как?



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

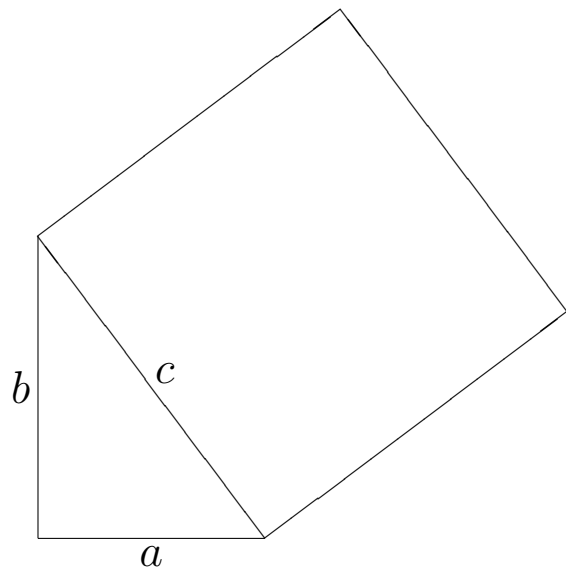
Попробуем построить некоторую несложную фигуру и разрезать её разными способами так, чтобы получить некоторое равенство для квадратов длин сторон.



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Попробуем построить некоторую несложную фигуру и разрезать её разными способами так, чтобы получить некоторое равенство для квадратов длин сторон.

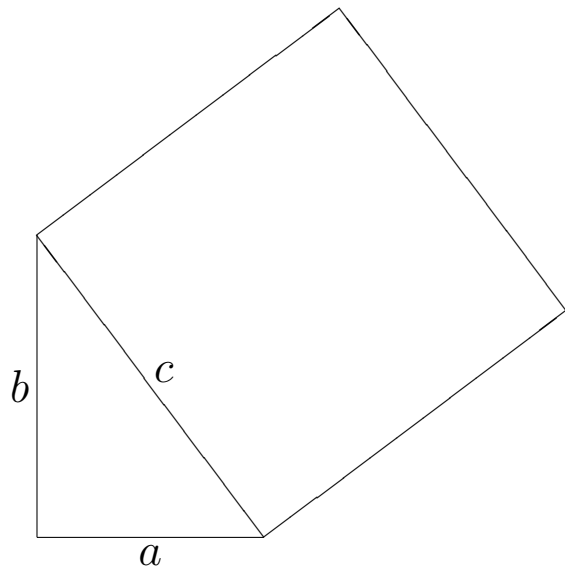
Достроим эту фигуру до



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Попробуем построить некоторую несложную фигуру и разрезать её разными способами так, чтобы получить некоторое равенство для квадратов длин сторон.

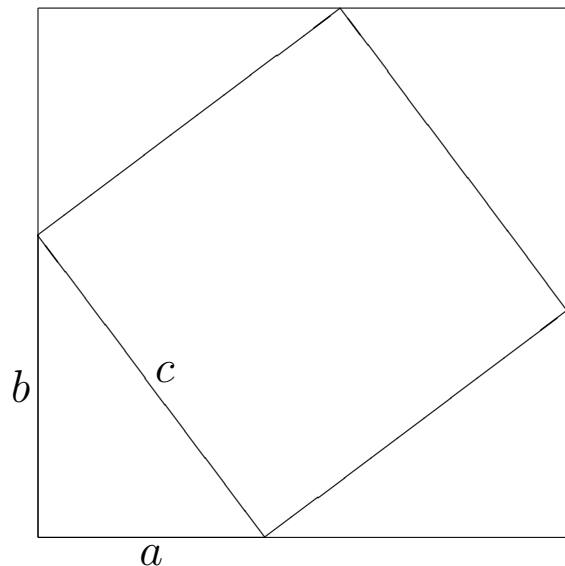
Достроим эту фигуру до квадрата.



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

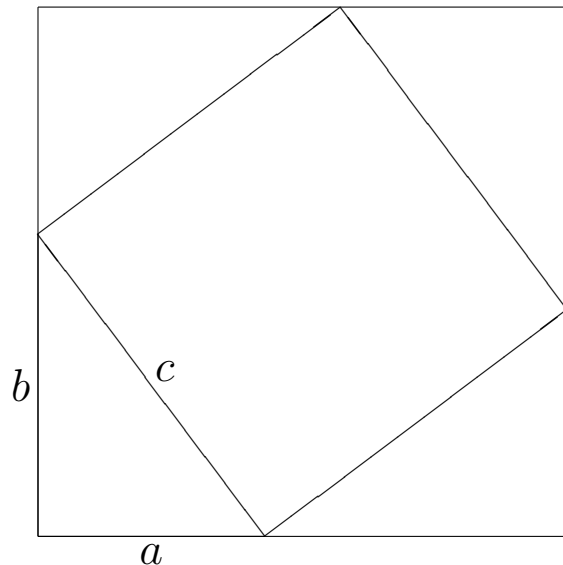
Попробуем построить некоторую несложную фигуру и разрезать её разными способами так, чтобы получить некоторое равенство для квадратов длин сторон.

Достроим эту фигуру до квадрата.



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со
стороной $a + b$:

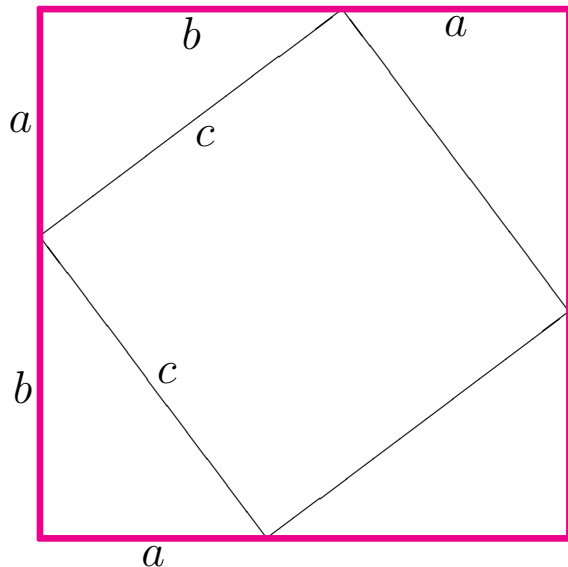


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со

стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 =$$

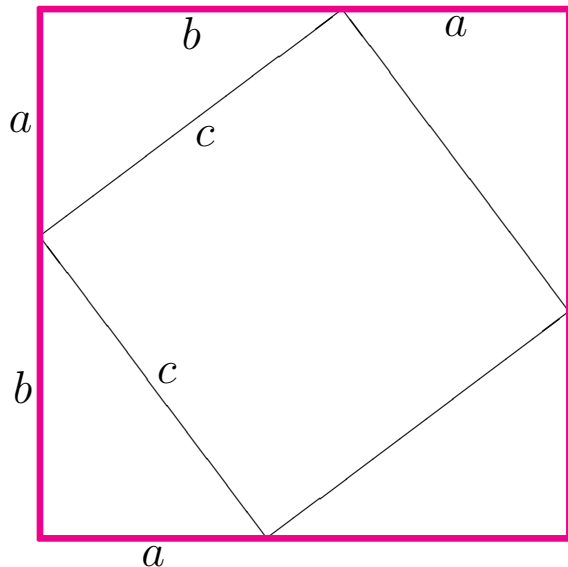


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со

стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 +$$

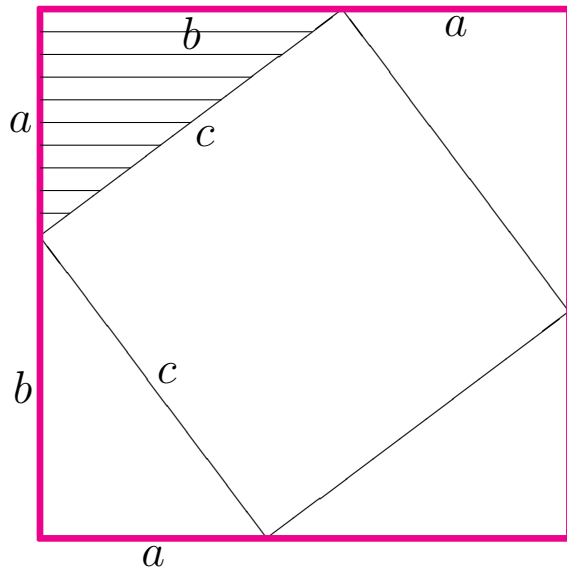


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со

стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 +$$

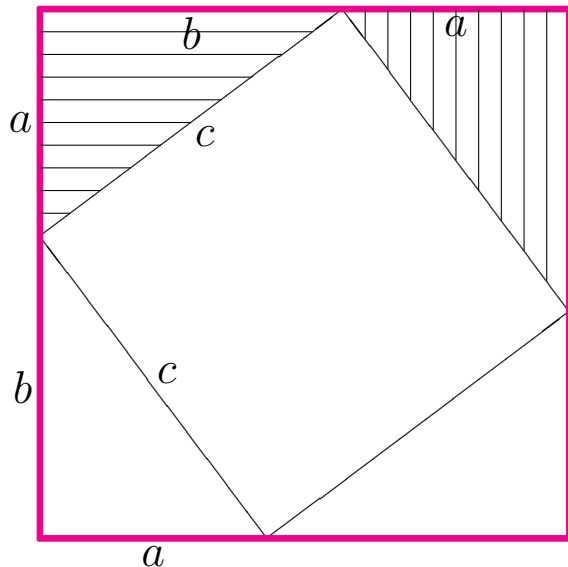


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со

стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 +$$

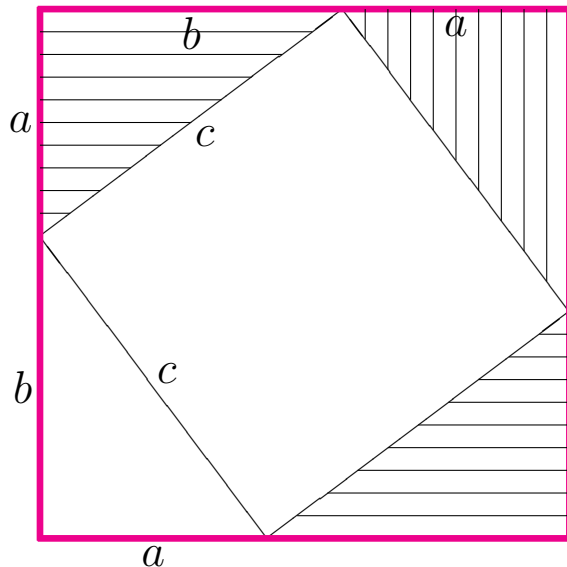


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со

стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 +$$

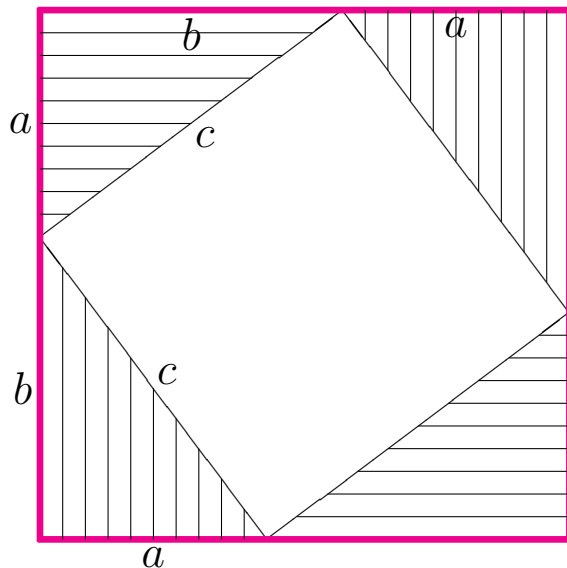


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со

стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 +$$

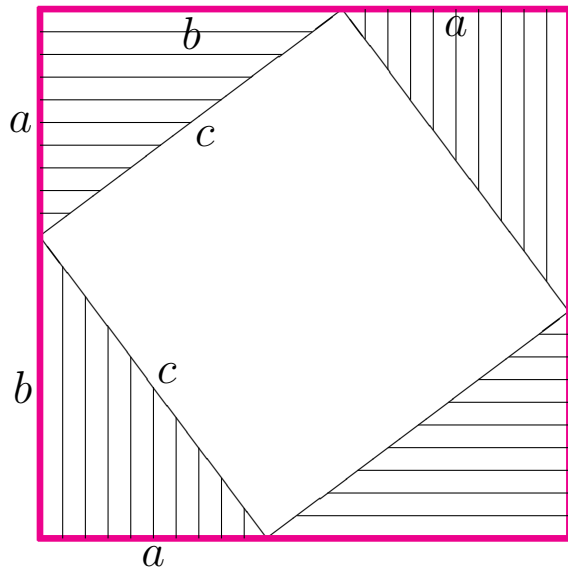


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со

стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot$$

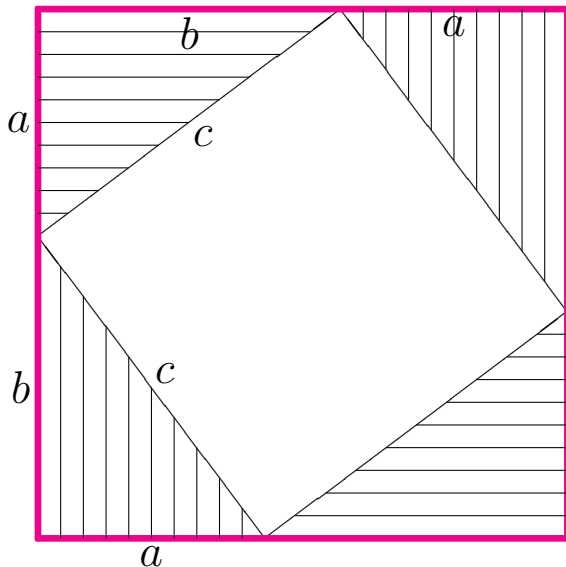


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со

стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

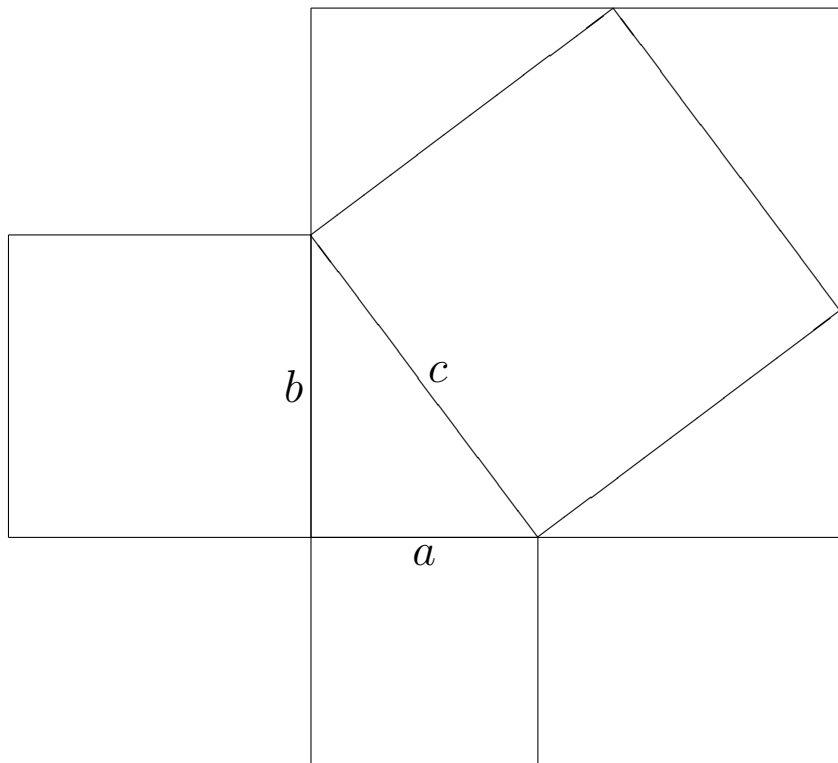


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со
стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, та-
кой же квадрат можно
было построить иначе.

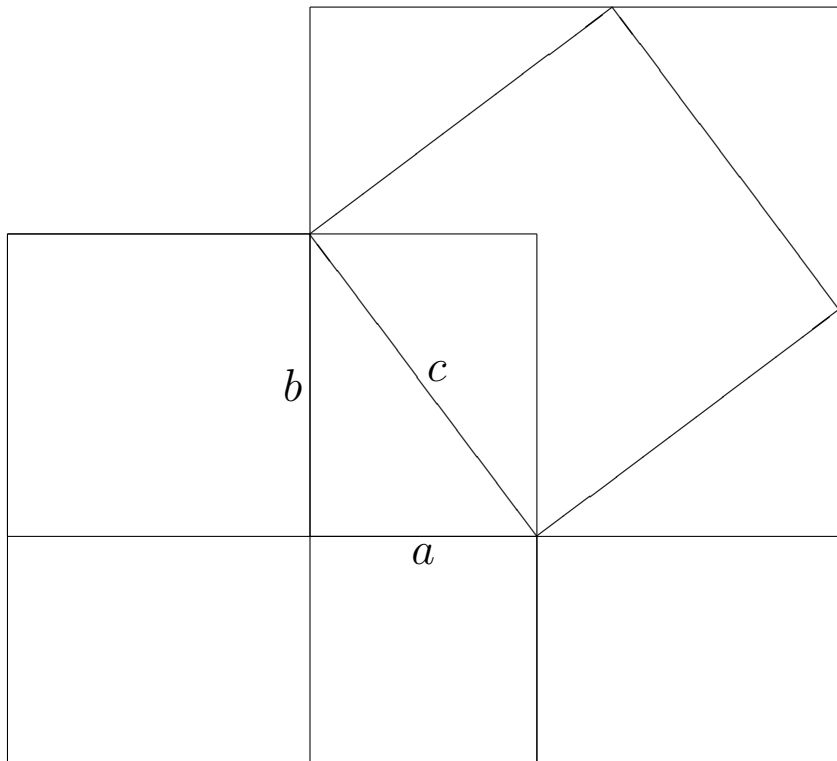


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со
стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, та-
кой же квадрат можно
было построить иначе.

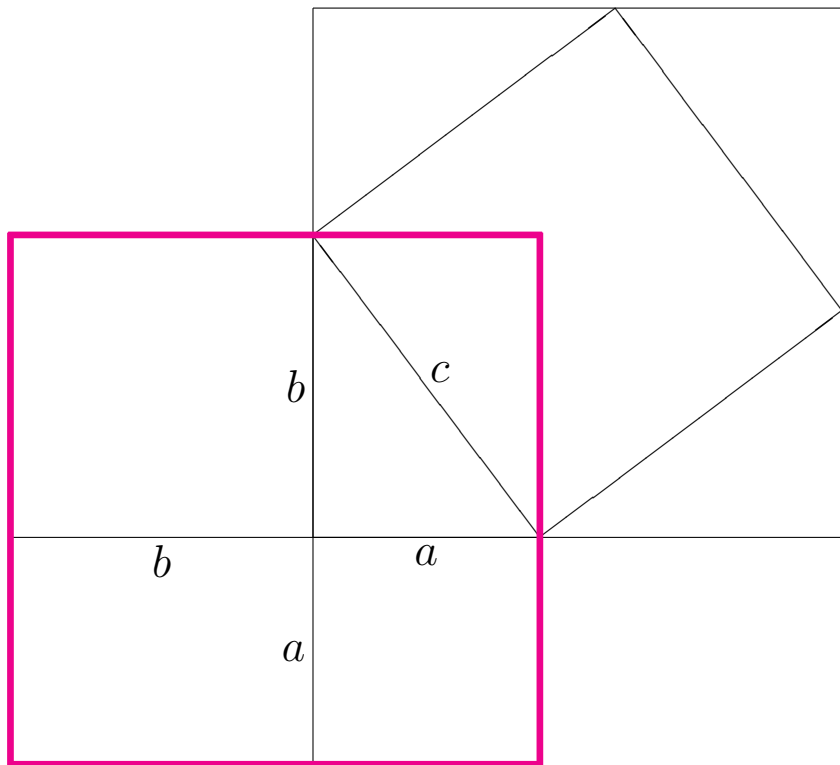


VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со
стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, та-
кой же квадрат можно
было построить иначе.



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

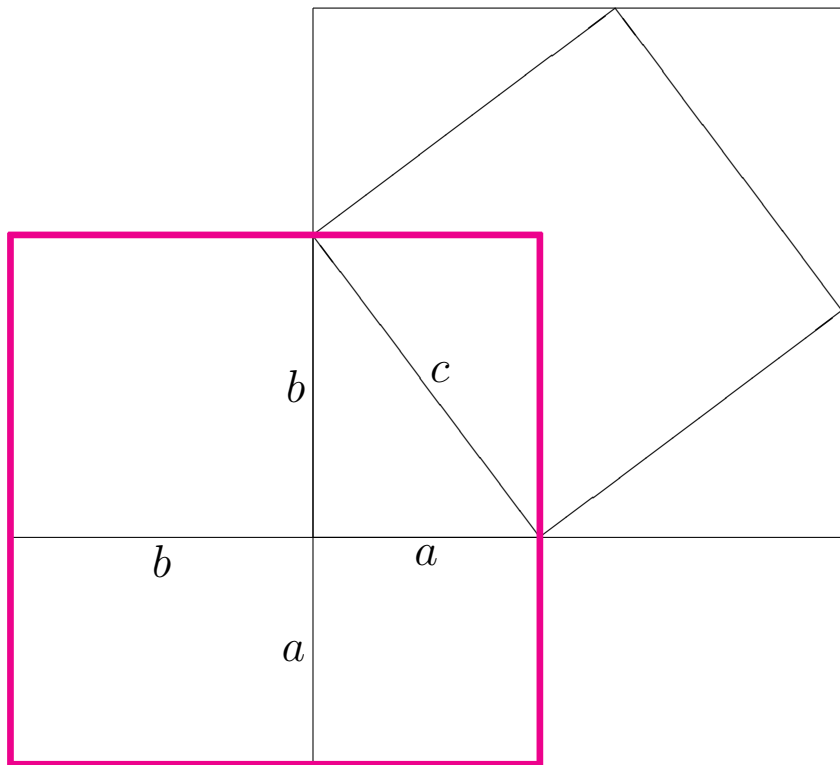
Площадь квадрата со стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, такой же квадрат можно было построить иначе.

Поэтому площадь квадрата можно представить в виде:

$$(a + b)^2 =$$



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

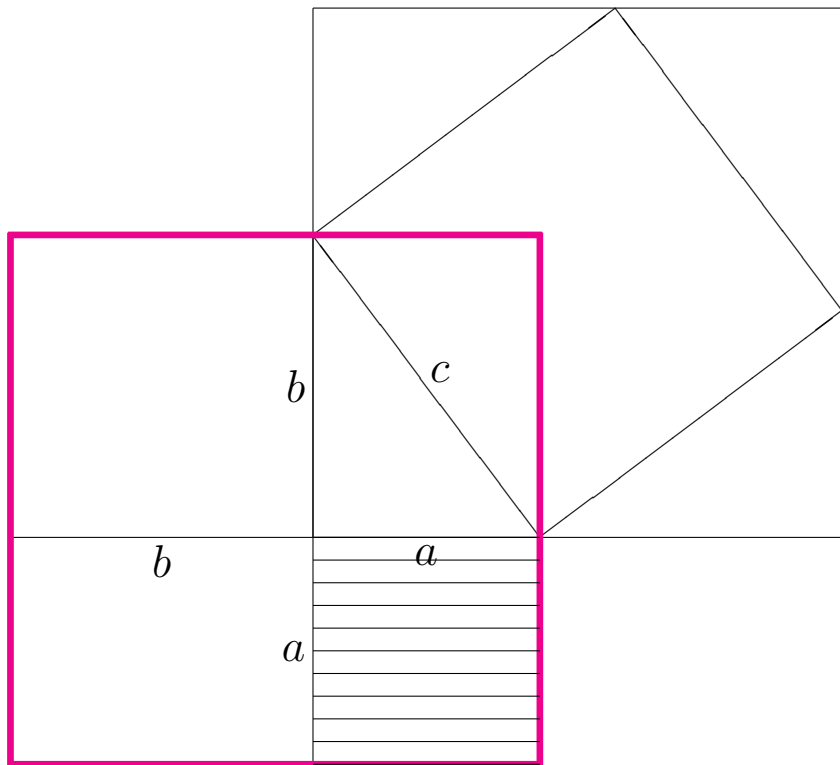
Площадь квадрата со стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, такой же квадрат можно было построить иначе.

Поэтому площадь квадрата можно представить в виде:

$$(a + b)^2 =$$



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

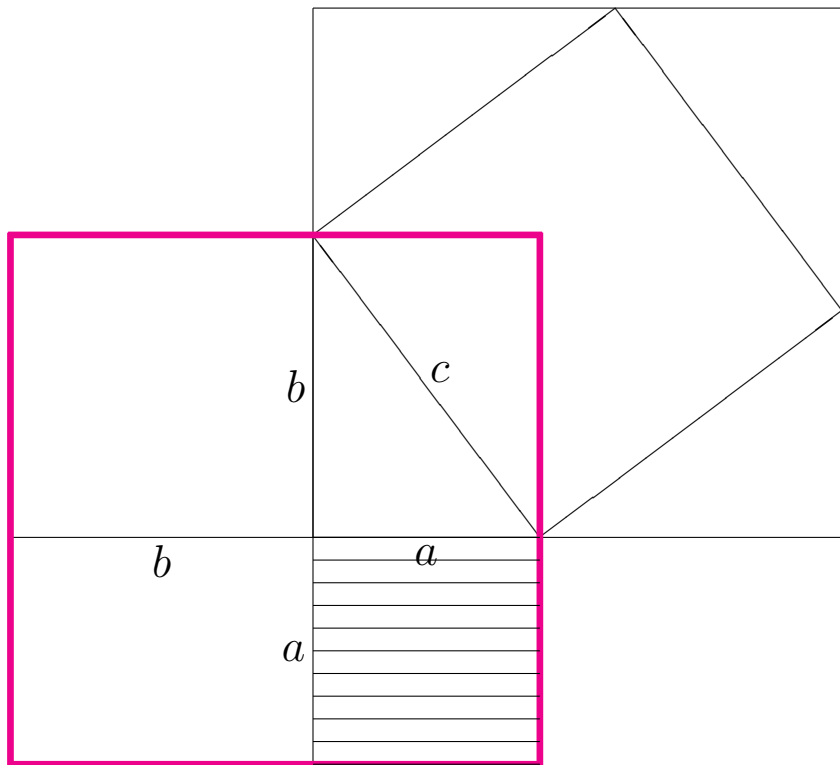
Площадь квадрата со стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, такой же квадрат можно было построить иначе.

Поэтому площадь квадрата можно представить в виде:

$$(a + b)^2 = a^2 +$$



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

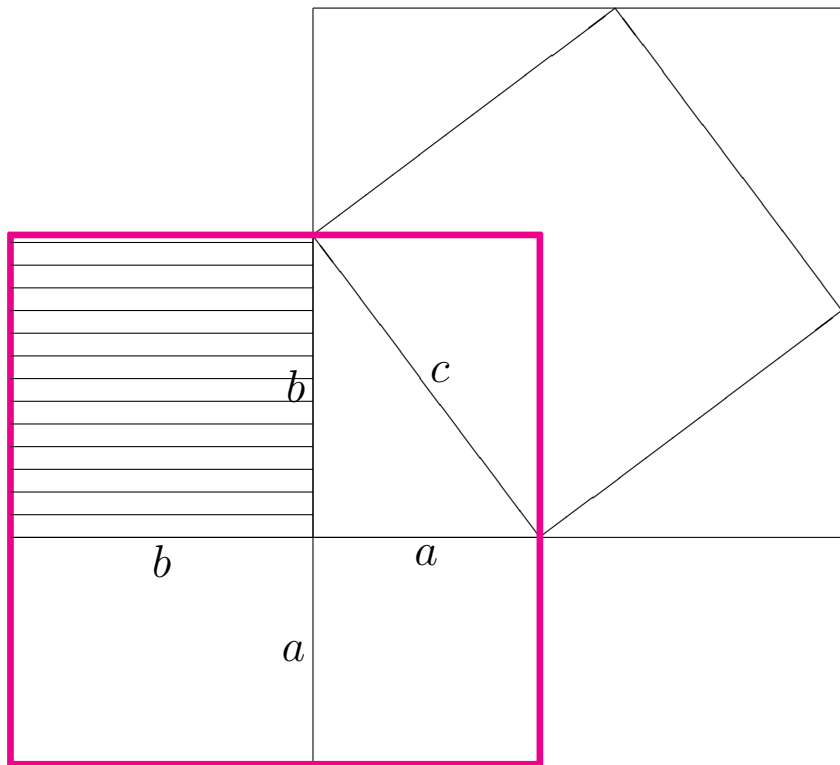
Площадь квадрата со стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, такой же квадрат можно было построить иначе.

Поэтому площадь квадрата можно представить в виде:

$$(a + b)^2 = a^2 +$$



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

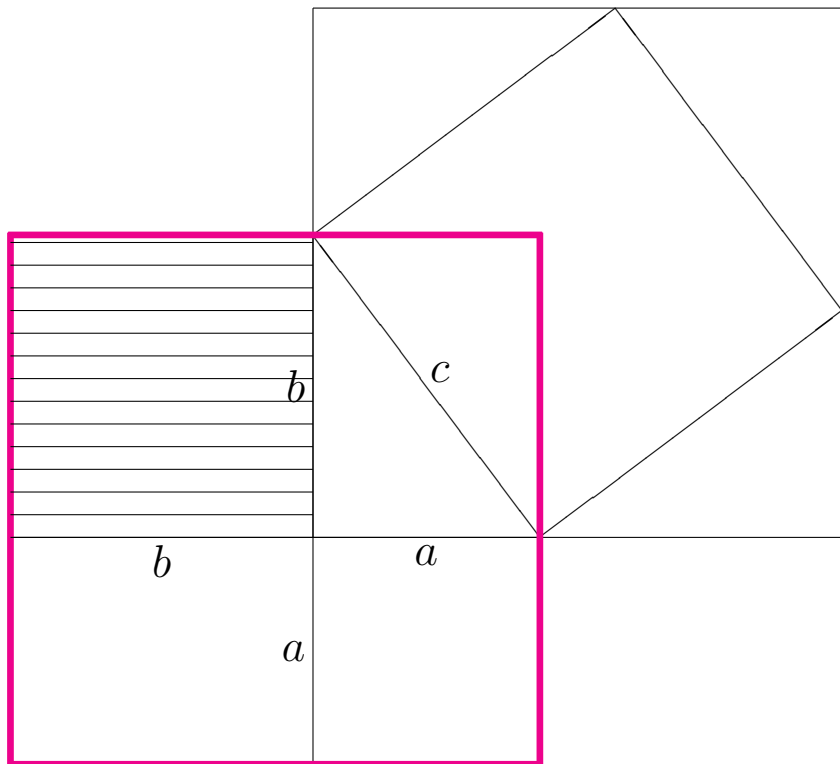
Площадь квадрата со стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, такой же квадрат можно было построить иначе.

Поэтому площадь квадрата можно представить в виде:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 +$$



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

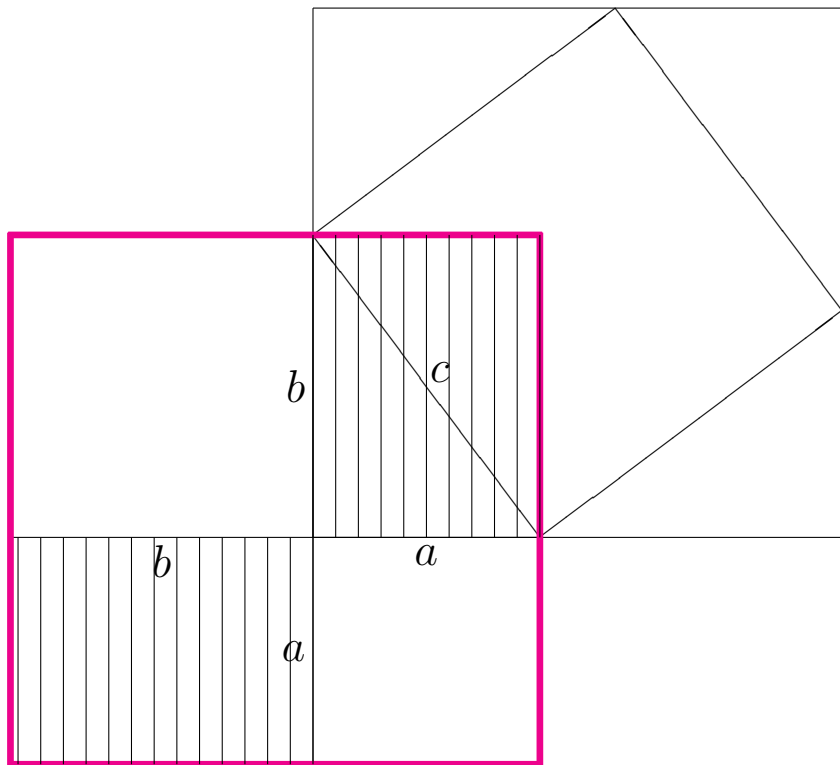
Площадь квадрата со стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, такой же квадрат можно было построить иначе.

Поэтому площадь квадрата можно представить в виде:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

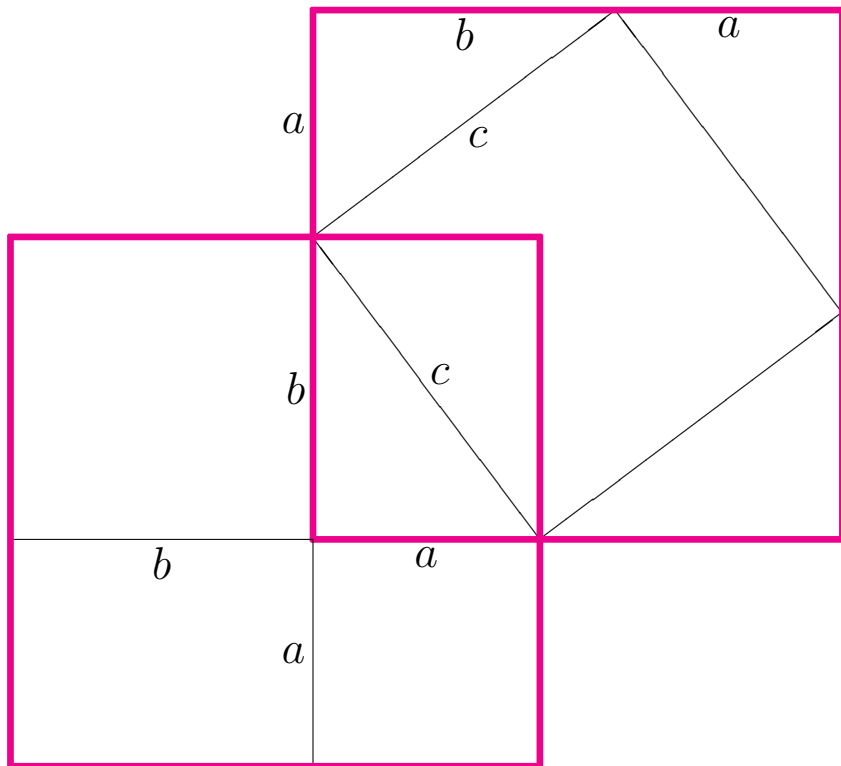
С другой стороны, такой же квадрат можно было построить иначе.

Поэтому площадь квадрата можно представить в виде:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Итак,

$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab,$$



VI.1. Теорема Пифагора: формирование гипотезы

Площадь квадрата со стороной $a + b$:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, такой же квадрат можно было построить иначе.

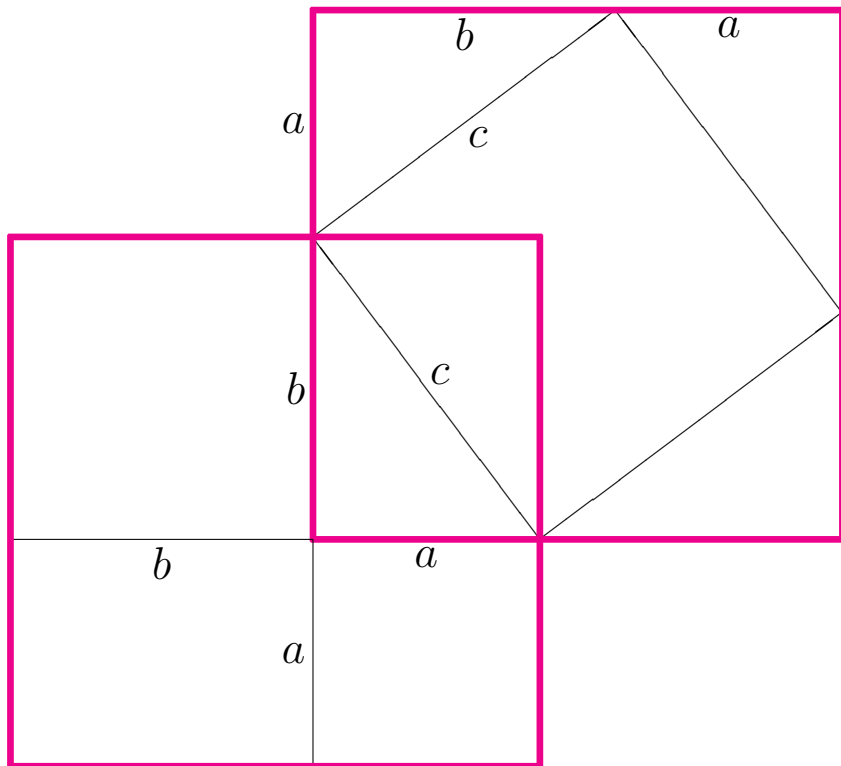
Поэтому площадь квадрата можно представить в виде:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Итак,

$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$



VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

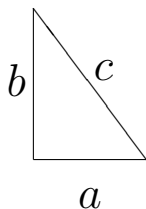
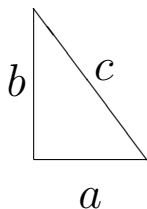
Доказательство.

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.

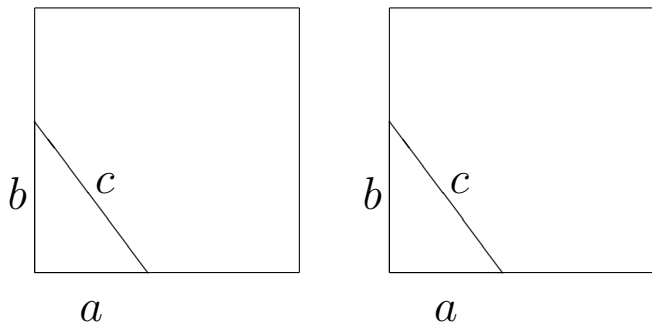


VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.

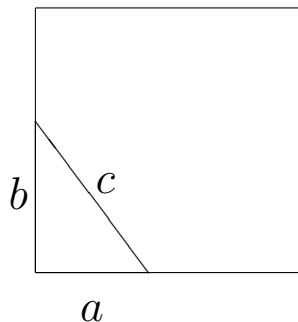
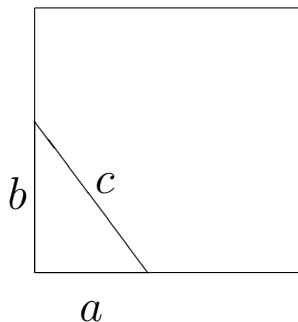


VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



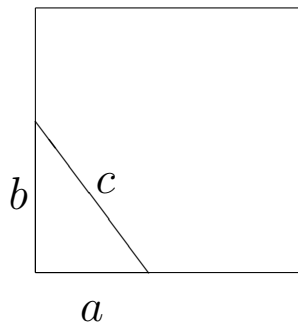
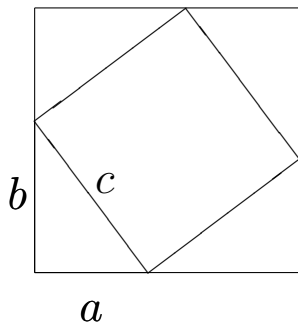
Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



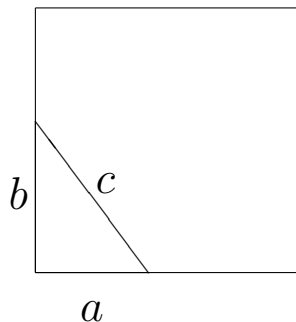
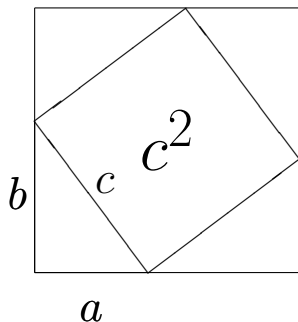
Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



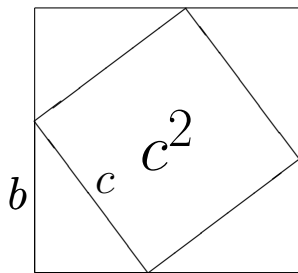
Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

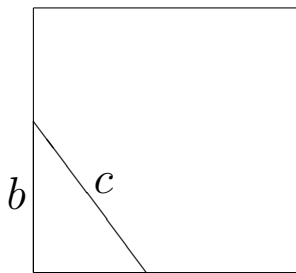
$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



a

$c^2 +$



a

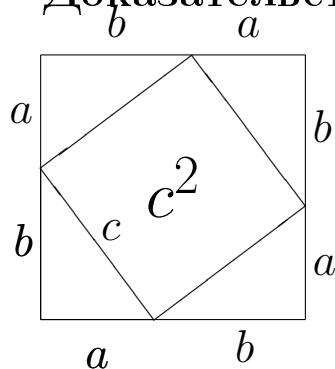
Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

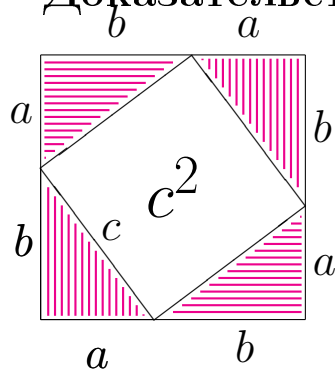
$c^2 +$

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

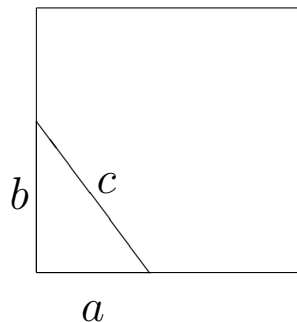
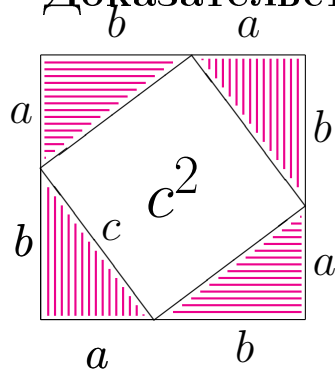
$c^2 +$

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

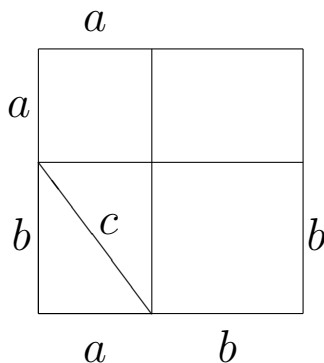
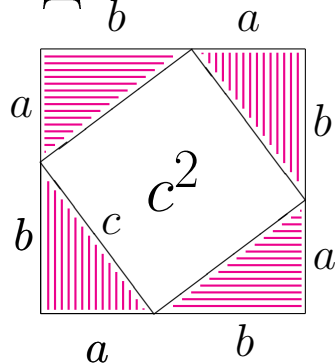
$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} =$$

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

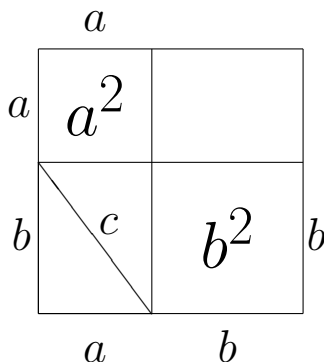
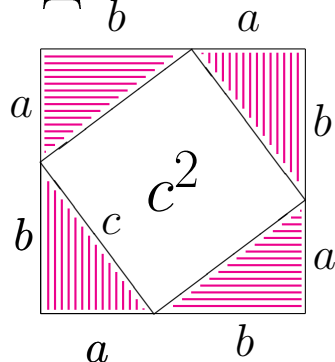
$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} =$$

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a + b)$.

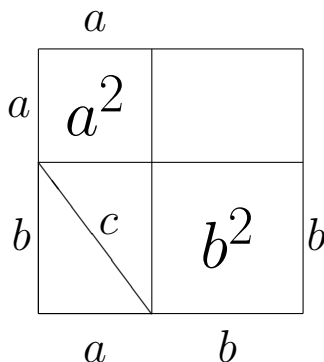
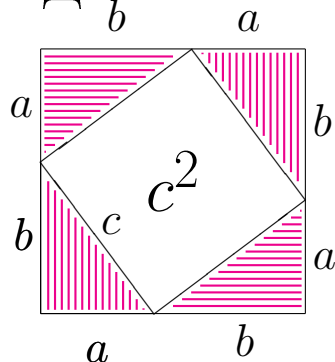
$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} =$$

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

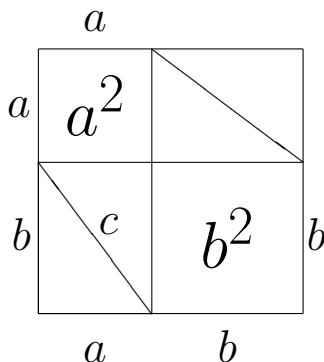
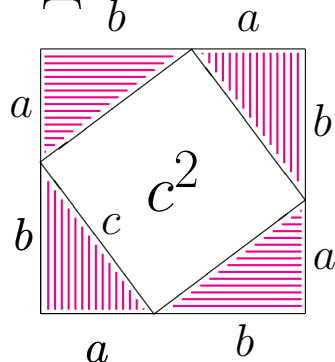
$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 +$$

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a+b)$.

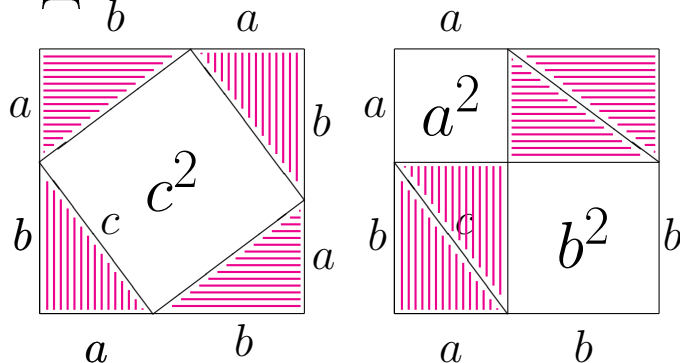
$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 +$$

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a + b)$.

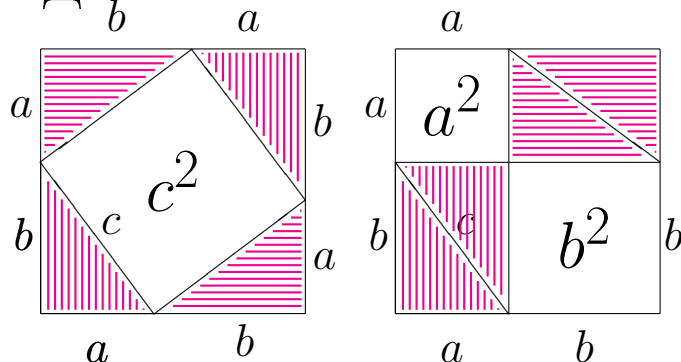
$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 +$$

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a + b)$.

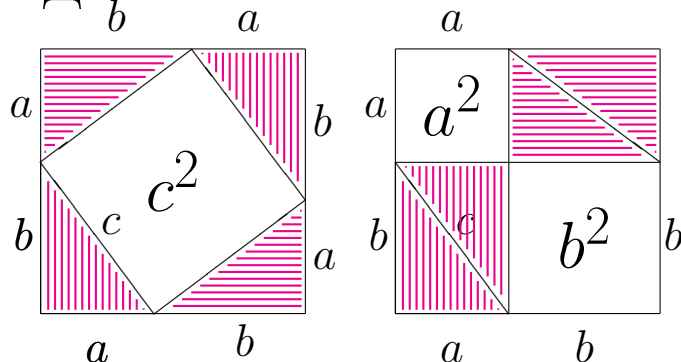
$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow$$

VI.2. Теорема Пифагора: доказательство

Теорема 1. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c и катетами длиной a и b имеет место равенство

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.



Вычислим двумя способами площадь квадрата со стороной $(a + b)$.

$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

VII. Теорема синусов и теорема косинусов

Мы рассмотрели замечательные треугольники: прямоугольные.

Эти треугольники, в некотором смысле, самые простые.

VII. Теорема синусов и теорема косинусов

Мы рассмотрели замечательные треугольники: прямоугольные.

Эти треугольники, в некотором смысле, самые простые.

С их помощью мы смогли связать длины сторон и углы (ввели $\sin$, $\cos$, tg).

Мы **уже доказали теорему синусов**.

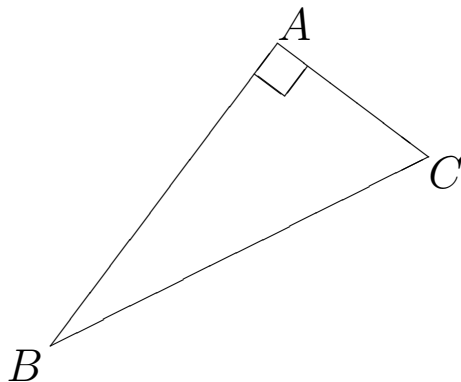
VII. Теорема синусов и теорема косинусов

Мы рассмотрели замечательные треугольники: прямоугольные.

Эти треугольники, в некотором смысле, самые простые.

С их помощью мы смогли связать длины сторон и углы (ввели $\sin$, $\cos$, tg).

Мы доказали ещё и теорему Пифагора:



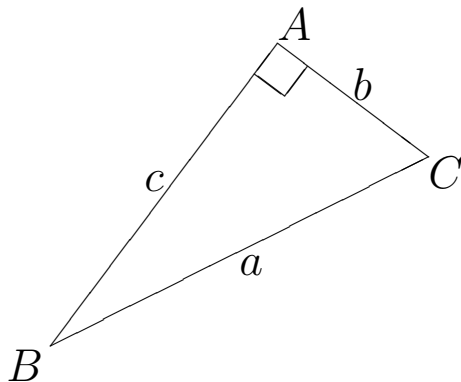
VII. Теорема синусов и теорема косинусов

Мы рассмотрели замечательные треугольники: прямоугольные.

Эти треугольники, в некотором смысле, самые простые.

С их помощью мы смогли связать длины сторон и углы (ввели $\sin$, $\cos$, tg).

Мы доказали ещё и теорему Пифагора:



VII. Теорема синусов и теорема косинусов

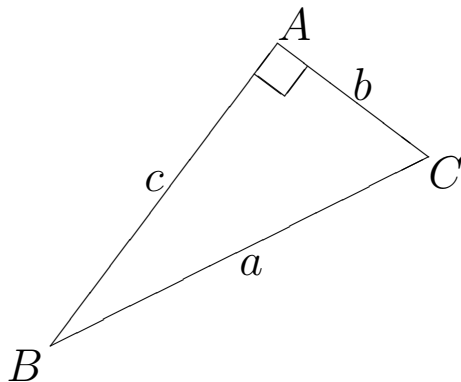
Мы рассмотрели замечательные треугольники: прямоугольные.

Эти треугольники, в некотором смысле, самые простые.

С их помощью мы смогли связать длины сторон и углы (ввели $\sin$, $\cos$, tg).

Мы доказали ещё и теорему Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$



VII. Теорема синусов и теорема косинусов

Мы рассмотрели замечательные треугольники: прямоугольные.

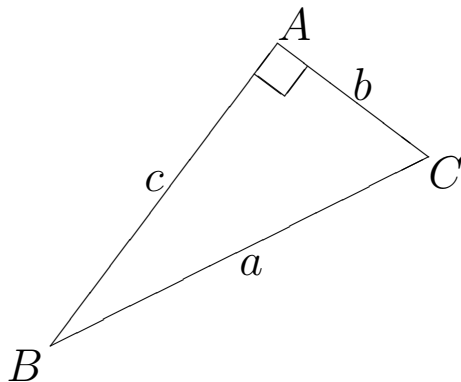
Эти треугольники, в некотором смысле, самые простые.

С их помощью мы смогли связать длины сторон и углы (ввели $\sin$, $\cos$, tg).

Мы доказали ещё и теорему Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Попробуем обобщить этот результат для произвольных треугольников.



VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель **1**. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

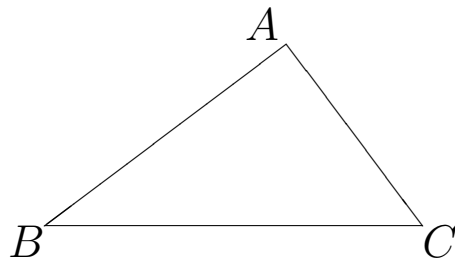
Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Сначала рассмотрим прямоугольный треугольник.

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

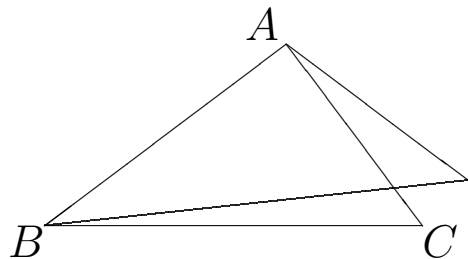
Сначала рассмотрим прямоугольный треугольник.



VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

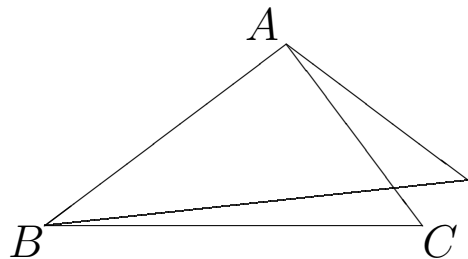
Если же угол A немного увеличить, то
длина стороны BC



VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

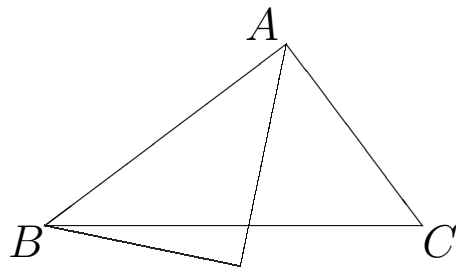
Если же угол A немного увеличить, то длина стороны BC тоже увеличится.



VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

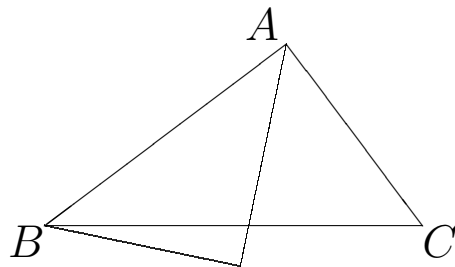
Если угол A немного уменьшить, то
длина стороны BC



VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

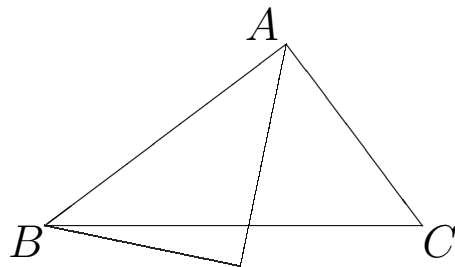
Если угол A немного уменьшить, то
длина стороны BC
тоже уменьшится.



VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Если угол A немного уменьшить, то длина стороны BC тоже уменьшится.

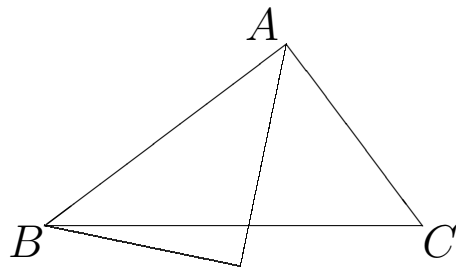


«Бог хитёр, но не зловреден»: есть надежда, что длину стороны a можно вычислить по формуле, близкой к формуле Пифагора:

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Если угол A немного уменьшить, то длина стороны BC тоже уменьшится.



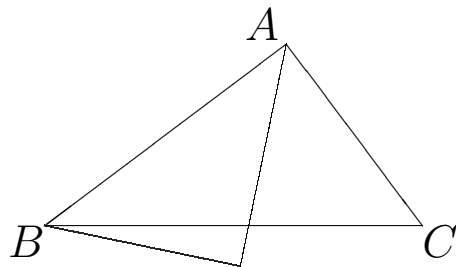
«Бог хитёр, но не зловреден»: есть надежда, что длину стороны a можно вычислить по формуле, близкой к формуле Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Если угол A немного уменьшить, то длина стороны BC тоже уменьшится.



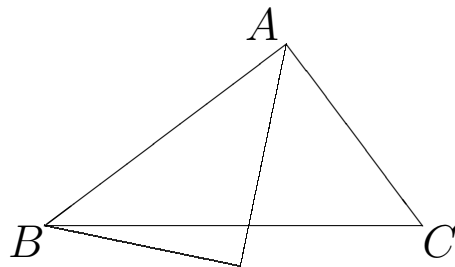
«Бог хитёр, но не зловреден»: есть надежда, что длину стороны a можно вычислить по формуле, близкой к формуле Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2 - ?$$

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Если угол A немного уменьшить, то длина стороны BC тоже уменьшится.



«Бог хитёр, но не зловреден»: есть надежда, что длину стороны a можно вычислить по формуле, близкой к формуле Пифагора:

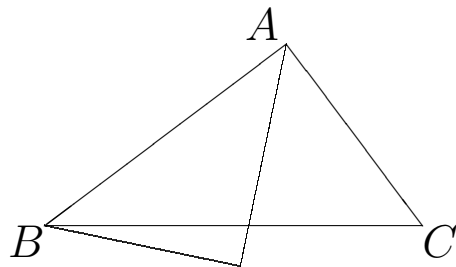
$$a^2 = b^2 + c^2 - \underbrace{?}_{(b, c, \angle A)}.$$

зависит от этих величин

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.



«Бог хитёр, но не зловреден»: есть надежда, что длину стороны a можно вычислить по формуле, близкой к формуле Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \underbrace{? (b, c, \angle A)}.$$

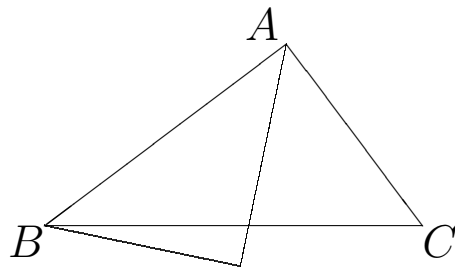
зависит от этих величин

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Сначала рассмотрим случай, когда $\angle A$ — прямой.



«Бог хитёр, но не зловреден»: есть надежда, что длину стороны a можно вычислить по формуле, близкой к формуле Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \underbrace{?(b, c, \angle A)}.$$

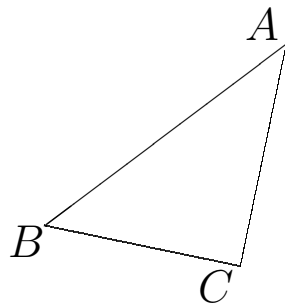
зависит от этих величин

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Сначала рассмотрим случай, когда $\angle A$ — прямой.



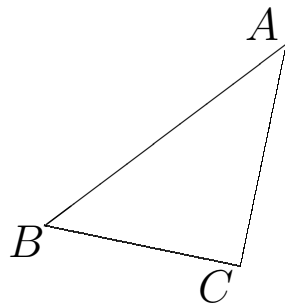
$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 =$$

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Сначала рассмотрим случай, когда $\angle A$ — прямой.



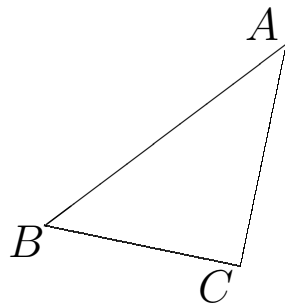
$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 = b^2 - c^2,$$

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Сначала рассмотрим случай, когда $\angle A$ — прямой.



$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 = b^2 - c^2,$$

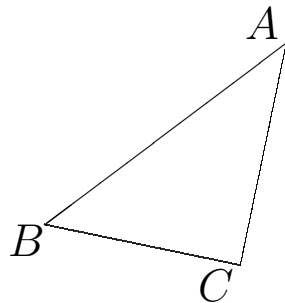
$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 = b^2 + c^2 - 2c^2,$$

VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Сначала рассмотрим случай, когда $\angle A$ — прямой.



$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 = b^2 - c^2,$$

$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 = b^2 + c^2 - 2c^2,$$

$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A.$$

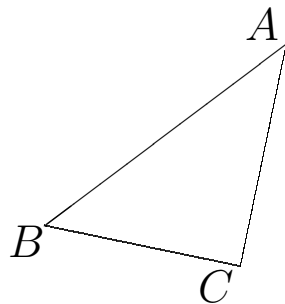
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Сначала рассмотрим случай, когда $\angle A$ — прямой.

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.



$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 = b^2 - c^2,$$

$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 = b^2 + c^2 - 2c^2,$$

$$b^2 + c^2 + ?(b, c, \angle A) = a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A.$$

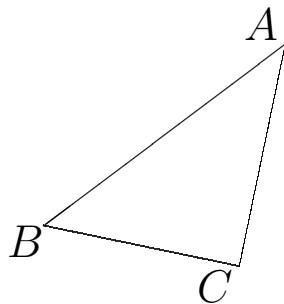
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Теперь рассмотрим случай, когда $\angle A$ — ???

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.



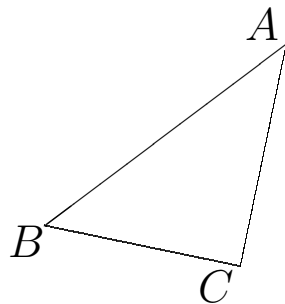
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Теперь рассмотрим случай, когда $\angle A$ — развёрнутый.

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.



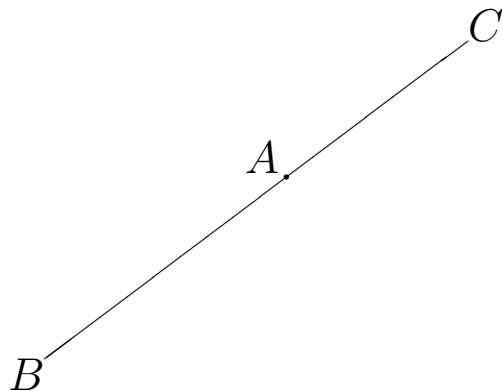
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Теперь рассмотрим случай, когда $\angle A$ — развёрнутый.

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.



VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

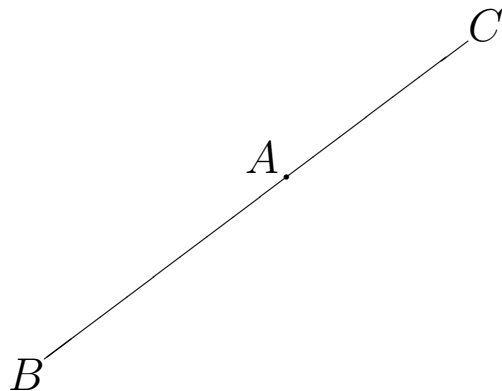
Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Теперь рассмотрим случай, когда $\angle A$ — развёрнутый.

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.

$$a^2 = (a + b)^2,$$



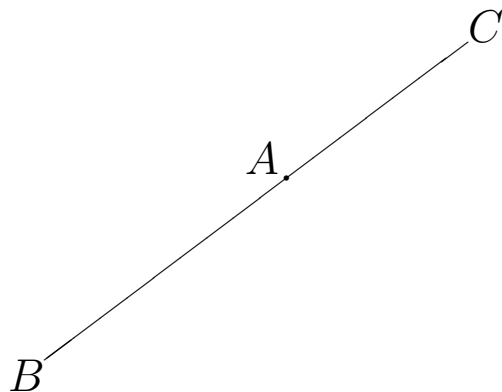
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Теперь рассмотрим случай, когда $\angle A$ — развёрнутый.

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.



$$a^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

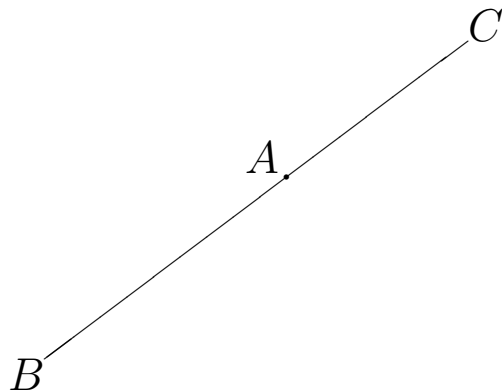
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Теперь рассмотрим случай, когда $\angle A$ — развёрнутый.

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.



$$a^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$a^2 = a^2 + b^2 + \underbrace{2ab}.$$

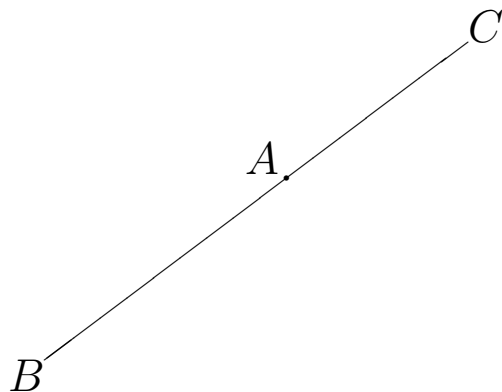
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Теперь рассмотрим случай, когда $\angle A$ — развёрнутый.

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.



$$a^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$a^2 = a^2 + b^2 + \underbrace{2ab}.$$

$$2ab \cos 180^\circ$$

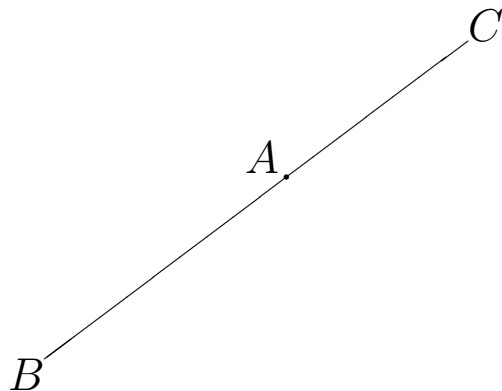
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Теперь рассмотрим случай, когда $\angle A$ — развёрнутый.

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.



$$a^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$a^2 = a^2 + b^2 + \underbrace{2ab}_{2ab \cos 180^\circ}. \text{ Подтверждается!}$$

$$2ab \cos 180^\circ$$

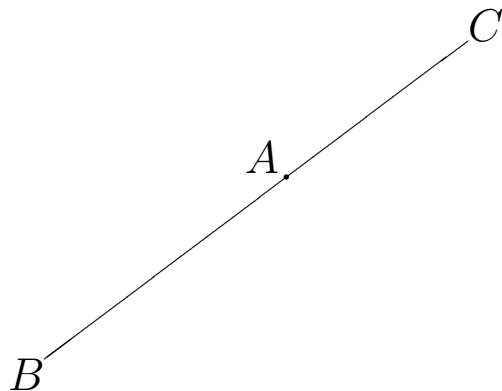
VII.1. Теорема косинусов: гипотеза

Цель 1. *Обобщить теорему Пифагора на случай, когда треугольник не является прямоугольным.*

Для того, чтобы представить себе вид выражения, обозначенного как вопросительный знак, рассмотрим крайние, «экстремальные» ситуации.

Теперь рассмотрим случай, когда $\angle A$ — развёрнутый.

Гипотеза: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \angle A$.



$$a^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$a^2 = a^2 + b^2 + \underbrace{2ab}_{2ab \cos 180^\circ}. \text{ Но это не доказательство!}$$

$$2ab \cos 180^\circ$$

VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. *В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположащим стороне длиной a , имеет место равенство*

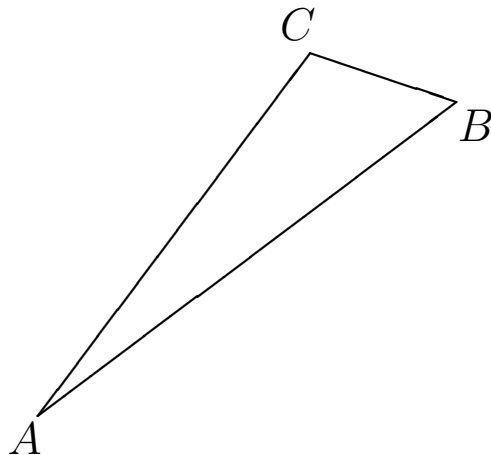
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. *В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположном стороне длиной a , имеет место равенство*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим
доказательство координатным
методом.



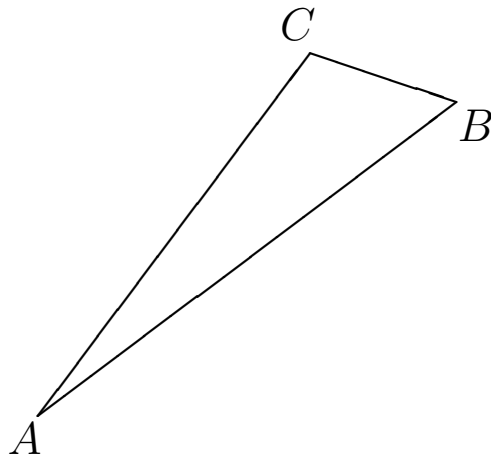
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. *В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположном стороне длиной a , имеет место равенство*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим
доказательство координатным
методом.

Начать надо



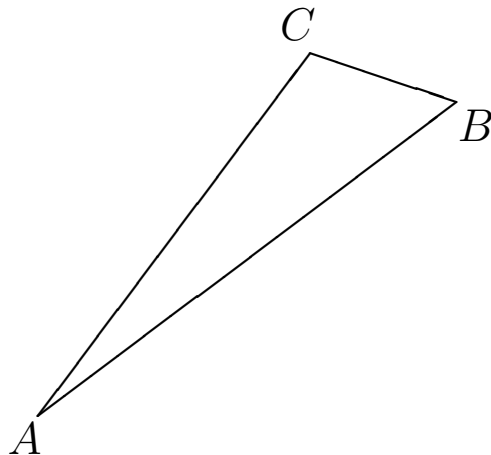
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство координатным методом.

Начать надо со введения системы координат.



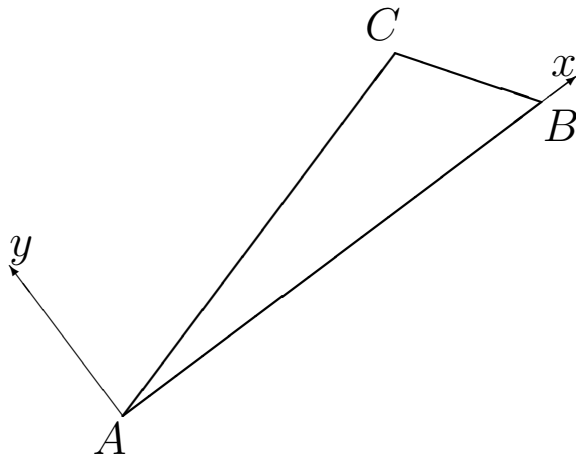
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство координатным методом.

Начать надо со введения системы координат.

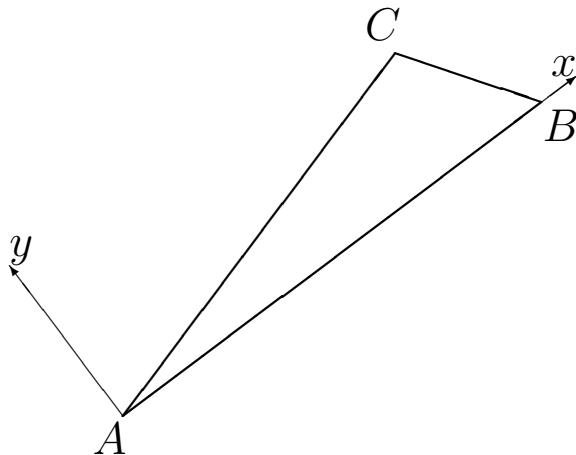


VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

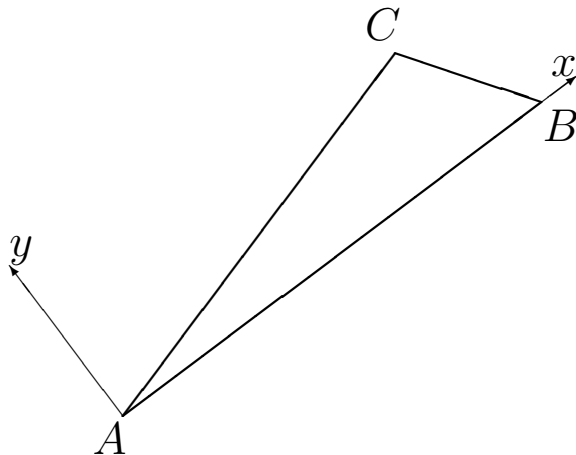


VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C . Изобразим угол $\angle A$.

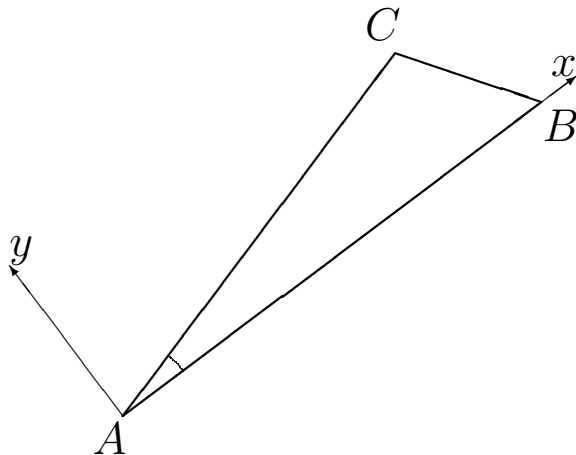


VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C . Изобразим угол $\angle A$.



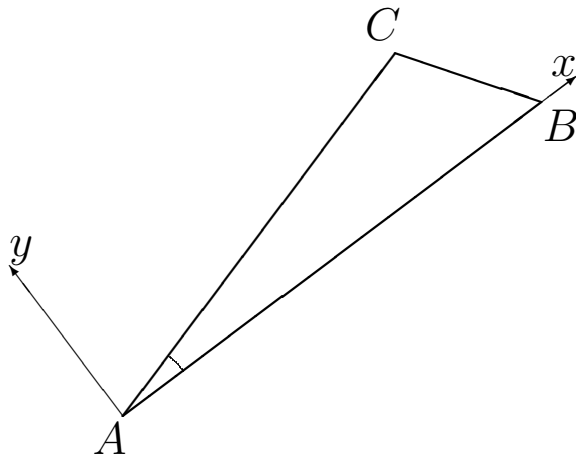
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

Точка A имеет координаты



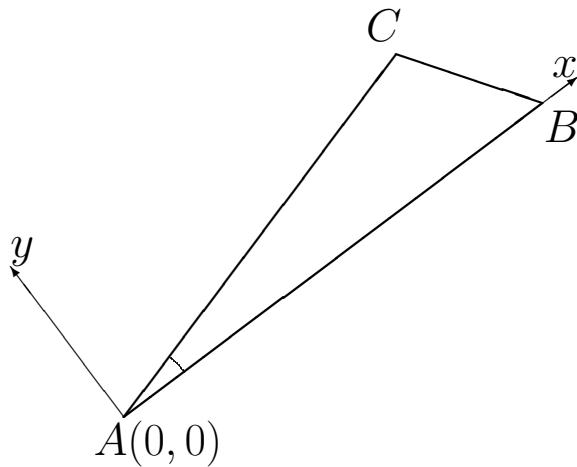
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

Точка A имеет координаты $(0, 0)$,



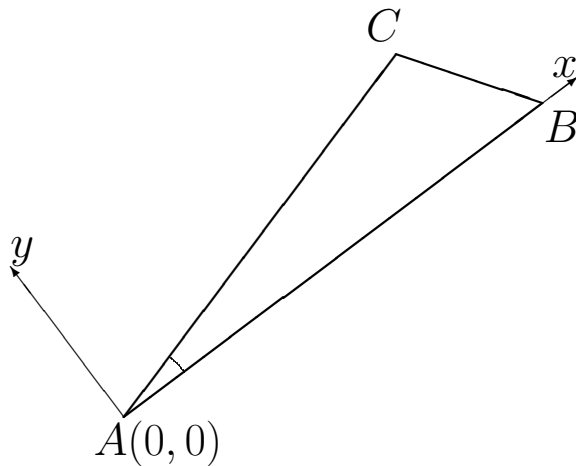
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

Точка A имеет координаты $(0, 0)$, точка B имеет координаты



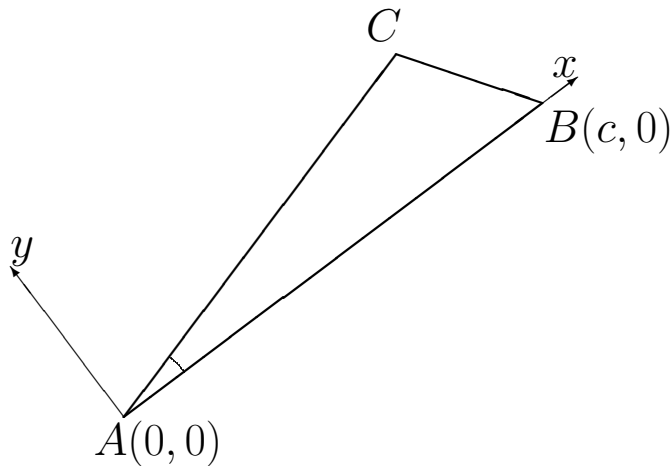
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. *В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

Точка A имеет координаты $(0, 0)$, точка B имеет координаты $(c, 0)$,



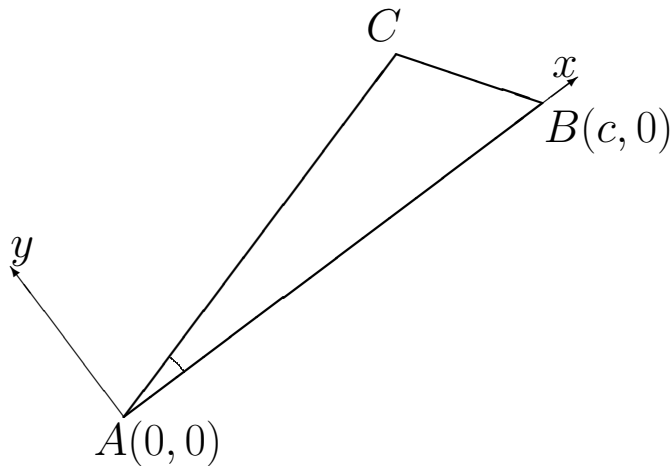
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

Точка A имеет координаты $(0, 0)$, точка B имеет координаты $(c, 0)$, точка C имеет координаты



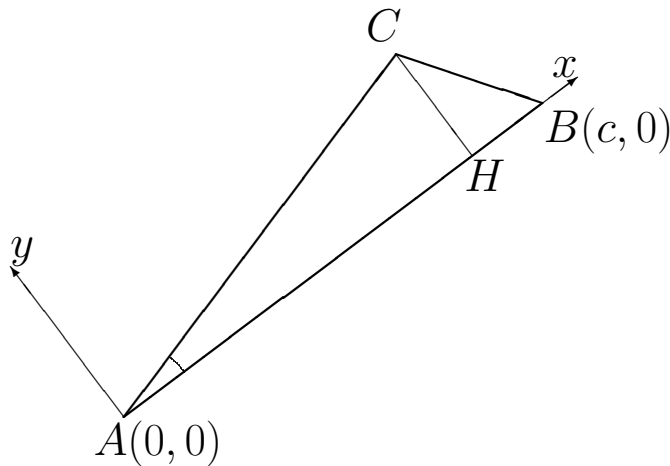
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противолжащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

Точка A имеет координаты $(0, 0)$, точка B имеет координаты $(c, 0)$, точка C имеет координаты



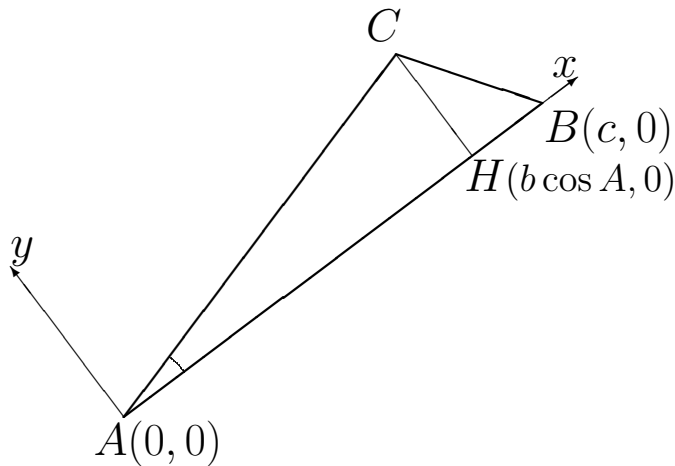
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

Точка A имеет координаты $(0, 0)$, точка B имеет координаты $(c, 0)$, точка C имеет координаты



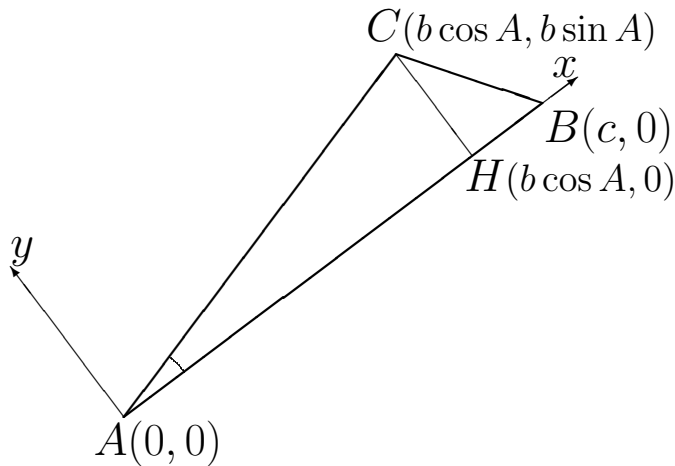
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

Точка A имеет координаты $(0, 0)$, точка B имеет координаты $(c, 0)$, точка C имеет координаты $(b \cos \angle A, b \sin \angle A)$.



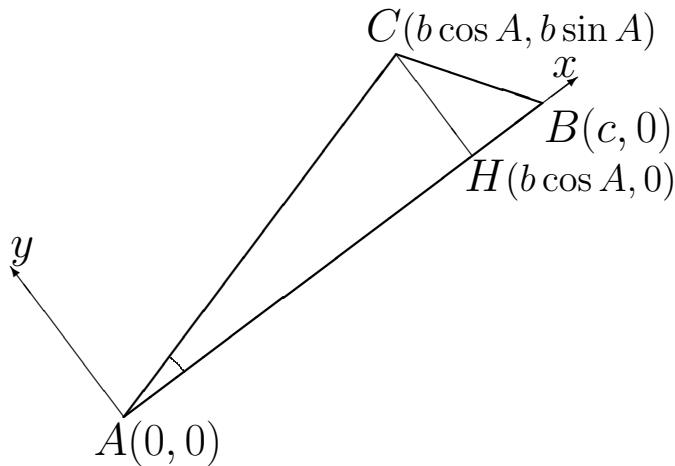
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

$$a^2 = BC^2 =$$



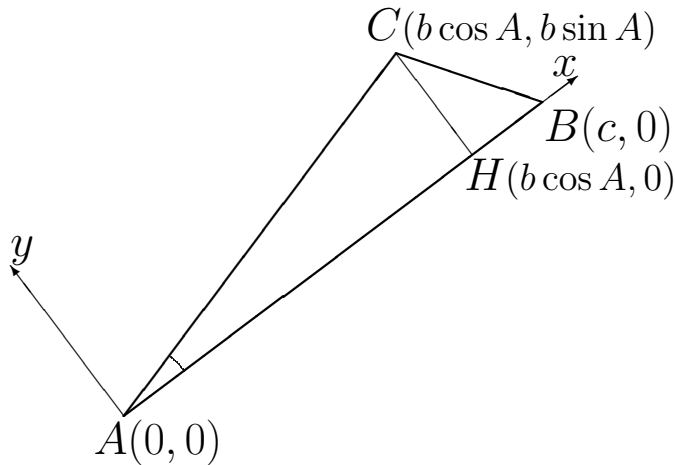
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \\ &= (c - b \cos \angle A)^2 + (b \sin \angle A)^2 = \end{aligned}$$



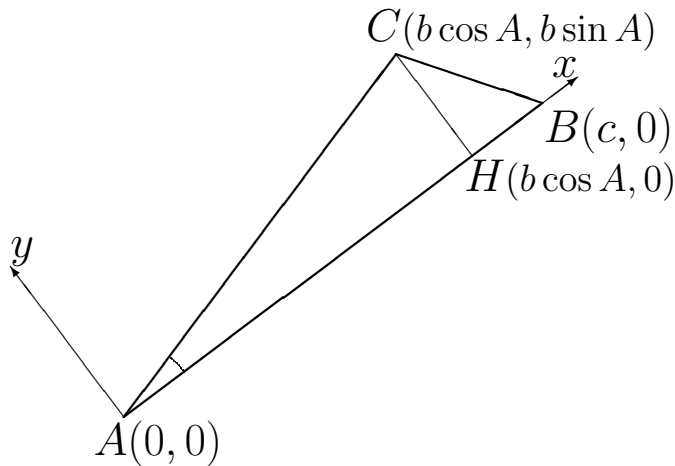
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противолжащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \\ &= (c - b \cos \angle A)^2 + (b \sin \angle A)^2 = \\ &= c^2 - 2cb \cos \angle A + b^2 \cos^2 \angle A + \\ &+ b^2 \sin^2 \angle A = \end{aligned}$$



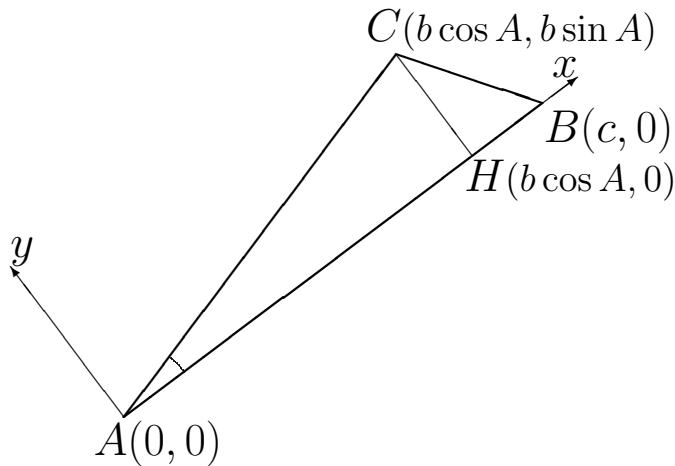
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противолжащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \\ &= (c - b \cos \angle A)^2 + (b \sin \angle A)^2 = \\ &= c^2 - 2cb \cos \angle A + \mathbf{b^2 \cos^2 \angle A +} \\ &\mathbf{+ b^2 \sin^2 \angle A} = \end{aligned}$$



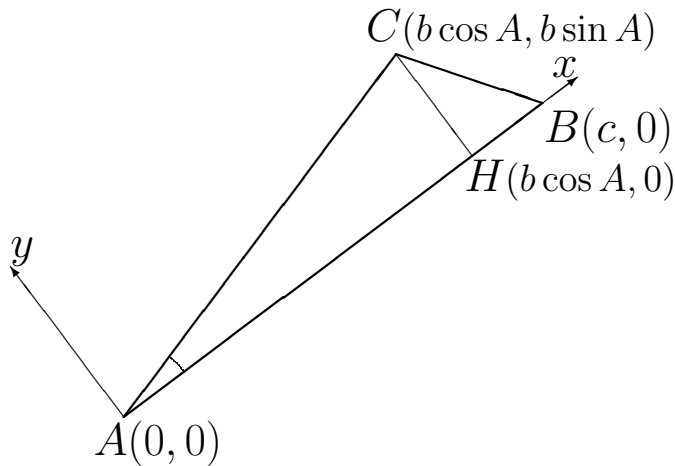
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \\ &= (c - b \cos \angle A)^2 + (b \sin \angle A)^2 = \\ &= c^2 - 2cb \cos \angle A + \mathbf{b^2 \cos^2 \angle A +} \\ &\mathbf{+ b^2 \sin^2 \angle A} = \\ &= b^2 + \end{aligned}$$



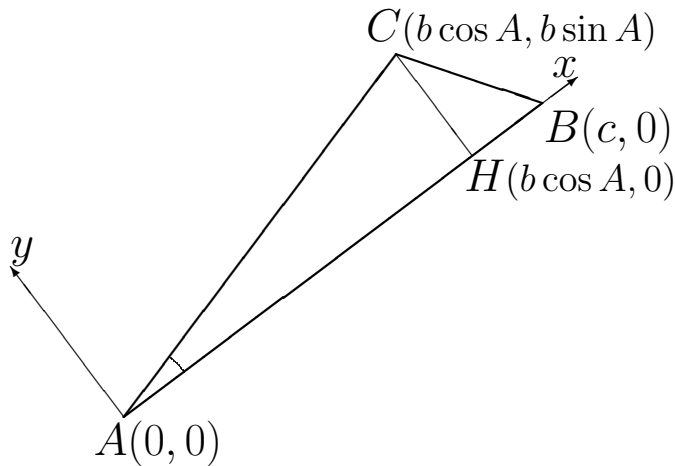
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \\ &= (c - b \cos \angle A)^2 + (b \sin \angle A)^2 = \\ &= \textcolor{violet}{c}^2 - 2cb \cos \angle A + b^2 \cos^2 \angle A + \\ &+ b^2 \sin^2 \angle A = \\ &= b^2 + \end{aligned}$$



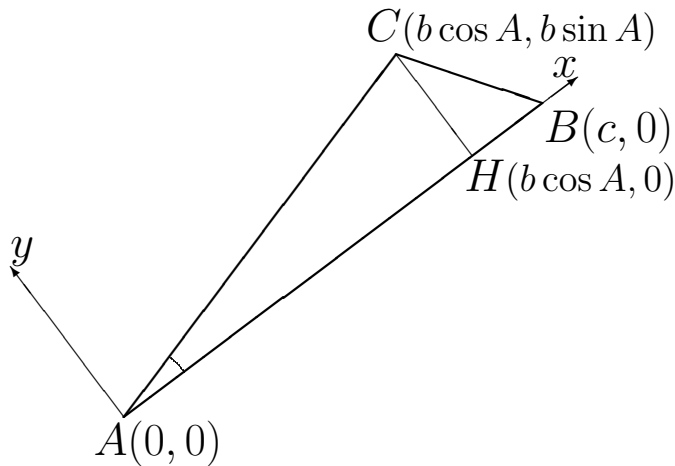
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \\ &= (c - b \cos \angle A)^2 + (b \sin \angle A)^2 = \\ &= \textcolor{red}{c}^2 - 2cb \cos \angle A + b^2 \cos^2 \angle A + \\ &+ b^2 \sin^2 \angle A = \\ &= b^2 + c^2 - \end{aligned}$$



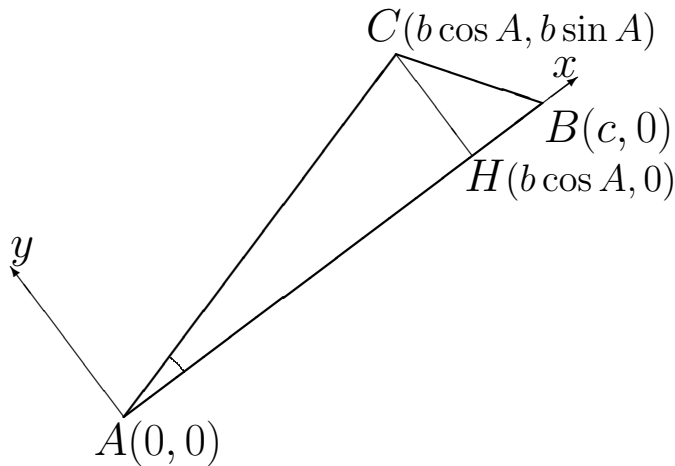
VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \\ &= (c - b \cos \angle A)^2 + (b \sin \angle A)^2 = \\ &= c^2 - 2cb \cos \angle A + b^2 \cos^2 \angle A + \\ &+ b^2 \sin^2 \angle A = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \end{aligned}$$



VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противлежащим стороне длиной a , имеет место равенство

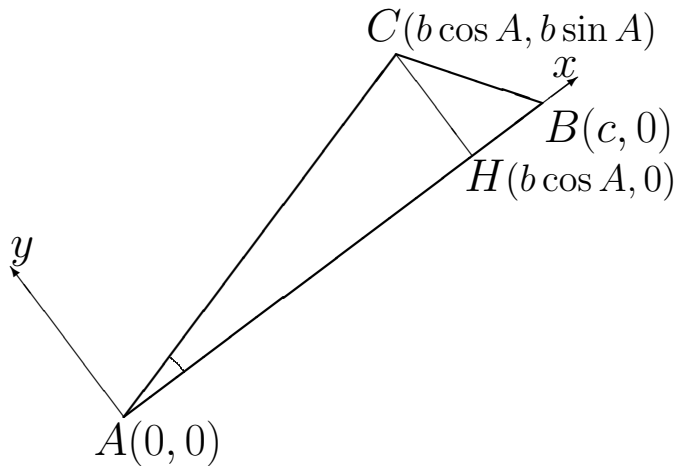
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. Вычислим длину a отрезка BC с помощью координат точек B и C .

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \\ &= (c - b \cos \angle A)^2 + (b \sin \angle A)^2 = \\ &= c^2 - 2cb \cos \angle A + b^2 \cos^2 \angle A + \\ &+ b^2 \sin^2 \angle A = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим другое доказательство.

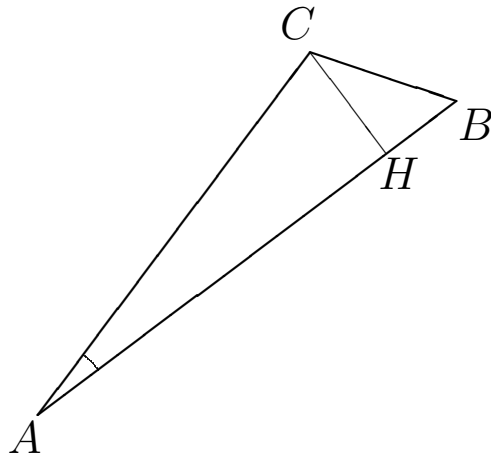


VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположном стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. $a^2 = BC^2 =$

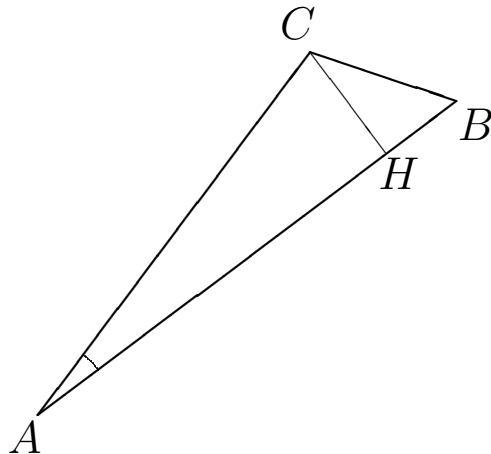


VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. $a^2 = BC^2 =$
 $= CH^2 + HB^2 =$

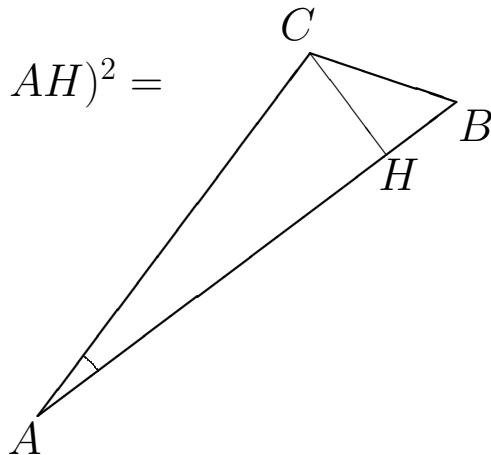


VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. $a^2 = BC^2 =$
 $= CH^2 + HB^2 = (AC \sin \angle A)^2 + (AB - AH)^2 =$

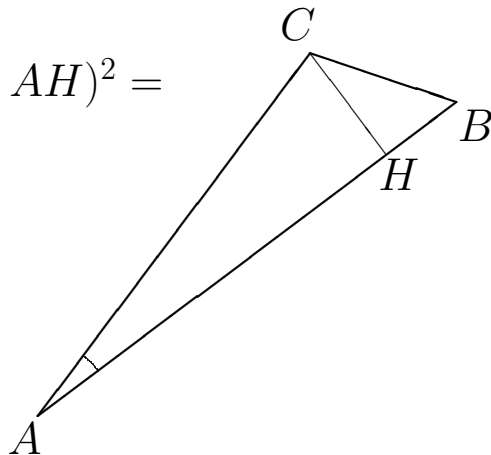


VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. $a^2 = BC^2 =$
 $= CH^2 + HB^2 = (AC \sin \angle A)^2 + (AB - AH)^2 =$
 $= b^2 \sin^2 \angle A + (c - b \cos \angle A)^2 =$

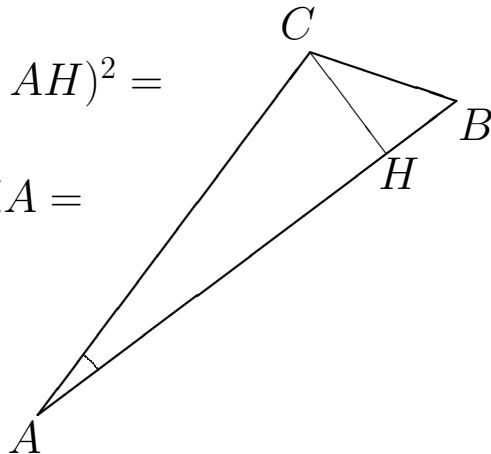


VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. $a^2 = BC^2 =$
 $= CH^2 + HB^2 = (AC \sin \angle A)^2 + (AB - AH)^2 =$
 $= b^2 \sin^2 \angle A + (c - b \cos \angle A)^2 =$
 $= b^2 \sin^2 \angle A + c^2 - 2bc \cos \angle A + b^2 \cos^2 \angle A =$

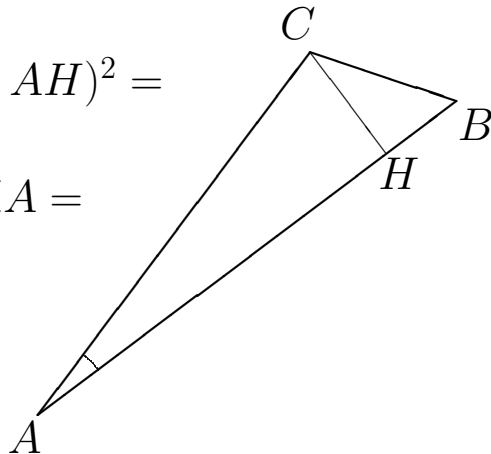


VII.2. Доказательство теоремы косинусов

Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположным стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. $a^2 = BC^2 =$
 $= CH^2 + HB^2 = (AC \sin \angle A)^2 + (AB - AH)^2 =$
 $= b^2 \sin^2 \angle A + (c - b \cos \angle A)^2 =$
 $= b^2 \sin^2 \angle A + c^2 - 2bc \cos \angle A + b^2 \cos^2 \angle A =$
 $= b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A.$



VII.2. Доказательство теоремы косинусов

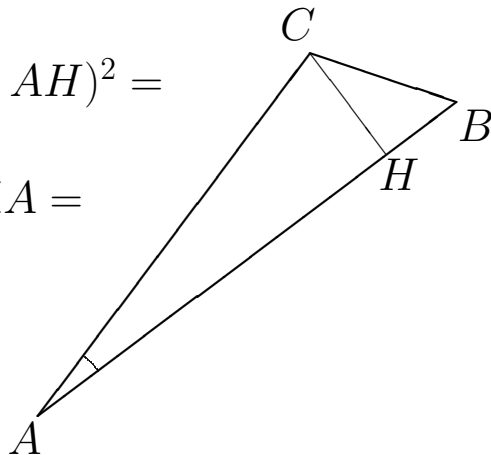
Теорема 2. В треугольнике со сторонами a, b, c и углом $\angle A$, противоположащим стороне длиной a , имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (2)$$

Доказательство. $a^2 = BC^2 =$
 $= CH^2 + HB^2 = (AC \sin \angle A)^2 + (AB - AH)^2 =$
 $= b^2 \sin^2 \angle A + (c - b \cos \angle A)^2 =$
 $= b^2 \sin^2 \angle A + c^2 - 2bc \cos \angle A + b^2 \cos^2 \angle A =$
 $= b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A.$

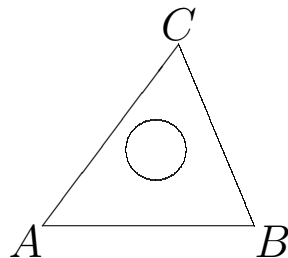
Таким образом, те же выкладки можно было получить без применения координатного метода.

Теорема доказана.



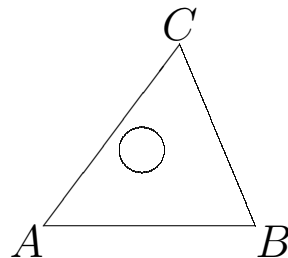
VIII. Треугольник и окружность

Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника...



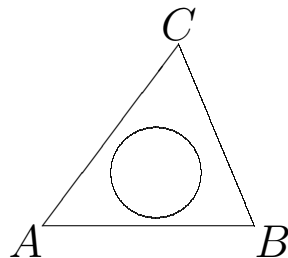
VIII. Треугольник и окружность

Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника...



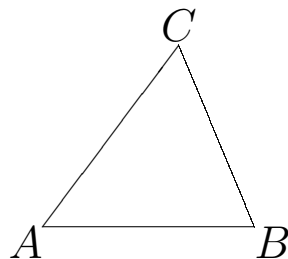
VIII. Треугольник и окружность

Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника...



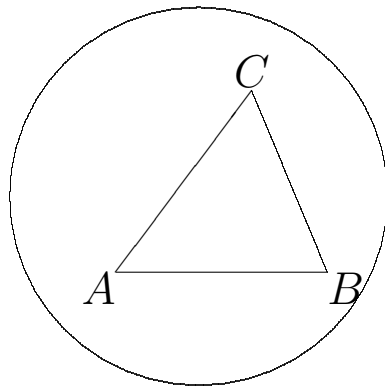
VIII. Треугольник и окружность

Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника или круги, включающие в себя треугольник.



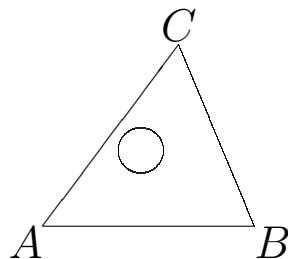
VIII.1. Постановка задачи о $\triangle$ и $\bigcirc$

Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника или круги, включающие в себя треугольник.



VIII.1. Постановка задачи о $\triangle$ и $\bigcirc$

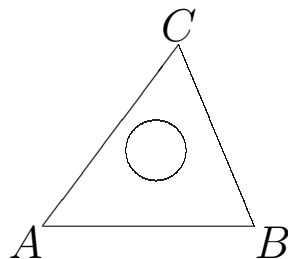
Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника или круги, включающие в себя треугольник.



Рассмотрим окружность, лежащую *внутри* треугольника, но имеющую $\frac{\text{минимальный?}}{\text{максимальный?}}$ радиус.

VIII.1. Постановка задачи о $\triangle$ и $\bigcirc$

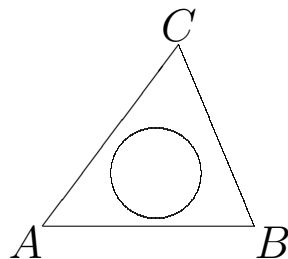
Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника или круги, включающие в себя треугольник.



Рассмотрим окружность, лежащую *внутри* треугольника, но имеющую $\frac{\text{минимальный?}}{\text{максимальный?}}$ радиус.

VIII.1. Постановка задачи о $\triangle$ и $\bigcirc$

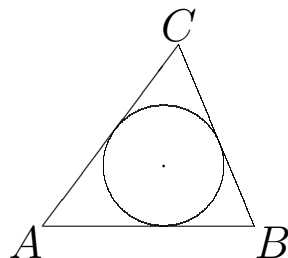
Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника или круги, включающие в себя треугольник.



Рассмотрим окружность, лежащую *внутри* треугольника, но имеющую $\frac{\text{минимальный?}}{\text{максимальный?}}$ радиус.

VIII.1. Постановка задачи о $\triangle$ и $\bigcirc$

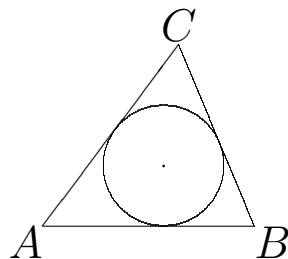
Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника или круги, включающие в себя треугольник.



Рассмотрим окружность, лежащую *внутри* треугольника, но имеющую $\frac{\text{минимальный?}}{\text{максимальный?}}$ радиус.

VIII.1. Постановка задачи о $\triangle$ и $\bigcirc$

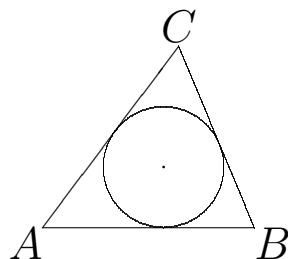
Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника или круги, включающие в себя треугольник.



Рассмотрим окружность, лежащую *внутри* треугольника, но имеющую максимальный радиус.

VIII.2. Вписанная окружность

Особый интерес представляют окружности, целиком лежащие внутри треугольника или круги, включающие в себя треугольник.

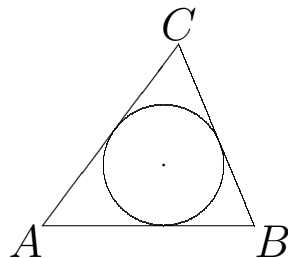


Рассмотрим окружность, лежащую *внутри* треугольника, но имеющую максимальный радиус.

Такая окружность называется **окружностью, вписанной в треугольник**.

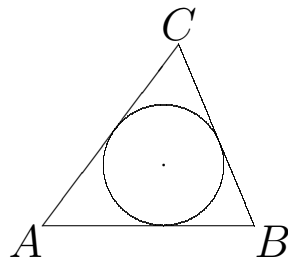
VIII.2. Вписанная окружность

Существует ли окружность, вписанная в треугольник?



VIII.2. Вписанная окружность

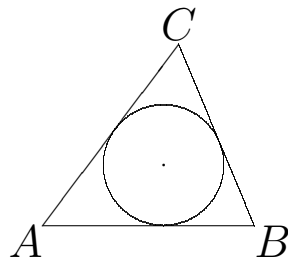
Существует ли окружность, вписанная в треугольник?



Как доказать существование какого-либо объекта?

VIII.2. Вписанная окружность

Существует ли окружность, вписанная в треугольник?



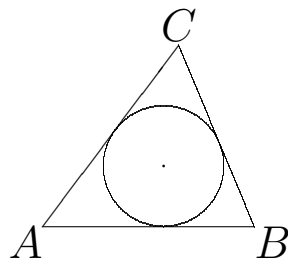
Как доказать существование какого-либо объекта?

Есть два способа:

— прямой, конструктивный (показать, как построить нужный объект);

VIII.2. Вписанная окружность

Существует ли окружность, вписанная в треугольник?



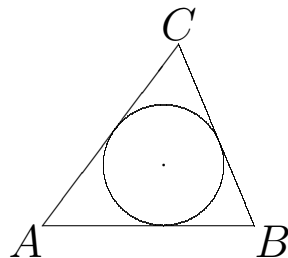
Как доказать существование какого-либо объекта?

Есть два способа:

- прямой, конструктивный (показать, как построить нужный объект);
- косвенный («от противного»).

VIII.2. Вписанная окружность

Существует ли окружность, вписанная в треугольник?



Как доказать существование какого-либо объекта?

Есть два способа:

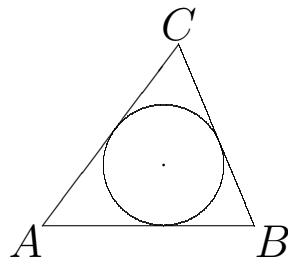
- прямой, конструктивный (показать, как построить нужный объект);
- косвенный («от противного»).

Приоритетным считается

способ.

VIII.2. Вписанная окружность

Существует ли окружность, вписанная в треугольник?



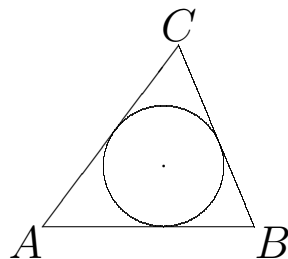
Как доказать существование какого-либо объекта?

Есть два способа:

- прямой, конструктивный (показать, как построить нужный объект);
- косвенный («от противного»).

Приоритетным считается конструктивный способ.

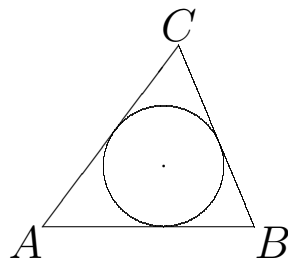
VIII.2. Вписанная окружность



Применим «стратегию предвкушения».

Допустим, окружность, вписанная в треугольник, существует.

VIII.2. Вписанная окружность



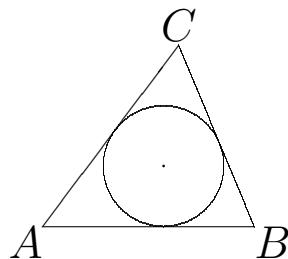
Применим «стратегию предвкушения».

Допустим, окружность, вписанная в треугольник, существует.

Нам надо понять, как ее построить и показать, что наш способ построения гарантированно дает нужный результат.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется



Применим «стратегию предвкушения».

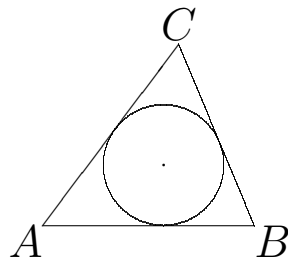
Допустим, окружность, вписанная в треугольник, существует.

Нам надо понять, как ее построить и показать, что наш способ построения гарантированно дает нужный результат.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется

положением ее центра и величиной радиуса.



Применим «стратегию предвкушения».

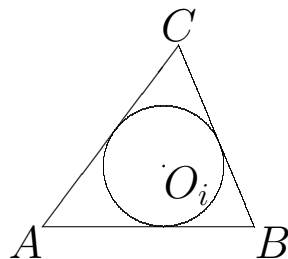
Допустим, окружность, вписанная в треугольник, существует.

Нам надо понять, как ее построить и показать, что наш способ построения гарантированно дает нужный результат.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется

положением ее центра и величиной радиуса.



Применим «стратегию предвкушения».

Допустим, окружность, вписанная в треугольник, существует.

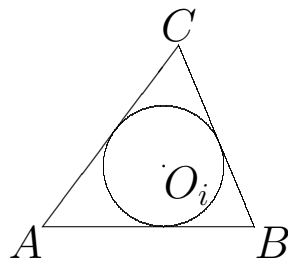
Нам надо понять, как ее построить и показать, что наш способ построения гарантированно дает нужный результат.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется

положением ее центра и величиной радиуса.

Радиусы естественно провести в точки...



Применим «стратегию предвкушения».

Допустим, окружность, вписанная в треугольник, существует.

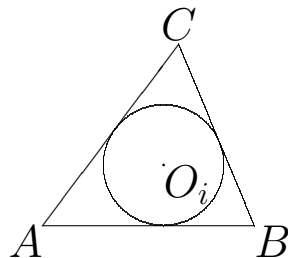
Нам надо понять, как ее построить и показать, что наш способ построения гарантированно дает нужный результат.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется

положением ее центра и величиной радиуса.

Радиусы естественно провести в точки пересечения окружности с другими линиями.



Применим «стратегию предвкушения».

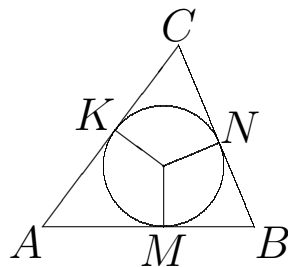
Допустим, окружность, вписанная в треугольник, существует.

Нам надо понять, как ее построить и показать, что наш способ построения гарантированно дает нужный результат.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

Радиусы естественно провести в точки пересечения окружности с другими линиями.



Применим «стратегию предвкушения».

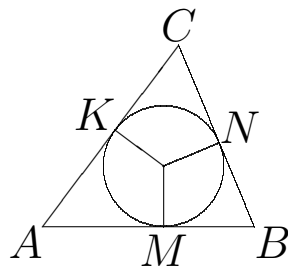
Допустим, окружность, вписанная в треугольник, существует.

Нам надо понять, как ее построить и показать, что наш способ построения гарантированно дает нужный результат.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

Радиусы естественно провести в точки пересечения окружности с другими линиями.



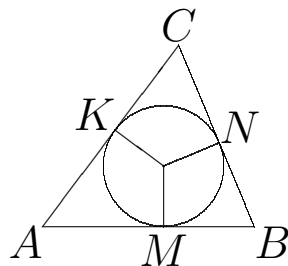
«Без треугольников жизни нет!»

Радиусы O_iK , O_iM , O_iN надо «встроить» в треугольники.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

Радиусы естественно провести в точки пересечения окружности с другими линиями.



«Без треугольников жизни нет!»

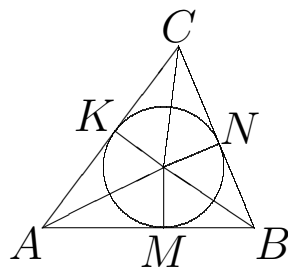
Радиусы O_iK , O_iM , O_iN надо «встроить» в треугольники.

Желательно, чтобы эти радиусы были сторонами треугольника.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

Радиусы естественно провести в точки пересечения окружности с другими линиями.



«Без треугольников жизни нет!»

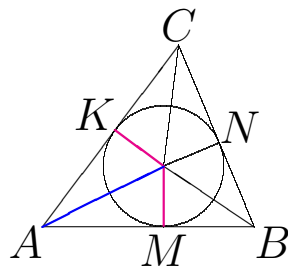
Радиусы $O_i K$, $O_i M$, $O_i N$ надо «встроить» в треугольники.

Желательно, чтобы эти радиусы были сторонами треугольника.

VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

$O_iM = O_iK$, AO_i — общая гипотенуза $\triangle AO_iM$ и $\triangle AO_iK$.

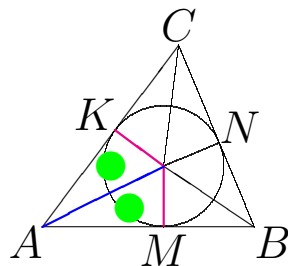


VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

$O_iM = O_iK$, AO_i — общая гипотенуза $\triangle AO_iM$ и $\triangle AO_iK$.

$$\triangle AO_iM = \triangle AO_iK.$$



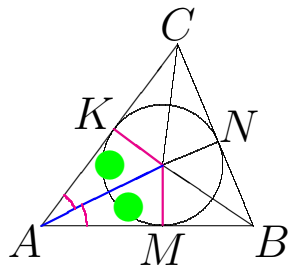
VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

$O_iM = O_iK$, AO_i — общая гипотенуза $\triangle AO_iM$ и $\triangle AO_iK$.

$$\triangle AO_iM = \triangle AO_iK.$$

$$\angle BAO_i = \angle CAO_i,$$

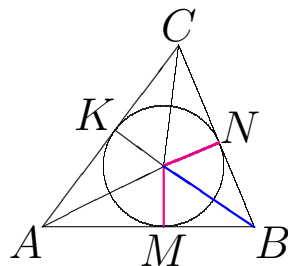


VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

$O_iM = O_iN$, BO_i — общая гипотенуза $\triangle BO_iM$ и $\triangle BO_iN$.

$$\angle BAO_i = \angle CAO_i,$$



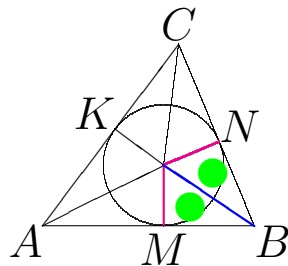
VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

$O_iM = O_iN$, BO_i — общая гипотенуза $\triangle BO_iM$ и $\triangle BO_iN$.

$$\triangle BO_iM = \triangle BO_iN.$$

$$\angle BAO_i = \angle CAO_i,$$



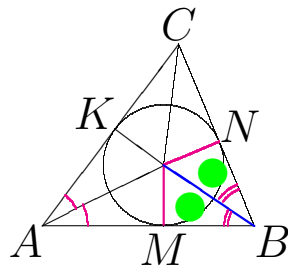
VIII.2. Вписанная окружность

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

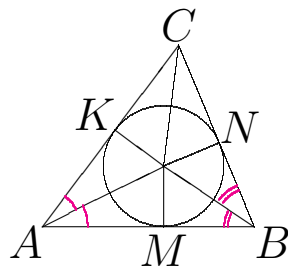
$O_iM = O_iN$, BO_i — общая гипотенуза $\triangle BO_iM$ и $\triangle BO_iN$.

$$\triangle BO_iM = \triangle BO_iN.$$

$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i.$$



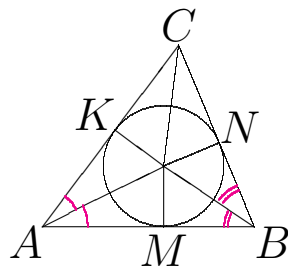
VIII.2. Вписанная окружность



$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i.$$

Следовательно, мы показали, что центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.

VIII.2. Вписанная окружность



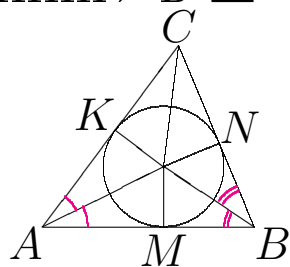
$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i.$$

Следовательно, мы показали, что центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.

Остается проверить, что все три биссектрисы пересекаются в одной точке.

VIII.3. Пересечение «экстремальных линий» в $\triangle$

Как можно доказать, что три прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке?



$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i.$$

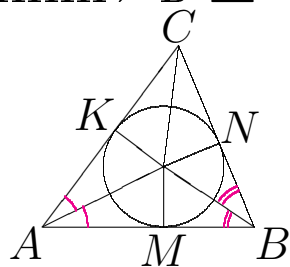
Следовательно, мы показали, что центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.

Остается проверить, что все три биссектрисы пересекаются в одной точке.

VIII.3. Пересечение «экстремальных линий» в $\triangle$

Как можно доказать, что три прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке?

1) точка пересечения двух прямых обладает некоторым уникальным свойством.



$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i.$$

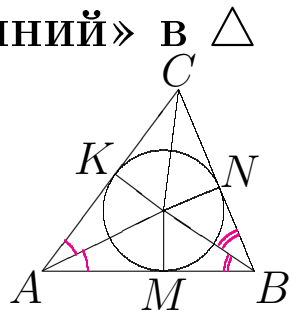
Следовательно, мы показали, что центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.

Остается проверить, что все три биссектрисы пересекаются в одной точке.

VIII.3. Пересечение «экстремальных линий» в $\triangle$

Как можно доказать, что три прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке?

2) прямая, проходящая через вершину и пересечение прямых l_1, l_2 , совпадает с l_3 .



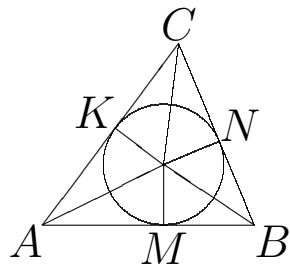
$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i.$$

Следовательно, мы показали, что центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.

Остается проверить, что все три биссектрисы пересекаются в одной точке.

VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$

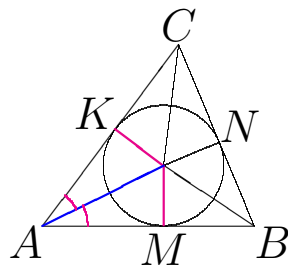
Мы провели биссектрисы AO_i и BO_i . Осталось показать, что CO_i — биссектриса.



$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i.$$

VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$

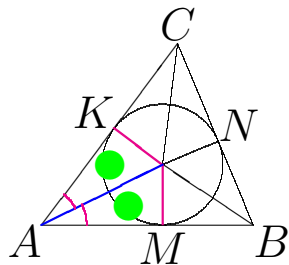
Мы провели биссектрисы AO_i и BO_i . Осталось показать, что CO_i — биссектриса.



$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i. \quad \angle BCO_i \stackrel{?}{=} \angle ACO_i.$$

VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$

Мы провели биссектрисы AO_i и BO_i . Осталось показать, что CO_i — биссектриса.

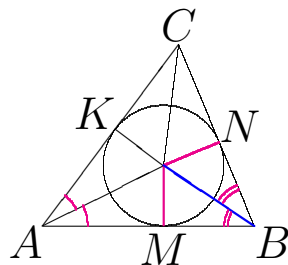


$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i. \quad \angle BCO_i \stackrel{?}{=} \angle ACO_i.$$

$$O_1K = O_1M$$

VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$

Мы провели биссектрисы AO_i и BO_i . Осталось показать, что CO_i — биссектриса.

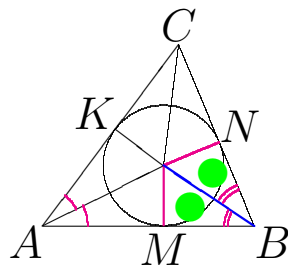


$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i. \quad \angle BCO_i \stackrel{?}{=} \angle ACO_i.$$

$$O_1K = O_1M$$

VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$

Мы провели биссектрисы AO_i и BO_i . Осталось показать, что CO_i — биссектриса.

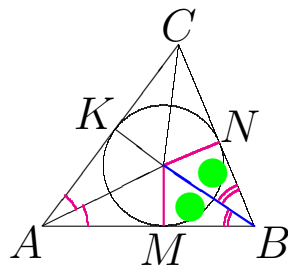


$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i. \quad \angle BCO_i \stackrel{?}{=} \angle ACO_i.$$

$$O_1K = O_1M$$

VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$

Мы провели биссектрисы AO_i и BO_i . Осталось показать, что CO_i — биссектриса.

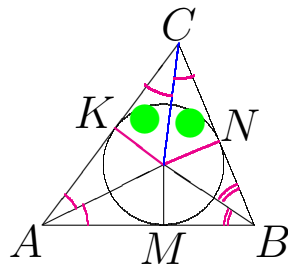


$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i. \quad \angle BCO_i \stackrel{?}{=} \angle ACO_i.$$

$$O_1K = O_1M = O_1N.$$

VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$

Мы провели биссектрисы AO_i и BO_i . Осталось показать, что CO_i — биссектриса.

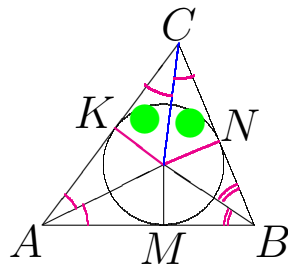


$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i. \quad \angle BCO_i \stackrel{?}{=} \angle ACO_i.$$

$$\triangle KO_iC = \triangle NO_iC$$

VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$

Мы провели биссектрисы AO_i и BO_i . Осталось показать, что CO_i — биссектриса.



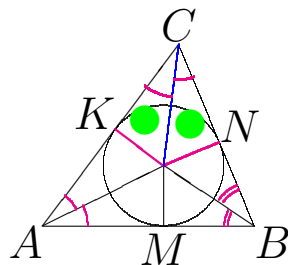
$$\angle BAO_i = \angle CAO_i, \quad \angle ABO_i = \angle CBO_i. \quad \angle BCO_i \stackrel{!}{=} \angle ACO_i.$$

$$\triangle KO_iC = \triangle NO_iC.$$

VIII.3.1. Пересечение биссектрис в $\triangle$

Окружность определяется положением ее центра и величиной радиуса.

$$\triangle AO_iM = \triangle AO_iK.$$



Мы показали, что, во-первых, три биссектрисы пересекаются в одной точке и, во-вторых, что эта точка пересечения является центром вписанной окружности.

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Оказывается, все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке!

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Но мы рассматривали и другие «экстремальные» отрезки, проведенных в треугольнике:

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Но мы рассматривали и другие «экстремальные» отрезки, проведенные в треугольнике:

— медианы (????);

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Но мы рассматривали и другие «экстремальные» отрезки, проведенные в треугольнике:

— медианы (делится пополам *сторона треугольника*);

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Но мы рассматривали и другие «экстремальные» отрезки, проведенные в треугольнике:

- медианы (делится пополам *сторона треугольника*);
- биссектрисы (??????);

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Но мы рассматривали и другие «экстремальные» отрезки, проведенные в треугольнике:

- медианы (делится пополам *сторона треугольника*);
- биссектрисы (делится пополам *угол треугольника*);

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Но мы рассматривали и другие «экстремальные» отрезки, проведенные в треугольнике:

- медианы (делится пополам *сторона треугольника*);
- биссектрисы (делится пополам *угол треугольника*);
- высоты (????).

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Но мы рассматривали и другие «экстремальные» отрезки, проведенные в треугольнике:

- медианы (делится пополам *сторона треугольника*);
- биссектрисы (делится пополам *угол треугольника*);
- высоты (*перпендикуляр* к стороне).

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Но мы рассматривали и другие «экстремальные» отрезки, проведенные в треугольнике:

- медианы (делится пополам *сторона треугольника*);
- биссектрисы (делится пополам *угол треугольника*);
- высоты (*перпендикуляр* к стороне).

Посмотрим, как они «взаимодействуют» друг с другом.

VIII.3.2. Постановка задачи о расположении «экстремальных» линий в треугольнике

Но мы рассматривали и другие «экстремальные» отрезки, проведенные в треугольнике:

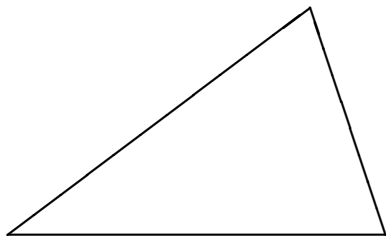
- медианы (делится пополам *сторона треугольника*);
- биссектрисы (делится пополам *угол треугольника*);
- высоты (*перпендикуляр* к стороне).

Посмотрим, как они «взаимодействуют» друг с другом.

Сначала изучим особенности взаимного расположения «одинаковых» линий: трех медиан, трех биссектрис и так далее.

VIII.3.3. Медианы треугольника

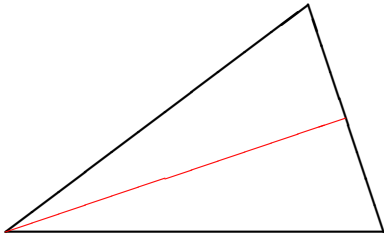
Рассмотрим произвольный треугольник.



VIII.3.3. Медианы треугольника

Рассмотрим произвольный треугольник.

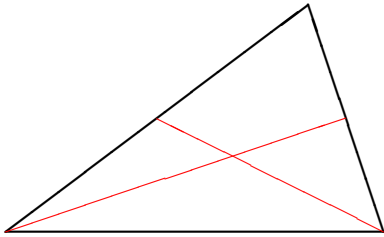
Проведем медианы к трем сторонам.



VIII.3.3. Медианы треугольника

Рассмотрим произвольный треугольник.

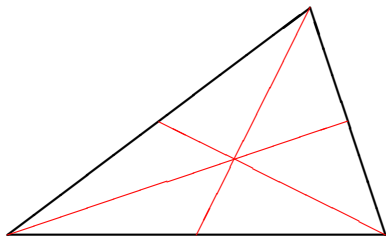
Проведем медианы к трем сторонам.



VIII.3.3. Медианы треугольника

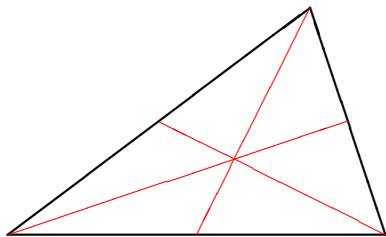
Рассмотрим произвольный треугольник.

Проведем медианы к трем сторонам.



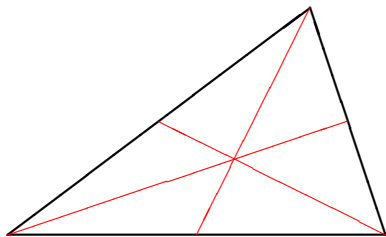
VIII.3.3. Медианы треугольника

Что вы можете сказать о взаимном расположении медиан?

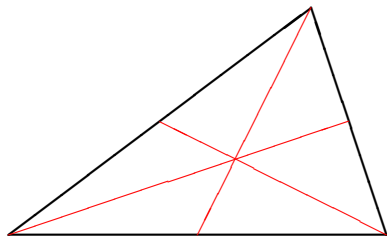


VIII.3.3. Медианы треугольника

Медианы пересекаются в одной точке.



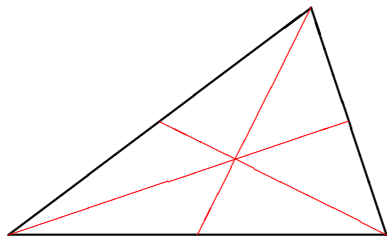
VIII.3.3. Медианы треугольника



Может это частный случай??

Давайте проверим, начертите у себя в тетради произвольный треугольник и как можно точнее проведите медианы.

VIII.3.3. Медианы треугольника

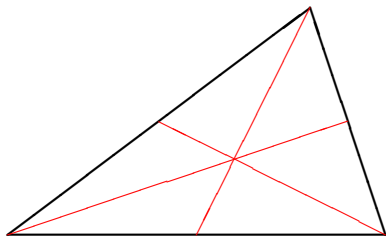


Может это частный случай??

Давайте проверим, начертите у себя в тетради произвольный треугольник и как можно точнее проведите медианы. Сделайте вывод.

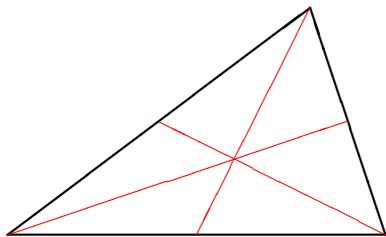
VIII.3.3. Медианы треугольника

Докажем, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

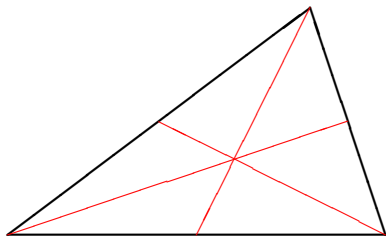


VIII.3.3. Медианы треугольника

Как можно доказать, что медианы пересекаются в одной точке?



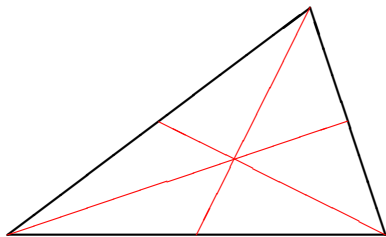
VIII.3.3. Медианы треугольника



Как можно доказать, что медианы пересекаются в одной точке?

1. Провести две медианы «почестному», а третью через точку пересечения, остается доказать, что она так же является медианой.

VIII.3.3. Медианы треугольника



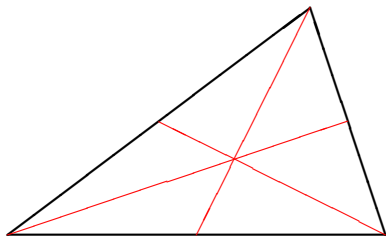
Как можно доказать, что медианы пересекаются в одной точке?

1. Провести две медианы «почестному», а третью через точку пересечения, остается доказать, что она так же является медианой.
2. Доказать, что точка пересечения обладает некоторым свойством.

VIII.3.3. Медианы треугольника

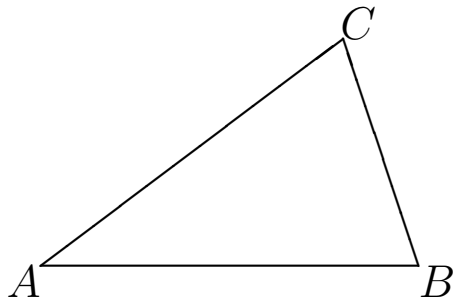
Воспользуемся вторым способом.

Докажем, что точка пересечения медиан обладает уникальным свойством.

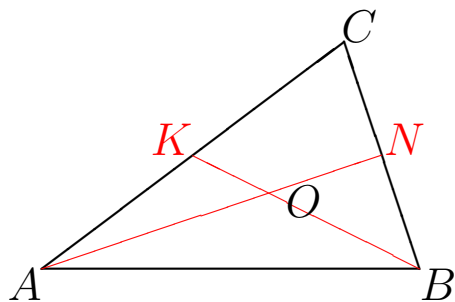


VIII.3.3. Медианы треугольника

Рассмотрим произвольный треугольник ABC .



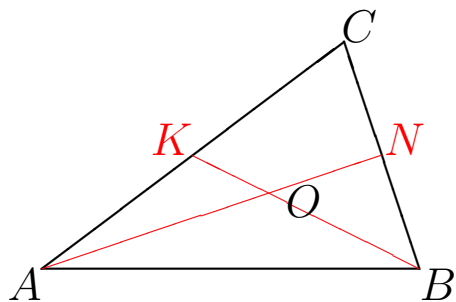
VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

Для начала рассмотрим две его медианы: AN и BK и обозначим буквой O точку их пересечения.

VIII.3.3. Медианы треугольника

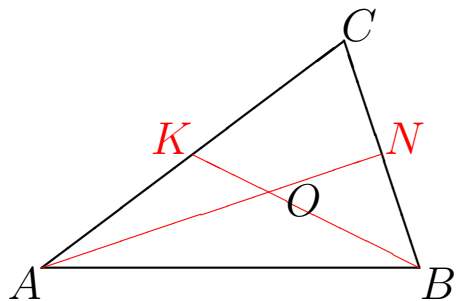


$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

У нас имеются две точки N и K ,
которые являются серединами сторон
треугольника, это значит, что

VIII.3.3. Медианы треугольника

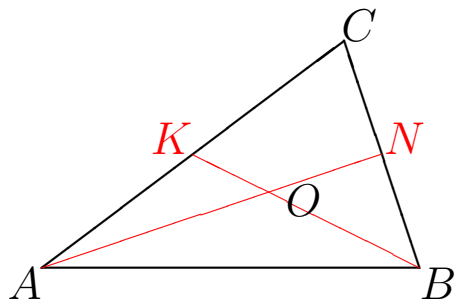


$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

У нас имеются две точки N и K , которые являются серединами сторон треугольника, это значит, что они делят стороны пополам (на равные части)

VIII.3.3. Медианы треугольника

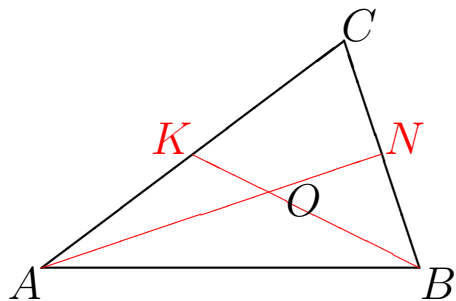


$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

У нас имеются две точки N и K , которые являются серединами сторон треугольника, это значит, что они делят стороны пополам (на равные части), следовательно можно провести

VIII.3.3. Медианы треугольника

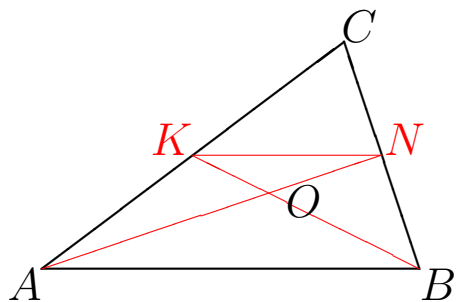


$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

У нас имеются две точки N и K , которые являются серединами сторон треугольника, это значит, что они делят стороны пополам (на равные части), следовательно можно провести **среднюю линию!**

VIII.3.3. Медианы треугольника

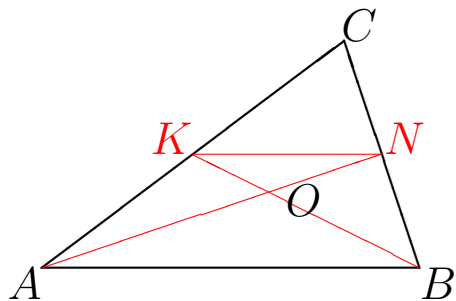


$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

Соединим точки N и K .

VIII.3.3. Медианы треугольника



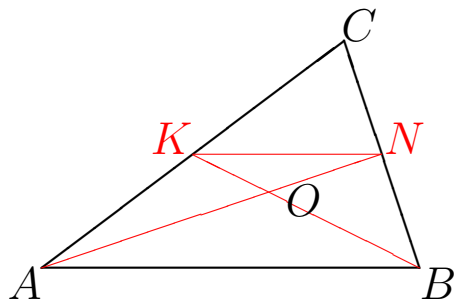
$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

KN – средняя линия $\triangle ABC$.

Свойства средней линии:

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

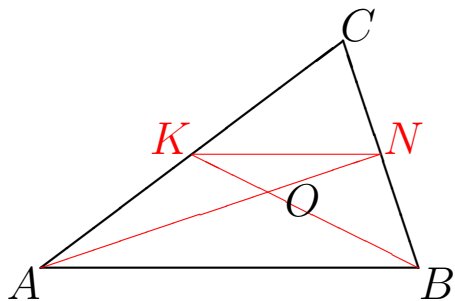
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

Свойства средней линии:

1. $\triangle ABC \sim \triangle KNC$

с коэффициентом подобия 2.

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

KN – средняя линия $\triangle ABC$.

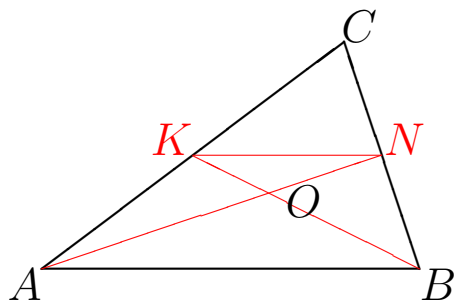
Свойства средней линии:

1. $\triangle ABC \sim \triangle KNC$

с коэффициентом подобия 2.

2. Средняя линия треугольника
параллельна одной из его сторон.

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

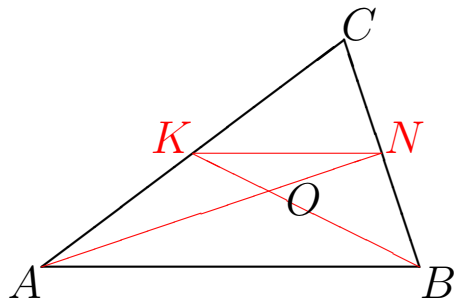
$$AN \cap BK = O$$

KN – средняя линия $\triangle ABC$.

Свойства средней линии:

1. $\triangle ABC \sim \triangle KNC$
с коэффициентом подобия 2.
2. Средняя линия треугольника
параллельна одной из его сторон.
3. Средняя линия треугольника равна
половине длины стороны, которой
она параллельна.

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

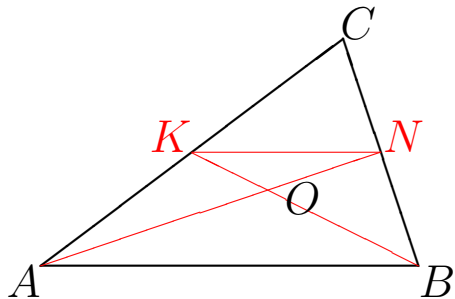
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

Свойства средней линии:

1. $\triangle ABC \sim \triangle KNC$
с коэффициентом подобия 2.
2. Средняя линия треугольника
параллельна одной из его сторон.

$$KN \parallel AB$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

KN – средняя линия $\triangle ABC$.

Свойства средней линии:

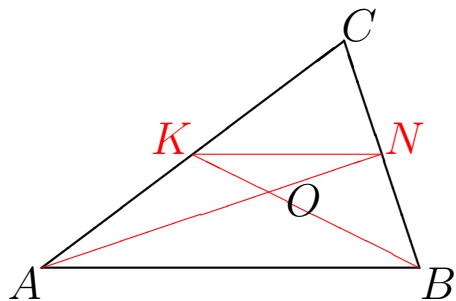
1. $\triangle ABC \sim \triangle KNC$

с коэффициентом подобия 2.

$$KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

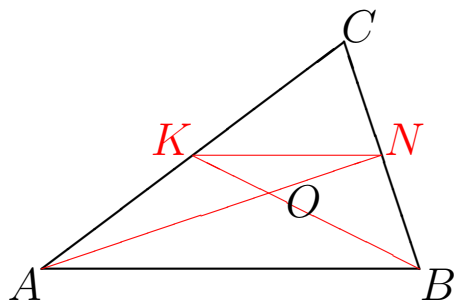
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC,$$

$$KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

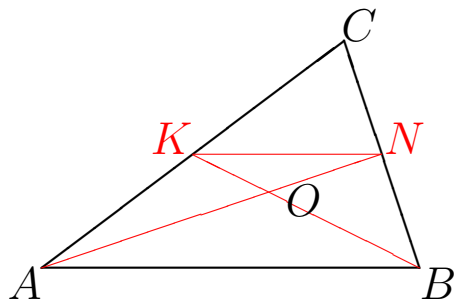
$$AN \cap BK = O$$

KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB \Rightarrow$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

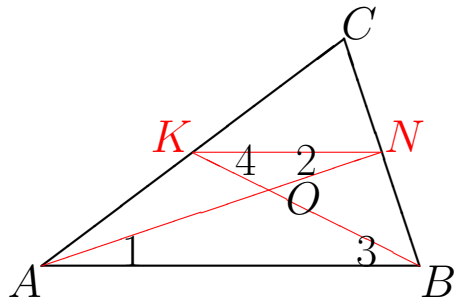
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB \Rightarrow$$

Используем **базовую ассоциацию** с понятием «параллельные прямые».

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

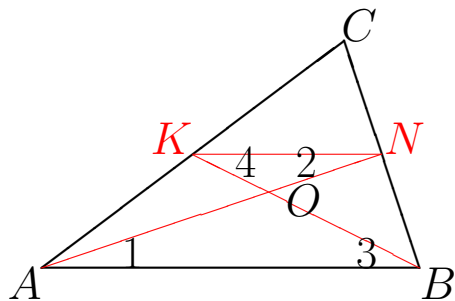
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB \Rightarrow$$

Используем **базовую ассоциацию** с понятием «параллельные прямые».

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

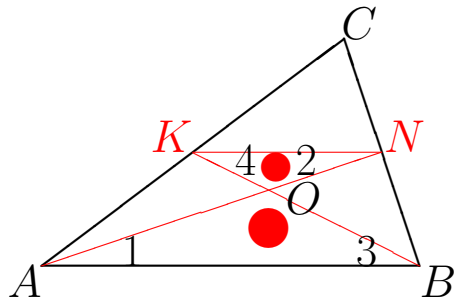
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = \angle 2, \\ \angle 3 = \angle 4 \end{cases} \Rightarrow$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

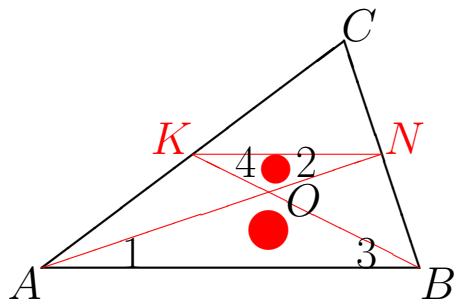
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = \angle 2, \\ \angle 3 = \angle 4 \end{cases} \Rightarrow$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

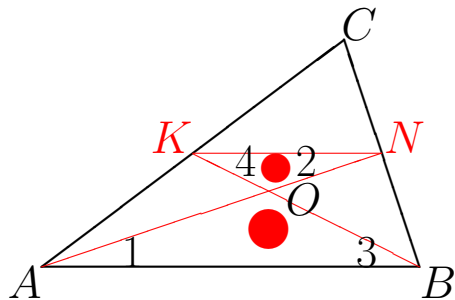
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = \angle 2, \\ \angle 3 = \angle 4 \end{cases} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle NOK.$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

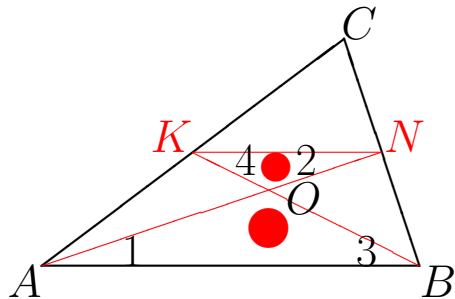
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB, \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle NOK.$$

Запишем отношения сходственных сторон.

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

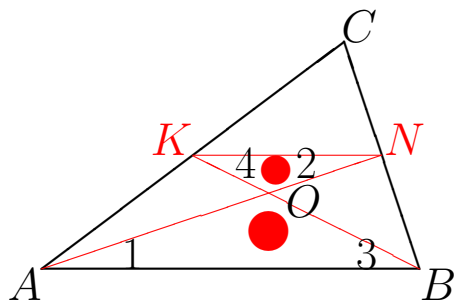
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB, \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle NOK.$$

$$= \frac{AB}{NK} =$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

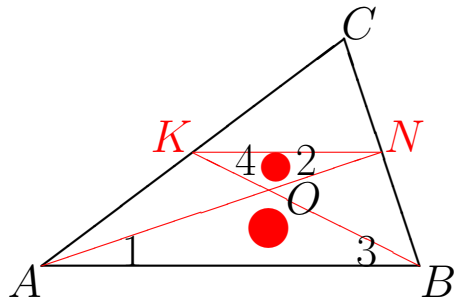
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB, \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle NOK.$$

$$2 = \frac{AB}{NK} =$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

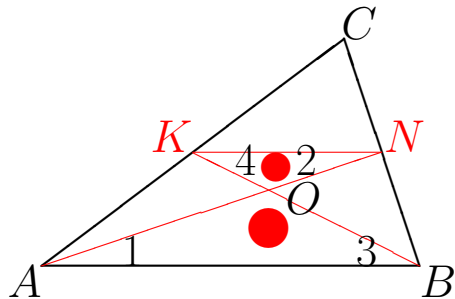
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB, \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle NOK.$$

$$2 = \frac{AB}{NK} = \frac{AO}{NO} =$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

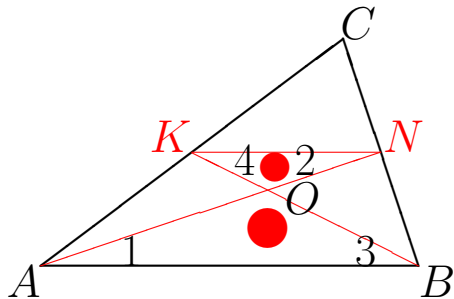
KN – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB, \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle NOK.$$

$$2 = \frac{AB}{NK} = \frac{AO}{NO} = \frac{BO}{KO}.$$

VIII.3.3. Медианы треугольника



$\triangle ABC$ – произвольный.

$$AN \cap BK = O$$

KN – средняя линия $\triangle ABC$.

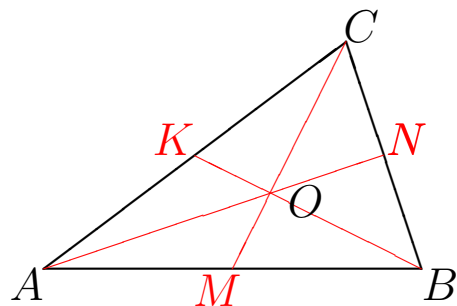
$$\triangle ABC \sim \triangle KNC, \quad KN = \frac{1}{2}AB,$$

$$KN \parallel AB, \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle NOK.$$

$$2 = \frac{AB}{NK} = \frac{AO}{NO} = \frac{BO}{KO}.$$

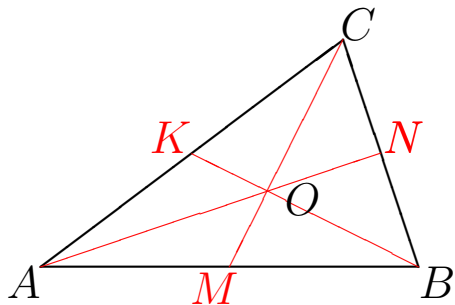
Таким образом, точка O пересечения медиан AN и BK делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.

VIII.3.3. Медианы треугольника



Итак, точка пересечения двух медиан делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

VIII.3.3. Медианы треугольника

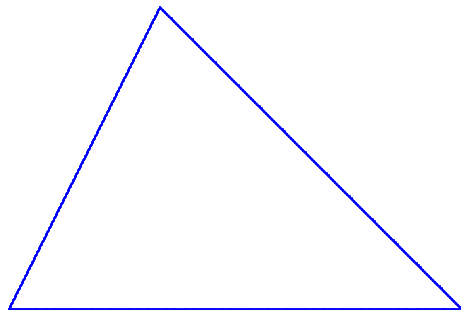


Итак, точка пересечения двух медиан делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Поэтому все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

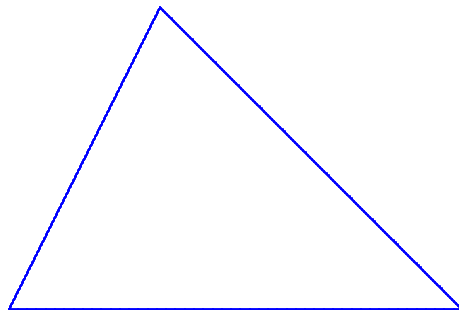
Медианы пересекаются в одной точке, и биссектрисы пересекаются в одной точке.



VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Медианы пересекаются в одной точке, и биссектрисы пересекаются в одной точке.

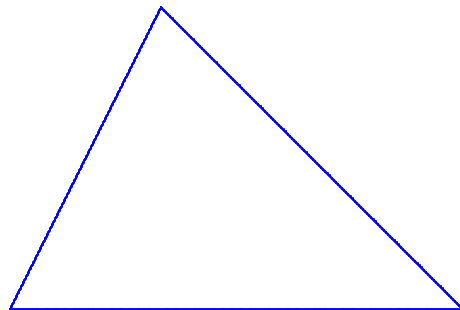
Медиана — ???



VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Медианы пересекаются в одной точке, и биссектрисы пересекаются в одной точке.

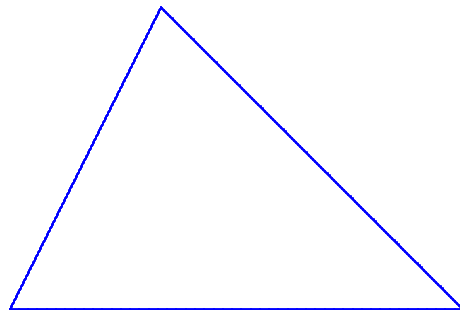
Медиана делит сторону пополам,
а высота — ???



VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Медианы пересекаются в одной точке, и биссектрисы пересекаются в одной точке.

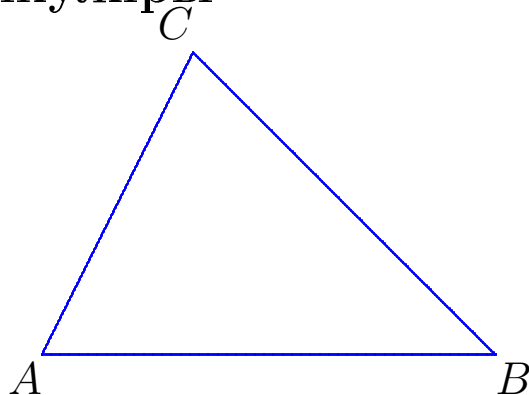
Медиана делит сторону пополам, а высота — перпендикулярна стороне.



VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Медианы пересекаются в одной точке, и биссектрисы пересекаются в одной точке.

Медиана делит сторону пополам, а высота — перпендикулярна стороне.

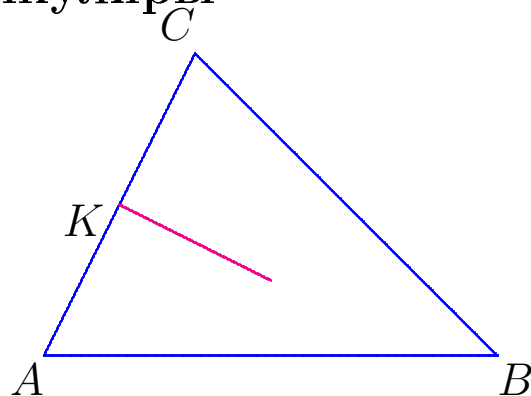


Сочетание этих свойств приводит к понятию

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Медианы пересекаются в одной точке, и биссектрисы пересекаются в одной точке.

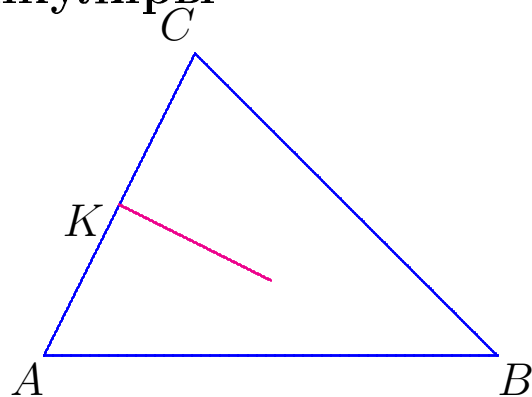
Медиана делит сторону пополам, а высота — перпендикулярна стороне.



Сочетание этих свойств приводит к понятию **серединный перпендикуляр**.

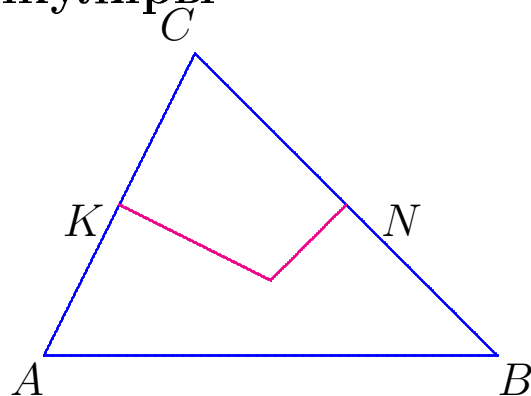
VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Можем ожидать, что серединные перпендикуляры наследуют некоторые хорошие свойства и медиан, и высот.



VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

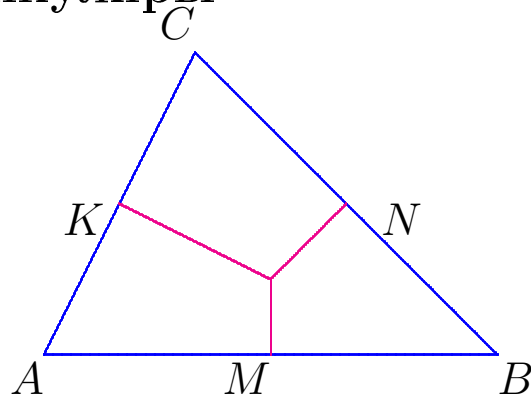
Можем ожидать, что серединные перпендикуляры наследуют некоторые хорошие свойства и медиан, и высот.



Например, пересекаются ли они в одной точке?

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

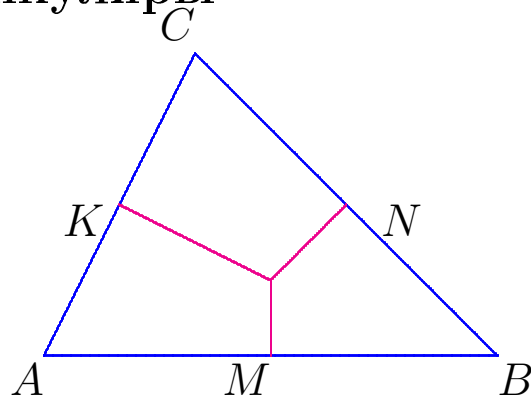
Можем ожидать, что серединные перпендикуляры наследуют некоторые хорошие свойства и медиан, и высот.



Например, пересекаются ли они в одной точке?

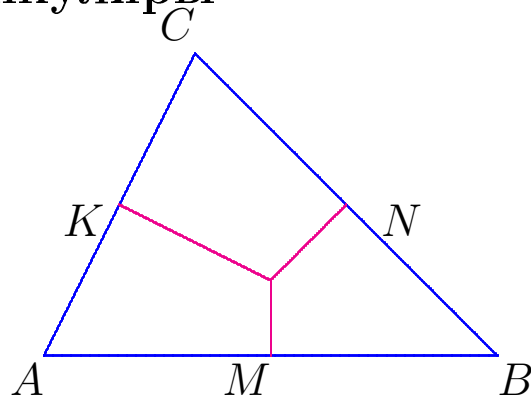
VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Давайте проверим. Нарисуйте каждый у себя в тетради треугольник и серединные перпендикуляры и посмотрите как они соотносятся между собой?



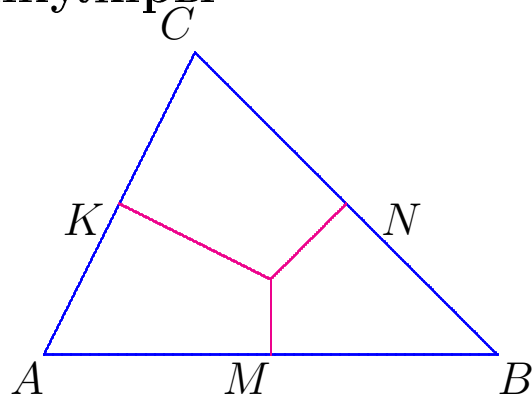
VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Докажем, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.



VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

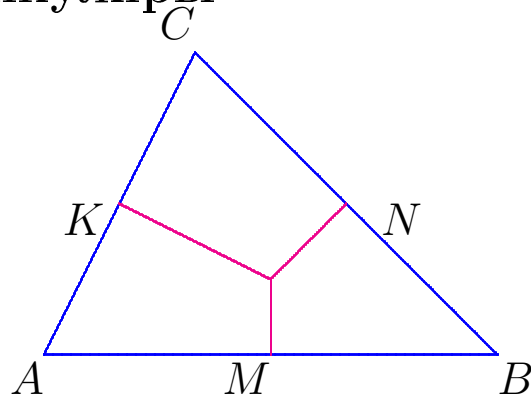
Докажем, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.



Как можно доказать, что три прямые пересекаются в одной точке?

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Докажем, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.



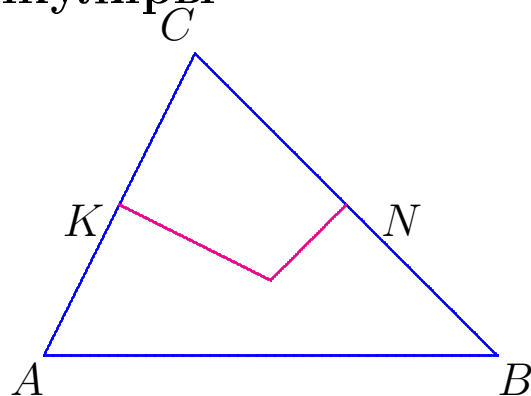
Как можно доказать, что три прямые пересекаются в одной точке?

1) Две прямые провести «по-четному», а третью — через точку их пересечения.

2) Показать что точка пересечения двух прямых обладает таким свойством, что третья прямая должна пройти через эту же точку.

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

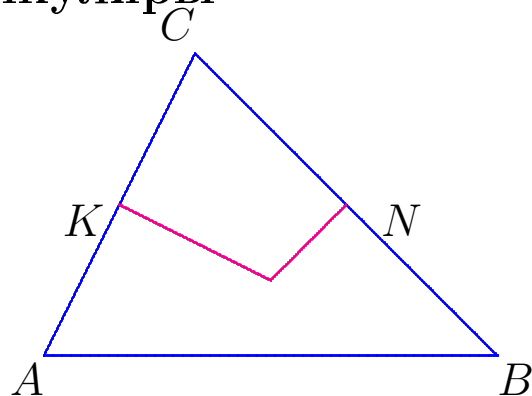
Докажем, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.



Главный недостаток чертежа —

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

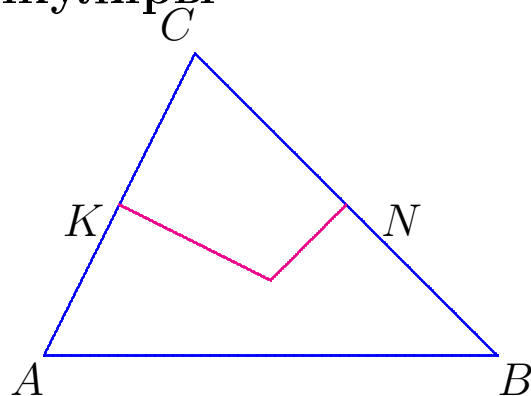
Докажем, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.



Главный недостаток чертежа —
серединные перпендикуляры не являются сторонами треугольников.

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

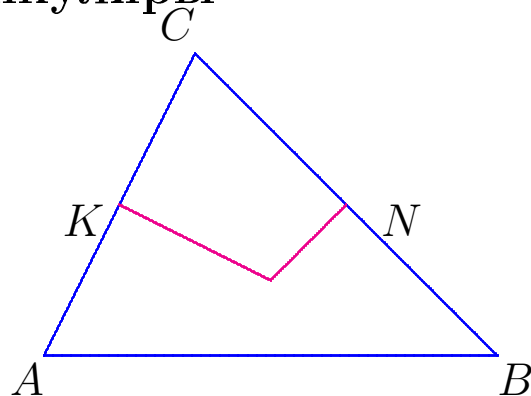
Докажем, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.



Главный недостаток чертежа —
серединные перпендикуляры не являются сторонами треугольников.
Можно провести...

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

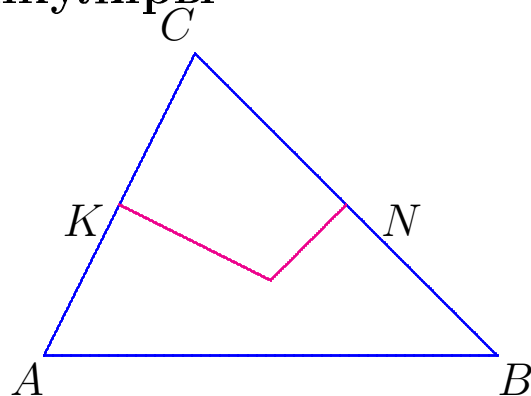
Докажем, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.



Главный недостаток чертежа —
серединные перпендикуляры не являются сторонами треугольников.
Можно провести средние линии или отрезки в вершины треугольника.

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

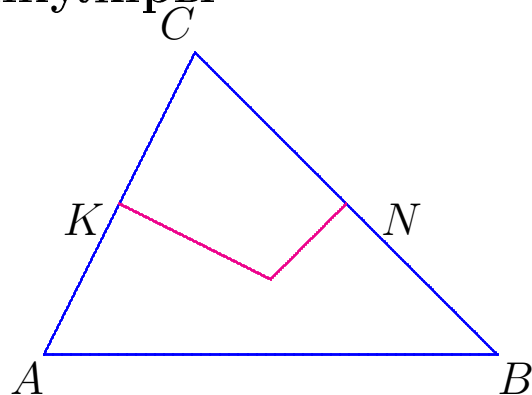
Докажем, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.



Главный недостаток чертежа —
серединные перпендикуляры не являются сторонами треугольников.
Можно провести средние линии или отрезки в вершины треугольника.

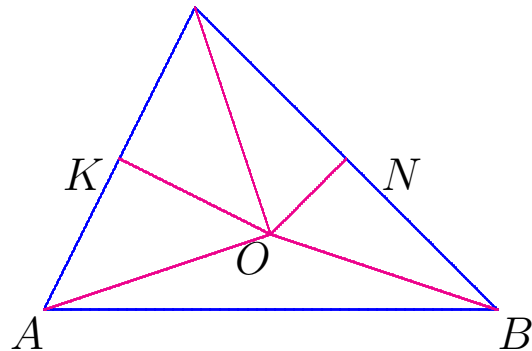
VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Докажем, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.



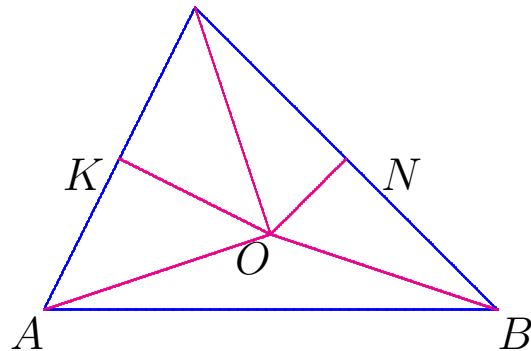
Главный недостаток чертежа —
серединные перпендикуляры не являются сторонами треугольников.
Случай со средними линиями рассмотрим позже.

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры



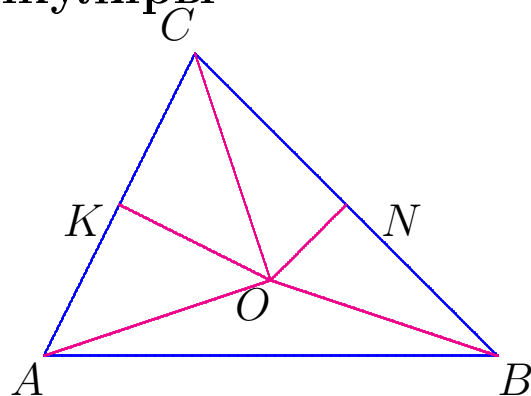
$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle AOK = \triangle COK \Rightarrow \end{array} \right.$$

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры



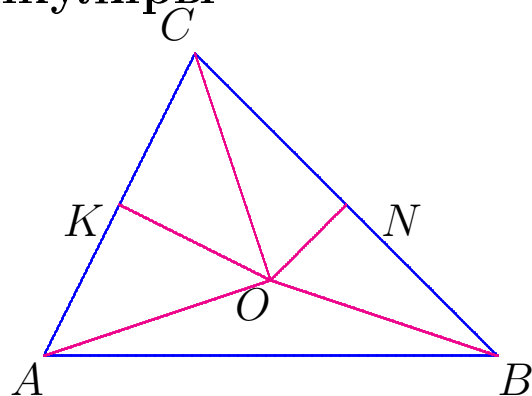
$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle AOK = \triangle COK \Rightarrow AO = CO, \\ \end{array} \right.$$

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры



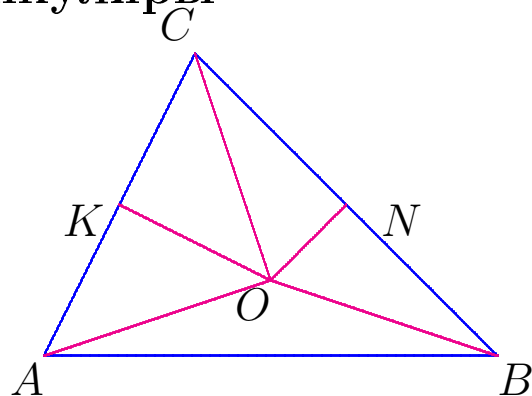
$$\begin{cases} \triangle AOK = \triangle COK \Rightarrow AO = CO, \\ \triangle CON = \triangle BON \Rightarrow \end{cases}$$

VIII.3.4. Серединные перпендикуляры



$$\begin{cases} \triangle AOK = \triangle COK \Rightarrow AO = CO, \\ \triangle CON = \triangle BON \Rightarrow CO = BO \end{cases}$$

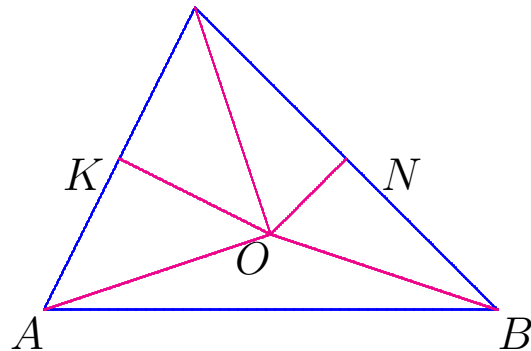
VIII.3.4. Серединные перпендикуляры



$$\begin{cases} \triangle AOK = \triangle COK \Rightarrow AO = CO, \\ \triangle CON = \triangle BON \Rightarrow CO = BO \end{cases} \Rightarrow AO = BO = CO.$$

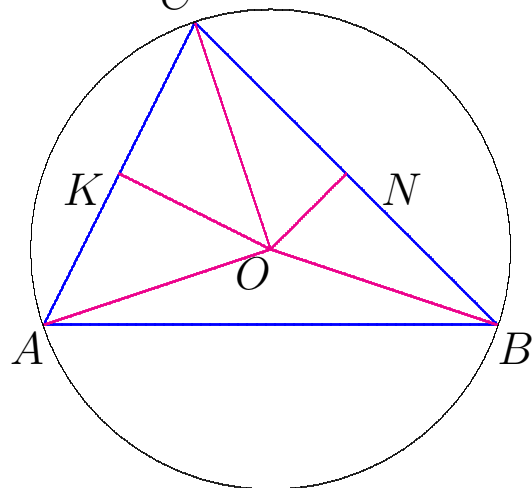
VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Т.к. $AO = BO = CO$, то O —
центр окружности!



VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Т.к. $AO = BO = CO$, то O —
центр окружности!



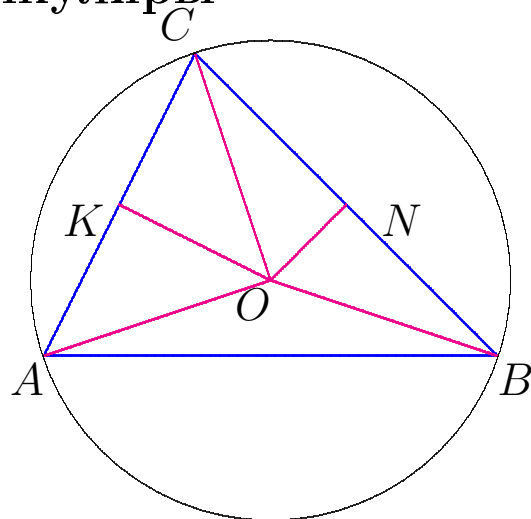
VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Значит,

во-первых, для любого треугольника существует окружность, описанная около этого треугольника;

во-вторых, центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров;

в-третьих, все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке.



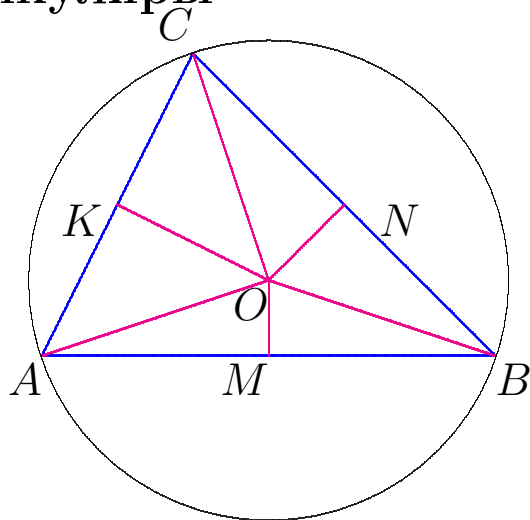
VIII.3.4. Серединные перпендикуляры

Значит,

во-первых, для любого треугольника существует окружность, описанная около этого треугольника;

во-вторых, центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров;

в-третьих, все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке.



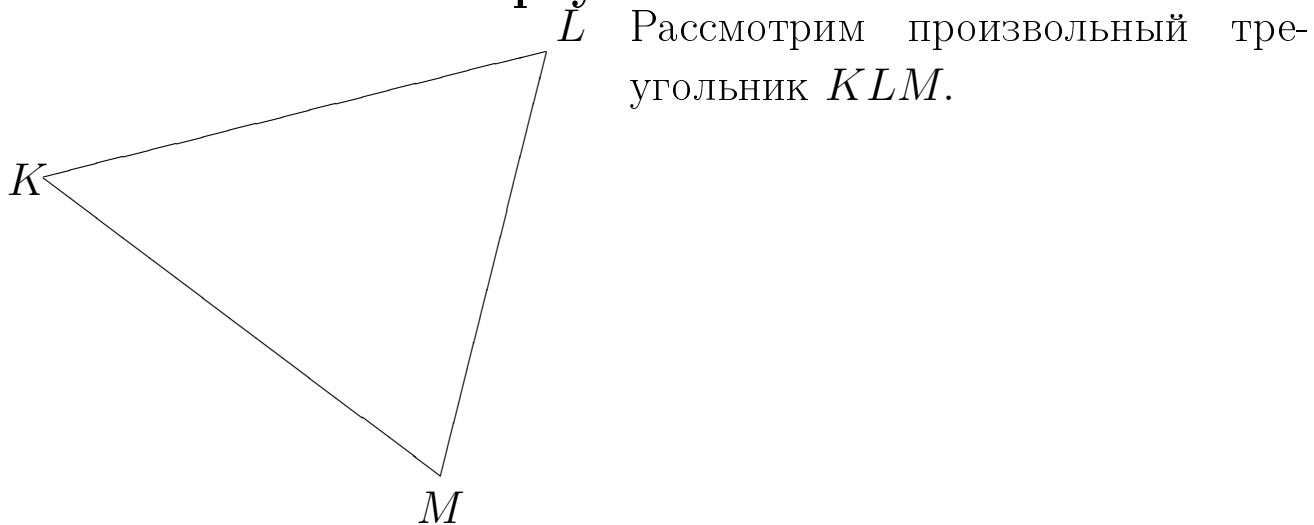
VIII.3.5. Высоты треугольника

Итак,

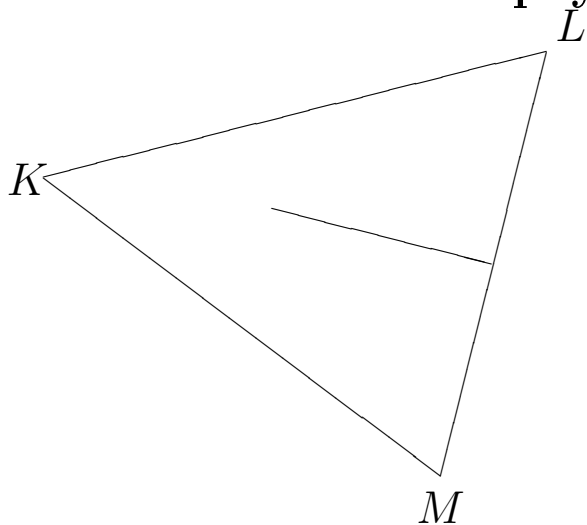
- все три биссектрисы пересекаются в одной точке (центр *вписанной* окружности);
- все три медианы пересекаются в одной точке;
- все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке.

А как с высотами?

VIII.3.5. Высоты треугольника



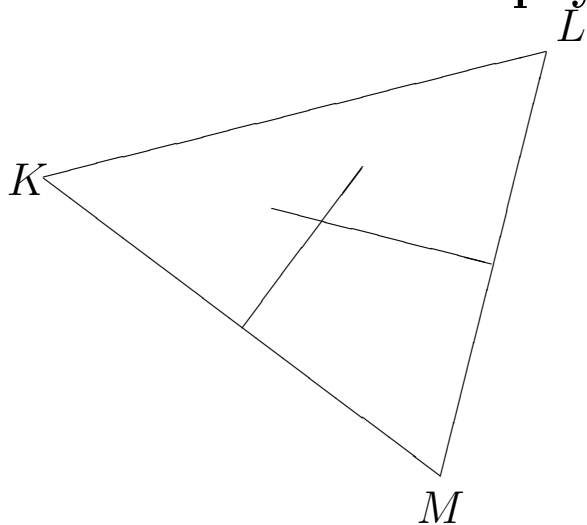
VIII.3.5. Высоты треугольника



Рассмотрим произвольный треугольник KLM .

Проведем серединные перпендикуляры.

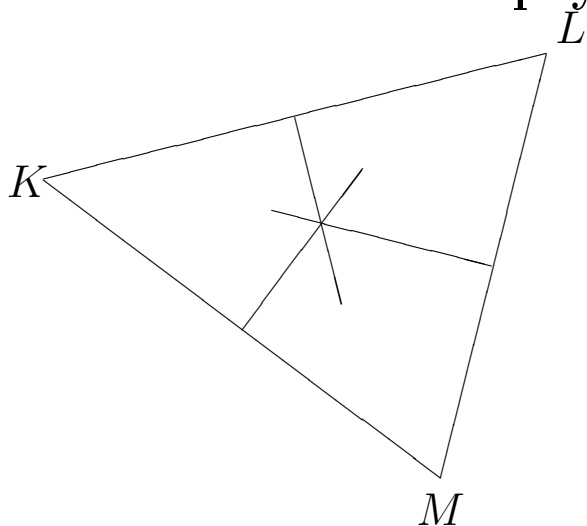
VIII.3.5. Высоты треугольника



Рассмотрим произвольный треугольник KLM .

Проведем серединные перпендикуляры.

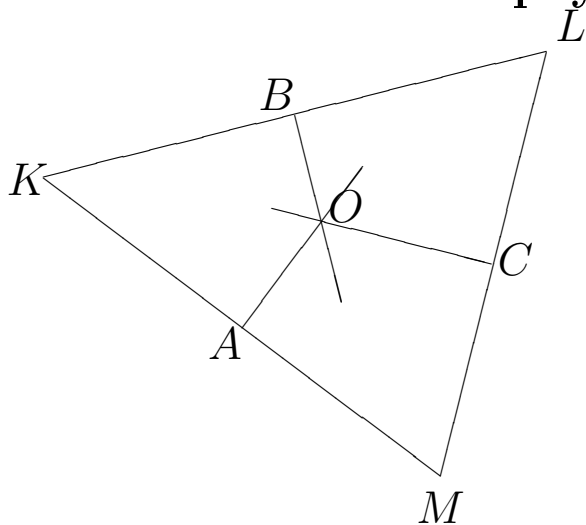
VIII.3.5. Высоты треугольника



Рассмотрим произвольный треугольник KLM .

Проведем серединные перпендикуляры.

VIII.3.5. Высоты треугольника

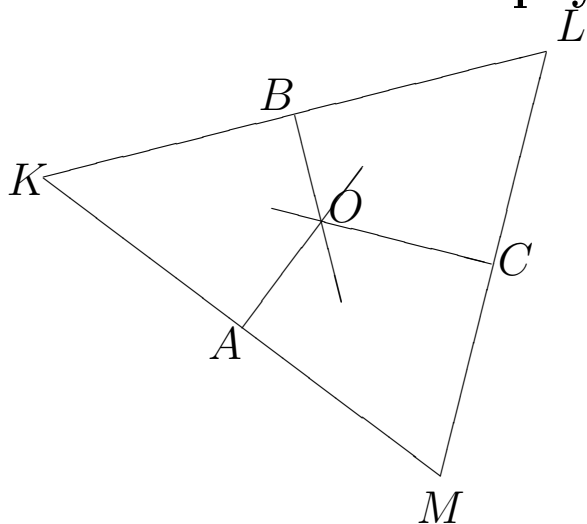


Рассмотрим произвольный треугольник KLM .

Проведем серединные перпендикуляры.

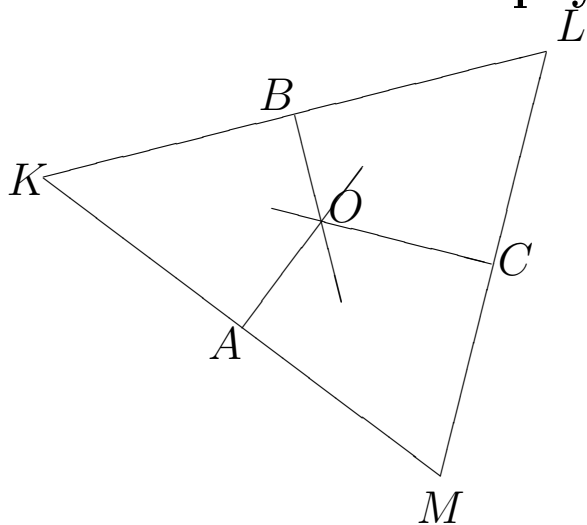
Они пересекаются в точке O .

VIII.3.5. Высоты треугольника



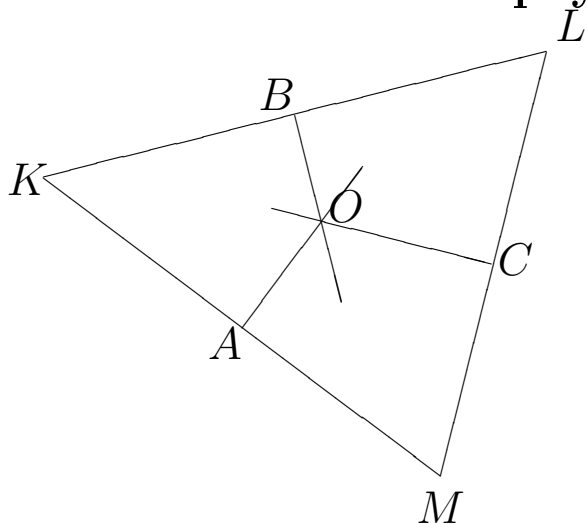
Давайте попробуем рассмотреть на этом чертеже какие-нибудь новые фигуры.

VIII.3.5. Высоты треугольника



Какие фигуры наиболее интересны?

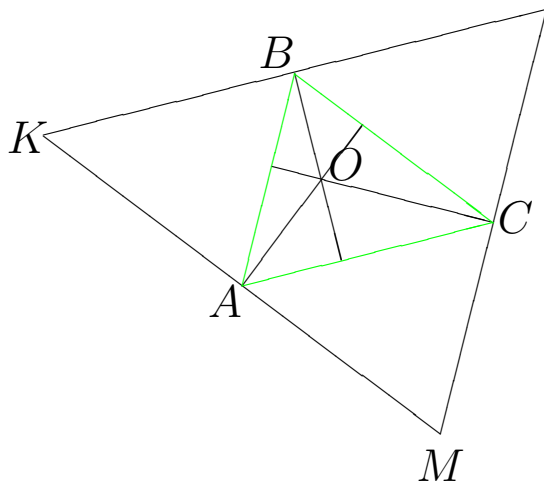
VIII.3.5. Высоты треугольника



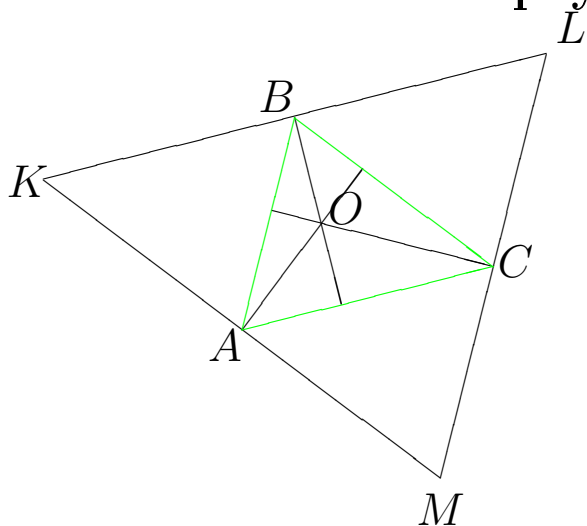
Попробуйте назвать какой-нибудь «интересный» треугольник.

VIII.3.5. Высоты треугольника

L Треугольник ABC .



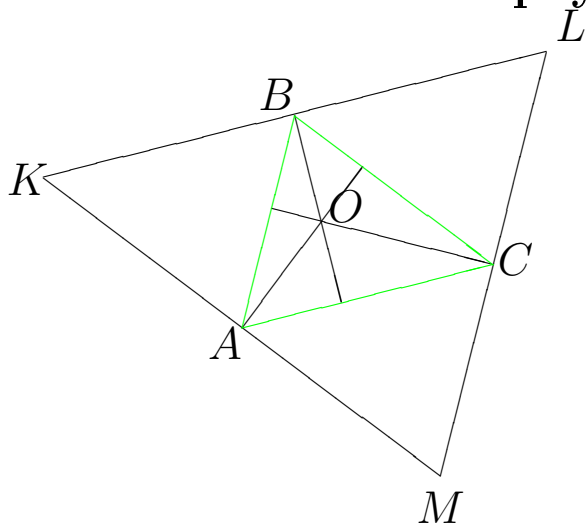
VIII.3.5. Высоты треугольника



Треугольник ABC .

Что мы можем сказать о его вершинах? Чем они для нас интересны?

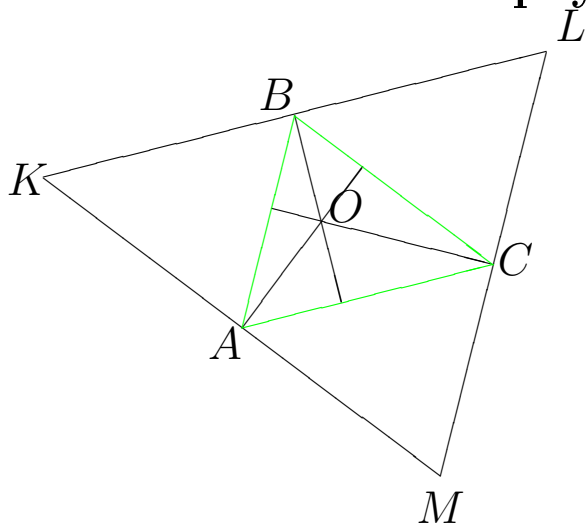
VIII.3.5. Высоты треугольника



Треугольник ABC .

Вершинами треугольника ABC являются основания серединных перпендикуляров треугольника KLM .

VIII.3.5. Высоты треугольника

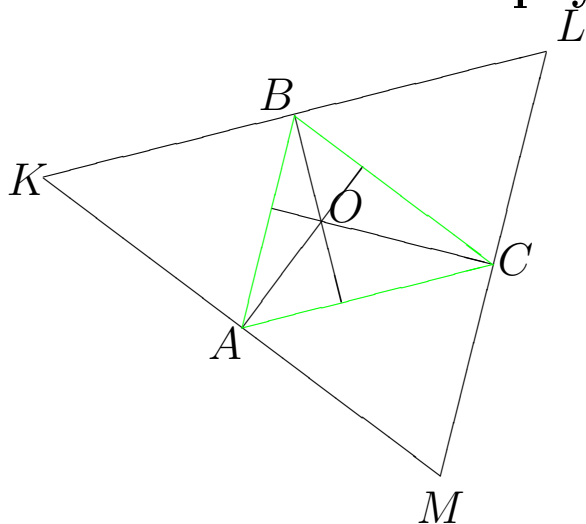


Треугольник ABC .

Вершинами треугольника ABC являются основания срединных перпендикуляров треугольника KLM .

Что тогда можем сказать о сторонах треугольника ABC ?

VIII.3.5. Высоты треугольника

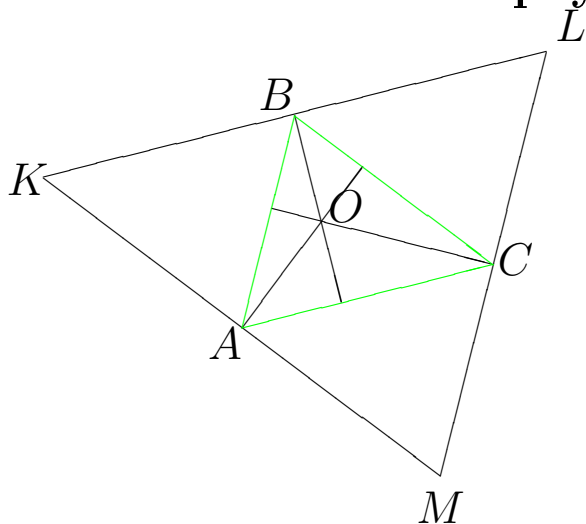


Треугольник ABC .

Вершинами треугольника ABC являются основания серединных перпендикуляров треугольника KLM .

Стороны треугольника ABC будут являться средними линиями треугольника KLM .

VIII.3.5. Высоты треугольника



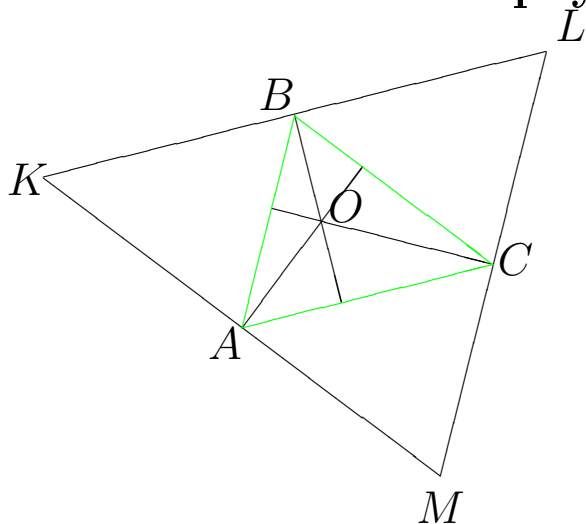
Треугольник ABC .

Вершинами треугольника ABC являются основания серединных перпендикуляров треугольника KLM .

Стороны треугольника ABC будут являться средними линиями треугольника KLM .

Какими свойствами обладает средняя линия треугольника?

VIII.3.5. Высоты треугольника



Треугольник ABC .

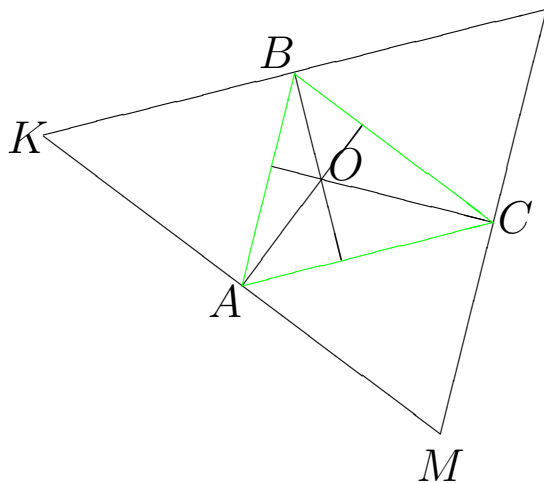
Вершинами треугольника ABC являются основания серединных перпендикуляров треугольника KLM .

Стороны треугольника ABC будут являться средними линиями треугольника KLM .

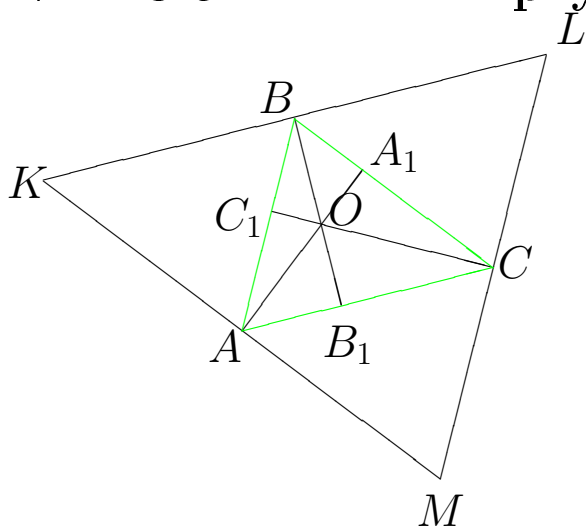
Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна половине ее длины.

VIII.3.5. Высоты треугольника

L $AB \parallel LM, BC \parallel KM, AC \parallel KL$.



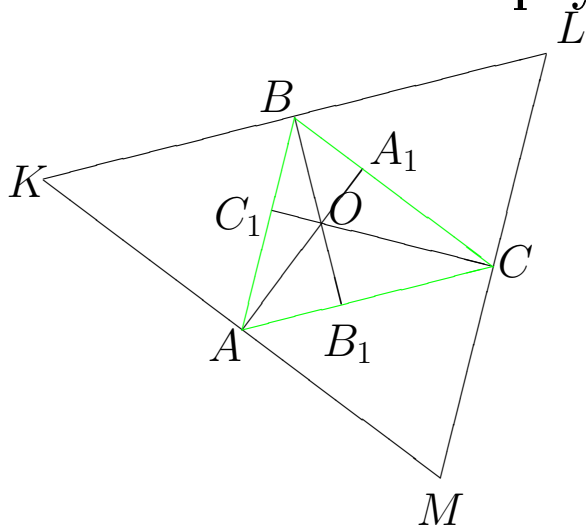
VIII.3.5. Высоты треугольника



$AB \parallel LM, BC \parallel KM, AC \parallel KL$.

Что можно сказать об отрезках
внутри треугольника ABC ?

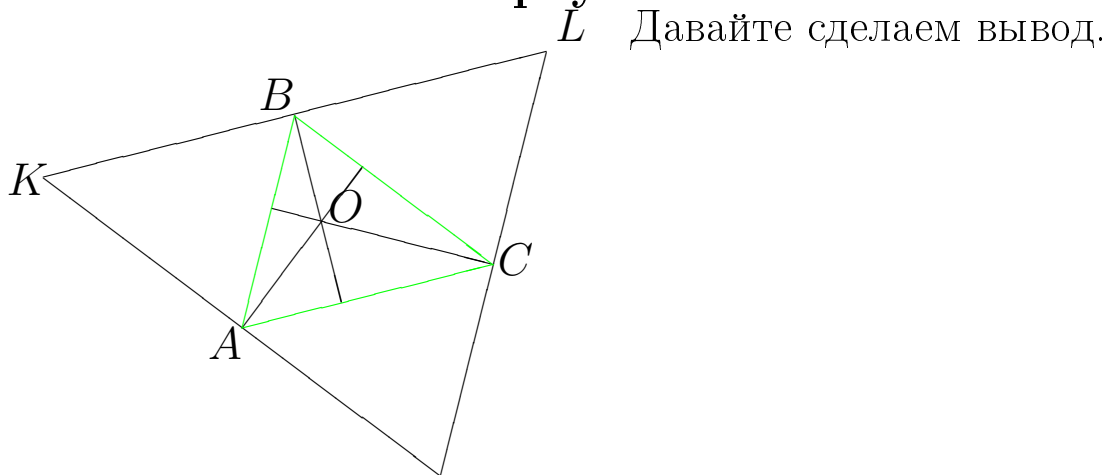
VIII.3.5. Высоты треугольника



$AB \parallel LM, BC \parallel KM, AC \parallel KL$.

Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 будут
являться высотами треугольника
 ABC .

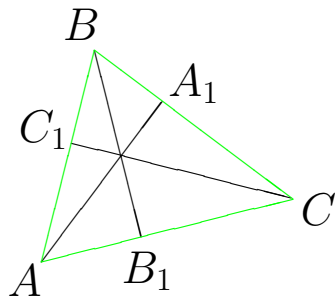
VIII.3.5. Высоты треугольника



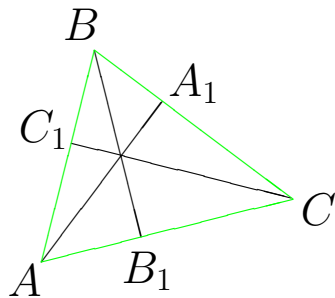
Теорема 3. Высоты M треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Доказательство:

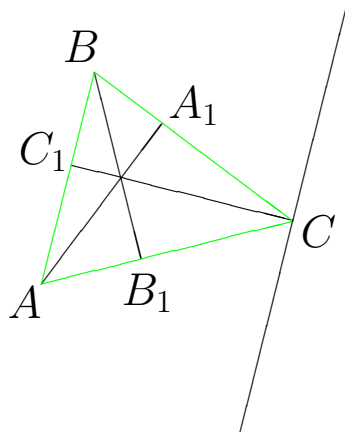
Доказательство: Рассмотрим произвольный треугольник ABC .



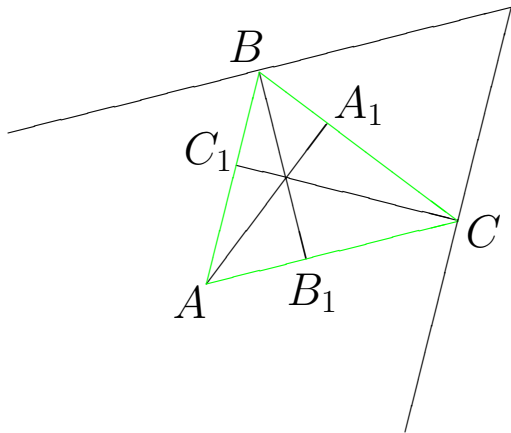
Доказательство: Рассмотрим произвольный треугольник ABC .



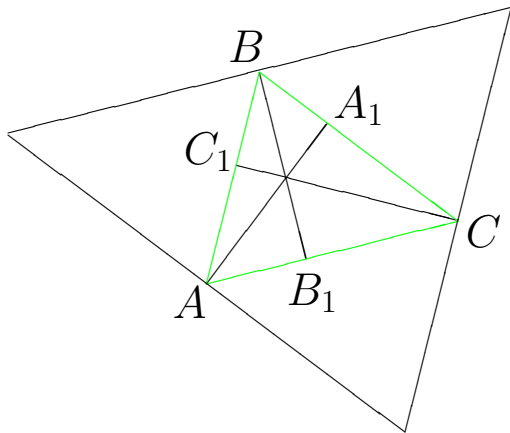
Доказательство: Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне.



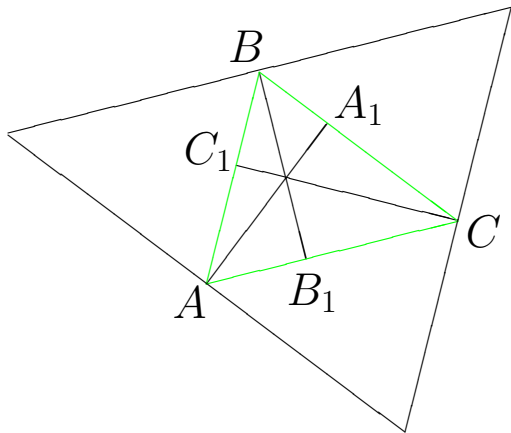
Доказательство: Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне.



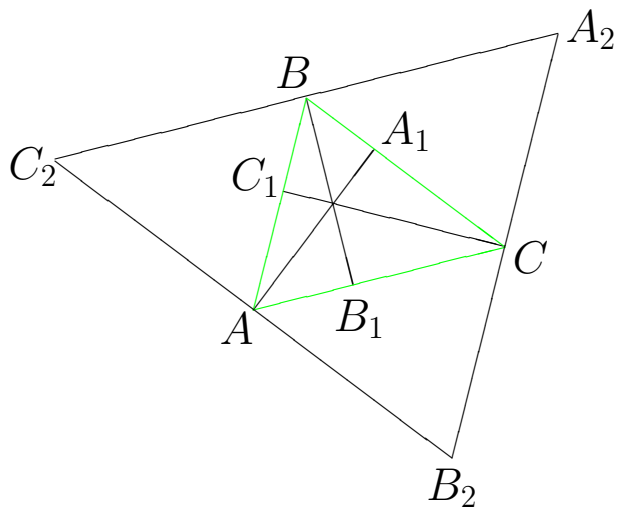
Доказательство: Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне.



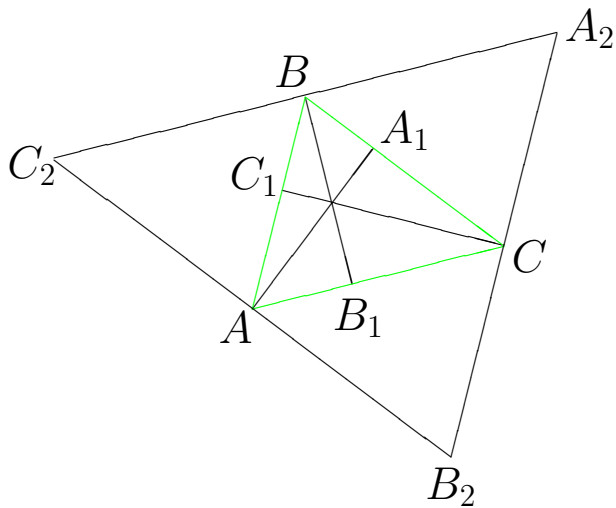
Доказательство: Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне.



Доказательство: Получим треугольник $A_2B_2C_2$.

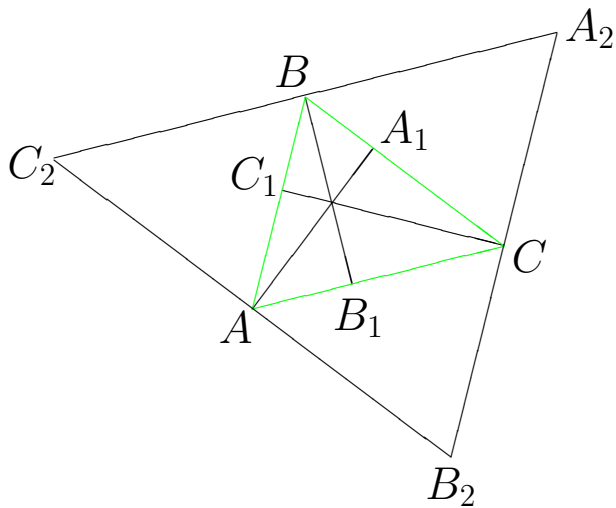


Доказательство: Получим треугольник $A_2B_2C_2$.



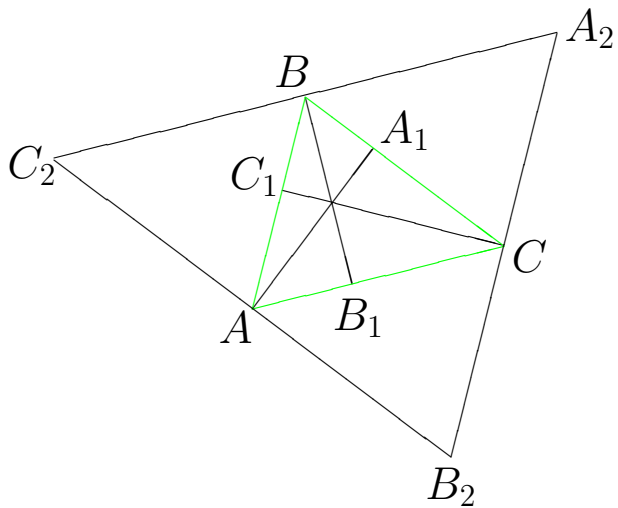
Доказательство: Точки A , B и C являются серединами сторон этого треугольника.

($AB = A_2C$, $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$)



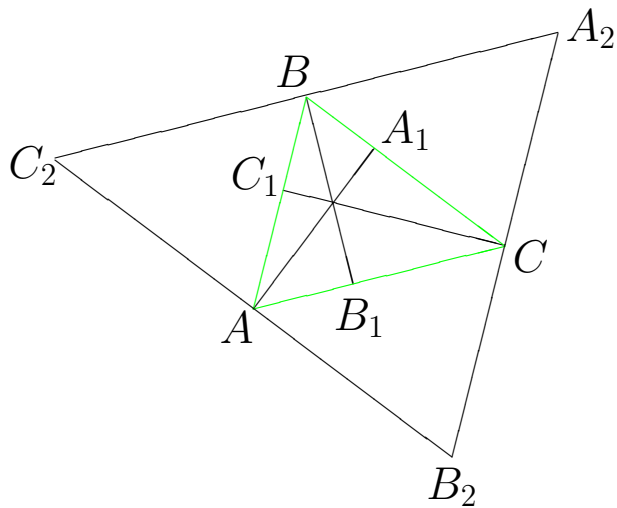
Доказательство: Точки A , B и C являются серединами сторон этого треугольника.

($AB = A_2C$, $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$.) Аналогично, $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$.



Доказательство: Из построения также следует, что $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$.

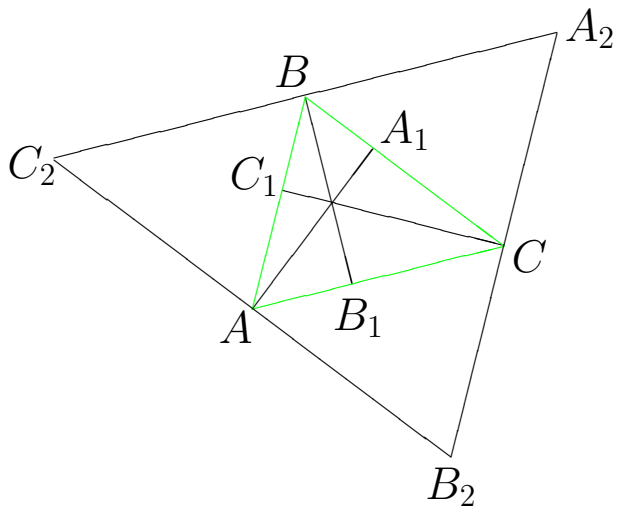
Таким образом, прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$.



Доказательство: Из построения также следует, что $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$.

Таким образом, прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$.

Следовательно, они пересекаются в одной точке.



Теорема доказана.

Доказательство: Из построения также следует, что $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$.

Таким образом, прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$.

Следовательно, они пересекаются в одной точке.

IX. Рекомендации для решения задач по стереометрии

Рассмотрим поиск решения стереометрических задач «на вычисление».

IX.1. Источники «хороших треугольников»

Разумеется, **рассмотренные выше рекомендации** в полном объеме работают не только в планиметрии, но и в стереометрии.

Однако в стереометрии появляются дополнительные «источники» хороших треугольников:

IX.1. Источники «хороших треугольников»

Разумеется, **рассмотренные выше рекомендации** в полном объеме работают не только в планиметрии, но и в стереометрии.

Однако в стереометрии появляются дополнительные «источники» хороших треугольников:
сечения,

IX.1. Источники «хороших треугольников»

Разумеется, **рассмотренные выше рекомендации** в полном объеме работают не только в планиметрии, но и в стереометрии.

Однако в стереометрии появляются дополнительные «источники» хороших треугольников:
сечения, проекции и

IX.1. Источники «хороших треугольников»

Разумеется, **рассмотренные выше рекомендации** в полном объеме работают не только в планиметрии, но и в стереометрии.

Однако в стереометрии появляются дополнительные «источники» хороших треугольников:

сечения, проекции и развертки поверхностей,

IX.1. Источники «хороших треугольников»

Разумеется, **рассмотренные выше рекомендации** в полном объеме работают не только в планиметрии, но и в стереометрии.

Однако в стереометрии появляются дополнительные «источники» хороших треугольников:

сечения, проекции и развертки поверхностей,

что приводит к появлению некоторых дополнительных рекомендаций.

IX.1. Источники «хороших треугольников»

Основным источником проблем при решении задач по стереометрии является необходимость так называемого «пространственного воображения», то есть умения видеть и анализировать пространственную фигуру.

IX.1. Источники «хороших треугольников»

Основным источником проблем при решении задач по стереометрии является необходимость так называемого «пространственного воображения», то есть умения видеть и анализировать пространственную фигуру.

Часто трудности возникают на этапе выполнения чертежа.

Рассмотрим пример построения чертежа в стереометрии?

IX.1. Источники «хороших треугольников»

Основным источником проблем при решении задач по стереометрии является необходимость так называемого «пространственного воображения», то есть умения видеть и анализировать пространственную фигуру.

Часто трудности возникают на этапе выполнения чертежа.

Но даже при удачно выполненном чертеже проблемы с обнаружением полезных **хороших треугольников** иногда связаны с тем, что треугольники с общей стороной или высотой *могут лежать в различных плоскостях*.

IX.2. Дополнительные рекомендации для решения задач по стереометрии

1. Проводимое сечение должно, как правило, проходить через **«цветные»** отрезки и *параллельно* или *перпендикулярно* имеющимся прямым и плоскостям.

IX.2. Дополнительные рекомендации для решения задач по стереометрии

1. Проводимое сечение должно, как правило, проходить через **«цветные»** отрезки и *параллельно* или *перпендикулярно* имеющимся прямым и плоскостям.
2. Если речь идет об угле между плоскостями, то для получения соответствующего линейного угла желательно проводить сечение данного двугранного угла *плоскостью*, перпендикулярной линии пересечения плоскостей, образующих исходный двугранный угол.

IX.2. Дополнительные рекомендации для решения задач по стереометрии

1. Проводимое сечение должно, как правило, проходить через **«цветные»** отрезки и *параллельно* или *перпендикулярно* имеющимся прямым и плоскостям.
2. Если речь идет об угле между плоскостями, то для получения соответствующего линейного угла желательно проводить сечение данного двугранного угла *плоскостью*, перпендикулярной линии пересечения плоскостей, образующих исходный двугранный угол.
3. Получающиеся сечения желательно изображать отдельно, «ан-фас».

IX.3. Основные фигуры и отношения в стереометрии

Как и в планиметрии, геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) обычно находят с помощью *треугольников*, *дуг окружностей*, секторов и сегментов круга, но в стереометрии к этому списку добавляются *сферы*, *шары* и *их части*.

IX.3. Основные фигуры и отношения в стереометрии

Как и в планиметрии, геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) обычно находят с помощью *треугольников*, *дуг окружностей*, секторов и сегментов круга, но в стереометрии к этому списку добавляются *сферы*, *шары* и *их части*.

Использование пирамид и призм обычно сводится либо к изучению особенностей их граней (как правило, это треугольники или трапеции), либо к вычислению площади поверхности или объема этих тел.

IX.3. Основные фигуры и отношения в стереометрии

Как и в планиметрии, геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) обычно находят с помощью *треугольников*, *дуг окружностей*, секторов и сегментов круга, но в стереометрии к этому списку добавляются *сферы*, *шары* и *их части*.

Использование пирамид и призм обычно сводится либо к изучению особенностей их граней (как правило, это треугольники или трапеции), либо к вычислению площади поверхности или объема этих тел.

Кроме того, с помощью параллелепипедов иногда доказывается параллельность плоскостей.

Рассмотреть пример?

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Изображение конуса начнём с основания.

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Изображение конуса начнём с основания.



IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

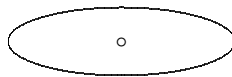
Доказательство. Теперь построим вершину конуса.



IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

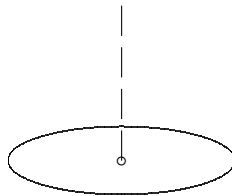
Доказательство. Теперь построим вершину конуса.



IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

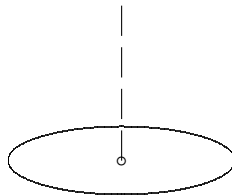
Доказательство. Теперь построим вершину конуса.



IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

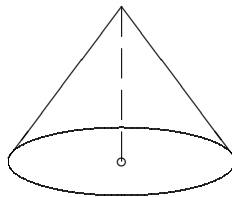
Доказательство. Остаётся провести направляющие конуса.



IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

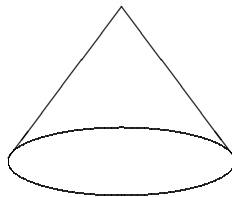
Доказательство. Остаётся провести направляющие конуса.



IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Конус мы нарисовали. Теперь изобразим развёртку его боковой поверхности.

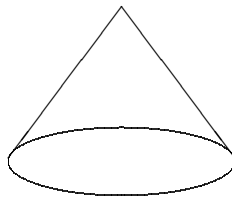


IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Конус мы нарисовали. Теперь изобразим развёртку его боковой поверхности.

Зафиксируем одну из направляющих.

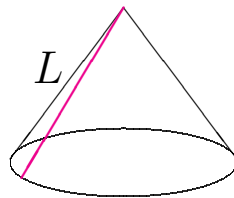


IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Конус мы нарисовали. Теперь изобразим развёртку его боковой поверхности.

Зафиксируем одну из направляющих.

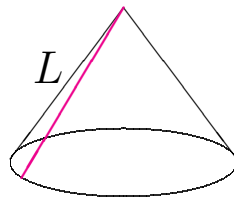


IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Конус мы нарисовали. Теперь изобразим развёртку его боковой поверхности.

Зафиксируем одну из направляющих.



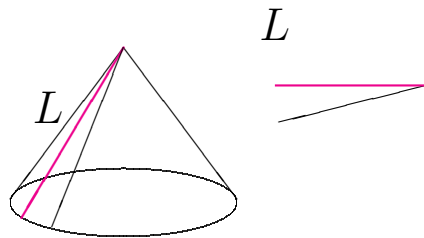
Теперь будем постепенно сдвигать направляющую конуса и изображать её на развёртке.

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Конус мы нарисовали. Теперь изобразим развёртку его боковой поверхности.

Зафиксируем одну из направляющих.



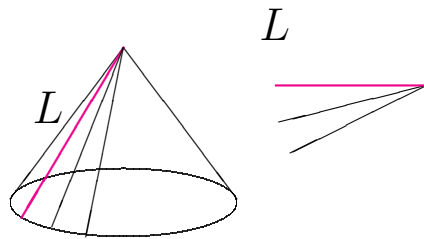
Теперь будем постепенно сдвигать направляющую конуса и изображать её на развёртке.

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Конус мы нарисовали. Теперь изобразим развёртку его боковой поверхности.

Зафиксируем одну из направляющих.



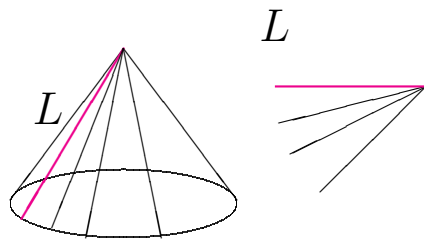
Теперь будем постепенно сдвигать направляющую конуса и изображать её на развёртке.

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Конус мы нарисовали. Теперь изобразим развёртку его боковой поверхности.

Зафиксируем одну из направляющих.



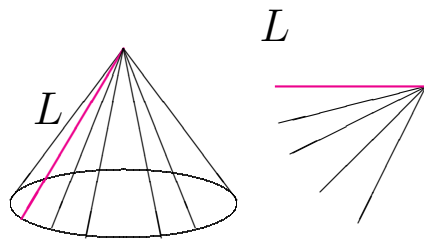
Теперь будем постепенно сдвигать направляющую конуса и изображать её на развёртке.

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Конус мы нарисовали. Теперь изобразим развёртку его боковой поверхности.

Зафиксируем одну из направляющих.

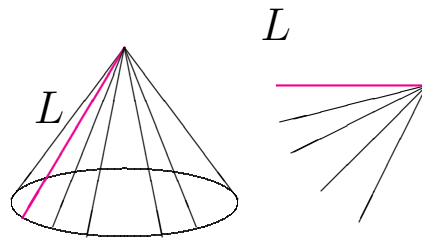


Теперь будем постепенно сдвигать направляющую конуса и изображать её на развёртке.

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Имеем **типовую конфигурацию:**

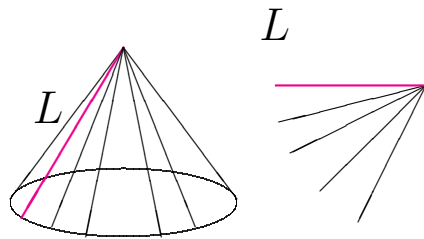


IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Имеем **типовую конфигурацию:**

несколько равных отрезков с общим концом.

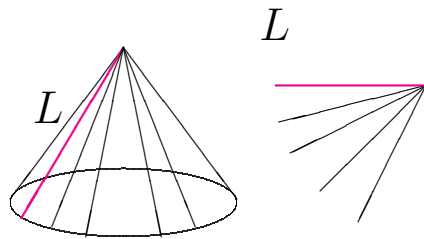


IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Имеем **типовую конфигурацию:**

несколько равных отрезков с общим концом.



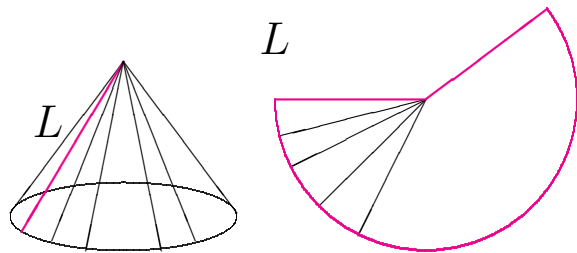
Напрашивается провести дугу окружности.

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Имеем **типовую конфигурацию:**

несколько равных отрезков с общим концом.

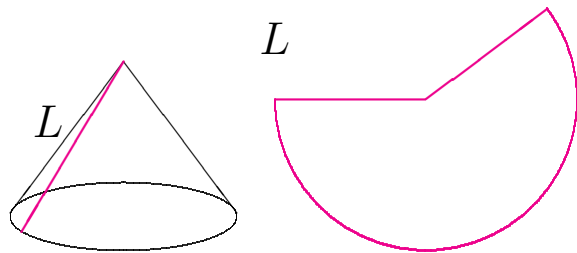


Напрашивается провести дугу окружности.

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

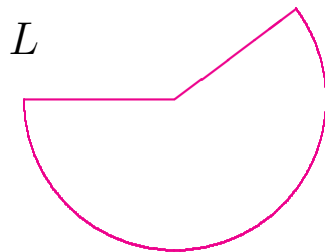
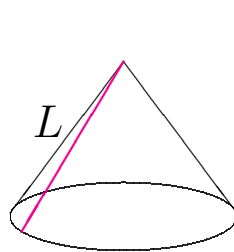
Доказательство. Итак, развёртка боковой поверхности конуса представляет собой сектор круга, радиус которого равен длине образующей.



IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Итак, развёртка боковой поверхности конуса представляет собой сектор круга, радиус которого равен длине образующей.

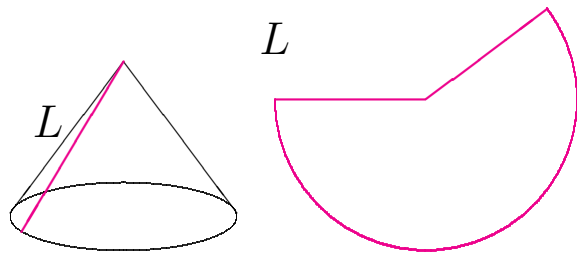


	величина угла	площадь
Круг радиуса L	2π	
Сектор радиуса L	α	

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Итак, развёртка боковой поверхности конуса представляет собой сектор круга, радиус которого равен длине образующей.

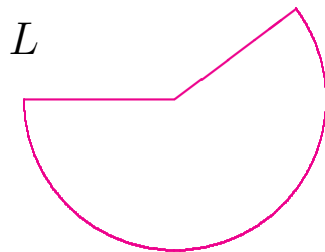
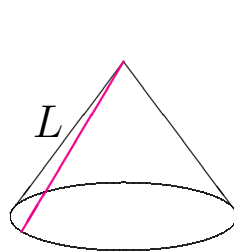


	величина угла	площадь
Круг радиуса L	2π	πL^2
Сектор радиуса L	α	

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Итак, развёртка боковой поверхности конуса представляет собой сектор круга, радиус которого равен длине образующей.

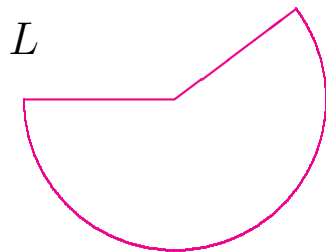
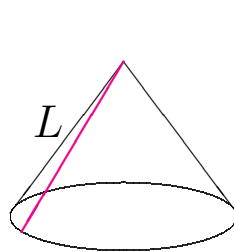


	величина угла	площадь
Круг радиуса L	2π	πL^2
Сектор радиуса L	α	$\frac{\alpha L^2}{2}$

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Площадь сектора равна $\frac{\alpha L^2}{2}$, где α — соответствующий центральный угол.

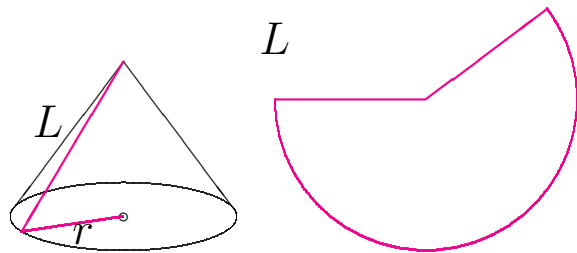


	величина угла	площадь
Круг радиуса L	2π	πL^2
Сектор радиуса L	α	$\frac{\alpha L^2}{2}$

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Площадь сектора равна $\frac{\alpha L^2}{2}$, где α — соответствующий центральный угол.

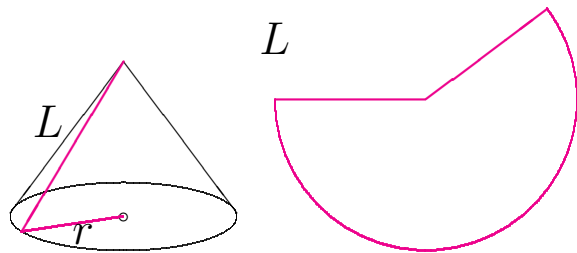


Для того чтобы выразить α через L и r , вычислим двумя способами длину окружности основания:

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Площадь сектора равна $\frac{\alpha L^2}{2}$, где α — соответствующий центральный угол.

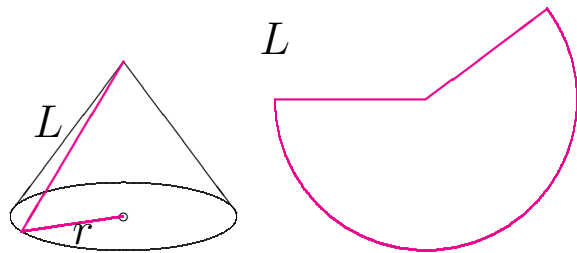


Для того чтобы выразить α через L и r , вычислим двумя способами длину окружности основания: $\alpha L = 2\pi r$.

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Площадь сектора равна $\frac{\alpha L^2}{2}$, где α — соответствующий центральный угол.



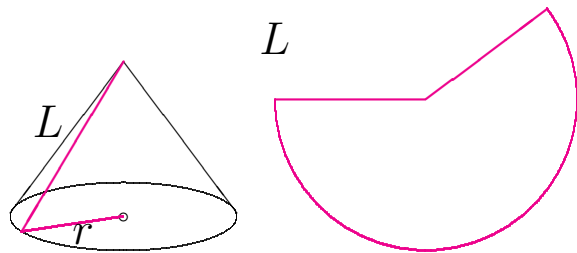
Для того чтобы выразить α через L и r , вычислим двумя способами длину окружности основания: $\alpha L = 2\pi r$.

Следовательно, $\alpha = \frac{2\pi r}{L}$, поэтому площадь боковой поверхности конуса равна

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Площадь сектора равна $\frac{\alpha L^2}{2}$, где α — соответствующий центральный угол.



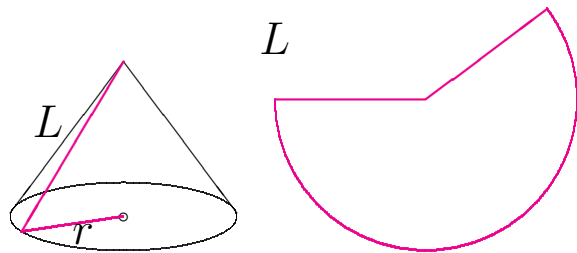
Для того чтобы выразить α через L и r , вычислим двумя способами длину окружности основания: $\alpha L = 2\pi r$.

Следовательно, $\alpha = \frac{2\pi r}{L}$, поэтому площадь боковой поверхности конуса равна

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Площадь сектора равна $\frac{\alpha L^2}{2}$, где α — соответствующий центральный угол.



Для того чтобы выразить α через L и r , вычислим двумя способами длину окружности основания: $\alpha L = 2\pi r$.

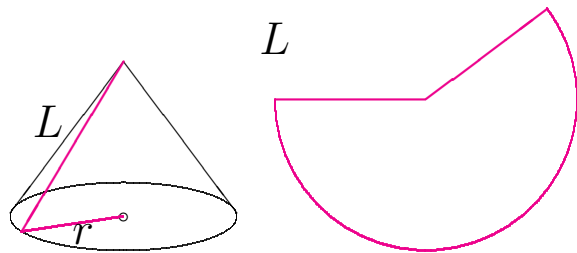
Следовательно, $\alpha = \frac{2\pi r}{L}$, поэтому площадь боковой поверхности конуса равна

$$\frac{\alpha}{2} L^2 =$$

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Площадь сектора равна $\frac{\alpha L^2}{2}$, где α — соответствующий центральный угол.



Для того чтобы выразить α через L и r , вычислим двумя способами длину окружности основания: $\alpha L = 2\pi r$.

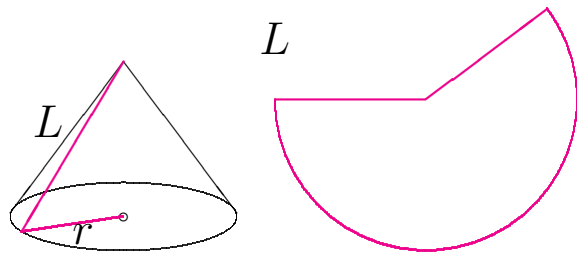
Следовательно, $\alpha = \frac{2\pi r}{L}$, поэтому площадь боковой поверхности конуса равна

$$\frac{\alpha}{2} L^2 = \frac{2\pi r}{2L} \cdot L^2 =$$

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Площадь сектора равна $\frac{\alpha L^2}{2}$, где α — соответствующий центральный угол.



Для того чтобы выразить α через L и r , вычислим двумя способами длину окружности основания: $\alpha L = 2\pi r$.

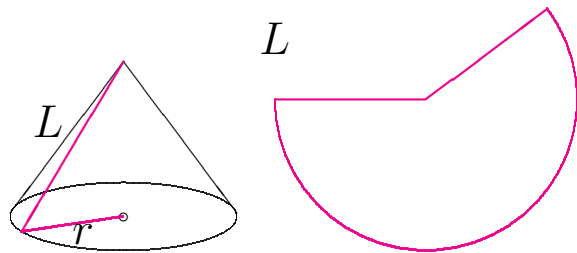
Следовательно, $\alpha = \frac{2\pi r}{L}$, поэтому площадь боковой поверхности конуса равна

$$\frac{\alpha}{2} L^2 = \frac{2\pi r}{2L} \cdot L^2 = \pi r L.$$

IX.4. Теорема о площади боковой поверхности конуса

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей длины L и радиусом основания r , равна $\pi \cdot r \cdot L$.*

Доказательство. Площадь сектора равна $\frac{\alpha L^2}{2}$, где α — соответствующий центральный угол.



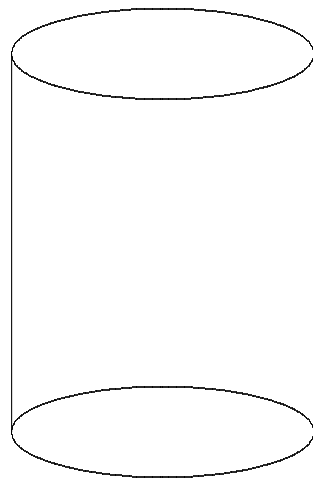
Для того чтобы выразить α через L и r , вычислим двумя способами длину окружности основания: $\alpha L = 2\pi r$.

Следовательно, $\alpha = \frac{2\pi r}{L}$, поэтому площадь боковой поверхности конуса равна

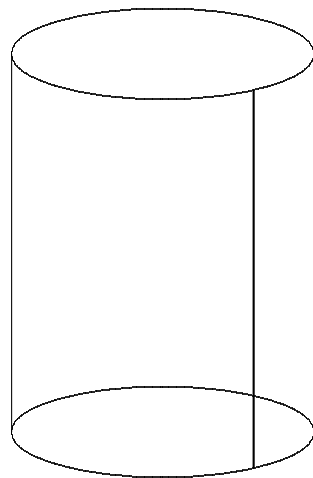
$$\frac{\alpha}{2} L^2 = \frac{2\pi r}{2L} \cdot L^2 = \pi r L.$$

Теорема доказана.

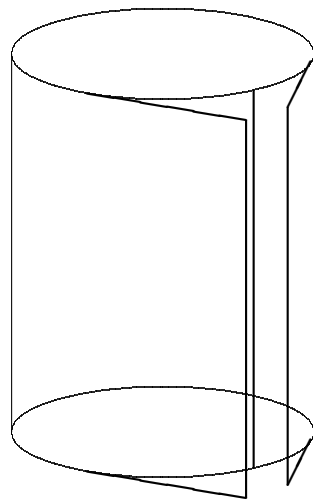
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



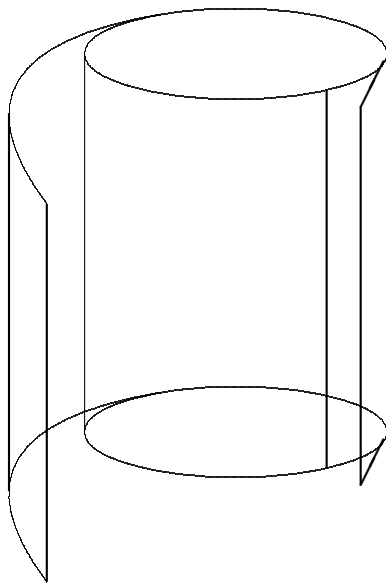
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



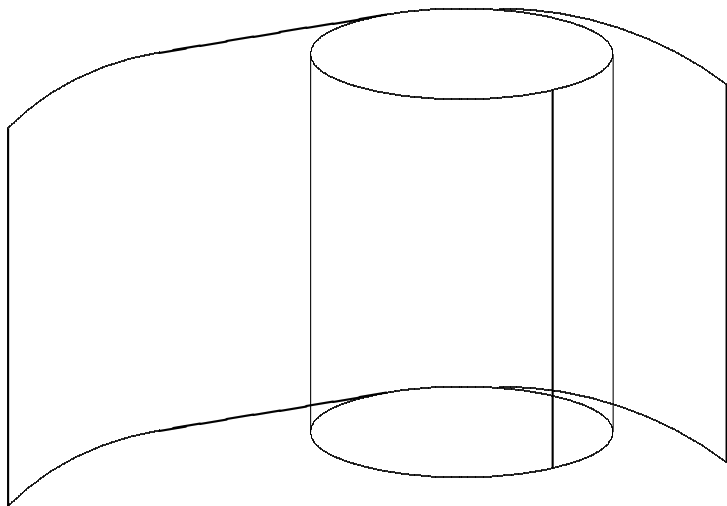
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



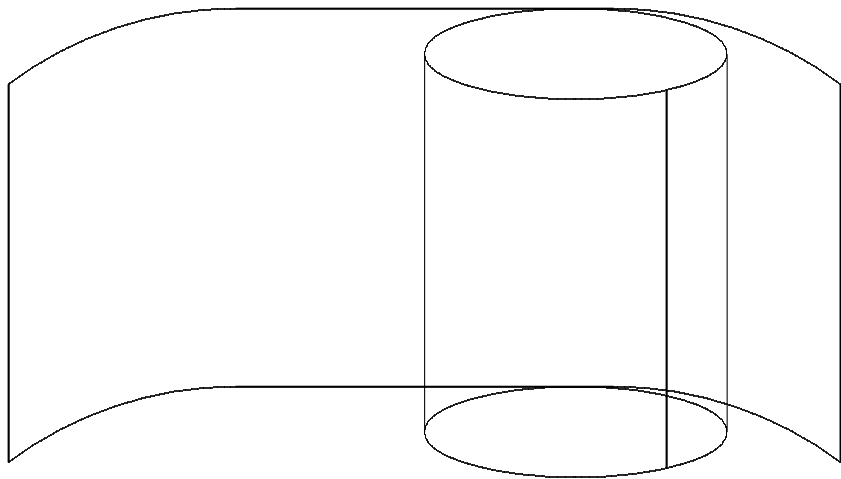
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



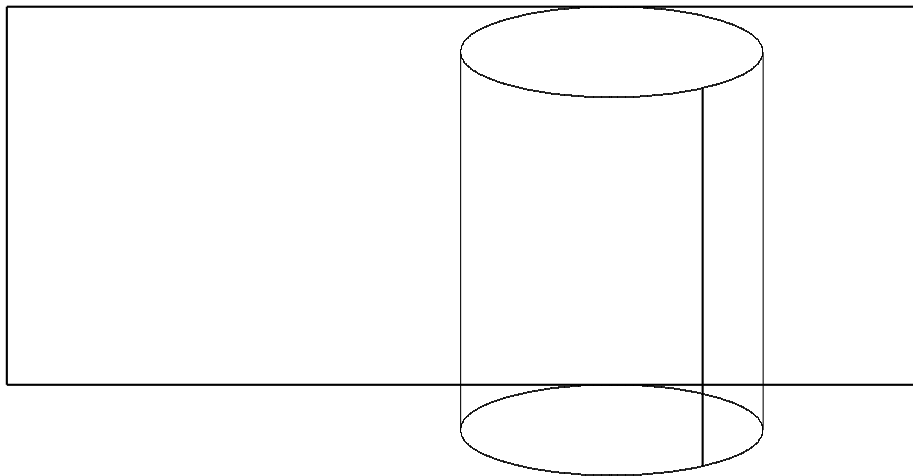
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



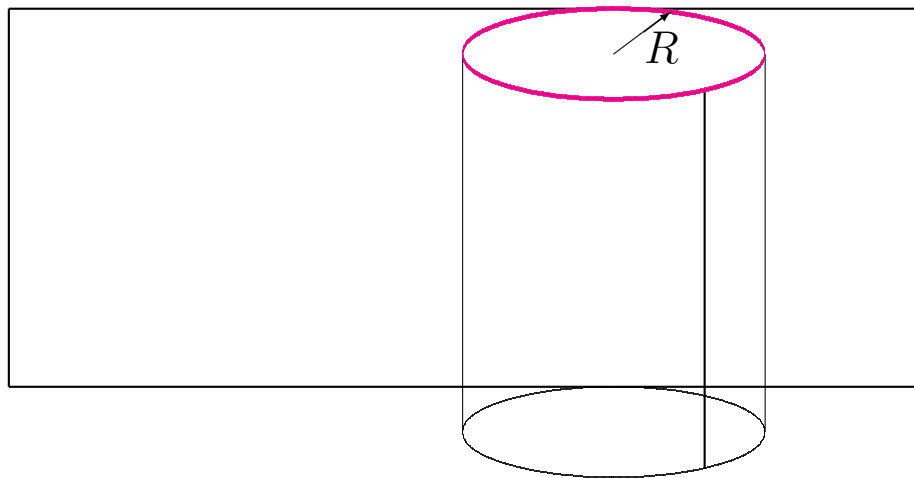
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



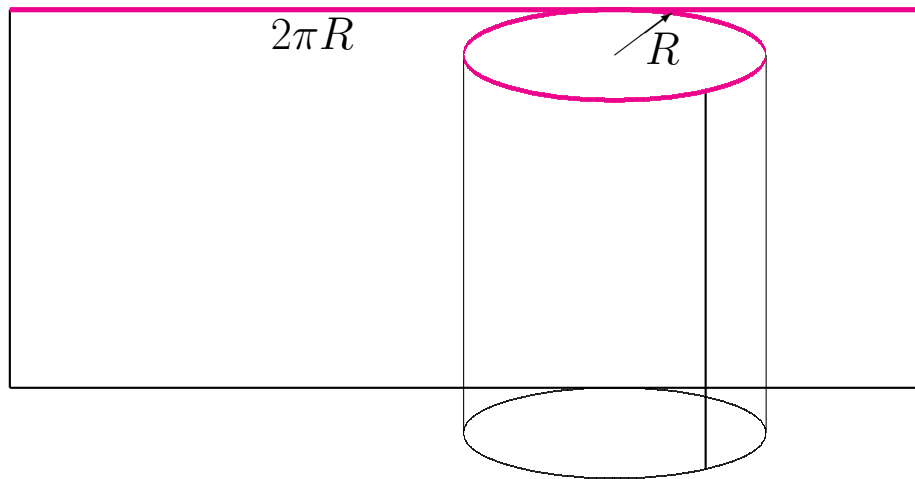
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



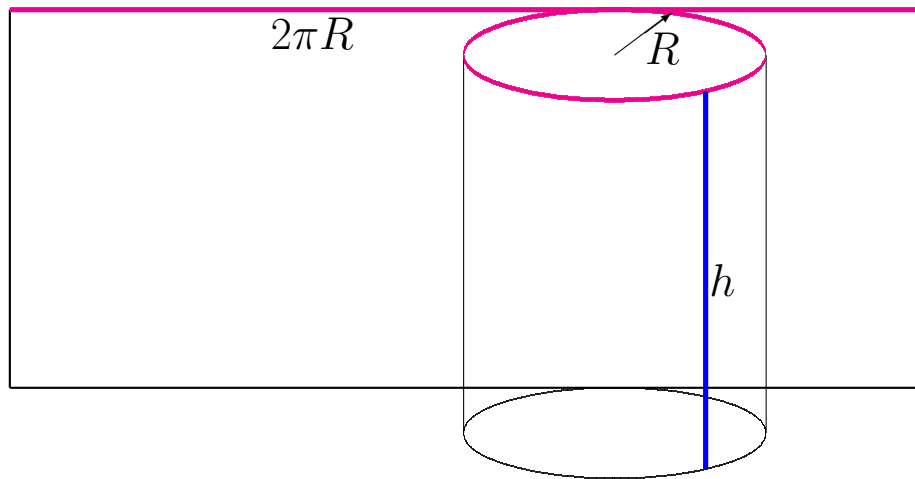
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



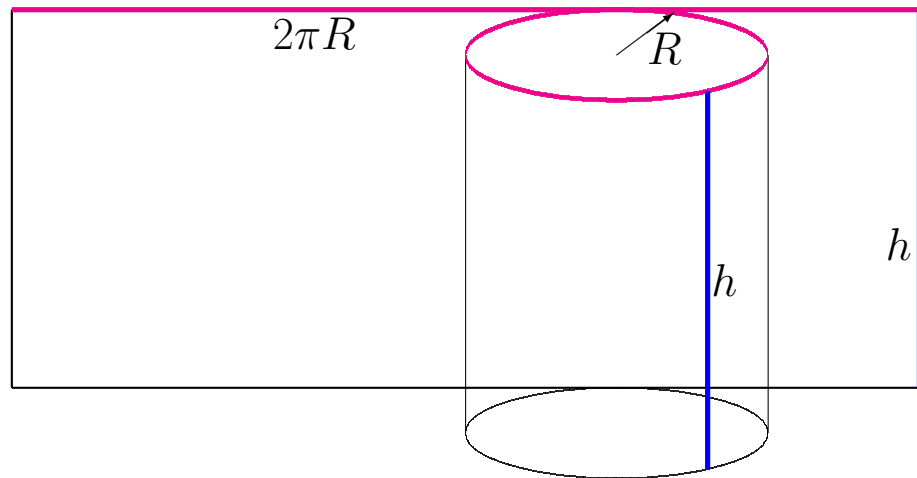
IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра

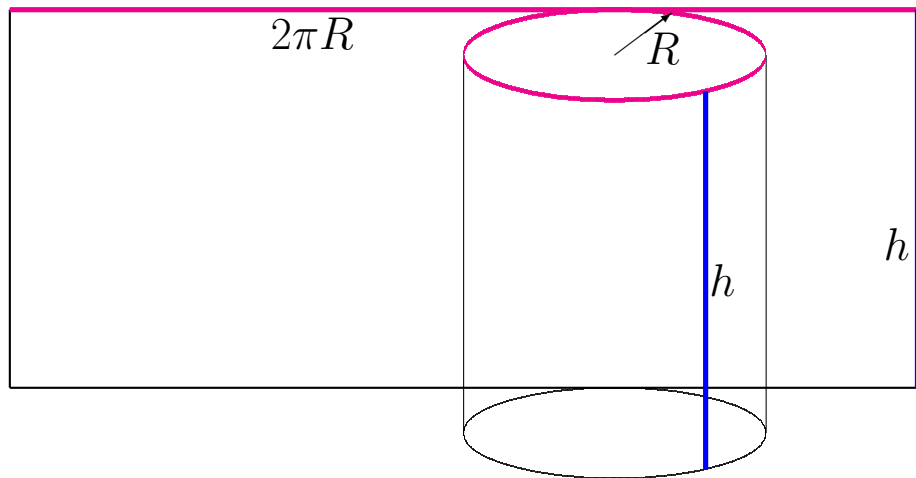


IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра



IX.5. Площадь боковой поверхности цилиндра

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh.$$



IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

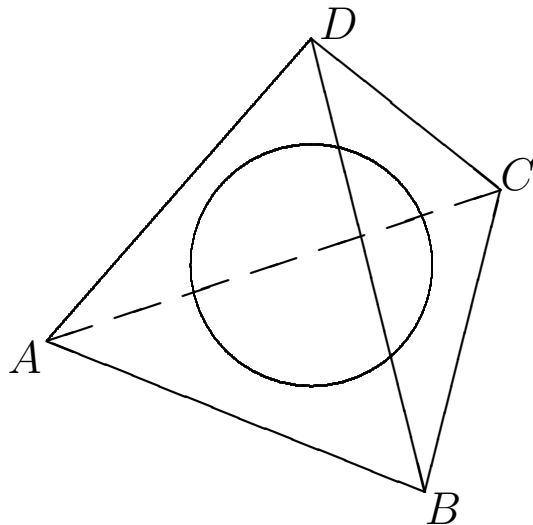
Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

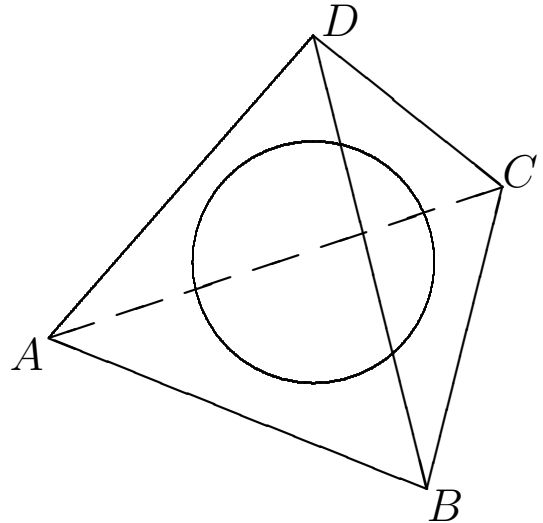


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} =$$

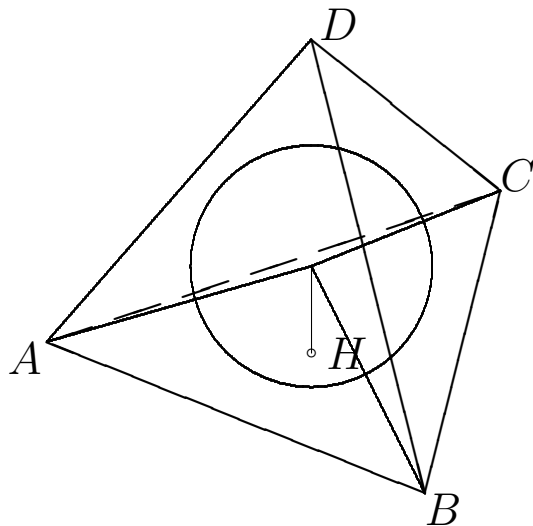


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} =$$

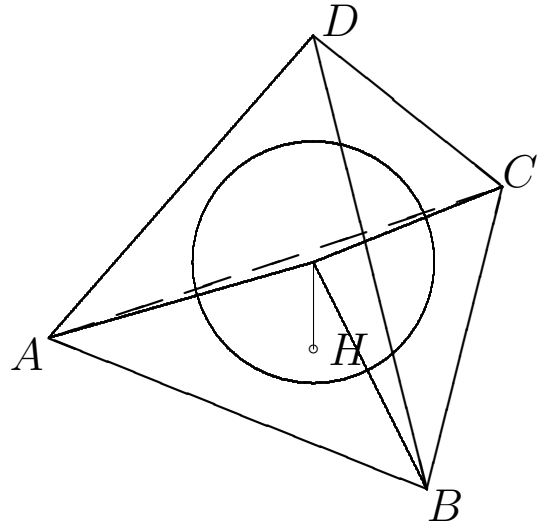


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} r +$$

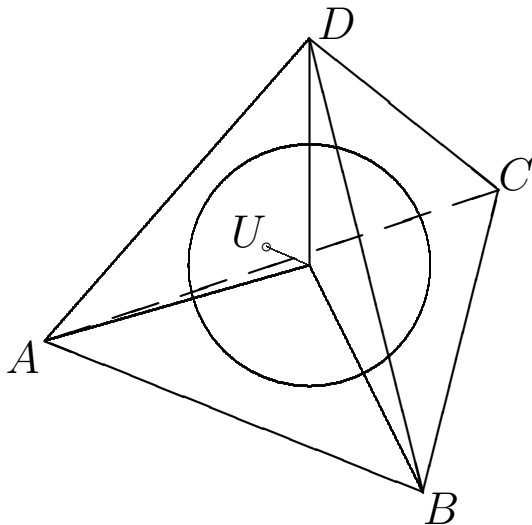


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} r +$$

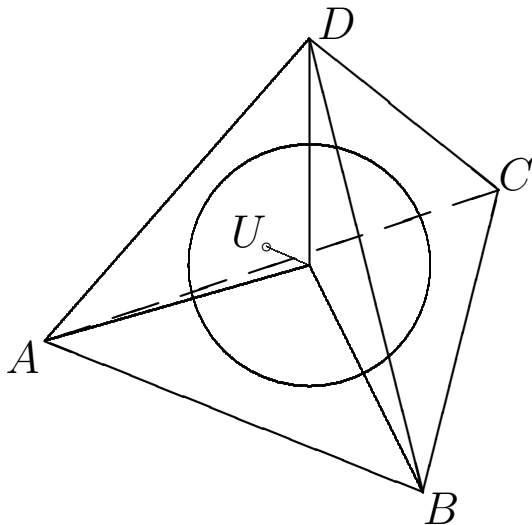


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} r + \frac{1}{3} S_{ABD} r +$$

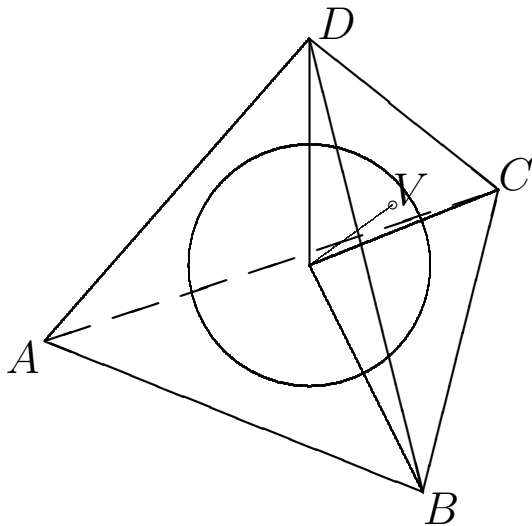


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}r + \frac{1}{3}S_{ABD}r +$$

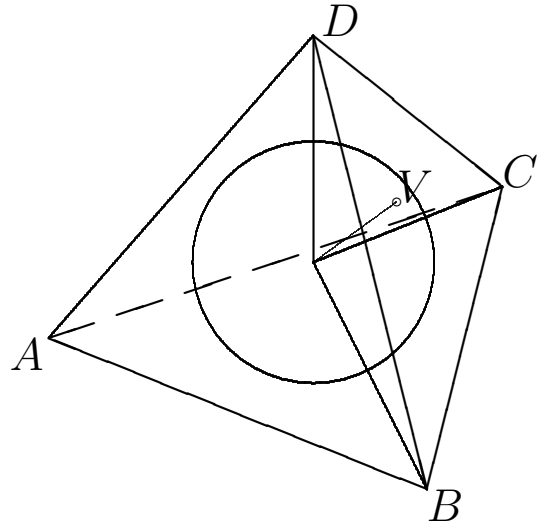


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}r + \frac{1}{3}S_{ABD}r + \frac{1}{3}S_{BCD}r +$$

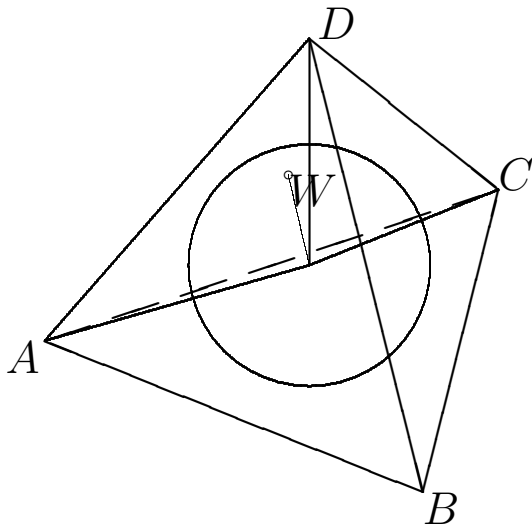


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}r + \frac{1}{3}S_{ABD}r + \frac{1}{3}S_{BCD}r +$$

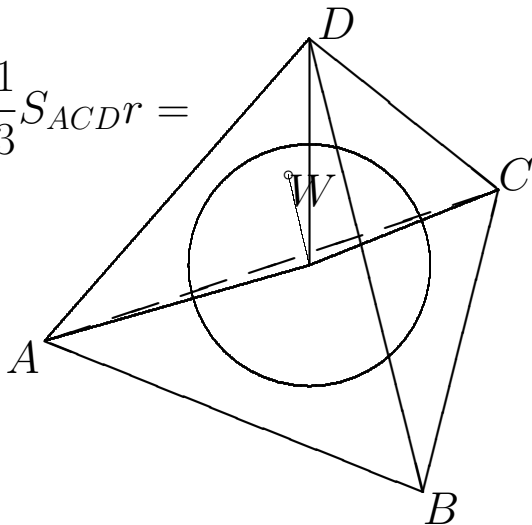


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}r + \frac{1}{3}S_{ABD}r + \frac{1}{3}S_{BCD}r + \frac{1}{3}S_{ACD}r =$$

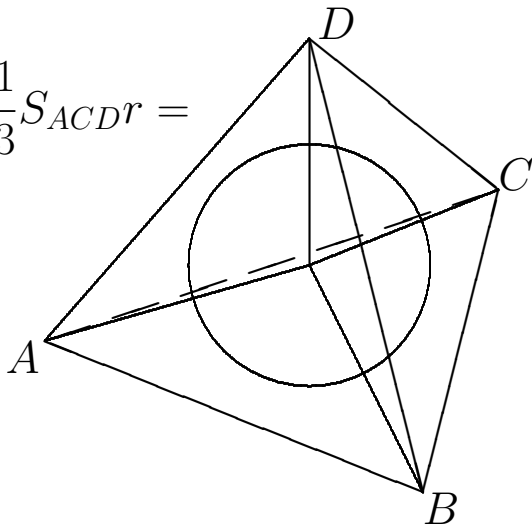


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}r + \frac{1}{3}S_{ABD}r + \frac{1}{3}S_{BCD}r + \frac{1}{3}S_{ACD}r =$$

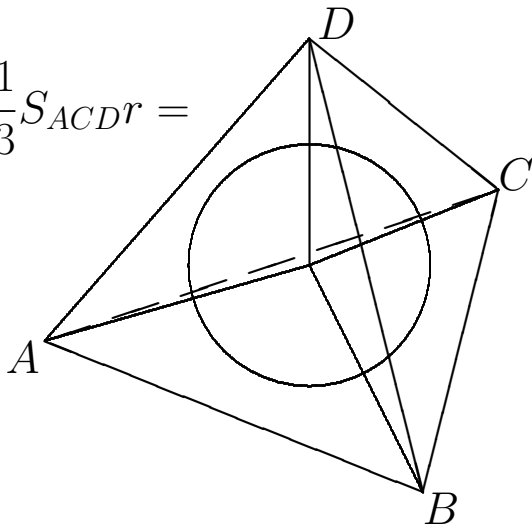


IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3} S_{ABC} r + \frac{1}{3} S_{ABD} r + \frac{1}{3} S_{BCD} r + \frac{1}{3} S_{ACD} r = \\ &= \frac{r}{3} S. \end{aligned}$$



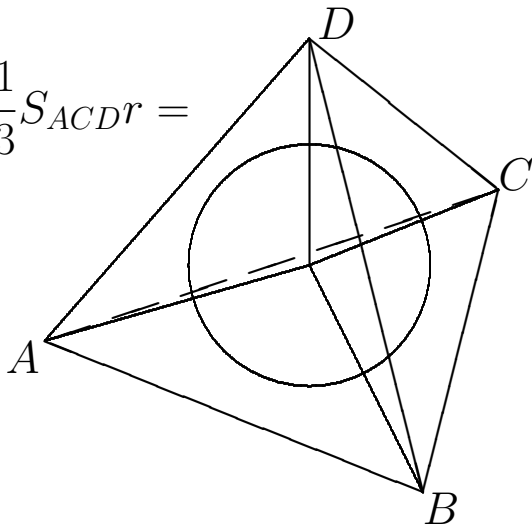
IX.6. Теорема об объеме многогранника и вписанной сфере

Теорема 5. Если в выпуклый многогранник можно вписать сферу радиуса r , то объем этого многогранника равен $\frac{1}{3} \cdot r \cdot S$, где S — площадь поверхности этого многогранника.

Доказательство.

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3} S_{ABC} r + \frac{1}{3} S_{ABD} r + \frac{1}{3} S_{BCD} r + \frac{1}{3} S_{ACD} r = \\ &= \frac{r}{3} S. \end{aligned}$$

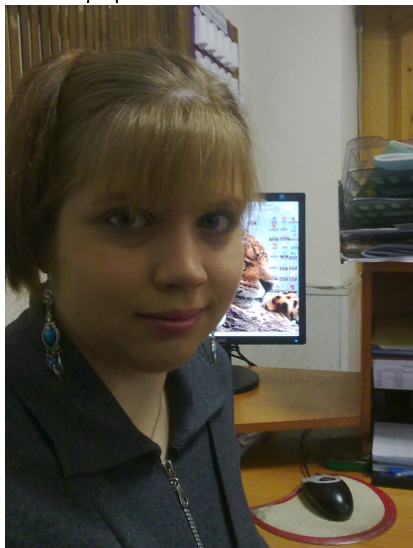
Теорема доказана.



Список литературы

- [1] *Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б.* Геометрия — это несложно. Учебное пособие по курсу «Математика». Екатеринбург: «Издательство УМЦ УПИ», 2001. 133 с, ISBN 5-321-00138-3.

Х. Лаборатория интерактивного учебно- методического обеспечения



Евгения
Коростелёва
сотрудник
кафедры ПМ



Артём
Бережной
студент ЭМА-10



Надежда
Круглова
студент ЭМА-10

Х. Лаборатория интерактивного учебно-методического обеспечения



Татьяна
Винокурова
студент ЭМА-10



Мария
Нурисламова
студент ЭМА-10

Х. Лаборатория интерактивного учебно-методического обеспечения



Александр
Погарцев
студент ЭМА-10



Дмитрий
Алтунин
студент ЭМА-10



Андрей
Богданов
студент ЭМА-10

XI. Благодарность

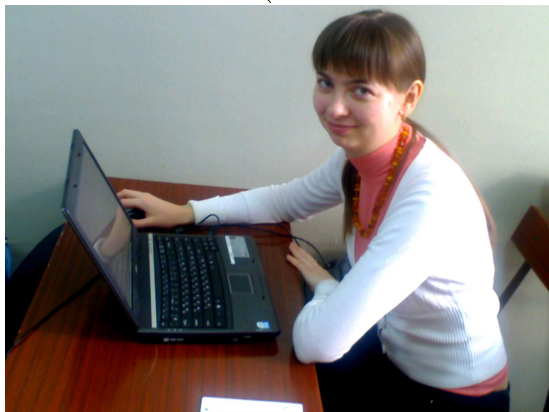
Автор благодарит за помощь
дипломницу Уральского государственного
педагогического университета
(выпуск 2010-11 года)



Марию Александровну Василенко

XII. Благодарность

Автор благодарит за помощь магистрантов Уральского государственного педагогического университета (**раздел VIII**) группы М-607 (выпуск 2010-1 года)



Юлия
Чашина



Светлана
Давлетбаева

XII. Благодарность

Автор благодарит за помощь магистрантов Уральского государственного педагогического университета (**раздел VIII**) группы М-607 (выпуск 2010-1 года)



Мария
Гаджиева



Надежда
Волкова



Спасибо

за

внимание!

е-mail: melnikov@k66.ru, melnikov@r66.ru

сайты: <http://melnikov.k66.ru>, <http://melnikov.web.ur.ru>

[Вернуться к списку презентаций?](#)